République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Batna
Faculté de technologie
Département d'Electronique

Mémoire

Analyse et Optimisation d'Artefact dans une Image

En vue de l'obtention du diplôme de

Magister en Electronique

Option: contrôle Industriel

Par

ABDERRAHIM LANANI

Jury

Président	M. Boulemden	Professeur (Université de Batna)
Rapporteur	S. Meghriche	Maitre de conférences (Université de Batna)
Examinateur	K. Mansour	Professeur (Université de Constantine)
Examinateur	A. Djouambi	Maitre de conférences (Université d'OEB)
Examinateur	S. Benabdelkader	Maitre de conférences (Université de Batna)

Année 2012

A tous ceux qui m'ont nourri
de leur amour et de leur tendresse.

Remerciements

Au moment où je présente ce mémoire de magister, il convient de rendre hommage à tous ceux et celles qui m'ont apporté leur aide et le soutien nécessaire à sa réalisation.

Je remercier en premier lieu Monsieur Mohammed Boulemden, Professeur de l'Université de Batna, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury. Ainsi que Monsieur Abdelbaki Djoumbi, Maitre de conférences à l'université d'Oum El Bouaghi, Monsieur Karim Mansour, Professeur de l'Université de Constantine et Madame Souad Benabdelkader, Maitre de conférences à l'université de Batna. Qui m'ont fait le grand plaisir d'être les examinateurs de mon mémoire.

Je tiens particulièrement à témoigner ma profonde gratitude à Madame salama Meghriche Maitre de conférences à l'université de Batna de m'avoir encadré et dirigé ce travail. Je la remercie pour ses qualités humaines ; sa grande disponibilité, sa patience, sa gentillesse, ses précieux conseils, et de m'avoir bénéficié de sa haute compétence professionnelle.

Un grand merci à tous les membres de ma famille et surtout à mes parents, à Tantine Fella et Tonton Salim. Qui m'ont toujours poussé à continuer mes études et à aller jusqu'au bout des choses.

Mes derniers remerciements les plus distingués et sincères à toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

A.rahim

Résumé

Les images issues des différentes techniques d'imagerie médicale sont généralement dégradées par un bruit. La tâche qui consiste à restaurer une image de bonne qualité à partir de sa version bruitée est communément appelée débruitage. Celui-ci a engendré une importante littérature en prétraitement des images. Cependant, il faut recourir à des méthodes de filtrage appropriées pour réduire le bruit dans les images médicales. Ces dernières années, plusieurs approches de filtrage linéaire et non linéaire ont été élaborées tout d'abord très intuitives, mais progressivement de plus en plus complexes. Dans notre travail de recherche, nous analysons ces approches, et nous proposons d'autres méthodes pour le filtrage des images médicales. Commençons par les filtres de voisinage linéaire et non linéaire, les filtres à base des équations à dérivés partielles et les filtres adaptatives, le filtrage fréquentielle et bien évidemment les ondelettes. Des travaux sur l'une des applications de la transformée en ondelettes dans le domaine du traitement d'images ont été effectués en utilisant le seuillage des coefficients d'ondelettes. Ce travail contient des éléments concernant les bases d'ondelettes et une application de la transformées en ondelettes « le débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes ». Notre analyse a été effectuée en deux étapes, La première étape correspond au choix de l'ondelette analysante adéquate et le niveau de décomposition convenable. Par opposition, la seconde étape est l'application des différents types de seuillages sur les ondelettes choisis dans la première étape. En revanche, afin d'évaluer les performances des méthodes de filtrage qui se base sur les ondelettes, nous proposons une nouvelle famille d'ondelette fondée sur le calcul fractionnaire. Deux étapes sont nécessaires pour la mise en œuvre de ce type d'ondelette, la première consistant à calculer les fonctions de transferts des filtres fractionnaires qui constituent l'ondelette, et la seconde à combiner ces filtres avec l'opération de sous-échantillonnage pour avoir une ondelette fractionnaire. Une large étude comparative a finalement été menée afin de confronter nos algorithmes de débruitage à d'autres débruiteurs de l'état de l'art.

Mots-clés:

Imagerie médicale, débruitage, les filtres de voisinage, les filtres à base des EDP, le filtrage fréquentielle, ondelettes, seuillage, calcul fractionnaire, sous-échantillonnage, ondelette fractionnaire.

Abstract

Image data observed at the output of different medical imaging techniques are generally degraded by noise. The task which consists to restore a good quality image from its noisy version is commonly known as denoising. This has generated a large literature in image preprocessing. However, it is necessary to use appropriate methods of filtering to reduce noise in medical images. In recent years, several approaches linear and nonlinear filtering have been developed very intuitive at first time, but gradually more and more complex. In our research, we analyze these approaches, and we propose other methods for filtering medical images. Start with the linear and non-linear near filters, filters based on partial derivatives equations and adaptive filters, frequency filtering and of course the wavelets. Works on applications of the wavelets transform in the area of the image processing using the thresholding wavelets coefficients have been undertaken. This work contains elements concerning the wavelet transform and a wavelet transform application “denoising by thresholding wavelets coefficients”. Our analysis was conducted in two stages; the first stage corresponds to the choice of analyzing wavelet adequate and appropriate level of decomposition. In contrast, the second step is the application of different types of thresholding on the wavelet chosen in the first stage. However, in order to evaluate the performance of filtering methods which is based on wavelets, we propose a new family of wavelet founded on fractional calculus. Two steps are necessary to implement this type of wavelet; the first is to calculate the transfer functions of fractional filters that constitute the wavelet and the second to combine these filters with the operation of sub-sampling to have a fractional wavelet. A comprehensive comparative study has been carried out to compare our denoising algorithms to state-of-the-art competitors.

