République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Mostafa Ben Boulaid BATNA2, Algérie

Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN LMD
Option : Optimisation et Contrôle

Thème

Analyse de complexité et implémentation numérique pour un programme linéaire basé sur quelques fonctions noyaux

PRÉSENTÉE PAR :
BOUKHENCHOUCHE FATIMA.

SOUTENUÉE LE :
06 juin 2024.

Devant le jury d'examen :

PRÉSIDENT :
Mr. *BRAHIMI MAHMOUD* *MCA.* *UNIVERSITÉ DE BATNA2.*

RAPPORTEUR :
Mr. *DJEFFAL EL AMIR* *PROF.* *UNIVERSITÉ DE BATNA2.*

EXAMINATEURS :
Mr. *DJEBRANE YAHIA* *PROF.* *UNIVERSITÉ DE BISKRA.*
Mr. *LAKHDARI IMAD* *MCA.* *UNIVERSITÉ DE BISKRA.*

INVITÉ :
Mr. *BOUNIBENE BACHIR* *MCB.* *UNIVERSITÉ DE BATNA2.*

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2023/2024.

Table des matières

TABLEAU DE MATIÈRE 2

REMERCIEMENT 2

DÉDICACE 3

NOTATIONS PRINCIPALES 4

RÉSUMÉ 7

INTRODUCTION 7

1 THÉORIE DE BASE 9
- 1.1 Préliminaires et notion fondamentales 9
  - 1.1.1 Ensembles et fonctions convexes 9
  - 1.1.2 Convexité et dérivée 10
- 1.2 La programmation mathématique 12
  - 1.2.1 Classification et résolution des problèmes d'optimisation 13
  - 1.2.2 Qualification des contraintes 13
  - 1.2.3 Existence et unicité de solution 14
  - 1.2.4 Condition d'optimalité 14
  - 1.2.5 La méthode de Newton pour un programme mathématique 15
- 1.3 La programme linéaire PL 16
  - 1.3.1 Théorie générale de la programmation linéaire 16
  - 1.3.2 Méthodes de résolution d'un programme Linéaire : . . . 18
  - 1.3.3 Méthodes des points intérieurs 20
  - 1.3.4 La Méthode de Newton pour un problème linéaire 20

2 LE PRINCIPE DE DIFFÉRENT MÉTHODES DU POINT INTÉRIEUR POUR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE 21
- 2.1 Principe des méthodes projectives (l'algorithme de Karmarkar) . 21
  - 2.1.1 Principe générale : 21

2.1.2 Détermination du l'itération x^{j+1} 25
2.1.3 L'algorithme de Karmarkar : 25
2.2 Principe des méthodes affines 27
2.2.1 Principe générale : 27
2.2.2 Détermination du l'itération x^{j+1} 27
2.2.3 Algorithme affine primal 29
2.3 Principe des méthodes du potentiel 30
2.3.1 Notion des fonctions de potentiel 30
2.3.2 Méthode du potentiel primale 30
2.3.3 Algorithme potentiel primal : 32
2.4 Principe des méthodes de trajectoire centrale 32
2.4.1 Les méthodes de barrières (Chemin central) : 32
2.4.2 La fonction barrière logarithmique 33
2.4.3 Directions de Newton classiques 34
2.4.4 Principe de trajectoire centrale pour la programmation linéaire 36
2.4.5 Algorithme générique primal-dual de trajectoire centrale pour PL 37
2.4.6 Fonctions noyau et propriétés 37
2.4.7 Conditions de qualification d'une fonction noyau 38

3 MÉTHODE DE TRAJECTOIRE CENTRALE BASÉ SUR UNE NOUVELLE FONCTION NOYAU PARAMÉTRIQUE POUR PL 40
3.1 Propriétés de la fonction noyau et de la fonction barrière 44
3.1.1 Propriétés de la nouvelle fonction noyau 44
3.1.2 Éligibilité de la nouvelle fonction noyau : 45
3.1.3 Détermination du pas 52
3.2 Complexité de l'algorithme 56
3.2.1 Itération interne 56
3.2.2 Limite d'itération totale 57
3.3 Comparaison des algorithmes 58

4 UNE NOUVELLE FONCTION NOYAU AVEC UN TERME BARRIÈRE LOGARITHMIQUE EXPONENTIELLE-HYPERBOLIQUE POUR L'OPTIMISATION LINÉAIRE 60
4.1 Préliminaires 60
4.2 La nouvelle fonction noyau : 62
4.3 propriétés du nouvelle fonction noyau 63
4.4 Analyse de l'algorithme 65
4.4.1 Les propriétés de $\Phi(v)$ et $\sigma(v)$ 65
4.4.2 Diminution de la proximité lors d'un pas de Newton . . 66

4.4.3 Complexité des itérations 68

CONCLUSION **70**

Bibliographie **73**

REMERCIEMENT

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de thèse,
Mr DJEFFAL EL AMIR,
pour m'avoir appris à être une étudiante plus autonome
tout au long de ce travail de recherche,
m' a sans aucun doute permis de préciser mon propos ,
grâce à ses précieux conseils.

Je remercie également
les membres de jury d'examen,
qu'ils nous ont honorés de leur présence et de leurs commentaires,
qui témoignent de leur grande expérience
dans le domaine des mathématiques

J'adresse aussi mes remerciements aux personnes que
je nomme « ressources » dans ma thèse
et qui m'ont permis de mieux comprendre le fonctionnement actuel et passé de ce secteur.

Je tiens également à remercier ma collègue
Chalekh Randa
pour tout son soutien.

Et j'adresse un merci tout particulier à tous les employés de
la Faculté de Mathématiques de l'Université de Batna-2,
professeurs et administrateurs,
pour les efforts qu'ils ont déployés au profit des étudiants
de la Faculté de Mathématiques.

DÉDICACE

Je dédie cette thèse à ***mes chers parents*** *et* ***mon marie***
qui ont été toujours à mes côtés
et m'ont toujours soutenu tout au long de ces année d'études.
En signe de reconnaissance, qu'il trouvent ici, l'expression
de ma profonde gratitude pour tout ce qu'ils ont consenti d'efforts
et de moyens pour me voir réussir dans mes études.

À toute ma famille
Ma ***sœur*** *et mes* ***deux frères****.*
À toute la famille de mon marie
Et surtout ***le grand frère*** *, je le remercie beaucoup*
pour tout le soutien qu'il m'apporte.

Et à tous qui aiment le bon travail
et ne reculent pas devant les obstacles de la vie.

NOTATIONS PRINCIPALES

PL : La programmation linéaire.

FG : La forme générale d'un programme linéaire.

MPIs : Méthodes de points intérieurs.

CPI : La condition de la méthode de point intérieurs .

KKT : Karush-Kuhn-Tucker .

$\mathbb{R}^n$: L'ensemble des vecteurs avec n composantes réelles.

$\mathbb{R}^n_+$: $\{x \in \mathbb{R}^n \quad : x \geq 0\}$.

$\mathbb{R}^n_{++}$:$\{x \in \mathbb{R}^n \quad : x > 0\}$.

$\Phi(v)$: La fonction barrière logarithmique de type primal-dual.

$\nabla\Phi(v)$: Le gradient de la fonction logarithmique barrière.

$\psi(v)$: La fonction noyau.

$\mathbf{O}(n)$: la complexité en tant qu'approximais de la fonction du temps

X : $diag(x_1, x_2, ..., x_n)$.

X^{-1} : $diag(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n})$.

e : (1,1,...,1) .

Terminologie :

PL : La programmation linéaire.

FG : La forme générale d'un programme linéaire.

MPIs : Méthodes de points intérieurs.

CPI : La condition de la méthode de point intérieurs .

KKT : Karush-Kuhn-Tucker .

RÉSUMÉ

ملخص

في هذه الاطروحة، لحل مشاكل البرمجة الخطية، تم تقديم فئة من طرق النقاط الداخلية الخطية، حيث تم اقتراحها لمعالجة مشكلة التهيئة (النقطة الأولية تقع بالقرب من المسار المركزي) والتي يتم قياسها بواسطة وظيفة الحاجز. نقترح دالتين جديدتين للنواة من أنواع مختلفة. الأولى لها مصطلح حاجز لوغاريتمي محدد المعلمات ووظيفة النواة الثانية لها مصطلح أسي زائدي. نقوم بتحليل كل من طرق الخطوة الكبيرة والصغيرة التي تعتمد على الدالتين النواة الجديدتين، نحصل على أفضل حدود التكرار المعروفة. فيما يتعلق بطرق الخطوة الصغيرة و الكبيرة لكلا الدالتين.

الكلمات المفتاحية: طرق النقطة الداخلية، البرمجة الخطية ، طرق الخطوة الكبيرة والخطوة الصغيرة، الدالة النواة.

Abstract

In this thesis, a class of primal-dual interior point methods (MPIs) for solving linear programming problems is presented. It is a central trajectory method based on new kernel functions which is proposed in order to remedy the initialization problem (the initial point is in the vicinity of the central trajectory) which is measured by barrier function. We propose two new kernel functions of different types. The first with a parameterized logarithmic barrier term and the second kernel function is with a term with an exponential-hyperbolic term. We analyze both large- and small-step versions which are based on these new kernel functions. We obtain the best known iteration bounds concerning the small and large-update for the two kernel functions.

Key words: Primal-dual interior point methods, linear programing, Large and small-update versions, Kernel function.

Résumé

Dans cette thèse, une classe de méthodes de points intérieurs primales-duales (MPIs) pour résoudre des problèmes de programmation linéaire est présentée. C'est une méthode de trajectoire centrale basée sur des nouvelles fonctions noyaux qui est proposée dans le but de remédier au problème d'initialisation (le point initial soit au voisinage de la trajectoire centrale) qui est mesurée par fonction barrière. Nous proposons deux nouvelles fonctions noyaux de différent type. La première avec un terme barrière logarithmiques paramétré et la seconde fonction noyau est avec un terme avec un terme exponentiel-hyperbolique. Nous analysons les deux versions à grand et à petit pas qui sont basées sur ces nouvelles fonctions noyaux. Nous obtenons les meilleures bornes d'itérations connues concernant la petite et la grande pas pour les deux fonctions noyaux .

Mots clés : Méthodes de points intérieurs primales-duales, programmation linéaire convexe, version à grand et petit pas, fonction noyau.

INTRODUCTION

La programmation mathématique est une branche de l'optimisation, l'une parmi les domaines des mathématiques, il représente un modèle mathématique qui connaisse un grand développement . La programmation linéaire consiste a maximiser (ou-bien a minimiser) une fonction objectif sous contraintes des fonctions linéaires à plusieurs variables . Les méthodes de résolution d'un programme linéaire a suscité un grand intérêt chez les chercheur qui on écrit des livres et ont publié des meilleurs articles sur les nouvelles méthodes a découvert.

L'algorithme du simplexe été l'une des méthode efficace de résolution, découvert par Dantzig en 1947 (voir [10]). Le principe de méthode est de faire évoluée dans le domaine réalisable. Cette méthode a été utilisé Pendant un temps dans la majorité des logiciels dans le monde jusqu'à que Karmarkar introduise un algorithme différent de simplexe en 1984, Karmarkar (voir [24]) a proposé une nouvelle méthode polynomiale pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire (LO). Cette méthode, et ses variantes développées par la suite, sont désormais appelées méthodes de points intérieurs (IPM), tel que le principe de la méthode consiste a resté dans l'intérieur du domaine, Cela a conduit à de lancé les recherches sur les algorithmes dites les algorithmes des points intérieurs.

Récemment, Peng et al (voir [14]) introduit les fonctions de barrière dites autorégulières pour les IPM primal-dual pour l'optimisation linéaire. Chacune de ces fonctions barrières est déterminée par son noyau auto-régulier uni-varié fonction.

Peng et al en 2001 (voir [13]), ont proposé de nouvelles variantes d'IPM basées sur un nouveau noyau non logarithmique les fonctions. Une telle fonction est fortement convexe et lisse coercitive sur son domaine. Ils ont obtenu les meilleurs résultats de complexité connus pour les grands et méthodes de petite mise à jour.

En 2008, El Ghami et al. (voir [18]) ont proposé une fonction de noyau paramétrée avec un terme de barrière logarithmique. La même année, Bai et al propose une fonction de noyau paramétrée qui n'est pas un terme barrière logarithmique dans le cas général.

Donc les méthodes des points intérieurs ont fait leurs preuves dans le domaine de la programmation linéaire (PL) notamment par leur bonnes propriétés théoriques (complexité polynomiale et convergence super linéaire) et leur bon comportement numérique. Aussitôt, des variantes sont introduites pour la programmation quadratique et la complémentarité linéaire. Ceci Étant, il faut signaler tout de même que (sur le plan technique), ces méthodes présentent des inconvénients d'ordre théorique et numérique entre autre : le problème d'initialisation et le coût excessif de l'itération lié aux choix de la direction et du pas de déplacement.
Le but de cette thèse est de proposer une méthode de points intérieurs de trajectoire centrale (Tc) de type primal-dual pour résoudre un programme linéaire (PL). La méthode est basée sur l'introduction des nouvelles fonctions noyaux , ces fonctions satisfont quelques propriétés qui conduisent à un modèle très important pour développer cette méthodes.
Cette thèse comprend quatre chapitres :
• Dans le premier chapitre, On décrive brièvement quelques concepts de base éléments d'analyse convexe.
• Le deuxième chapitre, nous avons choisis à présenté les principe générales des quatre méthodes de points intérieurs, à savoir :

1. les méthodes projectives.
2. Les méthodes Affines.
3. les méthodes du potentiel.
4. Méthodes primal-duale de chemin centrale (barrière logarithmique).

• Dans la troisième chapitre, nous introduisons une nouvelle fonction noyau (barrière logarithmique) pour la méthode de trajectoire centrale qui améliorée la complexité logarithmique de méthode.
• Dans la dernière chapitre, nous avons étudié un autre type de fonctions noyaux "les fonctions de type trigonométriques" qui sont récemment devenues largement utilisées dans IPM. Nous avons donc proposé une nouvelle fonction noyau à un terme barrière logarithmique exponentielle-hyperbolique pour la méthode de trajectoire centrale, ainsi on va démontrer l'efficacité de l'algorithme.

Chapitre 1

THÉORIE DE BASE

1.1 Préliminaires et notion fondamentales

Dans cette section, on présente des rappels sur les notions fondamentales de l'analyse convexe.

1.1.1 Ensembles et fonctions convexes

Définition 1.1.1.
Un ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si la paire (x,y) vérifie

$$tx + (1-t)y \in E, \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in [0,1]$$

Définition 1.1.2.
Un ensemble Eest dit affine si

$$tx + (1-t)y \in E, \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Définition 1.1.3.
Un ensemble E est un polyèdre si

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad B_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, ..., m\right\}$$

où B_i est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, et les b_i sont des scalaires pour $i = 1, ..., m$.

Définition 1.1.4.
Sur un ensemble convexe E, une fonction f est dite convexe si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in [0,1]$$

càd l'ensemble $\{(x,y): \quad x \in E, \quad y \geq f(x)\}$ qui représente l'épigraphe de la fonction f c'est un ensemble convexe.

• *f est dite strictement convexe sur un ensemble convexe E si l'inégalité précédente est stricte.*

Définition 1.1.5.
f est dite concave (ainsi strictement concave) sur un ensemble convexe E si $(-f)$ est convexe (ainsi strictement convexe) sur E.

Définition 1.1.6.
f est dite mid-convexe sur E si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x,y \in E$$

Définition 1.1.7.
f est dite quasi-convexe sur E si

$$f(tx+(1-t)) \leq max(f(x), f(y)), \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x,y \in E$$

Définition 1.1.8.
f est dite fortement convexe ou-bien f est α-convexe sur E si

$$\exists \alpha\, 0, \quad \forall t \in]0,1[, \quad \forall x,y \in E \quad et \quad x \neq y$$

On a

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1-t) \parallel x-y \parallel^2$$

•*f est convexe sur $E \Leftrightarrow f$ est mid-convexe et quasi-convexe sur E .*
• *si f est une fonction continue sur un convexe E , on a*
  – *f est convexe sur $E \Leftrightarrow f$ est mid-convexe sur E .*
  – *f est α-convexe sur E si seulment si*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{\alpha}{8} \parallel x-y \parallel^2, \quad \forall x,y \in E$$

1.1.2 Convexité et dérivée

soit f une fonction tel que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable, le gradient de la fonction f au un point $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit comme suite :

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^t$$

Et la matrice Hessienne donnée comme suite

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Définition 1.1.9.
soit f définit comme dessus sur un domaine E convexe.
f est une fonction convexe sur E si et seulement si la matrice Hessienne est semi-définie positive c'est équivalent à $\forall x \in E, \quad y^T \nabla^2 f(x) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$.
• Aussi si la matrice Hessienne est définie positive càd l'inégalité précédente est stricte $\Leftrightarrow$ f est strictement convexe.

Définition 1.1.10.
f est convexe $\Leftrightarrow f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad \forall x, \in E$.

Définition 1.1.11.
f est convexe $\Leftrightarrow \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, \in E$.

Définition 1.1.12.
f est dite strictement convexe si l'une ou l'autre des deux inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq y$.

Définition 1.1.13.
f est fortement convexe $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \| y - x \|^2, \forall x, y \in E$.

Définition 1.1.14.
Soit $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \omega, \quad h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[x_0, x_0 + h] \subset \Omega$

1. *Si $f \in C^1(\Omega)$, alors*
   - *La formule de Taylor d'ordre 1 avec reste intégral :*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_0^1 \langle \nabla f(x_0 + xh), h \rangle dx.$$

   - *Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + o(\| h \|).$$

   - *Formule de Taylor-Maclaurin l'ordre 1*

$$\exists \alpha \in [0,1] \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0 + \alpha h), h \rangle$$

2. *Si $f \in C^2(\Omega)$, alors*
   - *La formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral :*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \int_0^1 (1-x)\langle \nabla^2 f(x_0+xh), h\rangle dx.$$

   - *La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \frac{\langle \nabla^2 f(x_0)h, h\rangle}{2} + o(\| h \|^2).$$

   - *La formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre 1 :*

$$\exists \alpha \in [0,1] \quad f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \frac{\langle \nabla^2 f(x_0+\alpha h), h\rangle}{2}$$

$o(\| h \|^j)$, $j \in \mathbb{N}^*$ *représente une expression qui tend vers* 0 *plus vite que* $\| h \|^j$

1.2 La programmation mathématique

La programmation mathématique constitue un domaine vaste et très riche dans l'analyse numérique. Elle traite plusieurs modèles mathématiques et problèmes pratiques importants par exemple dans la physique (minimisation d'énergie), l'industrie (optimisation de la qualité de production), l'économie (problèmes de gestion de stocks, de tarification), la finance (optimisation de portefeuille), le traitement d'image, la biologie, les sciences de l'ingénieur..etc.
En générale un programme mathématique est sous la forme suivante :

$$(FG)\begin{cases} (\max_{\vee} \min)_{x\in E\subset \mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., n \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, ..., m \end{cases}$$

où $f; g_i; h_j$ se sont des fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$
La programmation mathématique est l'outil le plus utilisé pour résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes à raison de ses nombreuses applications. Un problème de programmation mathématique consiste à minimiser ou maximiser une fonction objectif f sur un domaine réalisable D.
Le but de maximiser ou minimiser la fonction f est de trouvé une solution optimale $x^* \in E \subset \mathbb{R}^n$ dont la valeur de la fonction f est la plus grande ou bien plus petite.

Définition 1.2.1.
On dit que $x^* \in E$ un minimum globale de(FG) si

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Aussi maximum globale de (FG) si

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

• $f(x^*)$ *est appelée la valeur optimale.*

Définition 1.2.2.
$x^* \in E$ *un minimum locale de (FG) si*

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in E \bigcap B(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x^* \| < \epsilon\}.$$

Définition 1.2.3.
$x^* \in E$ *un maximum locale de (FG) si*

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in E \bigcap B(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x^* \| < \epsilon\}.$$

1.2.1 Classification et résolution des problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation sont classifié depuis le nombre de variable (Une seule variable ou bien plusieurs variable), et le type de variables (Réelles, Entières, Réelles et entières, Entières avec permutations), et le type de fonction objectif (Linéaire , Quadratique, Non linéaire), et le formulation du problème (programme avec contraintes, programme sans contraintes).

1.2.2 Qualification des contraintes

1. On dit que les contraintes sont qualifies en tout point réalisable si toutes les fonctions contraintes sont affines càd un ensemble des contraintes E est un polyèdre convexe.
2. la condition de Slater : si l'ensemble des contraintes E est convexe et $int(E) \neq \emptyset$, les contraintes sont qualifies partout.
3. Une contrainte d'inégalité $g_i(x) \leq 0$ est dite saturée en $x^* \in E$ si $g_i(x^*) = 0$. Un point $x^* \in E$ est dit régulier (on dit également que les contraintes sont qualifies en x^*) si les composantes de gradient, correspondant aux contraintes saturées en x^*, sont linéairement indépendantes.

1.2.3 Existence et unicité de solution

Théorème 1.2.1. *[27](**Weierstrass**)*
Si E est compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et si f est continue sur E alors (FG) admet au moins une solution optimale $x^* \in E$.

Théorème 1.2.2. *[27]*
Si E est non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$; f est continue et coercive sur E, $\left(\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty\right)$
alors (FG) admet au moins une solution optimale globale.

Théorème 1.2.3. *Si E est convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, f est strictement convexe sur E alors (FG) admet une solution optimale au plus.*

1.2.4 Condition d'optimalité

Maintenant on définit l'ensemble E comme suivant :

$$E = \left\{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., I, \quad h_j(x) = 0, j = 1, ..., J\right\}$$

On considère le problème primal

$$\inf_{x\in E}\{f(x)\}$$

Le Lagrangien associé à ce problème est la fonction $L : E \times [0, +\infty[^I \times \mathbb{R}^J$ définit par

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{i=I} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{j=J} \lambda_j h_j(x)$$

On pose

$$\varphi(x) = \sup_{\lambda,\mu}[L(x, \lambda, \mu) : \lambda \geq 0] = \begin{cases} f(x) & si \quad g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0 \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

donc

$$\inf_{x\in E}\varphi(x) = \inf_{x\in E}\left[\sup_{\lambda,\mu} L(x, \lambda, \mu)\right]$$

Le problème dual associé au problème primal est :

$$\sup_{\lambda,\mu}\left[\inf_{x} L(x, \lambda, \mu)\right]$$

On a l'inégalité de dualité

$$-\infty \leq \sup_{\lambda,\mu}\left[\inf_{x} L(x,\lambda,\mu)\right] \leq \inf_{x\in E}\left[\sup_{\lambda,\mu} L(x,\lambda,\mu)\right]$$

Théorème 1.2.4. *[12](**Karush-kuhn-tucker.**)*
Soit $x^* \in E$ satisfaisant l'une des conditions de qualification et supposons que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur E, et soit g_i, h_j sont des fonction de classe $C^4(\mathbb{R}^n$, Si x^* est un minimum local du problème (FG), alors $\exists\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{i=m} \lambda \nabla h_j(x^*) \\ \lambda g_i(x^*) = 0, \quad i = 1,\dots,n. \\ h_j(x^*) = 0, \quad j = 1,\dots,m \end{cases}$$

Si de plus, f, g_i, h_j, sont convexes, les conditions précédentes sont à la fois nécessaires et insuffisantes pour que x soit un optimum global pour (FG).

1.2.5 La méthode de Newton pour un programme mathématique

On considère le problème :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Les conditions d'optimalité de Karush-Khun-Tucker sont données par le système :

$$(KKT)\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda^T \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Tel que λ est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g(x) = 0$. On utilise la méthode de Newton au voisinage au point de départ (x^k, λ^k) pour définit (x^{k+1}, λ^{k+1}) qui représente la solution du système :

$$(KKT_{K+1})\begin{cases} \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + (x^{k+1} - x^k)\nabla^2 f(x^k) \\ +(x^{k+1} - x^k)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k)\nabla g_i(x^k) = 0 \\ g(x^k) + (x^{k+1} - x^k)\nabla g(x^k) = 0 \end{cases}$$

Le système (KKT_{K+1}) est équivalente à le système suivant

$$(S)\begin{pmatrix} F^k & (G^k)^T \\ (G^k) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{k+1}-x^k \\ \lambda^{k+1}-\lambda^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\nabla f(x^k)-(G^k)^T\lambda^k \\ -g(x^k) \end{pmatrix}$$

Tel que

$$F^k=\nabla^2 f(x^k)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k\nabla^2 g_i(x^k)$$

Et

$$G^k=\begin{pmatrix} \nabla g_1(x^k) \\ \nabla g_2(x^k) \\ . \\ . \\ \nabla g_m(x^k) \end{pmatrix}^T$$

On simplifier le système (S), on trouve

$$(E)\begin{pmatrix} F^k & (G^k)^T \\ (G^k) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{k+1}-x^k \\ \lambda^{k+1}-\lambda^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\nabla f(x^k) \\ -g(x^k) \end{pmatrix}$$

Si F^k est inversible, la solution de (E) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x^{k+1}-x^k \\ \lambda^{k+1}-\lambda^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F^{-1}-F^{-1}G^T(GF^{-1}G^T)^{-1}GF^{-1} & (F^{-1}G^T(GF^{-1}G^T)^{-1} \\ (GF^{-1}G^T)^{-1}GF^{-1} & (G^TGF^{-1}G^T)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\nabla f(x^k) \\ -g(x^k) \end{pmatrix}$$

Notons $d_k=x^{k+1}-x^k$ les direction de Newton, alors la solution s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} F^k d_k+(G^k)^T\lambda^{k+1}=-\nabla f(x^k) \\ G^k d_k=-g(x^k) \end{cases}$$

Et les d_k les solution de system quadratique :

$$\begin{cases} \min\frac{1}{2}d^TFd+\nabla f^T(x^k)d \\ G^k d_k+g(x^k)=0 \end{cases}$$

Le vecteur dual optimal de problème précédant est λ^{k+1}

1.3 La programme linéaire PL

1.3.1 Théorie générale de la programmation linéaire

Dans notre travaille on s'intéresse à un programme mathématique linéaire qui s'écrit sous les formes suivants :

1. la forme canonique :

$$\begin{cases} \min c^T x \quad c \in R^n (donn\acute{e}) \\ Ax \geq b \quad A(m \times n) matrice \\ x \geq 0 \quad inconnu \quad de \quad R^n \end{cases}$$

2. La forme standard :

$$\left\{ \min c^T x \quad Ax = b \quad x \geq 0 \right\}$$

3. La forme générale :

$$\left\{ \min c^T x, \quad Ax \geq b, \quad Bx \leq d, \quad B(n \times b) - matrice, \quad d \in R^n \right\}$$

Dans toute la suite, on s'intéresse de la résolution d'un problème d'optimisation linéaire sous la forme standard (P) suivant :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

(1.1) appelé le problème Primal (P), et son dual (D) est donné par :

$$\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad b, y \in \mathbb{R}^m; \quad x, c, s \in \mathbb{R}^n$ avec $m \leq n$. telle que A matrice de rang plein $(rang(A) = m \leq n)$.

On notera par la suite :

- $F_{(P)} = \{x \in R^n : \quad Ax = b, \quad x \geq 0\}$ l'ensemble des solutions primales réalisable.
- $F^0_{(P)} = \{x \in R^n : \quad Ax = b, \quad x > 0\}$ l'ensemble des solutions primales strictement réalisable.
- $F_{(D)} = \{y \in R^m : \quad A^T y + s = c, \quad s \geq 0\}$ l'ensemble des solutions duale réalisable.
- $F^0_{(D)} = \{x \in R^m : \quad A^T y + s = c, \quad s > 0\}$ l'ensemble des solutions duale strictement réalisable.
- $\left\{(x^*, y^*) \in F_{(P)} \times F_{(D)}\right\}$ s'appelle respectivement des solutions optimales de (P) et (D) , telle-que (x^*, y^*) minimisant la fonction objectif de (P) et (D).

Théorème 1.3.1. ***(Dualité faible)***
soit $x \in F_{(P)}$, $(y,s) \in F_{(P)}$ deux solutions réalisables de (P) et (D), alors :

$$c^T x \geq c^T y$$

Théorème 1.3.2. ***(Dualité fort)***
soit $\bar{x} \in F_{(P)}$, $\bar{y} \in F_{(D)}$ deux solutions réalisables de (P) et (D), tel que $c^T \bar{x} = c^T \bar{y}$, alors $(\bar{x}, \bar{y})$ sont solutions optimale de (P) et (D).

1.3.2 Méthodes de résolution d'un programme Linéaire :

Méthode du simplexe :

Le principe la méthode du simplexe est de se déplace d'un sommet du polyèdre des contraintes à un autre. Elle peut, dans certains cas extrêmes, nécessiter un très grand nombre d'itérations (exemple de Klee Mintty 1977). Dans le contexte de la théorie de la complexité des algorithmes, on parle d'un nombre exponentiellement grand d'itérations, car le nombre d'itérations dans le pire des cas grandis d'une manière exponentielle avec la taille du problème à résoudre (voir[16]).

Les étapes du simplexe

Point de départ : le passage de la forme canonique à la forme standard nous permet d'obtenir immédiatement une solution de base réalisable qui sert de point de départ pour l'algorithme de simplexe, les variables de base sont des variables d'écart.donc on obtient un système sous la forme :

$$\begin{cases} \max < X, C > + \alpha \\ AX = b; \quad X \geq 0 \end{cases}$$

tel que
$A = a_{ij}, \quad b = b_i, \quad 1 \leq i, \quad j \leq n$ Pendant de là, on va réaliser une suite de chargement de base en suivant le schéma :

- choix de variable entrante.
- choix de variable sortante.
- changement de base.

1. **Choix de variable entrante :** si tous les coefficient de variable hors base courantes sont positifs ou nuls, alors la solution courante est optimale, si non la variable de base qui va entrer dans la nouvelle base celle dont le coefficient est le plus petit dans l'expression de la fonction objectif.
   la colonne correspondante au variable entrante s'appelle la colonne pivot.

2. **Choix de variable sortant** : soit t l'indice de la variable entrante. S'il existe un indice r pour lequel le $\min\left\{\dfrac{b_k}{a_{kt}}, \quad a_{kt} > 0\right\}$ est atteint, alors x_r est la variable sortante.
   la ligne correspondante au variable sortante s'appelle la ligne pivot.
3. Le but est de trouver une autre base réalisable, et une autre solution réalisable associée x^* où $f(x^*) \leq f(x)$, on va écrire le problème sous forme standard par rapport à la nouvelle base choisi, et on a l'opération suivante s'appelle l'opération pivot :

$$\overline{a}_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{is} \times a_{dk}}{a_{ds}} \quad i \neq d$$
$$\overline{a_{dk}} = \frac{a_{dk}}{a_{ds}}$$

   tel que :
   d : représente la ligne de pivot et la colonne de pivot

Algorithme de simplexes

1. Trouver l'indice d tel que $c^d = \min\{c_j\}$
2. Si $c^d < 0$ alors stop la solution est la base courante si non on passe à l'étape 3.
3. On détermine $I = \{i \in \{1, ..., p\} \quad : a_{id} > 0\}$, si $I = \emptyset$, alors stop la fonction objectif n'est pas bornée, sinon on choisit l'indice r tel que :

$$\frac{b_r}{a_{rd}} = \min\left\{\frac{b_k}{a_{kt}}, \quad a_{kt} > 0\right\}$$

   et on passe à l'étape 4 :
4. On applique l'opération pivotage précédente. puis aller à l'étape 2.

règle de Bland
Lorsque plusieurs variables sont peut avoir d'entrer ou de sortir, alors on choisit toujours celle qui a l'indice plus petit.

Définition 1.3.1.
une base est dégénérée s'il existe une variable de base nulle.

Théorème 1.3.3.
Si au cours de l'algorithme du simplexe aucun base rencontrée est dégénérer, alors l'algorithme se termine en nombre fini d'itération.

1.3.3 Méthodes des points intérieurs

On distingue quatre classes fondamentales de méthodes de points intérieurs à savoir :

- Méthodes projectives
- Méthodes affines.
- Méthodes de réduction du potentiel.
- Méthodes de trajectoire centrale (TC).

Dans ce travaille le but n'est pas de fournir une liste exhaustive de toutes les méthodes qui ont été proposées jusqu'à maintenant, plutôt, est de présenter uniquement les méthodes suivi de chemin (méthode de trajectoire centrale) pour un problème d'optimisation linéaire.

1.3.4 La Méthode de Newton pour un problème linéaire

On considère le problème :

$$\begin{cases} \min c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \log x_i \\ Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^m \\ x > 0 \end{cases}$$

avec $\mu > 0$. On applique les condition de KKT on trouve le problème suivante :

$$\begin{cases} c - \mu X^{-1} e + A^T \lambda \\ Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^m \\ x > 0 \end{cases}$$

La direction de Newton est donnée par

$$\begin{pmatrix} \mu X^{-2} & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_N \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c + \mu X^{-1} e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

LE PRINCIPE DE DIFFÉRENT MÉTHODES DU POINT INTÉRIEUR POUR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

2.1 Principe des méthodes projectives (l'algorithme de Karmarkar)

La méthode de simplexe est reste longtemps l'algorithme de référence pour la programmation linéaire malgré sa complexité exponentielle, jusqu'à 1984, Norendra Karmarkar a été proposé un nouvel algorithme polynomial c'est l'algorithme des méthodes projectives . cet algorithme a été essentiellement différent de la méthode du simplexe par le fait que la méthode de Karmarkar, on progresse tout en restant strictement a l'intérieur du domaine réalisable.

2.1.1 Principe générale :

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = 0 \\ e^T x = n, \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $e = (1, ..., 1)$, A est une matrice $(m \times n)$, $c \in \mathbb{R}^n$

Hypothèses :

1. $c^T e > 0$.

2. $Ae = 0$.
3. 0 est représente la valeur optimale du problème précédent.
4. La matrice A est de rang maximal.

la méthode projective consiste à générer une suite de points strictement réalisables $\{x^j\}$ tel que le point de départ est égale à le vecteur unité $x^0 = (1,...,1)$ et :

$$c^T x^j \leq \exp\left(\frac{-j}{5n}\right) c^T x^0, \quad j \geq 1. \tag{2.2}$$

C'est équivalent à

$$n \log\left(c^T x^0\right) \leq -\frac{j}{5} + n \log\left(c^T x^0\right), \quad j \geq 1$$

Karmarkar a introduit Afin de mesurer le progrès d'une itération a l'autre une fonction auxiliaire (voir [24]) appelée fonction de potentiel définie par :

$$P(t) = p(t,c) = n \log c^T t - \sum_{i=1}^{n} \log t_i = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{c^T t}{t_i}\right)$$

Karmarkar a utilise un changement de variable pour passer de l'itération j a l'itération $j+1$ ou, d'une façon plus précise la transformation projective définie par :

$$x \xrightarrow{T_p} \tilde{x} = \frac{n(X^j)^{-1} x}{e^T (X^j)^{-1} x}$$

Tel que

$$X^j = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & . \\ . & x_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & x_j \end{pmatrix}$$

Et T_p représente la transformation projective a les propriété suivante :

1. T_p est bijective tel que :
$$(T_p)^{-1}(\tilde{x}) = \frac{nX^j \tilde{x}}{e^T X^j \tilde{x}}.$$
2. T_p laisse l'ensemble $\Delta = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad e^T x = n, \quad x \geq 0\right\}$ invariant.
3. T_p transforme l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad Ax = 0, \quad e^T x = n, \quad x > 0\right\}$ en $\left\{x \in \Delta, \quad \tilde{A}x = 0\right\}$ avec $\tilde{A} = ax^j$.