Keywords:

Medical Imaging, denoising, neighborhood filters, filters based on EDP, frequency filtering, wavelet thresholding, calculating fractional, sub-sampling, wavelet fraction.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Glossaire

Abréviations

AMR	Analyse Multi-résolution
Bior	Biorthogonal
CA	Coefficients d'Approximations
CCD	Charge Coupled Device
CD	Coefficients de Détails
CFE	Continued Fraction Expansion
CHF	Chapeau haut de forme
CLS	Constrained Least Square Error
Coif	Coiflets
CT	Computerized Tomography (le scanner X)
db	Daubechies
DCT	Transformée de curvelet discrète
DLP	Diagonal Linear Projection
DLS	Diagonal Linear Shrinker
Dmey	Meyer Discrète
DWT	Transformée d'Ondelette Discrète
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
EDP	Equation à Dérivée Partielle
FTCS	Forward Time Centered Space
ICA	Independent Component Analysis
IDWT	Transformée en Ondelettes Discrète Inverse
IRM	Imagerie par Résonance Magnétique
LS	Local Statistic (statistique locale)
MAD	Valeur Médiane Absolue
MMSE	Minimum Mean Square Error
NADH	Nicotinamide Adénine Dinucléotide
NL-means	Non Locals Means (Moyennes non-locales)
NNG	Non Négative Garrote
PSNR	Peak Signal to Noise Ratio (Rapport pic du signal sur risque)
PSO	Particulies Swarm Optimisation (Optimisation par essaim de particule).
rbior	Biorthogonal reversible
RF	Radio Fréquence
RMN	Résonance Magnétique Nucléaire
RNA	Réseaux de Neurones Artificiels
SNR	Signal to Noise Ratio (Rapport signal sur bruit)
SNN	Symmetric Nearest Neighbor (le voisin symétrique le plus proche)
SPECT	Single Photon Emission Tomography (Tomographie par Emission de Photon Unique

SRM	Spectroscopie par Résonance Magnétique
SUSAN	Smallest Univalue Segment Assimilating Nucleus
sym	Symlets
TEP	Tomographie d’Emission Monophotonique
TNN	Thresholding Neural Network
TO	Transformée en Ondelette
TOC	Transformée en Ondelette continue
TV	Total Variation (variation totale)

Symboles

$\oplus$	Dilatation en morphologie mathématique
σ_{ε}	Ecart-type de bruit
$\nabla I(x,y)$	Le gradient d’une image
Θ	Erosion en morphologie mathématique
ϕ	La direction du gradient
$\nabla^2 I(x,y)$	Le Laplacien d'une image
$\Re$	Ensemble des réels
Ω	Pixels de l'image(x, y)
E	Espérance
$\Psi(t)$	Ondelette mère
$\Gamma(z)$	La fonction Gamma
Z	Ensemble des entiers signés
$\phi(x)$	La fonction d'échelle
N	Ensemble des entiers naturels
W	Matrice orthogonale associée à la base orthonormée de la DWT
Φ	Représente un dictionnaire multi-échelle
δ_{λ}	Opérateur non linéaire de seuillage avec un seuil λ
δ^{H}	Seuillage dur
δ^{S}	Seuillage doux
δ^{F}	Seuillage ’Firm’
δ^{G}	Seuillage ’nonnegative garrote’
δ^{SCAD}	Seuillage ’SCAD’
δ^{HTNN}	Seuillage TNN dur
δ^{STNN}	Seuillage TNN doux
λ^{M}	Seuil minimax
λ^{U}	Seuil universel
Var	Variance
L [ ]	Transformée de Laplace
$O^{B}(f)$	L’ouvert de l’image par un élément structurant B
ρ	Paramètre qui contrôle la moyenne du voisinage spatial

Notations

$\overrightarrow{B_0}$	Le champ magnétique
$\overrightarrow{m_p}$	Le moment magnétique
$\overrightarrow{M_0}$	Une aimantation macroscopique
T_1, T_2	Des temps de relaxation
$\tilde{I}_{YNF}$	Une version filtrée d'une image I par un filtre de Yaroslavsky.
$\tilde{I}_{SUSAN}$	Une version filtrée d'une image I par un filtre bilatéral
$\tilde{I}_{NL-means}$	Une version filtrée d'une image I par l'algorithme Non-local means.
a_{mn}, c_{mn}	Représentent respectivement les coefficients d'approximation de la transformée d'ondelettes
d_{mn}^{oj}, s_{mn}^{oj}	représentent respectivement les coefficients de détails de la transformée d'ondelettes
HH_j, HL_j, LH_j	Les sous-bandes correspondent respectivement aux coefficients de détail d'orientation diagonale, horizontale et verticale.
LLj_c	La sous-bande LLj_c représente les coefficients d'approximation à l'échelle la plus grossière.

Introduction générale

AVANT-PROPOS

Le traitement d’images est une phase préliminaire dans le but de préparer des images numériques à une analyse ultérieure de plus haut niveau comme l’interprétation, la visualisation, le stockage ou la communication.

Tous les secteurs de la recherche scientifique (physique, biologie, médecine, astronomie, automatique...) jouent un rôle de plus en plus important de développer cette discipline. En effet, l’utilisation des différentes techniques du traitement d’images, dans le cadre plus spécifique de la médecine (ce que l’on appelle l’imagerie médicale) connaît actuellement de grands progrès et devrait permettre d’améliorer la détection précoce et le traitement de nombreuses pathologies (cancers, maladies auto-immunes ou infectieuses par exemple).Le développement de ce type de technologie constitue donc un enjeu majeur de santé publique.

Cependant, la plupart des techniques d’imagerie médicale subissent un problème relatif à un sujet classique : la restauration d’images.

L’opération de restauration consiste à corriger des images dégradées et à reconstruire un signal de bonne qualité à partir d’un signal direct ou indirect et de médiocre qualité, suite au processus d’acquisition.

D’une manière générale, le signal déterministe de l’image observée est contaminé par des fluctuations stochastiques que l’on qualifie généralement de bruit. Ce dernier peut être soit additif, soit multiplicatif. Ici, nous nous intéresserons uniquement au bruit additif qui est souvent rencontré dans la littérature sur la restauration d’image. Et les techniques de restauration d’image reposent toutes sur des modélisations d’image et du bruit.

Notre principal problème, que nous allons traiter, consistera à récupérer une image de bonne qualité, proche de l’image originale, à partir d’une image bruitée de mauvaise qualité.

Dans la littérature du traitement d’images, différentes méthodes de débruitage ont été proposées et développées. Tout d’abord, des méthodes de filtrage spatial ont été proposées. Celles-ci consistent à réduire le bruit dans les zones qui ne présentent pas d’objets intéressants et à accentuer la perception des structures d’intérêt. Ces techniques de filtrage utilisent un filtre passe-bas pour supprimer les hautes fréquences, ce qui a pour inconvénient d’atténuer les contours de l’image. Pour pallier à ces problèmes, de nouvelles techniques, plus performantes, ont vu le jour aux cours des années 80 et 90 ; citons notamment les approches variationelles basées sur les EDPs, les approches utilisant les champs de Markov [Li, 1995, Winkler, 1995, Zhu et al., 2000], et les approches basées sur les transformées multi-échelles, notamment la transformée en ondelettes. Récemment, ces dernières ont montré leur puissance dans le cadre de l’estimation statistique. Par le biais de ces transformées parcimonieuses [Boubchir, 2007], l’énergie du signal utile est concentrée sur un faible nombre de coefficients, ce qui offre ainsi un cadre naturel non linéaire pour estimer ce signal. En effet, il suffit de seuiller les coefficients de l’image observée et d’inverser la transformée pour obtenir une estimée du signal utile. Par ailleurs, les transformées en ondelettes qui se base sur le calcul fractionnaires présentent de très bonnes propriétés mathématiques permettant de couvrir une très large classe d'images. En effet, l'application des méthodes fractionnaire en restauration, en rehaussement de contours ou encore à la segmentation des images montre de façon évidente leur supériorité.

Dans le premier chapitre, nous décrivons tout d'abord les différentes techniques d'imagerie médicale et biomédicale existantes ou en cours de développement. Nous présentons ensuite la définition de ce que nous entendons par artefacts. Pour conclure ce chapitre nous exposons quelques paramètres quantitatifs de bruit dans les applications de traitement de signaux et d'images.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les différentes méthodes pour la restauration des images, à travers les filtres linéaire et non-linéaires de voisinage, les différentes méthodes de débruitage à base des équations à dérivées partielles et les différents filtres adaptatifs, les méthodes issues de l'analyse harmonique et bien évidemment, la transformée en ondelettes. La partie finale de ce chapitre est dédiée à une étude complémentaire effectuée sur de nouvelles approches de débruitages qui sont basées sur l'intelligence artificielle (réseaux de neurone artificiel, logique flou, PSO).

Dans le chapitre 3, nous présenterons les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés de ces opérateurs ainsi que les différentes méthodes d'approximations et les transformées qui se base sur cette analyse.

Dans le chapitre 4, après avoir exposé un rappel sur les ondelettes et l'analyse multirésolution, nous nous penchons le formalisme général de l'algorithme de débruitage par seuillage de coefficients d'ondelette ensuite nous présenterons les différents modèle de seuillage et de seuil qui ont été proposés dans la littérature du traitement d'images. En revanche, notre analyse a été effectuée en deux étapes, La première étape correspond au choix de l'ondelette analysante adéquate et le niveau de décomposition convenable. Par opposition, la seconde étape est l'application des différents types de seuillages sur les ondelettes choisis dans la première étape. Dans la dernière partie de ce chapitre nous proposons une nouvelle classe d'ondelette qui se base sur le calcul fractionnaire. Deux étapes sont nécessaires pour la mise en œuvre de ce type d'ondelette, la première consiste à calculer les fonctions de transferts des filtres fractionnaires qui constituent l'ondelette, et la seconde à combiner ces filtres avec l'opération de sous-échantillonnage pour avoir une ondelette fractionnaire.

Enfin, une conclusion générale effectue la synthèse des résultats et permet de dégager quelques perspectives.

Paul Christian Lauterbur
6 Mai 1929 – 27 Mars 2007

MRI images "have an enormous impact on health care in the developed part of the world today,"

By Dr. Hans Ringertz

Chapitre 1

Généralités sur l'imagerie médicale

1.1 Introduction

Ce premier chapitre ne concerne pas directement le travail réalisé au cours de ce mémoire, mais cherche à le replacer dans le contexte de l'imagerie médicale.

Cependant, il existe à l'heure actuelle un certain nombre de techniques d'imagerie du corps humain couramment employées comme outils diagnostiques dans le domaine médical. Chacune d'elles est sensible à un type de contraste particulier, et trouve ses applications pour des organes différents.

Dans ce chapitre, nous décrivons tout d'abord les différentes techniques d'imagerie médicale et biomédicale existantes ou en cours de développement. Nous présentons ensuite la définition de ce que nous entendons par artefacts. Finalement, nous exposons quelques paramètres quantitatifs de bruit dans les applications de traitement de signaux et d'images.

1.2 Les systèmes d'imageries médicales

L'imagerie médicale désigne un ensemble de techniques non invasives et non traumatisantes, chacune d'elles est sensible à un type de contraste particulier, elles nous permettent d'obtenir des informations sur des aspects internes de l'organisme. Ces différentes techniques d'imagerie médicale sont régulièrement utilisées afin d'établir un diagnostic précis, de préparer une opération chirurgicale ou de contrôler les effets d'un traitement ou d'un acte chirurgical.

D'autre part, Les différentes modalités d'imagerie biomédicale sont ainsi toutes basées sur l'utilisation de rayons électromagnétiques pour obtenir les informations désirées, sans effectuer de prélèvements sur l'organisme. Ces techniques utilisent des rayonnements répartis sur l'ensemble du spectre électromagnétique : des rayons gamma dans le cas de l'imagerie nucléaire pour les rayonnements les plus énergétiques, aux ultrasons lors des échographies, en passant par les rayons X, les ondes radio dans le cas des IRM (en complément d'un champ magnétique constant), et enfin les rayonnements infrarouges dans le cas de l'imagerie de fluorescence (Figure 1.1).