De plus, T_p garde la même forme pour la fonction de potentiel dans le nouvel espace. On a le lemme suivant :

Lemme 2.1.1.
Soient x et $\tilde{x}$ definis comme précédemment et soit $c = X^j c$ alors on a :

$$p(\tilde{x}, \tilde{c}) = p(x, c) + \log\left(\det X^j\right)$$

Démonstration.
Soit $p(\tilde{x}, c) == \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{c^T \tilde{x}}{\tilde{x}_i}\right)$ On a

$$c^T \tilde{x} = \frac{c^T X^j n X^{j-1} x}{e^T X^{j-1} x} = \frac{n c^T x}{e^T (X^j)^{-1} x}$$

et

$$\tilde{x}_i = n \frac{((X^j)^{-1} x)_i}{e^T (X^j)^{-1} x x_i^j}$$

Donc

$$\frac{\tilde{c}^T \tilde{x}}{\tilde{x}_i} = \frac{c^T x}{x_i} x_i^j$$

$$\log\left(\frac{\tilde{c}^T \tilde{x}}{\tilde{x}_i}\right) = \log\left(\frac{c^T x}{x_i}\right) + \log x_i^j$$

Par suite

$$\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{\tilde{c}^T \tilde{x}}{\tilde{x}_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{c^T x}{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log x_i^j$$

Alors on obtenue le résultat

$$\sum_{i=1}^{n} \log x_i^j = \log \prod_{i=1}^{n} x_i^j = \log \det X^j.$$

□

Lemme 2.1.2.
Soit $x \in \left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad Ax = 0, \quad e^T x = n, \quad x \geq 0\right\}$, tel que $f(x) = f(e) - \gamma$, alors

$$c^T x \leq \left(\exp \frac{-\gamma}{n}\right) c^T e.$$

Démonstration.

On a $f(e) = n \log c^T e - \sum_{i=1}^{n} \log 1 = n \log c^T e$, donc d'après l'hypothèse on a

$$n \log c^T x \leq n \log c^T e - \gamma + \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Les $x_i > 0$ de moyenne arithmétique égale à 1, donc leur moyenne géométrique est au plus 1 car $e^T x = n$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \log x_i \leq 0$ et ceci implique

$$\log c^T x \leq \log c^T e - \frac{\gamma}{n}$$

Donc

$$c^T x \leq \left(\exp \frac{-\gamma}{n}\right) c^T e.$$

□

• Donc d'après le lemme 2.1.1 pour réduire $\tilde{f} = f(\tilde{x}, \tilde{c})$ par une constante a partir de sa valeur en e, il suffit de réduire f par la même constante en utilisant l'étape correspondante dans l'espace original et réciproquement.
• L'inégalité 2.2 résulte du lemme 2.1.2 si on montre que f diminue a chaque itération par au moins $\frac{1}{5}$. Par le lemme 2.1.1 , il suffit seulement de diminuer $\tilde{f}$ par au moins $\frac{1}{5}$ a partir de sa valeur en e. Pour déterminer une telle diminution, plaçons nous dans le nouvel espace.
Considérons la matrice

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ e^T \end{pmatrix}$$

Et soit
$P_{\tilde{B}}$: la projection sur le noyau de $\tilde{B}$.
$\tilde{A}$ est de plein rang (car X^j est une matrice non singulière), de plus comme

$$\tilde{A}e = AX^j e = Ax^j = 0.$$

Alors la matrice $\tilde{B}$ est de rang maximal. Ainsi

$$P_{\tilde{B}} = P_{\tilde{A}} P = P P_{\tilde{A}}$$

Tel que P est la projection sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \quad : e^T x = 0\}$.
On choisi comme direction :

$$\tilde{d'} = -P_{\tilde{B}} \nabla \tilde{f}(e)$$

Pour obtenir une diminution convenable de $\tilde{f}$, avec $\nabla\tilde{f}(e) = \frac{n\tilde{c}}{\tilde{c}^T e} - e$.
On a aussi $P_{\tilde{B}}(e) = 0 \Big(car \quad \tilde{A}e = 0 \quad et \quad donc \quad P_{\tilde{A}} = 0 \Big)$.
Donc

$$\tilde{d}' = P_{\tilde{B}}\frac{n\tilde{c}}{\tilde{c}^T e} = -\frac{n}{\tilde{c}^T e}P_{\tilde{B}}(\tilde{c})$$

On pose

$$\bar{d} = -P_{\tilde{B}}(\tilde{c})$$

On obtenue

$$\tilde{d}' = -\frac{n}{\tilde{c}^T e}\bar{d}$$

Karmarkar a montre qu'une réduction constante de f est obtenue en se déplaçant dans le nouvel espace du point e au point

$$\tilde{x} = e + \alpha\frac{\bar{d}}{\| \bar{d} \|}.$$

2.1.2 Détermination du l'itération x^{j+1}

La formule de l'itération x^{j+1} et donnée par :

$$x^{j+1} = \frac{n(x^j + \alpha_j d_j)}{e^T(x^j + \alpha_j d_j)}$$

Où
α_j : une longueur de pas convenable assurant la diminution voulue de $\tilde{f}$. Et on pose
$d_j = X^j \tilde{d}^j$.

2.1.3 L'algorithme de Karmarkar :

La suite de points $\{x^j\}$ engendrée par la méthode est telle que :

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} c^T x^j = 0$$

En pratique, on arrête d'itérer quand la valeur de l'objectif devient suffisamment proche de zero. Afin de préciser le sens du "suffisamment proche de zero", on va définir la longueur du problème. Karmarkar définit la constante l_1, comme borne inférieure de la longueur des données de son problème (2.1).

$$l_1 = 1 + \log|\beta_{max}| + \log\Big(1 + |C_{j_{max}}|\Big)$$

Où $\beta = \max\{|\det B| : \text{B base de A }\}$ et $C_{j_{max}} = \max_j |C_j|$.

Générique de l'algorithme.

Entrée :

$l_1 = 1 + \log|\beta_{max}| + \log\left(1 + |C_{j_{max}}|\right)$.

$j = 0$, $x^j = (1, ..., 1)$.

α fixe suffisamment petit.

Début :

Si $nc^T x^j < 2^{-l_1}$ **faire**

- Utiliser la procédure décrite précédemment pour trouver un point extrême optimal a partir de x^j et c'est termine ;

Sinon ;

- Définir
  $X^j = diag(x_1^j, ..., x_n^j)$, $\tilde{A} = AX^j$, $\tilde{B^j} = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ e^T \end{pmatrix}$.
- Calculer
  $\tilde{d^j} = -P_{\tilde{B}^j}(x^j c)$, $d^j = X^j \tilde{d^j}$, $\tilde{x}^j = x^j + \alpha \frac{d^j}{\|\tilde{d^j}\|}$.
- Posé
  $x^{j+1} = \frac{n\tilde{x}^j}{e^T \tilde{x}^j}$.
- Faire
  $j = j + 1$.

Fin Si

Fin

Figure 2.1 – Algorithme De Karmarkar

Remarques 2.1.1.

- *L'algorithme fournit une solution réalisable Si* $\alpha = \frac{n-1}{3n}$ *vérifiant* $\bar{x}$ *tel que* $c^T \bar{x} < 2^{-l_1}$ *en au moins* $10nl_1$*.On peut déterminer le point extrême optimal en utilisant la procédure qui s'appelle la procédure de Purification.*
- *Il est importante de choisi* α *avec précision, car il gouverne en quelque sorte la valeur de* γ.
- *Karmarkar a choisi* $\alpha = \frac{1}{4\sqrt{n(n-1)}}$ *dans son premier article (voir [24]), et il a abouti à une réduction* $\gamma \geq \frac{1}{8}$.
- *Todd et Burrell ont pris* $\alpha\frac{1}{3}$ *et ont obtenu* $\gamma = \frac{1}{8}$ *exacte (voir[21]).*

2.2 Principe des méthodes affines

En 1967, Dikin [5] été le premier qui introduit les méthodes affines, puis Karmarkar en 1984 a publié l'article plus célèbre sur les méthodes affine (voir [?]). Les algorithmes affines sont des algorithmes de point intérieur, Dikin a été étudiée premièrement la convergence de l'algorithme (algorithme affine a petits pas) , et après été étudier par Barnes , Kortanek et Shi, et Vanderbei et al (voir [8], [15], et [26]). Dikin a été prouve que sous l'hypothèse de non dégénérescence les algorithmes convergent. Récemment, plud qu' un chercheur (voir[25],[29],[30],[32],[31]) pu montrer que même dans le cas dégénéré la méthode converge .
En fait, certains des codes basés sur dans cette section, nous avons choisi la méthode affine primal, où nous allons donner l'algorithme primal ainsi sa variante .

2.2.1 Principe générale :

Soit le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Tel que A est une matrice de $(m \times n)$, $b \in \mathbb{R}^m$, et $x, c \in \mathbb{R}^n$.
On suppose qu'il existe $x^0 > 0$ tel que $Ax^0 = b$.
Le principe de méthode consiste a générer une suit $\{x^j\}$ des point strictement réalisable tel que :

$$c^T x^j < c^T x^{j-1} < c^T x^{j-2} < \ldots < c^T x^0$$

Et la suite $\{x^j\}$ converge vers une solution optimale du problème (2.3)

2.2.2 Détermination du l'itération x^{j+1}

Soit x^j le point obtenu a l'itération j tel que par hypothèse x^jest strictement réalisable. On considère la transformation affine

$$x \xrightarrow{T_a} y = (X^j)^{-1} : \quad X^j = \begin{pmatrix} x_1^j & . & . & . & . \\ . & x_2^j & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & x_n^j \end{pmatrix}$$

Alors $y = e = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}^T$ c'est la transformation de x^j par T_a et le problème (2.3) se transforme en problème suivant :

$$\begin{cases} \min \tilde{c}^T y \\ \tilde{A}y = b \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Tel que $\tilde{c} = X^j c$ et $\tilde{A} = AX^j$. $y = e$ est le point courant pour (2.4), on construit alors un nouveau point $\tilde{y} = e + \bar{\alpha}\tilde{d}$.
Tel que $\tilde{d}$: est une direction réalisable de descente pour (2.4).
$\bar{\alpha}$: un pas de déplacement. Alors pour obtenue x^{j+1} en utilisant la transformation inverse :

$$\tilde{y} \xrightarrow{T_a^{-1}} = x^{j+1} = X^j \tilde{y} = X^j(\bar{\alpha}\tilde{d} + e) = \bar{\alpha}X^j\tilde{d} + x^j$$

On pose $X^j\tilde{d} = d^j$ on obtient :

$$x^{j+1} = x^j + \bar{\alpha}d^j$$

La direction de descente généralement utilisée dans le nouvel espace est $\tilde{d} = \tilde{c}_p$.
Tel que $\tilde{c}_p$ est la projection de c sur le noyau de la matrice $\tilde{A}$.
Ainsi on a

$$\tilde{d} = -X^j(c - A^T\omega^j) \tag{2.5}$$

Tel que $\left[\omega^j = (A(X)^2A^T)^{-1}A(X^j)^2c\right]$ est la solution de :

$$A(X^j)^2A^T)\omega = A(X^j)^2c. \tag{2.6}$$

Pour le choix de $\bar{\alpha}$, on suppose $\tilde{d} \neq 0$ (si $\tilde{d} = 0$ alors la solution courant est optimale). Donc on choisi $\bar{\alpha}$ le plus grand possible de façon a ce que le nouveau point y demeure réalisable.

$$\bar{\alpha} = \max\{\alpha : \quad \alpha\tilde{d} + e \geq 0\} = \begin{cases} +\infty & si \quad \tilde{d} \geq 0. \\ \min\{-\frac{1}{d_j} : \quad \tilde{d}_j < 0\} & sinon. \end{cases}$$

Si $\bar{\alpha} = +\infty$, alors le problème (2.4) est non bornée et donc la suite $\{x^j\}$. Sinon la stricte réalisabilité est assuré, et on prend pour tout $\gamma \in [0,1]$:

$$x^{j+1} = x^j + \gamma\bar{\alpha}d^j$$

Proposition 2.2.1.

$$\forall j \geq 0 \quad c^T x^j - c^T x^{j+1} > 0$$

Démonstration.
D'après la formule de x^{j+1} on a

$$\begin{aligned} c^T x^j - c^T x^{j+1} &= c^T x^j - c^T x^j - c^T \gamma \bar{\alpha} d^j \\ &= -c^T \gamma \bar{\alpha} d^j \\ &= -\gamma \bar{\alpha} c^T d^j \end{aligned}$$

Comme

$$c^T d^j = c^T X^j \tilde{d} = \tilde{c}^T \tilde{d} = -\tilde{c}^T \tilde{c}_p = - \| \tilde{c}_p \|^2 = - \| \tilde{d} \|^2 .$$

Donc

$$c^T x^j - c^T x^{j+1} = \gamma \bar{\alpha} \| \tilde{d} \|^2 > 0.$$

□

2.2.3 Algorithme affine primal

Générique de l'algorithme.

Entrée :
$j = 0$, $x^0 > 0$, tel que $Ax = b$
$\gamma \in [0, 1]$
Début :
$X^j = diag(x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j)$.
calculer ω^j la solution de l'équation (2.6).
Depuis l'équation (2.5) calculons $\tilde{d}$.
Posons $d^j = X^j \tilde{d}$.
Si $d^j > 0$ **faire**
- L'algorithme se termine et le problème (2.3) n'est pas borné.

Sinon ;
- $\bar{\alpha} = \min\{-\frac{1}{\tilde{d}_j} : \quad \tilde{d}_j < 0\}$
- $x^{j+1} = x^j + \gamma \bar{\alpha} d^j$

Fin Si
- si le test d'arrêt satisfait, l'algorithme se termine.
- sinon $j = j + 1$.

Fin

2.3 Principe des méthodes du potentiel

On considère le problème primal :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Et son dual est

$$\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Les algorithmes de méthodes du potentiel sont simplement des algorithmes de descente de plus forte pente avec conditionnement affine applique a une fonction de potentiel.

2.3.1 Notion des fonctions de potentiel

En programmation linéaire, Karmarkar a été le premier qui a introduire la fonction de potentiel,il est définit la fonction de potentiel primal sous la forme suivante :

$$f_p(x, v_L) = q \log\left(c^T x - v_L\right) - \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Tel que : v_L est une borne inférieure de la valeur optimale v^*, $q = n + 1$.
Et sa fonction de potentiel dual est

$$f_d(x, v_U) = q \log\left(v_U - b^T y\right) - \sum_{i=1}^{n} \log s_i.$$

Tel que : v_U est une borne supérieure de v^*.
La fonction de potentiel primale-duale proposé par Ye et Todd (voir [22]) est donnée par :

$$f_{TY}(x, s) = q \log(x^T s) - \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \sum_{i=1}^{n} \log s_i$$

2.3.2 Méthode du potentiel primale

Le but de ce travaille n'est pas de fournir une liste exhaustive de toutes les méthodes en détails qui ont été proposées jusqu'à maintenant, plutôt, est de présenter en générale le principe de ces méthodes ,ensuite de présenter uniquement les méthodes suivi de chemin (méthode de trajectoire centrale) pour

un problème d'optimisation linéaire.
Le premier qui a décrit un algorithme potentiel primal c'est Gonzaga[3]. Gonzaga adapté un algorithme est simplement la méthode de descente de plus forte pente avec conditionnement affine applique a la fonction de potentiel primale de Karmarkar, il a supposé que v^* la valeur optimale de 2.7 est nulle. Dans cette section, on va proposer un algorithme de potentiel primal et étudier sa polynomialite. Pour faciliter l'analyse, on suppose que la valeur optimale du probleme (2.7) est nulle et on considere la fonction de potentiel suivante :

$$G(x) = q\log(c^T x) - \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Tel que x, q sont des positives G est différentiable et on a

$$\forall x > 0, \quad \nabla G(x) = \frac{q}{c^T x} c - X^{-1}.$$

Et $\nabla G(e) = \frac{q}{c^T e} c - e$.

2.3.3 Algorithme potentiel primal :

Générique de l'algorithme.

Entrée :
$x^0 > 0$, strictement réalisable pour (2.7)
ϵ un paramètre strictement positif
Début :
$\bullet j = 0.$
Répété
Calculé
$\bullet \bar{A} = AX^j$, $\bar{c} = X^j c$, $y = (X^j)^{-1}x$, $X^j = diag(x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j)$.
$\bullet \bar{G}(y) = q\log(\bar{c}^T y) - \sum_{i=1}^{n} \log y_i$.
$\bullet P_{\bar{A}} = I - \bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}^T$.
$\bullet$ la dérection $d = P_{\bar{A}}\nabla\bar{G}(y)$
$\bullet$ le pas $\bar{\lambda} = \arg\left\{\min\{\bar{G}(y+\lambda d) : \quad \lambda > 0, \quad y + \lambda d > 0\}\right\}$
$\bullet y^* = y + \bar{\lambda} d$, $x^{j+1} = X^j y^*$, $j = j+1$
Jusqu'à $c^T x^j \leq \epsilon$
Fin

2.4 Principe des méthodes de trajectoire centrale

Les Méthodes de trajectoire centrale ont été introduites à la même époque que les méthodes de réduction du potentiel et pleinement développées au début des années 90. Elles possèdent de bonnes propriétés théoriques : une complexité polynomiale et une convergence super linéaire. Les algorithmes de trajectoire centrale restreint les itérés à un voisinage de la trajectoire centrale, ce dernier est une courbe de points strictement réalisables.