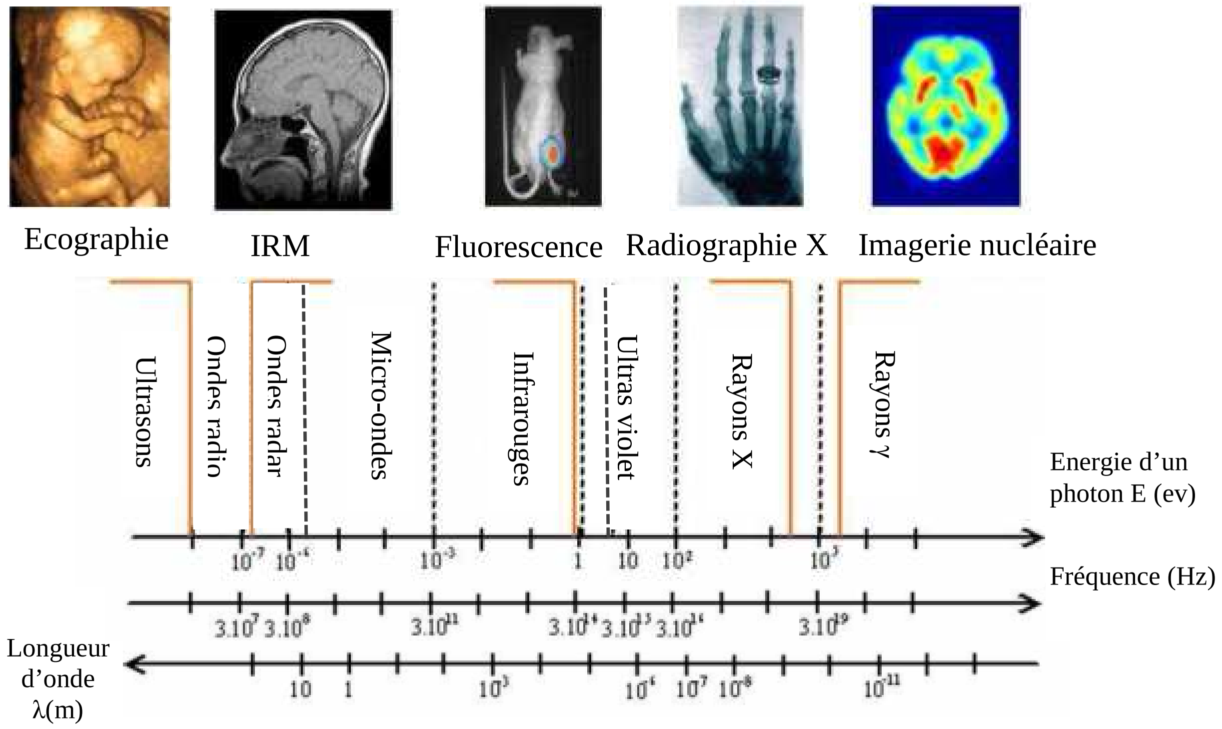


Figure 1-1 Représentation des différentes modalités d'imagerie en fonction des ondes électromagnétiques qu'elles utilisent [Goutayer, 2008].

1.2.1 Rayons X

La radiographie a été la première technique d'imagerie médicale largement employée. En effet, dès 1895 W.C. Röntgen, (Nobel 1901) [Röntgen, 1895] physicien allemand découvreur des rayons X, réalise la première radiographie de la main de sa femme (Figure 1.2 a).

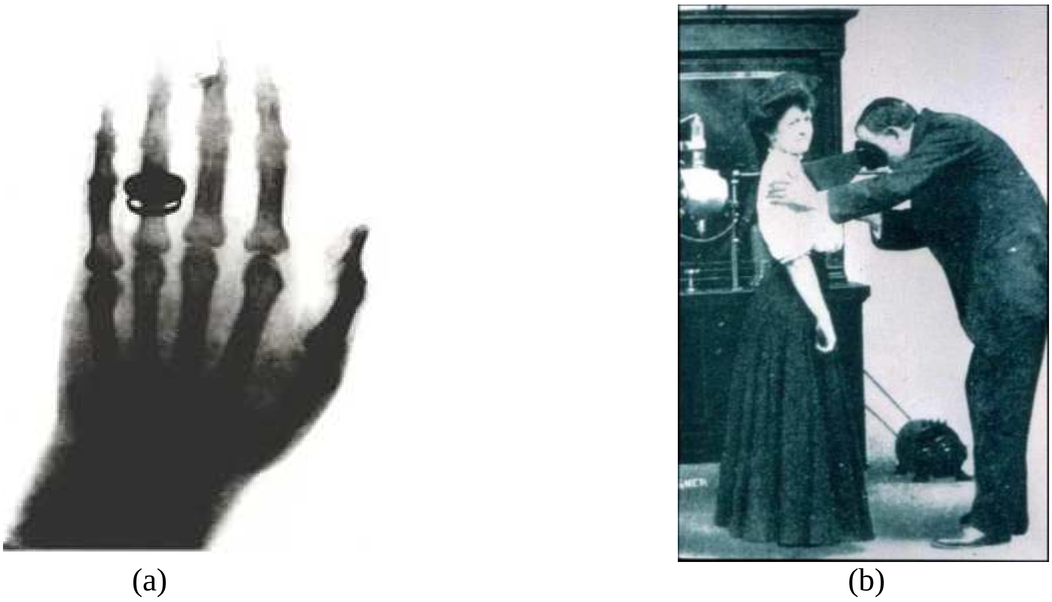

(a) (b)

Figure 1.2 (a) Radiographie de la main de la femme de Röntgen. Ce cliché est connu comme la première radiographie, même si Röntgen avait réalisé d'autres images dans les jours précédents. (b) Examen radiologique du thorax au début du siècle. Le tube à rayons X est situé derrière la patiente. (Source: site http://www.xray.hmc.psu.edu/rci/).

Quelques années seulement après leur découverte, les rayons X sont employés dans le domaine médical. [Dès 1897, Antoine Béclère, chef de service à l'hôpital Tenon à Paris, crée le premier laboratoire de radiologie, où il impose un examen radiographique du thorax de tous les patients entrant dans son service, afin de dépister la tuberculose] (Figure 1.2 b).

Le développement de capteurs à rayons X à base de semi-conducteurs et l'avènement de l'informatique dans les années 70 ont permis l'apparition de la tomodensimétrie, plus couramment appelée scanner. Les scanners permettent, après reconstruction, de réaliser des vues en coupe ou des vues en trois dimensions.

Les rayons X ont la propriété de pénétration dans la plupart des tissus biologiques, ils permettent donc de réaliser assez simplement une image en projection, une "ombre", des structures du corps humain. L'iode ou le baryte qui on la propriété d'absorbation des rayons X, est couramment utilisée en tant qu'agent de contraste, dans le cas de l'angiographie. Son injection dans le système sanguin permet aussi de mieux repérer les organes fortement vascularisés et en particulier certaines tumeurs. D'autre part Les os sont beaucoup plus absorbants que les tissus mous, c'est pourquoi les rayons X sont particulièrement adaptés à l'imagerie osseuse.

1.2.1.1 La radiologie conventionnelle

La réalisation d'une image en radiologie conventionnelle est basée sur la projection du corps humain par transillumination (figure 1.3):

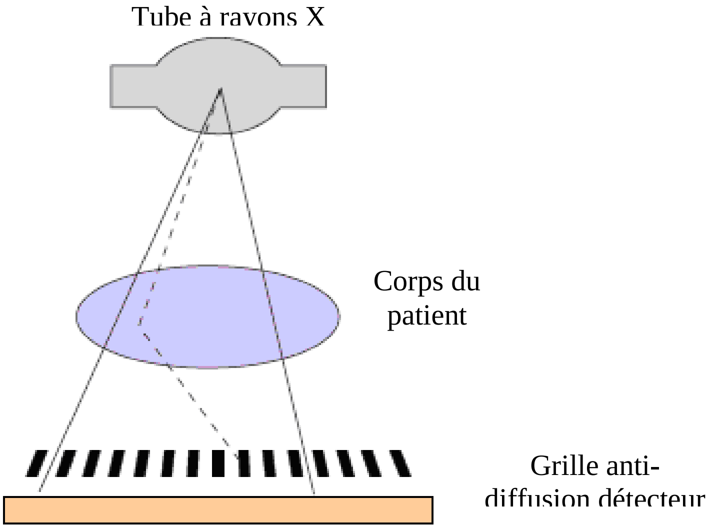
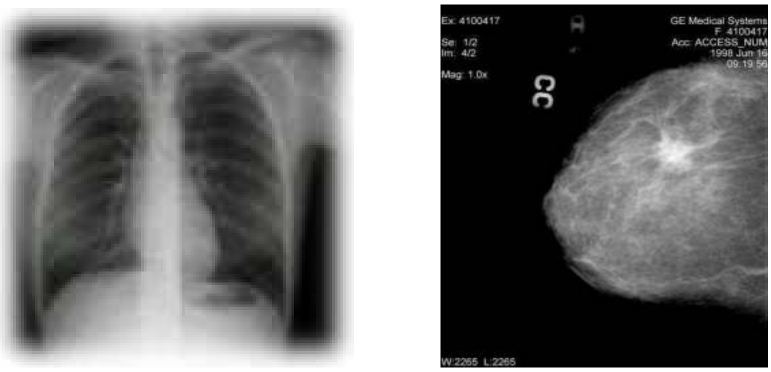


Figure 1.3 Schéma de principe de la radiographie conventionnelle [Selb, 2002].

Un faisceau de rayons X est envoyé sur le patient, et se rassemble de l'autre côté sur une plaque photographique, combinaison d'un écran fluorescent et d'un amplificateur de brillance ou d'une émulsion photographique. On outre pour limiter les effets du rayonnement diffusé sur l'image radiographique il faut placer Une grille en plomb ou en acier en parallèle avec le patient Cette grille est composée de lamelles arrangées en peigne, la hauteur et la distance des lamelles définissant le pouvoir antidiffusant de la grille. Elle est utilisée, en pratique, lorsque l'épaisseur des tissus dépasse 10 cm. L'image obtenue par radiologie conventionnelle (figure 1.4-a par exemple) ne permet pas de faire de l'imagerie en trois dimensions. Cependant, si cette technique offre un excellent contraste entre les os et les tissus mous, le contraste entre les différents tissus mous est faible et rend par exemple difficile la localisation de tumeurs au sein de ces tissus.

Les mammographies sont un exemple un peu particulier mais très répandu de radiographie conventionnelle: le sein est légèrement compressé entre deux plaques, le tube à rayons X étant situé d'un côté et le détecteur de l'autre. La figure (1.4-b) présente un exemple de mammographie: on y voit une tumeur dont les tissus sont plus denses que l'environnement.



(a) (b)

Figure 1.4 Deux exemples de radiographie conventionnelle: (a) radiographie du thorax. (b) mammographie d'un sein présentant une tumeur. (Source: site http://www.villarsgyn.ch, image Prof. R. Otto, Baden).

1.2.1.2 Le scanner X

Le *CT (Computerized Tomography*) ou le scanner est une chaîne radiotomographique assistée par un ordinateur qui mesure les densités d'un objet anatomique avec reconstruction matricielle d'une image numérisée, visualisée selon différents contrastes.

Le premier prototype industriel a été présenté en 1972 par G.N. Hounsfield (Prix Nobel 1979) au congrès Annuel du *British Institute of Radiology* [Hounsfield, 1973]. Il pallie le principal défaut de la radiographie conventionnelle, qui ne permet pas de faire de l'imagerie en trois dimensions.

Son principe est en effet de choisir un plan de coupe et d'effectuer de multiples projections sous différents angles afin de connaître le coefficient d'atténuation en chaque point du plan.
Le patient est placé sur une table qui se déplace dans le sens longitudinal à l'intérieur d'un court anneau (généralement aux alentours de 70 centimètres de diamètre). Pour cela, un fin pinceau de rayons X, issu d'une source collimatée, balaye le corps du patient et réalise une première image en 2D (figure 1.5-a et -b). Le même processus est répété après que le système a été tourné, pour obtenir un nouvel angle de projection (figure 1.5-c et -d).

Un peu plus de 2 millions de données sont enregistrés en quelques secondes par l'ordinateur. Le programme de celui-ci permet de calculer l'absorption du rayonnement en chaque point de la coupe. Le scanner utilise l'absorption des rayons X en relation directe avec la densité des tissus que les rayons ont rencontrés. Les résultats sont alors mis en mémoire.

Quatre générations de scanners X se sont succédé avec des géométries sources-détecteurs différentes, réduisant progressivement les temps d'acquisition. Actuellement, les appareils de cinquième génération acquièrent une image 2D en quelques millisecondes seulement, permettant une véritable imagerie temps réel, et les scannographes à acquisition hélicoïdale rapide réalisent des images en trois dimensions.

La 3D permet une vue de "l'objet" sous différents angles, ce qui facilitent notamment l'étude de fractures d'os courts et compacts. Elle permet, par exemple, d'obtenir des vues "éclatées" de l'os du talon fracturé en plus de trois fragments. Le chirurgien dispose ainsi d'une bien meilleure approche du travail qu'il doit accomplir.