2.4.1 Les méthodes de barrières (Chemin central) :

Dans cette partie , on s'intéresse de la résolution d'un problème d'optimisation linéaire sous la forme standard (P) suivant :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

et son dual (D) est :

$$\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geq 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $b, y \in \mathbb{R}^m$; $x, s \in \mathbb{R}^n$ avec $m \leq n$.
On suppose que les problèmes (P) et (D) vérifient l'hypothèse suivante :

- **Hypothèse 01 :** $\exists (x_0, y_0, s_0)$: $Ax_0 = b$, $A^T y_0 + s_0 = c$, $x_0, s_0 > 0$ ***Condition de points intérieurs (CPI).***
- **Hypothèse 02 :** A matrice de rang plein ($rang(A) = m \leq n$) .

la **CPI** et avec que A est une matrice de rang plein (voir [4][28]), assurée l'existante de la solution optimale (x^*, y^*, s^*) :

$$c^T x^* = b^T y^* = x^* s^* = 0$$

Donc, résoudre (P) et (D), revient à résoudre le système d'équations non linéaires (2.11) suivant :

$$\begin{cases} Ax = b \quad , \quad x > 0 \\ A^T y + s = c \quad , \quad y, s > 0 \\ xs = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

2.4.2 La fonction barrière logarithmique

La notion de trajectoire centrale peut être introduite moyennant une fonction **barrière logarithmique** , on associé au problèmes (2.11) le problème d'optimisation pénalisé suivant :

$$\begin{cases} \min \omega_\mu(x, y, s) = x^T s - \mu \sum_{i=1}^{n} \log x_i s_i \\ Ax = b \quad , \quad x > 0 \\ A^T y + s = c \quad , \quad y, s > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

où μ est un paramètre barrière strictement positif associé au problème (2.12) , et la fonction :

$$\sum_{i=1}^{n} \log x_i s_i$$

est appelé fonction barrière logarithmique primale-duale.

Lemme 2.4.1.
Sous les ***hypothèses 01*** *et* ***02*** *le problème (2.12) admet une solution optimale unique pour tout* $\mu > 0$.

L'idée principale de la méthode de point intérieur MPI est de remplacé la troisième équation du système (2.11) (condition de complémentarité de (P) et (D), par l'équation paramétré $xs = \mu e$, avec $\mu > 0$. Et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b \quad , \quad x \geqslant 0 \\ A^T y + s = c \quad , \quad y, s \geqslant 0 \\ xs = \mu e \end{cases} \tag{2.13}$$

Ce system a une unique solution notée par $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ pour $\mu > 0$. La solution est appelée μ–centre de (P) et (D). Tan-que $\mu \rightarrow 0$ la limite de trajectoire centrale existe et représentée la solution optimale de (P) et (D). D'un point de vue théorique, la CPI peut être supposée sans perte de généralité. Dans fait que nous pouvons supposer que $x_0 = s_0 = e$. En pratique, cela peut être réalisé en incorporant les problèmes donnés (P) et (D) dans un problème auto-dual, qui a deux variables supplémentaires et deux supplémentaires Contraintes. Pour cette propriété et les autres propriétés mentionnées ci-dessus (voir [4]). Les MPIs suivent approximativement le chemin central. Nous décrivons brièvement l'approche habituelle. Sans perte de généralité, nous supposons que $(x(\mu); y(\mu); s(\mu))$ est connu pour certains positifs. Par exemple, en raison de l'hypothèse ci-dessus, on prend $\mu = 1$, avec $x(1) = s(1) = e$. Nous réduisons μ à $(1-\theta)\mu$, tel que $\theta \in]0, 1]$.

2.4.3 Directions de Newton classiques

Maintenant, pour avoir un nouvel itéré, l'un des moyens est d'utiliser la méthode de Newton, c'est-à-dire pour chaque $\mu > 0$; on résout le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0 \\ A^T \Delta y + \Delta s = 0 \\ s\Delta x + x\Delta s = \mu e - sx \end{cases} \tag{2.14}$$

Le système (2.14) admet une solution unique désignée par $(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$. Cette direction est dite la direction de Newton classique pour PL. Le nouvel itéré de la méthode de Newton avec un pas fixé est donné par :

$$x^+ = x + \alpha \Delta x \quad , \quad y^+ = y + \alpha \Delta y \quad , \quad s^+ = s + \alpha \Delta s$$

tel que le pas α satisfais $0 < \alpha \leq 1$.
Maintenant pour faciliter l'étude de ces méthodes, on définit le vecteur v et les

directions d_x, d_s par :

$$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, \quad d_x = \frac{v\Delta x}{x}, \quad d_s = \frac{v\Delta s}{s}.$$

Donc le système (2.14) s'écrit sous la forme suivante ;

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0 \\ \bar{A}^T\Delta y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = v^{-1} - v \end{cases} \tag{2.15}$$

où $\bar{A} = \frac{1}{\mu}AV^{-1}X$, $V = diag(v)$, $X = diag(x)$.

Lemme 2.4.2.
Sous les hypothèses 1 et 2, le système (2.15) admet une solution unique $(d_x, \Delta y, d_s)$, *et de plus* d_x *et* d_s *sont orthogonales car :*

$$d_x^T d_s = d_x^T(-\bar{A}^T\Delta y) = -(\bar{A}d_x)^T\Delta y = 0 \times \Delta y = 0$$

Remarque 2.4.1.
La fonction barrière logarithmique de type primal- dual dans (2.12) est définit par $\Phi_L(v) : R^n_{++} \to R_+$ *s'écrit comme suit :*

$$\Phi_L(v) = \Phi_L(x,s,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \psi_L(v_i)$$
$$\psi_L(v_i) = \frac{v_i^2-1}{2} - \log(v_i)$$
$$v_i = \sqrt{\frac{x_i si}{\mu}}.$$

On remarque que le système (2.15), s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0 \\ \bar{A}^T\Delta y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = -\nabla\Phi_L(v) \end{cases} \tag{2.16}$$

où $\nabla\Phi_L(v)$ le gradient de la fonction logarithmique $\Phi_L(v)$. Le système (2.16), détermine les directions classiques de Newton et ainsi les algorithmes primaux-duaux de trajectoire centrale classique pour résoudre un programme linéaire (PL).

2.4.4 Principe de trajectoire centrale pour la programmation linéaire

Une fonction $\Phi_L(v)$ définie comme précédemment par $\Phi_L(v) : R^n_{++} \to R_+$ continûment différentiable et strictement convexe et minimale en $v = e$, avec $\Phi_L(e) = 0$ et sa formule donnée par :

$$\Phi_L(v) = \sum_{i=1}^{n} \psi_L(v_i) \tag{2.17}$$

où $\psi_L(v_i) : (0;1) \to [0;1)$ est une fonction deux fois continûment différentiable et strictement convexe pour $t > 0$, et minimale en $t = 1$ avec $\psi_L(1) = \psi_L^{'}(1) = 0$, et $\psi_L^{''}(t) > 0$.
La fonction $\psi_L(v)$ est dite fonction barrière noyau qui sera définie par la suite. Nous utilisons $\Phi_L(v)$ la fonction de proximité pour mesurer la distance entre l'itéré μ-centre et la trajectoire centrale pour $\mu > 0$ donné. Nous définissons également la mesure de proximité, basée sur la norme, $\delta(v) : R^n_{++} \to R_+$, comme suit :

$$\delta(v) = \frac{1}{2} \parallel \nabla\Phi_L(v) \parallel = \frac{1}{2} \parallel d_x + d_s \parallel \tag{2.18}$$

Il ressort clairement de la description précédente que la proximité de $(x;s)$ à $(x(\mu);s(\mu))$ est mesurée par la valeur de $\Phi(v)$ et avec $\tau > 0$ en tant que valeur de seuil. Si $\Phi(v) < \tau$, on commence une nouvelle itération externe en effectuant une mise à jour du paramètre μ via

$$\mu = (1-\theta)\mu, \quad 0 < \theta < 1$$

et nous appliquons la méthode de Newton ciblant les nouveaux μ−centres, et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à ce que μ est suffisamment petit, c'est-à-dire jusqu'à ce que $n\mu < \epsilon$. A ce stade, nous avons trouvé une solution de ϵ−approximative de l'optimisation linéaire. Les paramètres μ, τ et le pas α doivent être choisis de manière à ce que l'algorithme est optimisé dans le sens où le nombre d'itérations exigées par l'algorithme est aussi petit que possible.

2.4.5 Algorithme générique primal-dual de trajectoire centrale pour PL

Generic Primal-dual IPMs pour LO

Entrée :

Une fonction proximité $\Phi(v)$;
Un paramètre de limite $\tau > 1$;
Un paramètre de précision $\varepsilon > 0$;
Un paramètre de mise à jour fixe θ ,$0 < \theta < 1$;
Début :
$x = e; \quad s = e; \quad \mu = 1; \quad v = e.$
  Tanque $n\mu \geq \epsilon$ **faire**
  Début(itération externe)
    $\mu = (1-\theta)\mu$;
    Tanque$\Phi(x, s, \mu) > \tau$ **faire**
    Début(itération interne)
      résoudre le système (2.16), $\Phi_L(v)$ remplecé par $\Phi(v)$ pour obtient $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$;
      Calculer le pas de déplacement α ; et pose ;
      $x = x + \alpha\Delta x; \quad y = y + \alpha\Delta y; \quad s = s + \alpha\Delta s.$
      $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$
    Fin(itération interne)
  Fin(itération externe)
Fin

2.4.6 Fonctions noyau et propriétés

Définition 2.4.1.
*Soit $\psi(t) : R_{++} \to R_{+}$ une fonction deux fois continument différentiable. Alors ψ est dite **fonction noyau**, si elle vérifie les conditions suivantes :*
- $\psi(1) = \psi^{'}(1) = 0.$
- $\psi^{''} > 0, \quad \forall t > 0.$
- $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \psi(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \psi(t) = +\infty.$

Donc la condition deux confirme que ψ est strictement convexe, et de plus on peut l'écrire comme suite :

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^x \psi^{''}(y) dy dx \tag{2.19}$$

2.4.7 Conditions de qualification d'une fonction noyau

Définition 2.4.2.
Une fonction noyau ψ est dite qualifie si les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$t\psi''(t)+\psi'(t) > 0, \quad t<1. \tag{2.20}$$
$$t\psi''(t)-\psi'(t) > 0, \quad t>1. \tag{2.21}$$
$$\psi'''(t) < 0, \quad t>1. \tag{2.22}$$
$$2[\psi''(t)]^2-\psi'(t)\psi'''(t) > 0, \quad t<1. \tag{2.23}$$
$$\psi''(t)\psi'(\beta t)-\beta\psi'(t)\psi''(t) > 0, \quad t>1, \quad \beta>1. \tag{2.24}$$

Nous signalons que les quatre premières conditions sont logiquement indépendantes et que la cinquième condition est une conséquence de (2.21) et (2.22) Les trois prochains lemmes sont vérifiés si les trois conditions (2.20), (2.21) et (2.22) sont satisfaites.

Lemme 2.4.3. *[14]*
Soit ψ une fonction deux fois différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\psi(\sqrt{t_1t_2}) \leq \frac{\psi(t_1)+\psi(t_2)}{2} \quad , t_1, t_2 > 0$
2. *la fonction ϕ définie par $\phi(\xi)=\psi(e^{\xi})$ est convexe.*
3. $t\psi''(t)+\psi'(t)>0, \quad t>0$

Démonstration.
Montrons que (1) $\Leftrightarrow$ (2), nous savons que la fonction $\phi(\xi)=\psi(e^{\xi})$ est une fonction continue, donc pour qu'elle soit convexe, il suffit qu'elle soit mid-convexe. Donc pour $t_1, t_2>0$ on a :

$$\begin{aligned}\psi(\sqrt{t_1t_2}) \leq \frac{\psi(t_1)+\psi(t_2)}{2} &\Leftrightarrow \phi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)=\psi(\sqrt{e^{\xi_1}e^{\xi_2}}) \leq \frac{\psi(e^{\xi_1})+\psi(e^{\xi_2})}{2}\\ &\Leftrightarrow \phi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)=\frac{\phi(\xi_1)+\phi(\xi_2)}{2}\forall \xi_1=t_1, \xi_2=t_2 \in R\\ &\Leftrightarrow \phi \quad est \quad mid-convexe\end{aligned}$$

Concernant l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3)

$$\begin{aligned}\phi \quad est \quad convexe &\Leftrightarrow \phi''(\xi)=[\psi(e^{\xi})]''=[\psi'(e^{\xi})+e^{\xi}\psi''(e^{\xi})]e^{\xi} \geq 0 \quad \forall \xi \in R\\ &\Leftrightarrow [t\psi''(t)+\psi'(t)]t \geq 0, \quad t>0, \quad pour \quad t=e^{\xi}\\ &\Leftrightarrow t\psi''(t)+\psi'(t) \geq 0, \quad t>0\end{aligned}$$

□

Lemme 2.4.4. *[13]*
Soit ψ une fonction deux fois différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes ;

1. $\psi\left(\sqrt{\frac{\varsigma_1^2+\varsigma_2^2}{2}}\right) \leq \frac{\psi(\varsigma_1)+\psi(\varsigma_2)}{2} \quad ,\varsigma_1,\varsigma_2 > 0.$
2. *La fonction ϕ définie par $\phi(t) = \psi(\sqrt{t})$ est convexe $\forall t > 0$.*
3. $t\psi^{''}(t) + \psi^{'}(t) \geq 0, \quad t > 0.$

Soit $\varrho : [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$, la fonction inverse de $\psi(t)$, $t \geq 1$.
Et soit $\rho : [0,+\infty[\longrightarrow]0,1]$ la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi^{'} t)$ pour toutes $t \in]0,1]$.

$$s = \psi(t) \Leftrightarrow t = \varrho(s), \quad _{\geq}0$$

$$s = -\frac{1}{2}\psi^{'}(t) \Leftrightarrow t = \rho(s).$$

Dans la suite on suppose que ψ est une fonction noyau qualifie.

Théorème 2.4.1.
soit $v \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $\beta > 1$ on a

$$\Phi(\beta v) \leq n\psi\left(\beta\varrho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right)$$

Démonstration.
La démonstration dépend de la condition (2.24), et la démonstration en détails du théorème énoncé à la page 13 dans [36] . □

Corollaire 2.4.1.
Si $\Phi(v) \leq \tau$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$, alors après la mise à jour de μ, La quantité $n\psi\left(\beta\varrho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right)$ est une borne supérieure de $\Phi(v) = \Phi(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}})$.Comme ϱ est croissent, alors

$$\Phi(v) \leq \tau \Leftrightarrow \varrho\left(\Phi(\frac{v}{n}\right) \leq \varrho(\frac{\tau}{n})$$

Et donc pour tout vecteur positif v, si $\Phi(v) \leq \tau$ et $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} > 1$, alors

$$\Phi_0 \leq L(n,\theta,\tau) = n\psi\left(\frac{\varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}}\right)$$

Φ_0 : désigne la valeur de $\Phi(v)$ après la mise à jour de μ.

Chapitre 3

MÉTHODE DE TRAJECTOIRE CENTRALE BASÉ SUR UNE NOUVELLE FONCTION NOYAU PARAMÉTRIQUE POUR PL

On considère le problème d'optimisation linéaire (LO) comme ci-dessous :

$$(P)\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b, \quad x \geq 0\}. \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que : $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $\quad b \in \mathbb{R}^m$; $\quad c \in \mathbb{R}^n$ avec $m \leq n$. Nous supposons que A est de plein rang ($rang(A) = m \leq n$). Le problème dual (D) associé à (P) est :

$$\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + s = c, \quad s \geq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

tel que : $y \in \mathbb{R}^m$; $\quad s \in \mathbb{R}^n$
nous supposons sans perte de généralité que le problème primal (P) et son problème dual (D) qui satisfait à la condition du point intérieur (IPC), c'est-à-dire qu'il existe (x^0, y^0, s^0) tel que :

$$\begin{cases} Ax^0 = b; \quad x^0 > 0 \\ A^T y^0 + s^0 = c; \quad s^0 > 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

la IPC assuré l'existence de la solution optimale x^* de (P) et (y^*, s^*) solutions de (D) tel que :

$$c^T x^* = b^T y^* = x^* s^* = 0$$

Par conséquent, en appliquant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker à (P) et (D) nous obtenons le system suivante :

$$\begin{cases} Ax = b \quad , x \geqslant 0 \\ A^T y + s = c \quad , y, s \geqslant 0 \\ xs = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Il est bien connu que trouver une solution optimale de (P) and (D) est équivaut à résoudre(3.4). L'idée de base des primal-dual IPM est de remplacer la troisième équation dans(3.4), la condition dite de complémentarité pour (P) et (D), par l'équation paramétré e$xs = \mu e$, avec $\mu > 0$. On considère donc le système :

$$\begin{cases} Ax = b \quad , x \geqslant 0 \\ A^T y + s = c \quad , y, s \geqslant 0 \\ xs = \mu e \end{cases} \tag{3.5}$$

Ce système a une solution unique désignée par $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$; pour chaque $\mu > 0$; grâce au fait que A est de rang plein. La solution s'appelle le μ-centre de (P) et (D).De plus, quand $\mu \to 0$; la limite du chemin central existe et donne des solutions optimales pour (P) et (D). D'un point de vue théorique, l'IPC peut être supposé sans perte de généralité. En fait, nous pouvons supposer, et nous supposerons que $x^0 = s^0 = e$. En pratique, cela peut être réalisé en intégrant les problèmes (P) et (D) donnés dans un problème primal-dual homogène, qui a deux variables supplémentaires et deux contraintes supplémentaires. Pour cela et les autres propriétés mentionnées ci-dessus (voir[4]). Les IPM suivent approximativement le chemin central. Nous décrivons brièvement l'approche habituelle. Sans perte de généralité, nous supposons que $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ est connu pour un positifs μ. par exemple, en raison de l'hypothèse ci-dessus, nous pouvons supposer cela pour $\mu = 1$, avec $x(1) = s(1) = e$. On diminue alors μ à $(1-\theta)\mu$ pour un fixé $\theta \in]0,1[$, et on résout le système de Newton suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0 \\ A^T \Delta y + \Delta s = 0 \\ s\Delta x + x\Delta s = \mu e - sx \end{cases} \tag{3.6}$$

Ce système définit de manière unique une direction de recherche $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$. En pose un grand pas dans la direction de recherche, la taille du pas étant définie par une ligne règles de recherche, nous construisons un nouveau triplet (x, y, s). Si nécessaire, nous répétons la procédure jusqu'à ce que nous trouvions des itérations qui sont "close" à $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$. Après μ est à nouveau réduit du facteur $(1-\theta)$, et nous appliquons la méthode de Newton ciblant le nouveau $\mu-$ centres, et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à ce que μ est assez petit, disons jusqu'à ce que $n\mu \leq \epsilon$; à ce point, nous avons trouvé un $\epsilon-$ solution des problèmes (P) et (D). Le résultat d'un pas de Newton avec une taille de pas α est noté par :

$$\begin{cases} x^+ = x + \alpha\Delta x \\ y^+ = y + \alpha\Delta y \\ s^+ = s + \alpha\Delta s \end{cases} \tag{3.7}$$

où la taille du pas α satisfis $0 < \alpha \leq 1$. Maintenant, nous introduisons le vecteur v et les directions de recherche d_x and d_s comme suit :

$$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}} d_x = \frac{v\Delta x}{x} d_s = \frac{v\Delta s}{s}.. \tag{3.8}$$

En utilisant ces notations, le système (3.6) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0 \\ \bar{A}^T\Delta y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = v^{-1} - v \end{cases} \tag{3.9}$$

tel que $\bar{A} = \frac{1}{\mu}AV^{-1}X$, $V = diag(v)$, $X = diag(x)$. Notez que le membre de droite de la troisième équation de (3.9) est égal au gradient négatif de la fonction barrière logarithmique $\Phi_L(v)$, c-à-d, $d_x + d_s = -\nabla\Phi_L(v)$, système(3.9) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0 \\ \bar{A}^T\Delta y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = -\nabla\Phi_L(v) \end{cases} \tag{3.10}$$

où la fonction barrière $\Phi_L(v) : R^n_{++} \to R_+$ est défini comme suit :

$$\Phi_L(v) = \Phi_L(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \psi_L(v_i)$$
$$\psi_L(v_i) = \frac{v_i^2 - 1}{2} - \log(v_i)$$

On utilise $\Phi_L(v)$ comme fonction de proximité pour mesurer la distance entre l'itération actuelle et le μ -centre pour donné $\mu > 0$. Nous définissons également la mesure de proximité basée sur les normes , $\delta(v) : R^n_{++} \to R^+$, comme suite :

$$\delta(v) = \tfrac{1}{2} \parallel \nabla\Phi_L(v) \parallel = \tfrac{1}{2} \parallel d_x + d_s \parallel \qquad (a)$$

Depuis $\Phi_L(v)$ est strictement convexe et atteint sa valeur minimale de zéro à $v = e$, on a :

$$\nabla\Phi_L(v) = 0 \Leftrightarrow \delta(v) = 0 \Leftrightarrow v = e$$

IPM Primal-dual génériques pour LO

Entrée :
Une fonction proximité $\Phi(v)$;
Un paramètre de limite $\tau > 1$;
Un paramètre de précision $\varepsilon > 0$;
Un paramètre de mise à jour fixe θ ,$0 < \theta < 1$;
Début :
$x = e; \quad s = e; \quad \mu = 1; \quad v = e.$
Tanque $n\mu \geq \epsilon$ **faire**
Début(itération externe)
$\mu = (1-\theta)\mu$;
Tanque $\Phi(x,s,\mu) > \tau$ **faire**
Début(itération interne)
résoudre le système (3.10), $\Phi_L(v)$ remplacé par $\Phi(v)$ pour obtient $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$;
Calculer le pas de déplacement α ; et pose ;
$x = x + \alpha\Delta x; \quad y = y + \alpha\Delta y; \quad s = s + \alpha\Delta s.$
$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$
Fin(itération interne)
Fin(itération externe)
Fin

FIGURE 3.1 – Algorithme générique

on appel $\psi_L(t)$ la fonction noyau de la fonction barrière logarithmique $\Phi_L(v)$. Dans cette chapitre, nous remplaçons $\psi_L(t)$ par une nouvelle fonction noyau $\psi(t)$ et $\Phi_L(v)$ par une nouvelle fonction barrière $\Phi(v)$, qui sera défini dans la section 3.1 . Notez que la paire (x,s) coïncidé avec le μ-centre $(x(\mu),s(\mu))$ si et seulement si $v = e$. C'est clair d'après la description de cette proximité de (x,s) à $(x(\mu),s(\mu))$ est mesuré par la valeur de $\Phi(v)$ avec $\tau > 0$ comme valeur seuil. Si $\Phi(v) \leq \tau$, puis nous commençons une nouvelle itération externe en effectuant une μ-mise à jour; sinon, nous entrons dans une itération interne en calculant les directions de recherche aux itérations actuelles par rapport à la valeur actuelle de μ et appliquons (3.7) pour obtenir de nouvelles itérations. Si nécessaire, nous répétons la procédure jusqu'à ce que nous trouvions des itérations proches de $(x(\mu),s(\mu))$. Donc μ est à nouveau réduit du facteur $(1-\theta)$ avec $0 < \theta < 1$, et nous appliquons la méthode de Newton obtenons le nouveau μ -centres, et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à ce que μ est assez petit, disons jusqu'à ce que $n\mu < \epsilon$; à cette étape, nous avons trouvé un ϵ-solution approximative de LO. les paramètres τ , θ et la taille du pas α doit être choisi de telle manière que l'algorithme soit optimisé dans le sens où le nombre d'itérations requis par l'algorithme est aussi petit que possible. Le choix du paramètre dit mise à jour paramètre des barrières θ joue un rôle important dans la théorie et la pratique des IPM . Habituellement, si θ est une constante indépendante de la dimension n du problème, par exemple, $\theta = \frac{1}{2}$, alors nous appelons l'algorithme à un grand-pas méthode. Si θdépend de la dimension du problème, comme $\theta = \frac{1}{n}$, alors l'algorithme est appelé méthode à un petit-pas . La forme générique de l'algorithme est présentée dans la figure 3.1. Dans la plupart des cas, le meilleur résultat de complexité obtenu pour les IPM à petites mises à jour est $\mathbf{O}(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$. pour les méthodes à grand-pas la borne la mieux obtenue est $\mathbf{O}(\sqrt{n}\log n\frac{n}{\epsilon})$, qui jusqu'à présent était la limite la plus connue pour de telles méthodes [36] [13]. Dans ce chapitre , nous définissons une nouvelle fonction noyau avec un terme barrière logarithmique et proposer des méthodes de points intérieurs primal-dual qui améliorent tous les résultats de la complexité liée de la méthode à grand-pas basé sur une fonction de noyau logarithmique pour LO. Plus précisément, sur la base de la fonction noyau proposée, nous prouvons que l'algorithme correspondant a $\mathbf{O}((p+1)n^{\frac{p+2}{2(p+1)}})$ complexité à destination de la méthode à grande pas $\mathbf{O}(p^2\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$ pour la méthode à petit pas. Un autre choix intéressant est p dépendant de n, ce qui minimise la limite de complexité itérative. En fait, si l'on prend $p = \frac{\log n}{2}$, on obtient la complexité la plus connue liée à la méthode à grande pas à savoir $\mathbf{O}(\sqrt{n}\log n\log\frac{n}{\epsilon})$. Cette borne améliore les résultats de complexité obtenus jusqu'à présent pour les méthodes à grande pas basé sur une fonction de noyau logarithmique donnée par El Ghami et al. [18].

3.1 Propriétés de la fonction noyau et de la fonction barrière

3.1.1 Propriétés de la nouvelle fonction noyau

Dans cette section, nous donnons d'abord quelques propriétés de la nouvelle fonction noyau qui sont essentielles à notre analyse de complexité. Ensuite, nous montrons son éligibilité. Enfin, nous étudions l'effet de la mise à jour du paramètre barrière μ sur la valeur de la fonction de proximité et de la mesure de proximité basée sur notre fonction noyau. On dit que $\psi(t) : R_{++} \to R_+$ est une fonction noyau si ψ est deux fois différentiable et satisfait aux conditions suivantes :
$\psi(1) = \psi^{'}(1) = 0 \quad , \lim_{t\to+\infty}\psi(t) = \lim_{t\to0^+}\psi(t) = +\infty.$

Maintenant, nous définissons une nouvelle fonction $\psi(t)$ comme suite :

$$\psi(t) = \frac{t^2-1}{2} - \frac{\log(t)}{2} + \frac{t^{-p}-1}{2p} \quad ; \quad p>0 \tag{3.11}$$

Donc, pour tout , $v \in R^n_{++}$ on a

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2-1}{2} - \frac{\log(v_i)}{2} + \frac{v_i^{-p}-1}{2p} \quad ; \quad p>0 \tag{3.12}$$

Dans l'analyse de l'algorithme basé sur $\psi(t)$, nous avons besoin de ses trois premières dérivées. Ceux-ci sont donnés par :

$$\psi^{'}(t) = t - \frac{1}{2t} - \frac{pt^{-p-1}}{2p} = t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2t^{p+1}} \tag{3.13}$$

$$\psi^{''}(t) = 1 + \frac{1}{2t^2} + \frac{p+1}{2t^{p+2}} \tag{3.14}$$

$$\psi^{'''}(t) = -\frac{1}{t^3} - \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+3}} = -\left[\frac{1}{t^3} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+3}}\right] \tag{3.15}$$

De (3.14) on a

$$\psi^{''}(t) > 1 \quad t>0; \quad p>0 \tag{3.16}$$

Il s'ensuit que $\psi(1) = \psi^{'}(1) = 0$, on peut facilement vérifier que :
$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \lim_{t\to 0^+} \psi(t) = +\infty$.
D'après les conditions $\psi(1) = \psi^{'}(1) = 0$, nous pouvons décrire $\psi(t)$ par sa dérivée seconde comme suit :

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^x \psi^{''}(y)dydx \tag{3.17}$$

Ainsi la fonction $\psi(t)$ est une fonction du noyau.
Le lemme suivant sert à prouver que la nouvelle fonction du noyau $\psi(t)$ est une fonction noyau éligible selon Bai et al (voir [36]).

3.1.2 Éligibilité de la nouvelle fonction noyau :

Lemme 3.1.1.
Soit la fonction $\psi(t)$ définit dans (3.11). Alors, on a :

$$t\psi^{''}(t) + \psi^{'}(t) > 0, \quad t<1. \tag{3.18}$$

$$t\psi^{''}(t) - \psi^{'}(t) > 0, \quad t > 1. \tag{3.19}$$

$$\psi^{'''}(t) < 0, \quad t > 1. \tag{3.20}$$

$$2[\psi^{''}(t)]^2 - \psi^{'}(t)\psi^{'''}(t) > 0, \quad t < 1. \tag{3.21}$$

$$\psi^{''}(t)\psi^{'}(\beta t) - \beta\psi^{'}(t)\psi^{''}(t) > 0, \quad t > 1, \quad \beta > 1. \tag{3.22}$$

La fonction noyau $\psi(t)$ est dit éligible s'il satisfait (3.18) à (3.22). Il a également été montré que (3.19) et (3.20) implique (3.22) d'après (Lemma 2.4 in Bai et al., 2004)[36]. Vérifiez donc uniquement les conditions de (3.18) à (3.21)

Démonstration.
Pour (3.18) on utilise (3.13) et (3.14), il s'ensuit que,
$t\psi^{''}(t) + \psi^{'}(t) = t + \frac{1}{2t} + \frac{p+1}{2t^{p+1}} + t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2t^{p+1}} = 2t + \frac{p}{2t^{p+1}} > 0 \quad , t < 1, \quad p > 0.$

Cela prouve cette condition (3.18) est satisfait. D'autre part nous avons :

$t\psi^{''}(t) - \psi^{'}(t) = t + \frac{1}{2t} + \frac{p+1}{2t^{p+1}} - t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t^{p+1}} = t + \frac{p+1}{2t^{p+2}} > 0 \quad , t > 1, \quad p > 0.$

Prouvant que (3.19) est également satisfait.

Pour (3.20) il est clear d'après (3.15), on a :

$\psi^{'''}(t) = -\left[\frac{1}{t^3} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+3}}\right] < 0 \quad , t > 1 \quad , p > 0$

Enfin pour (3.21), on a :

$$2\left[\psi^{''}(t)\right]^2 = 2 + \frac{1}{2t^4} + \frac{2}{t^2} + \frac{(p+1)^2}{2t^{2p+4}} + \frac{(2t^2+1)(p+1)}{t^{p+4}}$$

Et

$$-\psi^{'''}(t)\psi^{'}(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t^4} - \frac{1}{2t^{p+4}} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+2}} - \frac{(p+1)(p+2)}{4t^{p+4}} - \frac{(p+1)(p+2)}{4t^{2p+4}}$$

Alors

$$\begin{aligned}
2[\psi^{''}(t)]^2 - \psi^{'''}(t)\psi^{'}(t) &= 2 + \frac{1}{2t^4} + \frac{2}{t^2} + \frac{(p+1)^2}{2t^{2p+4}} + \frac{(2t^2+1)(p+1)}{2t^{p+4}} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t^4} - \frac{1}{2t^{p+4}} \\
&+ \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+2}} - \frac{(p+1)(p+2)}{4t^{p+4}} - \frac{(p+1)(p+2)}{4t^{2p+4}} \\
&= 2 + \frac{3}{t^2} + \frac{2(p+1)^2 - (p+1)(p+2)}{4t^{2p+4}} \\
&+ \frac{4(2t^2+1)(p+1) - 2 - (p+1)}{4t^{p+4}} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+2}} \\
&= 2 + \frac{3}{t^2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+2}} + \frac{(p+1)[2(p+1)-(p+2)]}{4t^{2p+4}} \\
&+ \frac{4(2pt^2+2t^2+p+1) - 2 - p^2 - 3p - 2}{4t^{p+4}} \\
&= 2 + \frac{3}{t^2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+2}} + \frac{(p+1)[2p+2-p-2]}{4t^{2p+4}} \\
&+ \frac{8pt^2 + 8t^2 + 4p + 4 - 4 - p^2 - 3p}{4t^{p+4}} \\
&= 2 + \frac{3}{t^2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+2}} + \frac{p(p+1)}{4t^{2p+4}} + \frac{8pt^2 + 8t^2 + p - p^2}{4t^{p+4}} \\
&= 2 + \frac{3}{t^2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+2}} + \frac{p(p+1)}{4t^{2p+4}} + \frac{2t^2}{t^{p+4}} + \frac{p(8t^2-p+1)}{2t^{p+4}}
\end{aligned}$$

La condition (3.21) satisfaite pour $p > 0$. Alors $2[\psi^{''}(t)]^2 - \psi^{'}(t)\psi^{'''}(t) > 0$ si

$$\tfrac{p(8t^2-p+1)}{2t^{p+4}} > 0 \Leftrightarrow p(8t^2 - p + 1) > 0$$

Cela est certainement vrai si :

$$8t^2 - p + 1 > 0 \Leftrightarrow t^2 > \frac{p-1}{8} \Leftrightarrow t > \sqrt{\frac{p-1}{8}}$$

□

Il s'agit d'une inégalité valable puisque $0 < t \leqslant 1$ comme on peut facilement le vérifier. Alors $\psi(t)$ satisfait également à la condition (3.21).

Remarque 3.1.1.
La propriété (3.18) dans le lemme 3.1.1 équivaut à la convexité des fonctions composées.

$$t \to \psi(\exp(t))$$

et cela est vrai si seulement si

$$\psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \frac{\psi(t_1)+\psi(t_2)}{2}$$

Cette propriété est connue dans la littérature, et elle a été démontrée par plusieurs chercheurs (voir [20]).

Ensuite, nous présentons quelques résultats techniques de la nouvelle fonction du noyau.