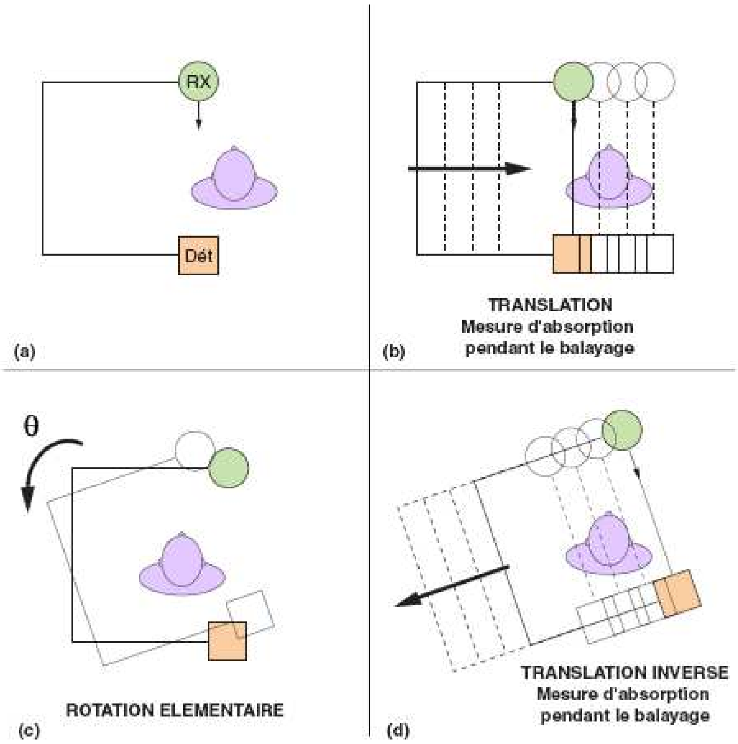


Figure 1.5 Schéma de principe du scanner X [Selb, 2002].

Le scanner X trouve ses applications dans de nombreux domaines de la médecine: pathologie crano-encéphalique, ophtalmique, examen de l'abdomen, du thorax (Figure 1.6), des poumons...

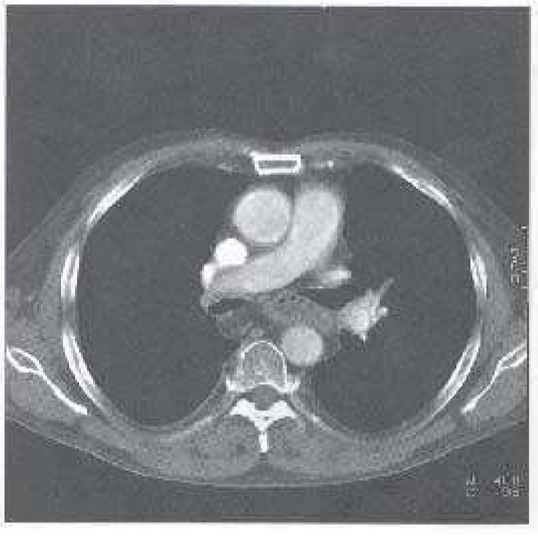


Figure 1.6 Exemple d'image du thorax au tomodensitomètre [Theis & Anke, 2010].

Notons que les rayons X sont des rayonnements ionisants et à ce titre, leur utilisation doit s'effectuer avec toutes les mesures de protection adéquates Pour cette raison, les examens radiographiques ne doivent pas être répétés trop fréquemment (2 radios par an).

1.2.2 L'échographie

L'échographie est une technique d'exploration en imagerie médicale à caractère inoffensif en raison, de l'usage des ultrasons. C'est la méthode d'investigation la plus simple parce qu'elle ne nécessite pas de grande préparation du patient.

Sa naissance a commencé en 1952, le Britannique J.J. Wild et l'Américain J.M. Reid présentent les premières images de sections 2D d'un sein obtenues à l'aide d'ultrasons. Ils proposent également le terme d'échographie, ou "échométrie", pour désigner cette technique d'investigation [Wild & Reid, 1952].

L'échographie présente l'avantage d'être complètement inoffensive aux doses employées [Fink, 1984]. Une impulsion acoustique constituée de quelques périodes, d'une durée de l'ordre de la microseconde, est envoyée dans le corps humain. Cette impulsion se propagent dans l'organisme (foie, cœur, rein, fœtus,...) et subissent une réflexion partielle (écho) à chaque variation d'impédance acoustique du milieu, sans que sa fréquence soit modifiée. L'énergie ainsi réfléchie (écho) est utilisée pour identifier, localiser et caractériser l'interface. La représentation de tous les échos le long des lignes de propagation des ultrasons permet de créer l'image échographique. Cette image est constituée de points dont la brillance est fonction de l'intensité des énergies réfléchies par les différentes interfaces traversées.

Les systèmes actuels ont des dynamiques supérieures à 100 dB permettant de recueillir des échos de très faible amplitude. La mesure du temps de vol et de l'intensité des échos permet de déterminer les positions et les propriétés acoustiques des structures situées en profondeur dans les tissus. L'imagerie en mode A réalise un profil en amplitude des propriétés acoustiques du tissu selon une ligne de tir. Dans le mode B, cette amplitude est convertie en intensité d'un spot lumineux. Pour réaliser une image en deux dimensions, il faut translater la ligne de tir et convertir les informations d'intensité en niveaux de gris. Les deux modes d'imagerie sont illustrés sur la figure (1.7).

L'élément essentiel d'un système échographique est le transducteur, qui agit à la fois comme émetteur et comme récepteur des signaux acoustiques. Il transforme un signal électrique en onde acoustique et vice-versa grâce au phénomène piézo-électrique [Malvino, 1999].

Actuellement les sondes utilisées sont composées d'une centaine d'éléments piézo-électriques de petites dimensions, un amortisseur et d'un adaptateur d'impédance qui a pour but d'envoyer et de recevoir un signal ultrasonore.

Chaque sonde possède une forme particulière mais la fréquence est dû à la forme du cristal : plus il est petit plus la fréquence émise est élevée.

La deuxième partie de la sonde est l'amortisseur qui possède deux rôles :

- amortir les vibrations
- éviter les rayonnements parasite vers l'arrière.

Enfin l'adaptateur d'impédance a pour but de faire barrière entre la peau du patient et les électrodes ainsi que protéger l'élément piézo-électrique.

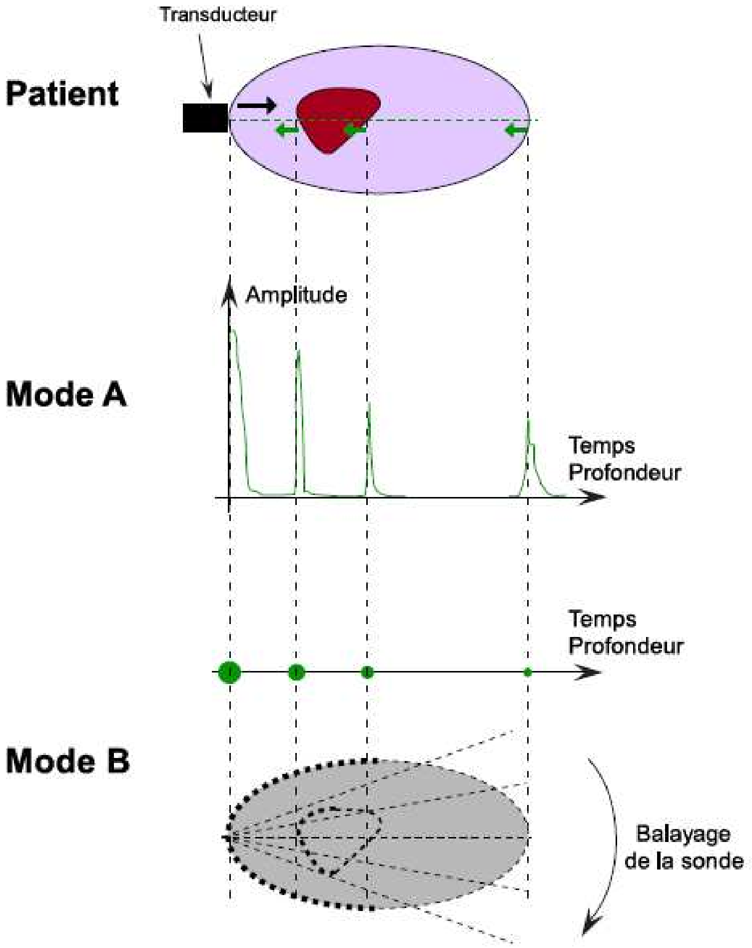


Figure 1.7 – Principe des modes A et B en échographie. Le transducteur ultrasonore envoie dans le corps du patient une impulsion acoustique et enregistre les échos dus aux réflexions sur les structures rencontrées. Leur temps de vol indique la profondeur des structures. En mode A, on visualise l'amplitude de l'écho. En mode B, cette amplitude est convertie en intensité d'un spot lumineux (représentée ici par des spots de tailles différentes). Le balayage de la sonde permet d'acquérir une image en deux dimensions des organes. (Schéma adapté de [Fink, 1984]).

Une utilisation un peu particulière des ultrasons est l'échographie Doppler, qui mesure le décalage en fréquence des ondes acoustiques rétrodiffusées par des structures en mouvement. Elle permet ainsi de mesurer notamment la direction et l'intensité du flux dans les vaisseaux sanguins. Cette technique permet une imagerie dynamique d'organes comme le coeur à une fréquence de quelques dizaines d'images par seconde.

Les procédés de focalisation électronique des ondes ultrasonores sont parvenus à réaliser des images ultrasonores en temps réel, avec une résolution inférieure au millimètre. Les mêmes techniques de focalisation permettent également de visualiser des écoulements sanguins dans le corps humain (méthodes de corrélations temporelles des échos du sang, liées à l'effet Doppler) ; c'est l'imagerie Doppler couleur".

Dans les années 90 L'utilisation de microbulles permet d'améliorer le contraste de l'imagerie ultrasonore. Ces agents de contraste sont notamment utilisés lors des échocardiographies. Ces particules sont généralement des émulsions d'huiles perfluorocarbonées stabilisées par une couche de phospholipides [Lanza & Wickline, 2001], [Unger et al., 2004]. Ces huiles possèdent la propriété de dissoudre d'importantes quantités de gaz (elles sont notamment utilisées pour produire le sang artificiel). Ces microbulles ont des réponses non linéaires très fortes à une excitation acoustique, et permettent de faire de l'imagerie harmonique avec un très bon contraste.

Enfin, L'utilisation des ultrasons est sans danger, c'est pourquoi cette modalité d'imagerie est particulièrement employée pour imager les foetus. Cette technique est de plus rapide, peu coûteuse et peu encombrante. La résolution peut être très précise, mais elle diminue rapidement lors de l'observation de zones profondes, et les os ne laissent pas passer les ondes ultrasonores.

1.2.3 L'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM)

La technique de l'Imagerie par Résonance Magnétiseur (IRM) constitue une des avancées les plus significatives de la médecine du 20ème siècle. Elle a été mise au point en1973 par Lauterbur et Damadian [Lauterbur, 1973], [Damadian, 1977].

C'est une méthode non invasive et extrêmement précise spatialement, elle est également utilisée pour étudier les problèmes osseux rachidiens ou discaux voire infectieux qui peuvent toucher la moelle. Elle permet aussi la détection de processus pathologiques cardiaques (notamment ischémiques) ou des gros vaisseaux sanguins et elle donne des informations sur les organes de l'abdomen. De plus l'IRM permet d'avoir des informations sur les articulations et les parties non osseuses. Les techniques chirurgicales bénéficient alors des informations anatomiques et des informations de contraste apportées par l'IRM [Farr, 2002].

Cette technique d'imagerie repose généralement sur l'interaction des protons[1] (noyaux d'hydrogène) du corps humain avec un champ magnétique. En effet Un proton possède un moment magnétique $\overrightarrow{m_p}$. Placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ continu, ce moment magnétique nucléaire $\overrightarrow{m_p}$ s'oriente par rapport au champ $\overrightarrow{B_0}$ et décrit, autour de son axe, un mouvement de précession avec une vitesse angulaire $w_0 = \delta \cdot B_0$ (fréquence de Larmor), où δ est le rapport gyromagnétique du noyau. Ainsi un noyau d'hydrogène placé dans un champ magnétique de $1T$ a une fréquence de précession de f_0 = 42,57MHz. La précession du moment magnétique peut se faire avec deux orientations quantifiées: spin +1/2 et spin -1/2. Pour un grand nombre de noyaux interagissant avec le champ $\overrightarrow{B_0}$, les populations sur les deux niveaux d'énergie sont régies par une distribution de Boltzmann. L'état le plus stable (spin +1/2) est légèrement plus peuplé. Il en résulte une aimantation macroscopique $\overrightarrow{M_0}$, dirigée selon $\overrightarrow{B_0}$ (Figure 1.8-a).