Lemme 3.1.2.
Pour $\psi(t)$, on a

1. *$\psi(t)$ est exponentiellement convexe pour tout $t > 0$, alors*

   $\psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \frac{\psi(t_1)+\psi(t_2)}{2} \quad , t_1, t_2 > 0$
2. $\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \psi(t) \leq \frac{1}{2}(\psi^{'}(t))^2 \quad , t > 0$
3. $\psi(t) \leq \frac{4+p}{4}(t-1)^2$

Démonstration.
Pour 1. c'est clair de la remarque 3.1.1.
Pour 2. en utilisant (3.16) et (3.17), on a

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^x \psi^{''}(y)dydx \geq \int_1^t \int_1^x 1dydx = \int_1^t (x-1)dx = [\frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2} + 1] = \frac{1}{2}(t-1)^2.$$

ensuite, on a

$$\begin{aligned}\psi(t) = \int_1^t \int_1^x \psi^{''}(y)dydx &\leq \int_1^t \int_1^x \psi^{''}(x)\psi^{''}(y)dydx.\\ \leq \int_1^t \psi^{''}(x)\psi^{'}(x)dx. &\leq \int_1^t \psi^{'}(x)d(\psi^{'}(x))dx. \leq \frac{1}{2}[\psi^{'}(x)]^2.\end{aligned}$$

Enfin

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \psi(t) \leq \frac{1}{2}(\psi^{'}(t))^2 \quad , t > 0$$

Pour 3. en utilisant le développement de Taylor et le fait que

$$\psi(1) = \psi^{'}(1) = 0, \quad \psi^{''}(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{p+1}{2} = \frac{4+p}{2}, \quad \psi^{'''}(t) < 0 \quad , t > 0 \quad , p > 0$$

$$\psi(t) = \psi(1) + (t-1)\psi^{'}(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2\psi''(1) + \frac{1}{6}(t-1)^3\psi^{'''}(\xi).$$
$$= \frac{1}{2}(t-1)^2\left(\frac{4+p}{2}\right) + \frac{1}{6}(t-1)^3\psi^{'''}(\xi) \leq \left(\frac{4+p}{4}\right)(t-1)^2.$$

pour certains ξ , $1 \leq \xi \leq t$. Ceci termine la preuve. □

Soit $\sigma : [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$ être la fonction inverse de $(\psi(t))$ pour $t \geq 1$ et $\rho : [0,+\infty[\longrightarrow]0,1]$ être la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi^{'}(t)$ pour tous $t \in]0,1]$.

On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.1.3.
Pour $\psi(t)$, on a

$$\sqrt{s+1} \leq \sigma(s) \leq 1 + \sqrt{2s} \quad , s \geq 0. \tag{3.23}$$

$$\rho(a) \geq \left(\frac{1}{4a+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \quad , a \geq 0 \quad , p > 0. \tag{3.24}$$

Démonstration.
Pour (3.23) $s = \psi(t) \quad , t \geq 1$, c à d. $\sigma(s) = t \quad , t \geq 1$
Pour $s = \psi(t) = \frac{t^2-1}{2} - \frac{\log(t)}{2} + \frac{t^{-p}-1}{2p} \quad : \quad p > 0$, on a

$$s = \psi(t) = \frac{t^2-1}{2} + f(t).$$

où $f(t) = \frac{t^{-p}-1}{2p} - \frac{\log(t)}{2}$ la fonction barrière de $\psi(t)$, alors

$$f^{'}(t) = -\frac{1}{2}(t^{-p-1} + \frac{1}{t}) < 0$$

$f(t)$ est strictement décroissant par rapport à $t \geq 1$. et $f(1) = 0$, on a $f(t) \in [-\infty, 0]$. Ceci implique que :

$$s = t^2 - 1 + f(t) \leq t^2 - 1 \Rightarrow s + 1 \leq t^2 \Rightarrow \sigma(s) = t \geq \sqrt{s+1}$$

pour prouver l'inégalité juste, en utilisant 2. dans le lemme 3.1.2, on a pour tout $t \geq 1$,

$$s = \psi(t) \geq \frac{1}{2}(t-1)^2 \Rightarrow 2s \geq (t-1)^2 \Rightarrow \sqrt{2s} + 1 \geq t = \sigma(s)$$

Pour (3.24). Soit $a = -\frac{1}{2}\psi^{'}(t) \quad , t \in]0,1]$ En raison de la définition de ρ , $\rho(a) = t$, et $a \geq 0$

$$2a = \frac{1}{2t} + \frac{t^{-p-1}}{2} - t \Rightarrow \frac{1}{t^{p+1}} = 4a + 2t - t^{-1}$$

car $g : t \to 2t - t^{-1}$, monotone croissant par rapport à $t \in]0,1]$,
$g^{'}(t) = 2 + \frac{1}{t^2} \quad , g(1) = 1$, et ainsi

$$\frac{1}{t^{p+1}} \leq 4a + 1 \Leftrightarrow t^{p+1} \geq \frac{1}{(4a+1)} \Leftrightarrow \rho(a) = t \geq (4a+1)^{\frac{-1}{p+1}} \quad , a \geq 0 \quad , p > 0$$

Ceci complète la preuve. □

Lemme 3.1.4.
Soit $\sigma : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ *être la fonction inverse de* $\psi(t)$ *Pour* $t \geq 1$*, ensuite nous avons*

$$\phi(\beta v) \leq n\psi\left(\beta\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\right), \quad v \in R^n_{++}, \quad \beta \geq 1$$

Démonstration.
On utilise (3.22), et théorème 3.2 in [36], nous pouvons obtenir le résultat. Ceci complète le preuve. □

Lemme 3.1.5.
Soit $0 \leq \theta \leq 1, \quad v^+ = \frac{v}{\sqrt{1-\theta}}$*, si* $\phi(v) \leq \tau$*, ensuite nous avons*

$$\phi(v^+) \leq \frac{p+4}{4(1-\theta)}(\sqrt{2\tau} + \theta\sqrt{n})^2 \tag{3.25}$$

$$\phi(v^+) \leq \frac{\tau + \theta(\tau + n + 2\sqrt{2n\tau})}{1-\theta} \tag{3.26}$$

Démonstration.
Pour (3.25), on a $0 \leq \theta \leq 1$, alors $0 \leq 1-\theta \leq 1$ depuis $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$, et $\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right) \geq 1$, alors $\frac{\sigma(\frac{\phi(v)}{n})}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$, en utilisant le lemme 3.1.4 avec $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$

$$\phi\left(\beta v\right) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \times v = v+\right) \leq n\psi\left(\frac{\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}}\right)$$

En utilise 3 dans le lemme (3.1.2)

$$\phi(v+) \leq n\left(\frac{p+4}{4}\right)\left(\frac{\sigma(\frac{\phi(v)}{n})}{\sqrt{1-\theta}} - 1\right)^2 \leq \frac{n}{1-\theta}\left(\frac{p+4}{4}\right)\left(\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right) - \sqrt{1-\theta}\right)^2$$

En utilisant (3.23), on a

$$\phi(v+) \leq \frac{n}{1-\theta}\left(\frac{p+4}{4}\right)\left(\sqrt{\frac{2\phi(v)}{n}}+1-\sqrt{1-\theta}\right)^2 = \frac{n}{1-\theta}\left(\frac{p+4}{4}\right)\left(\sqrt{\frac{2\phi(v)}{n}}+\frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}}\right)^2$$

Avec $\phi(v) \leq \tau$ et $\frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}} < \theta$

$$\phi(v+) \leq \frac{n}{1-\theta}\left(\frac{p+4}{4}\right)\left(\sqrt{\frac{2\tau}{n}}+\frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}}\right)^2 \leq \frac{p+4}{4(1-\theta)}(\sqrt{2\tau}+\theta\sqrt{n})^2$$

Pour (3.26), nous avons ce lemme

Lemma*.
Soit $\beta \geq 1$, alors $\psi(\beta t) \leq \psi(t) + (\beta^2-1)t^2$

Démonstration.
en utilisant $f(t)$ définir dans la preuve du lemme 3.1.3, on a $f(\beta t) - f(t) \leq 0$, pour tout $\beta \geq 1$, ainsi

$$\begin{aligned}\psi(\beta t) = \frac{\beta^2 t^2}{2} + f(\beta t) + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + f(t) - \frac{t^2}{2} - f(t) &= \frac{\beta^2-1}{2}t^2 + f(\beta t) + \psi(t) - f(t) \\ &\leq \frac{\beta^2-1}{2}t^2 + \psi(t) \leq (\beta-1)t^2 + \psi(t)\end{aligned}$$

Ceci complète cette preuve. □

Maintenant, pour (3.26) en utilisant le lemme 3.1.4 et le lemme* et (3) dans le lemme 3.1.2, avec $\phi(v) \leq \tau$, et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$, on obtient l'autre limite supérieure de $\psi(v)$ comme suit :

$$\begin{aligned}\phi(v^+) &\leq n\psi\left(\frac{\sigma(\frac{\phi(v)}{n})}{\sqrt{1-\theta}}\right) \\ &\leq n\psi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\right) \\ &\leq n\left(\psi\left(\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}-1\right)\sigma^2\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\right) \\ &\leq n\psi\left(\sigma\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\right) + \frac{n\theta}{1-\theta}\sigma^2\left(\frac{\phi(v)}{n}\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\phi(v^+) &\leq n\frac{\phi(v)}{n} + \frac{n\theta}{1-\theta}[\sqrt{\frac{2\phi(v)}{n}}+1]^2 \\
&\leq \phi(v) + \frac{n\theta}{1-\theta}[\sqrt{\frac{2\phi(v)}{n}}+1]^2 \\
&\leq \tau + \frac{n\theta}{1-\theta}[\sqrt{\frac{2\tau}{n}}+1]^2 \\
&\leq \tau + \frac{n\theta}{1-\theta}(\frac{2\tau}{n}+1+2\sqrt{\frac{2\tau}{n}}) \\
&\leq \tau + \frac{1}{1-\theta}(2\theta\tau + n\theta + 2\theta\sqrt{2n\tau}) \\
&= \frac{\tau(1+\theta)+\theta(n+2\sqrt{2n\tau})}{1-\theta}
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Dénoter

$$\bar{\phi}_0 = \frac{p+4}{4(1-\theta)}(\sqrt{2\tau}+\theta\sqrt{n})^2 \tag{3.27}$$

$$(\phi)_0 = \frac{\tau+\theta(\tau+n+2\sqrt{2n\tau})}{1-\theta} = \frac{\tau(1+\theta)+\theta(n+2\sqrt{2n\tau})}{1-\theta}$$

Alors $(\phi)_0$ est une borne supérieure pour $\psi(v^+)$ pendant le processus de l'algorithme.

3.1.3 Détermination du pas

Dans cette section, nous calculons une taille de pas par défaut α et la diminution qui en résulte de la fonction barrière. Après un pas amorti, nous avons

$$x^+ = x + \alpha\Delta x, \quad y^+ = y + \alpha\Delta y, \quad s^+ = s + \alpha\Delta s$$

En utilisant (3.8), nous avons

$$x^+ = x(e+\alpha\frac{\Delta x}{x}) = x(e+\alpha\frac{dx}{v}), \quad s^+ = s(e+\alpha\frac{\Delta s}{s}) = s(e+\alpha\frac{ds}{v})$$

Alors on a $v^+ = \sqrt{\frac{x^+s^+}{\mu}} = \sqrt{(v+\alpha dx)(v+\alpha ds)}$
Définir pour $\alpha > 0$, $\quad f(\alpha) = \phi(v^+) - \phi(v)$

Alors $f(\alpha)$ est la différence de proximités entre un nouvel itéré et un courant itérer pour un μ fixe. D'après 1. dans le lemme3.1.2 nous avons :

$$\phi(v^+) = \phi(\sqrt{(v+\alpha dx)(v+\alpha ds)}) \leq \frac{\phi(v+\alpha dx)+\phi(v+\alpha ds)}{2}$$

Par conséquent, nous avons $f(\alpha) \leq f_1(\alpha)$, où

$$f_1(\alpha) = \frac{\phi(v+\alpha dx)+\phi(v+\alpha ds)}{2} - \phi(v) \tag{3.28}$$

Évidemment, $f(0) = f_1(0) = 0$. En prenant les deux premières dérivées de $f_1(\alpha)$ en ce qui concerne α , on a

$$\begin{aligned} f_1^{'}(\alpha) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\psi^{'}(v_i+\alpha d_{x_i})d_{x_i} + \psi^{'}(v_i+\alpha d_{s_i})d_{s_i}\Big) \\ f_1^{''}(\alpha) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\psi^{''}(v_i+\alpha d_{x_i})d_{x_i}^2 + \psi^{''}(v_i+\alpha d_{s_i})d_{s_i}^2\Big) \end{aligned}$$

où d_{x_i}, et d_{s_i} désignent les composantes des vecteurs d_x et d_s. En utilisant (3.10) et $\delta(v)$ être tel que défini dans (a) 3, on a

$$f^{'}(0) = \frac{1}{2}\langle\nabla\phi(v), (d_x+d_s)\rangle = -\frac{1}{2}\langle\nabla\phi(v), \nabla\phi(v)\rangle = -2\delta(v)^2$$

Pour convenance , nous désignons $v_1 = min(v), \quad \delta = \delta(v), \quad \phi = \phi(v)$.
Les résultats suivants introduisent les conditions sur α dans lequel nous avons $f_1(\alpha) \leq 0$ ce qui implique que la fonction $f(\alpha)$ diminue au cours d'une itération interne en utilisant le fait que $f(0) = f_1(0) = 0$ et $f(\alpha) \leq f_1(\alpha)$.

Lemme 3.1.6.
Soit $\delta(v)$ être tel que défini dans (a) 3, ensuite nous avons

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}\phi(v)} \tag{3.29}$$

Démonstration.
En utilisant 2. dans le lemme 3.1.2

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^{n}\psi(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\psi^{'}(v_i))^2 = \frac{1}{2}\|\nabla\phi(v)\|^2 = 2\delta(v)^2$$

□

Remarque 3.1.2.
Tout au long de qui ce suite, nous supposons que $\tau \geq 1$, Utiliser le lemme 3.1.6 et $\phi(v) \geq \tau$ on a :

$$\delta(v) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v \in R^n_{++}$$

De Lemmes 4.1–4.4 in [36], on a les lemmes suivants 7–3.10, car $\psi(t)$ est la fonction du noyau et $\psi^{''}(t)$ est décroissant de façon monotone.

Lemme 3.1.7.
[36], Soit $f_1(\alpha)$ être tel que défini dans l'inégalité (3.29) et $\delta(v)$ être tel que défini dans(a). Ensuite nous avons $f_1(\alpha) \leq 2\delta^2(v_{min} - 2\alpha\delta)$. Depuis $f_1(\alpha)$ est convexe, on aura $f_1(\alpha) \leq 0$ pour tout α inférieur ou égal à la valeur où $f_1(\alpha)$ est minime, et vice versa.

Le lemme précédent conduit aux trois lemmes suivants :

Lemme 3.1.8.
[36], Let $f_1^{'}(\alpha) \leq 0$

$$\psi'(v_{min}) - \psi^{'}(v_{min} - 2\alpha\delta) \leq 2\delta \tag{3.30}$$

Lemme 3.1.9.
[36], Soit $\rho : [0, +\infty[\longrightarrow]0, 1]$ être la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi^{'}(t)$ La plus grande taille de pas $\overline{\alpha}$ holding (3.30) est donné par :

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{2\delta}(\rho(\delta) - \rho(2\delta)).$$

Lemme 3.1.10.
[36], Soit $\overline{\alpha}$ être tel que défini dans le lemme 3.1.9, alors

$$\overline{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}.$$

Lemme 3.1.11.
Soit $\overline{\alpha}$ et ρ être tel que défini dans le lemme 3.1.10. Si $\phi(v) \geq \tau \geq 1$, ensuite nous avons

$$\overline{\alpha} \geq \frac{2}{2 + (p+2)(8\delta + 1)^{\frac{p+2}{p+1}}}$$

Démonstration.
On applique le lemme 3.1.10 , aussi le lemme 3.1.3 et l'inégalité (3.24), on a

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha} &\geq \frac{1}{2\psi''(\rho 2\delta))} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{2(\rho(2\delta))^2}+\frac{p+1}{2(\rho(2\delta))^{p+2}}} \\
&\geq \frac{1}{1+\frac{1}{2(\frac{1}{4(2\delta)+1})^{\frac{2}{p+1}}}+\frac{p+1}{2(\frac{1}{4(2\delta)+1})^{\frac{p+2}{p+1}}}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{(8\delta+1)^{\frac{2}{p+1}}}{2}+\frac{(p+1)(8\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}}{2}} \\
&= \frac{2}{2+(8\delta+1)^{\frac{2}{p+1}}+(p+1)(8\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}} \\
&\geq \frac{2}{2+(p+2)(8\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}}
\end{aligned}$$

Avec $(8\delta+1)^{\frac{2}{p+1}} < (8\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}, \quad p \in R^+$ □

Dénoter

$$\tilde{\alpha} = \frac{2}{2+(p+2)(8\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}} \tag{3.31}$$

Nous avons que $\tilde{\alpha}$ est la taille de pas par défaut et que $\tilde{\alpha} \leq \overline{\alpha}$.
Le lemme suivant montre que notre fonction de proximité ϕ avec la taille de pas par défaut $\tilde{\alpha}$ diminue.

Lemme 3.1.12. *[13]*
Soit h être une fonction convexe deux fois différentiable avec $h(0) = 0$, $h^{'}(0) < 0$, qui atteint son minimum à $t^* > 0$. Si h est en augmentation pour $t \in [0, t^*]$, alors

$$h(t) \leq \frac{th(0)}{2}, \quad 0 \leq t \leq t^*$$

Lemme 3.1.13.
[20] Si la taille du pas α satisfait $\alpha \leq \overline{\alpha}$, alors ,$f(\alpha) \leq -\alpha\delta^2$

Lemme 3.1.14.
Soit $\tilde{\alpha}$ être tel que défini dans (3.31), et $\phi(v) \geq 1$, soit $\phi \geq 1$, alors

$$f(\tilde{\alpha}) \leq \frac{-\sqrt{2}}{104(p+2)}[\phi(v)]^{\frac{p}{2(p+1)}} \tag{3.32}$$

Démonstration.
Depuis $\phi(v) \geq 1$, puis du lemme 3.1.6

$$\delta \geq \sqrt{\frac{1}{2}\phi} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

en utilisant le lemme 13(4.5in[36]), et (3.30), (3.32), avec $\alpha = \tilde{\alpha}$, on a

$$\begin{aligned}
f(\tilde{\alpha}) &\leq -\alpha\delta^2 \\
&= -\frac{2\delta^2}{2 + (p+2)(8\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}} \\
&\leq -\frac{2\delta^2}{2(2\delta) + (p+2)(4(2\delta)+2\delta)^{\frac{p+2}{p+1}}} \\
&\leq -\frac{2\delta^2}{2(2\delta)^{\frac{p+2}{p+1}} + (p+2)(4(2\delta)+2\delta)^{\frac{p+2}{p+1}}} \\
&= -\frac{2\delta^2}{2(2\delta)^{\frac{p+2}{p+1}} + (p+2)(10\delta))^{\frac{p+2}{p+1}}} \\
&= -\frac{2\delta^2}{[2(2)^{\frac{p+2}{p+1}} + (p+2)(10)^{\frac{p+2}{p+1}}]\delta^{\frac{p+2}{p+1}}} \\
&= -\frac{2\delta^{2-\frac{p+2}{P+1}}}{2(2)^{\frac{p+2}{p+1}} + (p+2)(10)^{\frac{p+2}{p+1}}} \\
&\leq -\frac{2\delta^{2-\frac{p+2}{P+1}}}{2(2)^2 + (p+2)(10)^2} \\
&\leq -\frac{2\delta^{2-\frac{p+2}{P+1}}}{(p+2)(2)^2 + (p+2)(10)^2} \\
&\leq -\frac{2\delta^{\frac{p}{P+1}}}{(p+2)104}
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$f(\tilde{\alpha}) \leq -\frac{\sqrt{2}[\phi(v)]^{\frac{p}{2(P+1)}}}{(p+2)104}$$

Ceci termine la preuve. $\square$

3.2 Complexité de l'algorithme

3.2.1 Itération interne

Après la mise à jour de μ à $(1-\theta)\mu$, on a

$$\phi(v^+) \leq (\phi)_0 = \frac{\tau(1+\theta)+\theta(n+2\sqrt{2n\tau})}{1-\theta}$$

Nous devons compter combien d'itérations internes sont nécessaires pour revenir à la situation où $\phi(v) \leq \tau$. Nous notons la valeur de $\phi(v)$ après la mise à jour de μ comme $(\phi)_0$, les valeurs suivantes dans la même itération externe sont notées $(\phi)_k$, $k = 1,2,...,K$, où K désigne le nombre total d'itérations internes dans l'itération externe. La diminution de chaque itération interne est donnée par (3.33). Dans [36], on peut trouver les valeurs appropriées de $\Bbbk$ et $\gamma \in]0,1]$:

$$\begin{aligned} \Bbbk &= \frac{\sqrt{2}}{104(p+2)} \\ \gamma &= 1-\frac{p}{2(P+1)} = \frac{p+2}{2(p+1)} \end{aligned}$$

Lemme 3.2.1.
Soit K être le nombre total d'itérations internes dans l'itération externe. Ensuite nous avons :

$$K \leq 104\sqrt{2}(p+1)[(\phi)_0]^{\frac{p+2}{2(p+1)}}$$

Démonstration.
D'après le lemme 1.3.2 dans [13], on a

$$K \leq \frac{[(\phi)_0]^\gamma}{\Bbbk\gamma} = \frac{[(\phi)_0]^{\frac{p+2}{2(p+1)}}}{\frac{\sqrt{2}}{104(p+2)}\frac{p+2}{2(p+1)}} \leq 104\sqrt{2}(p+1)[(\phi)_0]^{\frac{p+2}{2(p+1)}}$$

Ceci termine la preuve. □

3.2.2 Limite d'itération totale

Le nombre d'itérations externes est limité ci-dessus par $\frac{\log\frac{n}{\epsilon}}{\theta}$ (voir [4] Lemme II.17, page 116). En multipliant le nombre d'itérations externes par le nombre d'itérations internes, nous obtenons une limite supérieure pour le nombre total d'itérations, à savoir :

$$104\sqrt{2}(p+1)[(\phi)_0]^{\frac{p+2}{2(p+1)}}\frac{\log\frac{n}{\epsilon}}{\theta}. \tag{3.33}$$

Pour les algorithmes à grand pas avec $\tau = \mathbf{O}(n)$ et $\theta = \Theta(1)$, on a

$$\mathbf{O}\left((p+1)n^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \log \frac{n}{\epsilon}\right) \quad \textit{iterations} \quad \textit{complexity.}$$

Dans le cas d'algorithme à un petite pas, nous avons $\tau = \mathbf{O}(1)$ et $\theta = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Substitution de ces valeurs dans (3.33) ne donne pas la meilleure limite possible. Une meilleure borne est obtenue dans (3.27), en utilisant cette borne supérieure pour $(\bar{\phi})_0$, nous obtenons l'itération suivante :

$$\frac{1}{\theta} 104\sqrt{2}(p+1)[(\bar{\phi})_0]^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \log \frac{n}{\epsilon} \text{ Pour l'algorithme à petit pas.}$$

On note $(\bar{\phi})_0 = \mathbf{O}(p)$, et la limite d'itération devient

$$\mathbf{O}(p^2\sqrt{n} \log \tfrac{n}{\epsilon}) \text{ complexité de l'itération.}$$

3.3 Comparaison des algorithmes

Dans cette section, nous proposons une comparaison de leur algorithme donné par EL Ghami et al. [18] et mes résultat . Pour prouver l'efficacité de notre nouvelle fonction noyau et évaluer son effet sur le comportement de l'algorithme, nous proposons une comparaison entre les résultats des algorithmes de IPMs, les deux fonctions noyau suivantes.

1. La première fonction noyau, donnée par El Ghami et al. [18], est notée fonction noyau E, définie par

$$\psi_E(t) = \frac{t^{p+1}-1}{1+p} - \log t, \quad p \in [0,1], \quad t > 0$$

2. Notre nouvelle fonction noyau est notée fonction noyau F, définie dans (3.11) par

$$\psi_F(t) = \frac{t^2-1}{2} - \frac{\log(t)}{2} + \frac{t^{-p}-1}{2p}, \quad t > 0, \quad p > 0$$

Nous résumons ces résultats dans les tableaux :

$\psi(t)$	E	F
$\psi^{'}(t)$	$t^p - \frac{1}{t}$	$t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2t^{p+1}}$
$\psi^{''}(t)$	$pt^{p-1} + frac1t^2 > 1$	$1 + \frac{1}{2t^2} + \frac{p+1}{2t^{p+2}} > 1$
$\psi^{'''}(t)$	$-p(1-p)t^{p-2} - \frac{2}{t^3} < 0$	$-[\frac{1}{t^3} + \frac{(p+1)(p+2)}{2t^{p+3}}] < 0$
$t\psi^{''}(t) + \psi^{'}(t) > 0$	$(1+p)t^p > 0$	$2t + \frac{p}{2t^{p+1}} > 0$
$t\psi^{''}(t) - \psi^{'}(t)$	$-(1-p)t^p + \frac{2}{t}$n'est pas toujours positif	$t + \frac{p+1}{2t^{p+2}} > 0$

Table 1 : Les conditions(3.18),(3.19)et(3.20)

Fonction noyau	E	F
La taille de pas par défaut	$\frac{1}{2+(4\delta+1)^2}$	$\frac{2}{2+(p+2)(8\delta+1)^{\frac{p+2}{p+1}}}$
l'algorithme à grand pas	$\mathbf{O}(n \log \frac{n}{\epsilon})$	$\mathbf{O}((p+1)n^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \log \frac{n}{\epsilon})$
l'algorithme à petit pas	$\mathbf{O}(\sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon})$	$\mathbf{O}(p^2 \sqrt{n} \log \frac{n}{\epsilon})$

Table 2 :La taille de pas par défaut et les résultats de complexité pour l'algorithme à grand et à petit pas.

Chapitre 4

UNE NOUVELLE FONCTION NOYAU AVEC UN TERME BARRIÈRE LOGARITHMIQUE EXPONENTIELLE-HYPERBOLIQUE POUR L'OPTIMISATION LINÉAIRE

Dans cette chapitre, En suivant la même procédure que dans le chapitre précédant concernant la pose du problème, l'algorithme et la méthode de trajectoire centrale. Le nouveau traitement dans cette chapitre concerne la nouvelle fonction noyau, leur type et son effet sur les résultats de la méthode.
Nous proposons un algorithme de méthodes de points intérieurs pour résoudre un problème linéaire. L'étude est basée sur la nouvelle fonction noyau avec terme de barrière logarithmique exponentielle-hyperbolique. Nous prouvons que la fonction noyau proposée appartient à la classe éligible introduite par Bai et al. dans [36]. nous présentons quelques résultats numériques pour démontrer l'efficacité de l'algorithme proposé.

4.1 Préliminaires

On considérer le problème LO standard (P) :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Où : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $\quad b \in \mathbb{R}^m$; $\quad c, x \in \mathbb{R}^n$, and($rank(A) = m \leq n$) . Le problème dual (D) associé à (P) est :

$$\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + s = c, \quad s \geq 0 \end{cases}$$

Où : $y \in \mathbb{R}^m$; $\quad s \in \mathbb{R}^n$
Nous supposons que les deux (P) et (D) satisfaire la condition de point intérieur (IPC) ; c'est-à-dire qu'il existe (x_0, y_0, s_0) tel que :

$$\begin{cases} Ax_0 = b, \quad x_0 > 0 \\ A^T y_0 + s_0 = c, \quad s_0 > 0. \end{cases}$$

Par conséquent, en appliquant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker à (P) et (D) on arrive à le système :

$$\begin{cases} Ax = b \quad , x \geqslant 0 \\ A^T y + s = c \quad , y, s \geqslant 0 \\ xs = 0 \end{cases}$$

La méthode de IPM sera appliquée étape par étape comme on a faisons dans le chapitre précédent . De telle manière on obtient le même générique d'algorithme :

IPM Primal-dual génériques pour LO

Entrée :
Une fonction proximité $\Phi(v)$;
Un paramètre de limite $\tau > 1$;
Un paramètre de précision $\varepsilon > 0$;
Un paramètre de mise à jour fixe θ ,$0 < \theta < 1$;
Début :
$x = e; \quad s = e; \quad \mu = 1; \quad v = e.$
Tanque $n\mu \geq \epsilon$ **faire**
Début(itération externe)
$\mu = (1-\theta)\mu$;
Tanque $\Phi(x, s, \mu) > \tau$ **faire**
Début(itération interne)
résoudre le système (3.10), $\Phi_L(v)$ remplacé par $\Phi(v)$ pour obtient $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$;
Calculer le pas de déplacement α ; et pose ;
$x = x + \alpha\Delta x; \quad y = y + \alpha\Delta y; \quad s = s + \alpha\Delta s.$
$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$
Fin(itération interne)
Fin(itération externe)
Fin

Figure 4.1 – Algorithme générique

Automatiquement on a passons directement à la section suivante :

4.2 La nouvelle fonction noyau :

On définie $\psi_H(t) : R^{++} \to R^{+}$ la nouvelle fonction noyau comme suite :

$$\psi_H(t) = t^2 + \sinh^2(1)\left(e^{(\coth(t)-\coth(1))} - \log(t) - 1\right) \tag{4.1}$$

ψ_H est deux fois différentiable et satisfait les conditions suivantes :
$\psi_H(1) = \psi_H^{'}(1) = 0 \quad , \lim_{x\to+\infty} \psi_H(t) = \lim_{x\to 0^+} \psi_H(t) = +\infty.$
Dans l'analyse d'algorithme basé sur $\psi_H(t)$, nous avons besoin de ses trois premiers dérivés. Ceux-ci sont donnés par :

$$\psi_H^{'}(t) = 2t - \frac{\sinh^2(1)}{\sinh^2(t)} e^{(\coth(t)-\coth(1))} - \frac{\sinh^2(1)}{t} \tag{4.2}$$

$$\psi_H''(t) = 2 + \sinh^2(1)e^{(\coth(t)-\coth(1))}\left[\frac{1}{\sinh^4(t)} + \frac{2\coth(t)}{\sinh^2(t)}\right] + \frac{\sinh^2(1)}{t^2} \tag{4.3}$$

$$\psi_H'''(t) = -\sinh^2(1)\left[e^{(\coth(t)-\coth(1))}\left(\frac{4\coth^2(t)}{\sinh^2(t)} + \frac{6\coth(t)+2}{\sinh^4(t)} + \frac{1}{\sinh^6(t)}\right) + \frac{2}{t^3}\right] \tag{4.4}$$

De (4.3), on a

$$\psi_H''(t) > 1 \quad t > 0; \quad p > 0$$

4.3 propriétés du nouvelle fonction noyau

Lemme 4.3.1.
Soit la fonction $\psi_H(t)$ être défini dans (4.1). Alors, on a

(i) $t\psi_H''(t) + \psi_H'(t) > 0, \quad t < 1.$

(ii) $t\psi_H''(t) - \psi_H'(t) > 0, \quad t > 1.$

(iii) $\psi_H'''(t) < 0, \quad t > 1.$

La fonction $\psi_H(t)$ est appelée une fonction éligible s'il satisfait aux critères (i) à (iii).

Démonstration.
Pour(i) et (ii), on utilise les formules (4.2) et (4.3)

$$\begin{aligned} t\psi_H''(t) + \psi_H'(t) &= 4t + \sinh^2(1)e^{(\coth(t)-\coth(1))}\left[\frac{t}{\sinh^4(t)} + \frac{2t\coth(t)}{\sinh^2(t)}\right] - \frac{\sinh^2(1)}{\sinh^2(t)}e^{(\coth(t)-\coth(1))} \\ &= 4t + \frac{\sinh^2(1)e^{(\coth(t)-\coth(1))}}{\sinh^2(t)}\left[\frac{t}{\sinh^2(t)} + 2t\coth(t) - 1\right] > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t\psi_H''(t) - \psi_H'(t) &= \sinh^2(1)e^{(\coth(t)-\coth(1))}\left[\frac{t}{\sinh^4(t)} + \frac{2t\coth(t)}{\sinh^2(t)}\right] + \frac{\sinh^2(1)}{\sinh^2(t)}e^{(\coth(t)-\coth(1))} \\ &= \frac{\sinh^2(1)e^{(\coth(t)-\coth(1))}}{\sinh^2(t)}\left[\frac{t}{\sinh^2(t)} + 2t\coth(t) + 1\right] > 0. \end{aligned}$$

Pour (iii), c'est très clair
$-\sinh^2(1)\left[e^{(\coth(t)-\coth(1))}\left(\frac{4\coth^2(t)}{\sinh^2(t)} + \frac{6\coth(t)+2}{\sinh^4(t)} + \frac{1}{\sinh^6(t)}\right) + \frac{2}{t^3}\right] < 0.$ □

Lemme 4.3.2. *(Lemma 2.1 in [35])*
Soit $\psi_H(t)$ être défini comme (4.1), alors

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \le \psi_H(t) \le \frac{1}{2}\left(\psi_H'(t)\right)^2 \quad , t > 0$$

Corollaire 4.3.1. *(Corollaire 2.1 voir [35])*
Soit $\sigma(v)$ et $\Phi(v)$ sont défini comme suite

$$\Phi(v) = \Phi(x,s,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \psi_0(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2 - 1}{2} - \log(v_i)$$
$$\sigma(v) = \frac{1}{2} \parallel d_x + d_s \parallel = \frac{1}{2} \parallel \nabla\Phi(v) \parallel \tag{4.5}$$

Alors, pour toutes $v > 0$, on a :

$$\sigma(v) \geq \sqrt{\frac{\Phi(v)}{2}}$$

Remarque 4.3.1.
À travers ce chapitre, nous supposons que $\tau \geq 2$. On utilise le corollaire(4.3.1) et l'hypothèse selon laquelle $\Phi(v) \geq \tau$, on a

$$\sigma(v) \geq 1.$$

Le lemme suivant fournit une caractéristique importante de la fonction cotangente hyperbolique qui nous permet de prouver la e-convexité du nouvelle fonction noyau.

Lemme 4.3.3. *(Lemme 3.2 voir [2])*
Soit $\psi_H(t)$ définit dans (4.1), on a

$$2t\coth(t) - 1 > 0, \quad \forall t > 0.$$

Soit $\varrho : [0,+\infty] \to [1,+\infty[$ la fonction inverse de $\psi_H(t)$ pour $t \geq 1$.
Et $\rho : [0,+\infty[\to]0,1]$ la fonction inverse de $\left[-\frac{1}{2}\psi_H^{'}(t)\right]$ pour $0 < t \leq 1$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 4.3.4.
Pour $\psi_H(t)$, on a :
- $\sqrt{s+2} \leq \varrho(s) \leq 1 + \sqrt{2s} \quad , s \geq 0.$
- $\coth(t) \leq \log\left[e^{\coth(1)}(2z+1)\right], \quad \forall \left(z = -\frac{1}{2}\psi_H^{'}(t)\right) \in [0,+\infty[, \quad 0 < t \leq 1$

Démonstration.

- Le premier élément peut être facilement obtenu en utilisant (4.3), le lemme (4.3.2), et à cause des conditions $\psi_H(1) = \psi_H^{'}(1) = 0$, nous pouvons décrire complètement $\psi_H(t)$ par sa dérivée seconde comme suit :

$$\psi_H(t) = \int_1^t \int_1^x \psi_H^{''}(y)dydx$$

– Pour le deuxième élément, soit $z \geq 0$ et $t \in]0,1]$ tel que $z = -\frac{1}{2}\psi_H^{'}(t)$, alors $\rho(z) = t$. On utilise (4.2), on a :

$$\begin{aligned} 2z &= -\psi_H^{'}(t) \\ &= -2t + \sinh^2(1)\left[\frac{e^{(\coth(t)-\coth(1))}}{\sinh^2(t)} + \frac{1}{t}\right] \end{aligned}$$

Puisque sinh est une fonction croissante de façon monotone, on obtient ;

$$\begin{aligned} 2z &\geq -2t + \frac{\sinh^2(1)}{\sinh^2(t)}\left[e^{(\coth(t)-\coth(1))} + \frac{1}{t}\right] \\ &\geq -1 + \left[e^{(\coth(t)-\coth(1))}\right] \end{aligned}$$

$$2z + 1 \geq e^{(\coth(t)-\coth(1))}$$

Par suite, on a

$$\coth(t) \leq \log\left[e^{\coth(1)}(2z+1)\right].$$

□

4.4 Analyse de l'algorithme

4.4.1 Les propriétés de $\Phi(v)$ et $\sigma(v)$

Nous commençons par étudier l'effet de la mise à jour du paramètre barrière μ sur la valeur de fonction Φ.

Théorème 4.4.1. *(Théorème 3.2 voir [36])*
Pour tout vecteur positif v et $\beta \geq 1$, on a

$$\Phi(\beta v) \leq n\psi_H\left(\beta\rho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right)$$

Lemme 4.4.1.
Soit $0 \leq \theta < 1$ et $v_+ = \frac{v}{\sqrt{1-\theta}}$, Si $\Phi(v) \leq \tau$, alors :

$$\Phi(v_+) \leq \frac{2\tau + \sqrt{2\tau n} + n\theta}{1-\theta} = \Phi_0.$$

Démonstration.
Comme $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$ et $\rho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right) \geq 1$. On a $\frac{\rho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$ et pour $t \geq 0$, on a $\psi_H(t) \leq (t^2-1)$. On utilise le théorème (4.4.1) avec $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$ et $\Phi(v) \leq \tau$ on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(v_+) &\leq n\psi_H\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\rho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right) \\
&\leq n\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\rho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)\right)^2 - 1\right] = \frac{n}{1-\theta}\left[\rho\left(\frac{\Phi(v)}{n}\right)^2 + \theta - 1\right] \\
&\leq \frac{n}{1-\theta}\left[\left[1+\sqrt{2\frac{\Phi(v)}{n}}\right]^2 + \theta - 1\right] \\
&\leq \frac{n}{1-\theta}\left[\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2\tau}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \theta - 1\right] = \frac{2\tau+\sqrt{2\tau n}+n\theta}{1-\theta}
\end{aligned}$$

□

Φ_0 est une limite supérieure pour $\Phi(v_+)$ pendant le processus de l'algorithme. Pour l'analyse de notre algorithme. Ensuite, nous donnons une borne inférieure de $\sigma(v)$ définie par (4.5) en termes de fonction de proximité $\Phi(v)$.

4.4.2 Diminution de la proximité lors d'un pas de Newton

Nous calculons maintenant une taille de pas par défaut α telle que (x^+, y^+, s^+) défini dans l'algorithme soit réalisable et que la fonction de proximité diminue suffisamment. Tout d'abord, nous considérons la diminution de Φ en fonction de α notée par la fonction f et définie par :

$$f(\alpha) = \Phi(v_+) - \Phi(v)$$

Et nous supposons que la taille du pas α satisfait

$$v + \alpha d_x \geq 0 \quad ,et \quad v + \alpha d_s \geq 0$$

D'après de la e-convexité de Φ, on a

$$\frac{1}{2}\left(\Phi(v+\alpha d_x) + \Phi(v+\alpha d_s)\right) \geq \Phi(v_+)$$

Pour simplifier, on pose $\sigma = \sigma(v)$. En suivant la même procédure que dans [36], Nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.4.2.
On pose $\bar{\alpha} = \frac{1}{\psi_H''(\rho(2\sigma))}$, *comme taille de pas par défaut, Alors*

$$f(\bar{\alpha}) \leq -\frac{\sigma^2}{\psi_H''(\rho(2\sigma))} \tag{4.6}$$

D'après le théorème suivant, nous pouvons obtenir la limite supérieure de la valeur décroissante de la fonction de proximité dans une itération interne.

Théorème 4.4.3.
Si $\bar{\alpha}$ *est la taille de pas par défaut et* $\sigma \geq 1$, *on a*

$$f(\bar{\alpha}) \leq -\frac{\sqrt{\Phi(v)}}{168\log^2\left[e^{\coth(1)}(\sqrt{\Phi(v)}+1)\right]} \quad (A)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\psi_H''(t) &= 2 + \sinh^2(1)e^{(\coth(t)-\coth(1))}\left[\frac{1}{\sinh^4(t)} + \frac{2\coth(t)}{\sinh^2(t)}\right] + \frac{\sinh^2(1)}{t^2} \\
&= 2 + \frac{\sinh^2(1)}{t^2} + \left(2t - \frac{\sinh^2(1)}{t} - \psi_H'(t)\right)\left(2coth(t) + \frac{1}{sinh^2(t)}\right) \\
&\leq 2 + \frac{\sinh^2(1)}{t^2} + 3\left(2 - \psi_H'(t)\right)\coth^2(t)
\end{aligned}$$

Pour $t = \rho(2\sigma)$, on a

$$\begin{aligned}
\psi_H''(\rho(2\sigma)) &\leq 2 + \frac{\sinh^2(1)}{\rho(2\sigma)^2} + 3(2+4\sigma)\coth^2(\rho(2\sigma)) \\
&\leq 4 + 3(2+4\sigma)\coth^2(\rho(2\sigma))
\end{aligned}$$

On utilise le lemme (4.3.4), on trouve

$$\begin{aligned}
\psi_H''(\rho(2\sigma)) &\leq 4 + 3(2+4\sigma)\log^2\left[e^{\coth(1)}(4\sigma+1)\right] \\
&\leq 7(2+4\sigma)\log^2\left[e^{\coth(1)}(4\sigma+1)\right] \\
&\leq 7(2\sigma+4\sigma)\log^2\left[e^{\coth(1)}(4\sigma+1)\right] \\
&= 42\sigma\log^2\left[e^{\coth(1)}(4\sigma+1)\right]
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue à l'aide de Remarque (4.3.1). Par conséquent, de l'inégalité (4.6), on obtient

$$f(\bar{\alpha}) \leq -\frac{\sigma}{42\log^2\left[e^{\coth(1)}(4\sigma+1)\right]}$$

Nous remarquons que $-\frac{x}{42\log^2\left[e^{\coth(1)}(4x+1)\right]}$ est décroissant de façon monotone $\forall x \geq 0$. On utiliser le corollaire (4.3.1), on trouve $\sigma \geq \frac{\sqrt{\Phi(v)}}{4}$ ainsi :

$$f(\bar{\alpha}) \leq -\frac{\sqrt{\Phi(v)}}{168\log^2\left[e^{\coth(1)}(\sqrt{\Phi(v)}+1)\right]}$$

□

4.4.3 Complexité des itérations

Maintenant, nous donnons une limite supérieure pour le nombre d'itérations internes nécessaires pour revenir au quartier τ, c'est-à-dire $\Phi(v) \leq \tau$ après la mise à jour de μ. Définissons la valeur de $\Phi(v)$ après la mise à jour de μ comme Φ_0, et les valeurs suivantes dans la même itération externe que Φ_j, $j = 1, ..., J-1$, où J représente le nombre total d'itérations internes dans l'itération externe. La diminution à chaque itération interne est donnée par (A) dans (4.4.3) , soit :

$$\Phi_{j+1} \leq \Phi_j - \kappa\Phi_j^{1-\gamma}, \quad j = 0, 1, ..., K-1.$$

Avec

$$\kappa = \frac{1}{168\log^2\left[e^{\coth(1)}(\sqrt{\Phi_0}+1)\right]} \quad and, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

Lemme 4.4.2.
Soit $t_0, t_1, ..., t_j$ être une suite de nombres positifs telle que :

$$t_{j+1} \leq t_j - \beta t_j^{1-\gamma} \quad j = 0, 1, ..., J-1.$$

Où $\beta > 0$ et $0 < \gamma \leq 1$ alors, $J \leq \frac{t_0^\gamma}{\beta\gamma}$

En conséquence, en prenant $t_j = \Phi_j$, $\beta = \frac{1}{168\log^2\left[e^{\coth(1)}(\sqrt{\Phi_0}+1)\right]}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ nous avons obtenu le lemme suivant.

Lemme 4.4.3.
Soit J le nombre total d'itérations internes dans l'itération externe. Ensuite nous avons

$$J \leq \boldsymbol{O}\left(\log^2\left(\Phi_0\right)\Phi_0^{\gamma}\right).$$

Où Φ_0 est la valeur de $\Phi(v)$ après μ-mise à jour dans l'itération externe.

Nous arrivons ensuite au résultat final de cette section qui résume les limites de complexité des méthodes de grande et petite pas.

Théorème 4.4.4.
Soit Φ_0 être une limite supérieure pour $\Phi(v+)$ et $\tau \geq 2$. Ensuite, le nombre total d'itérations pour obtenir une solution d'approximation avec $n\mu \leq \epsilon$ est délimité par

$$\boldsymbol{O}\left(\log^2(\Phi_0)(\Phi_0)^{\gamma}\frac{\log\frac{n}{\epsilon}}{\theta}\right)$$

Avec $\gamma = \frac{1}{2}$.

Démonstration.
Rappeler que Φ_0 est la limite supérieure selon le lemme (4.4.1). Une partie supérieure la limite pour le nombre total d'itérations est obtenue en multipliant la limite supérieure J par le nombre de mises à jour des paramètres de barrière, qui est délimité au-dessus par $\frac{1}{\theta}\left(\log\frac{n}{\epsilon}\right)$ (voir [2]). Ainsi, nous obtenons le résultat grâce au lemme ci-dessus.
En cas de petites pas méthodes de mise à jour, on obtient $\tau = \boldsymbol{O}(1)$ et $\theta = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. La substitution de ces valeurs dans (A) dans le théorème (4.4.3) ne donne pas la meilleure limite possible. une meilleure limite est obtenue dans le lemme (4.4.1) , en utilisant cette limite supérieure pour Φ_0, nous obtenons la limite d'itération suivante :

$$\boldsymbol{O}\left(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon}\right) \quad \text{Pour la méthode à petite pas .}$$

Ainsi pour la méthode à grande pas, $\tau = \boldsymbol{O}(n)$, et $\theta = \Theta(1)$, le lemme(4.4.1) implique que $\Phi_0 = \boldsymbol{O}(n)$ alors, on obtient $\boldsymbol{O}\left(\sqrt{n}\log^2 n\log\frac{n}{\epsilon}\right)$ complexité des itérations. □

CONCLUSION

Les méthodes de points intérieur sont connues par leur efficacité, rapide de convergence, complexité algorithmique, et le point plus fort est que les méthodes de point intérieurs ont la capacité de résoudre des problèmes de grandes tailles, au contraire de la méthode de simplex . Tendis que, l'inconvenant principale dans ce type de méthodes est l'initialisation. La plupart des résultats théoriques que le point initial est connu.
Dans notre thèse, on a fait une étude complète pour identifier les principes des méthodes de points intérieurs en générale (méthodes affines, de potentiel, projectives et les méthodes de trajectoire centrale), de plus, on a présenté une étude théorique d'une méthode des points intérieurs de type primal-dual de Tc pour résoudre un programme linéaire basée sur deux différent type des fonctions noyau barrière logarithmique. Notre objectif est montrons que ces deux nouvelle fonctions noyau (paramétriques et avec un terme exponentiel-hyperbolique) soit efficace. Et nous étudions leur propriétés et les effets des paramètres au but de améliorons la complexité algorithmique de la méthode des points intérieurs.

Bibliographie

[1] B. Kheirfam , M. Moslem , A polynomial-time algorithm for linear optimization based on a new kernel function with trigonometric barrier term, YUJOR25(2), 233–250, (2015).

[2] B.K. Choi , GM. Lee , On complexity analysis of the primal-dual interior point method for semidefinite optimization problem based on a new proximity function, Nonlinear Anal, 2628-2640, (2009).

[3] C. Gonzaga, Polynomial affine algorithm for linear programming, Mathematical Programming,7-21, (1990).

[4] C. Roos, T. Terlaky, J. Ph, Vial, Theory and Algorithms for linear optimization, An interior point approach, Jhon Wiley and Sons, Chister,U.K,(1997).

[5] Dikin. Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. Soviet Mathematics Doklady, 8 :674-675, (1967).

[6] E.A. Djeffal, L. Djeffal, A path following interior-point algorithm for semidefinite optimization problem based on new kernel function, Journal of Mathematical Modeling, Jan (2016).

[7] E.A. Djeffal, An efficient procedure interior point method based on a new kernel function for linear complemntarity problem, 25th International Conference on Multiple Criteria Decision-Making(ICMCDM 2019), 16-21, Istanbul Technical University, (2019).

[8] E.R. Barnes, A polynomial time version of the afHne scaling algorithm. Presented at the Joint National ORS A/TIMSW Meeting, St.Louis, Octobre (1987).

[9] F. Boukhenchouche, E.A.Djeffal, An efficient primal-dual interior point algorithm for linear optimization problems based on a new parameterized Kernel function with a logarithmic barrier term, Studies in Engineering and Exact Sciences, Curitiba Vol.5, N1,(2024).

[10] GB. Dantzig, Linear Programming and extensions, Princeton University Press, Princeton, N. J, (1963).

[11] I. Touil, W. Chikouche, Novel kernel function with a hyperbolic barrier term to primal-dual interior point algorithm for SDP problems, Acta Mathematica Sinica, English Series, vol. 38, no. 1, pp. 44–67, (2022).

[12] J. Nocedal, SJ. Wright, Numerical optimization , Springer series in operations research.

[13] J. Peng , C. Roos , T. Terlaky , A new and efficient large-update interior point method for linear optimization, J Comput Technol, 61–80,(2001).

[14] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky, Self-Regularity , A New Paradigm for primal-Dual Interior-Point Algorithms, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2002).

[15] K.O. Kortanek and M. Shi, Convergence results and numerical experiments on a linear programing hybrid algorithm. European Journal of Operational Reserch ,47-61, (1987).

[16] M. Bierlaire, Introduction à l'optimisation diférentiable, press polytechniques et universitaires romandes, (2006).

[17] M. Bouafia, D. Benterki, A. Yassine, An efficient parameterized logarithmic kernel function for linear optimization, DOI 10.1007/s11590-017-1170-5,(2018).

[18] M. El Ghami , Ivanov ID, Roos C, Steihaug TA, polynomial-time algorithm for LO based on generalized logarithmic barrier functions, Int J Appl Math 21 99–115, (2008).

[19] M. El Ghami , New Primal-Dual Interior-Point Methods Based on Kernel Functions, PhD Thesis, TU Delft, The Netherlands rrier term, J, Comput, Appl. Math, Vol. 236, No. 15, pp.3613–3623(2005).

[20] M. El Ghami , ZA. Guennoun , S. Bouali , T. Steihaug , Interior point methods for linear optimization based on a kernel function with a trigonometric barrier term, J Comput Appl Math,(2012).

[21] M.J. Todd and BP. Burrell, An extension of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables, Algorithmica, 1 :409-424, (1986).

[22] M.J. Todd and Y. Ye, A centered projective algorithm for linear programming, Mathematics of Operations Research, 2,198-209, (1990).

[23] N. Anane , méthodes de points intérieurs pour la programmation linèaire basèes sur les fonctions noyaux, Thèse de Magister 22-33, (2012).

[24] N.K. Karmarkar , A new polynomial-time algorithm for linear programming, In Proceedings of the 16 th Annual ACM Symposium on Theory of Computing ,vol 4 (1984).

[25] P. Tseng and ZQ. Luo. On the convergence of the affine-scaling algorithm. Mathematical Programming, 56, 301-319, (1992).

[26] R.J. Vanderbei, MS. Meketon, and BA. Freedman, A modification of Karmarkar's linear programming algorithm. Algorithmica, 4(1), 395-408, (1986).

[27] S. Bazarra, HD. Sherali and CM. Shetty, Nonlinear programming, theory and algorithms , Second edition, (1993).

[28] S.J. Wright, Primal-dual interior point methods. SIAM, Philadelphia, (1997).

[29] T. Tsychiya, Global convergence proprety of the affine scaling methods for primal degenerate linear programming problems, Mathematics of Operations Research, 17 :527-557, (1992).

[30] T. Tsychiya, Quadratic convergence of Iri and Imai's algorithm for degenerate linear programming problems, Journal of Optimisation Theory and Applications, 87(3), 703-726, (1995).

[31] T. Tsychiya and M. Muramatsu, Global convergence of a long-step affine scaling algorthm for degenerate linear programming problems, SIAM Jouranl on Optimization, 5(3),525-557, (1995).

[32] T. Terlaky, T. Tsychiya, A note on Mascarenhas counter example about global gonvergence of the afBne scaling algorithm, Technical report, University of Iowa, (1996).

[33] X. Li , M. Zhang , Interior-point algorithm for linear optimization based on a new trigonometric kernel function, Oper Res Lett, Vol 43, No 5, pp 471–475,(2015).

[34] Y. Cai ,Xinzhong, J. Wang , G. Wang , M. El Ghami,Y.Yujing,Complexity analysis of primaldual interior-point methods for linear optimization based on a new parametric kernel function with a trigonometric barrier term , Abstr Appl Anal, Art ID 710158, Vol 11, DOI 10.1155/710158,(2014).

[35] Y.Q. Bai, M.El ghami and C.Roos, A new efficient large-update primal-dual interior-point method based on a finite barrier, SIAM Journal on Optimization, vol 13, pp 766–782, (2003).

[36] Y.Q. Bai,M. El Ghami, Roos.CA ,comparative study of kernel functions for primaldual interior-point algorithms in linear optimization SIAM J Optim 15, 101-128, (2004).