---

[1] Si l'IRM se limite généralement à l'hydrogène, la SRM (Spectroscopie par Résonance Magnétique) cherche à identifier d'autres atomes (phosphore, sodium, et carbone-13 essentiellement). Elle permet d'étudier le métabolisme hépatique, musculaire ou celui du cerveau. Par ailleurs, diverses équipes ont obtenu des images des poumons par IRM de l'helium-3 hyperpolarisé, après inhalation de ce gaz par le patient [Durand et al., 2001], [http://www.lkb.ens.fr/recherche/flquant/hpg.html].

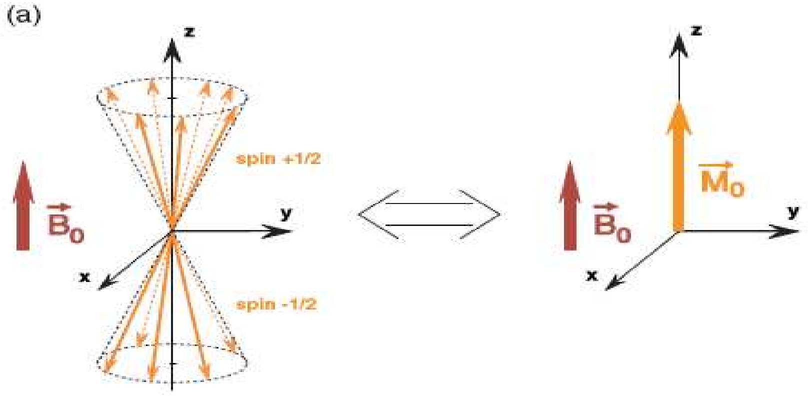


Fig. 1.8 – Principe de la RMN. (a) Population de moments magnétiques nucléaires en précession autour d'un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ *selon deux orientations quantifiées. L'état le plus stable (spin +1/2) est légèrement plus peuplé. L'ensemble est équivalent à une aimantation macroscopique* $\overrightarrow{M_0}$ *dirigée selon* $\overrightarrow{B_0}$ *[Selb, 2002].*

L'application d'une impulsion radiofréquence, créant un champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{B_0}$, va faire basculer l'aimantation globale $\overrightarrow{M_0}$ d'un angle qui dépend de la durée et de l'amplitude de l'impulsion (figure 1.9-b). A l'arrêt de l'impulsion, l'aimantation $\overrightarrow{M_0}$ revient à sa position d'équilibre en décrivant un mouvement complexe hélicoïdal à la fréquence w_0 (figure 1.9-c). On peut décomposer ce mouvement en une composante longitudinale qui va croissant vers sa valeur d'équilibre M_0 avec un temps de relaxation T_1, et une composante transversale qui va décroissant vers sa valeur d'équilibre nulle avec un temps de relaxation T_2. La bobine qui a servi à l'excitation travaille en réception et enregistre à présent le signal de retour à l'équilibre. Les valeurs de T_1 et T_2 varient d'un tissu à l'autre car les propriétés du proton dépendent de son environnement chimique: c'est sur la mesure de T_1 et T_2 que repose la distinction des tissus en RMN [Bloch, 1946].

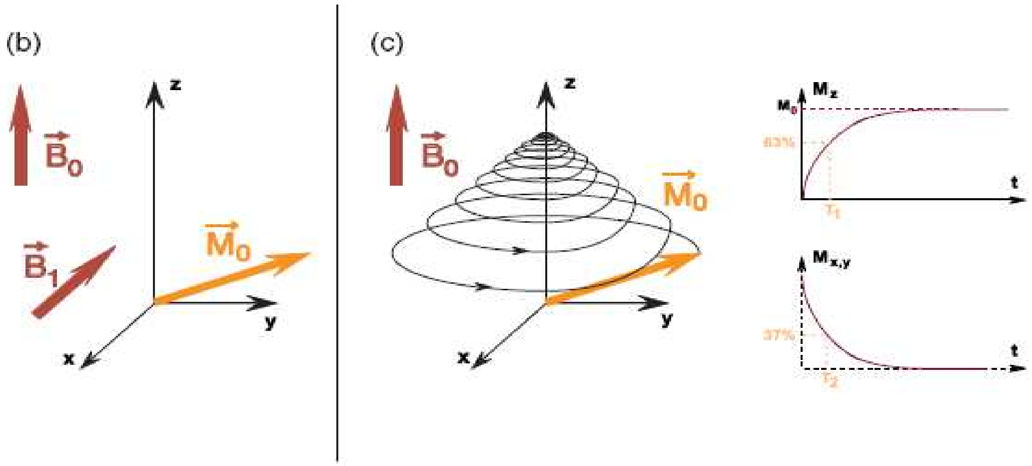


Figure 1.9 - (b) Basculement de l'aimantation globale $\overrightarrow{M_0}$ *, sous l'effet d'une onde radiofréquence créant un moment magnétique* $\overrightarrow{B_1}$ *perpendiculaire à* $\overrightarrow{B_0}$ *. (c) A l'arrêt de l'impulsion radiofréquence, retour de l'aimantation macroscopique à sa position d'équilibre selon une trajectoire hélicoïdale [Selb, 2002].*

Pour passer de la RMN à l'IRM proprement dite, c'est à dire à l'imagerie, il faut pouvoir localiser la provenance des signaux. Le système d'acquisition d'IRM utilise des bobines de gradients et une bobine de forme tubulaire générant le champ magnétique principal dans laquelle le patient est amené par une table coulissante (Figure 1.10). La bobine crée un champ magnétique statique intense B_0 dans la direction Z. Ce champ magnétique B_0 oriente préférentiellement les protons les atomes d'hydrogène dans cette direction Z. L'antenne (RF coil) dans laquelle est placé l'organe du patient à explorer, crée un champ magnétique B_1 qui fait basculer les spins dans le plan de mesure XY. Une fois basculés, les spins de l'organe reviennent à leur état d'équilibre par des phénomènes de relaxations transversale et longitudinale. C'est pendant ce retour à l'état d'équilibre que les spins émettent un faible signal qui est détecté par la partie réceptrice de l'antenne. Le signal recueilli par l'antenne est amplifié et traité pour construire les images des coupes qui correspondent aux plans de l'acquisition. La précision de l'information obtenue par IRM (spatiale et de contraste) permet de détecter des petits détails ou des changements des structures des organes du corps humain.

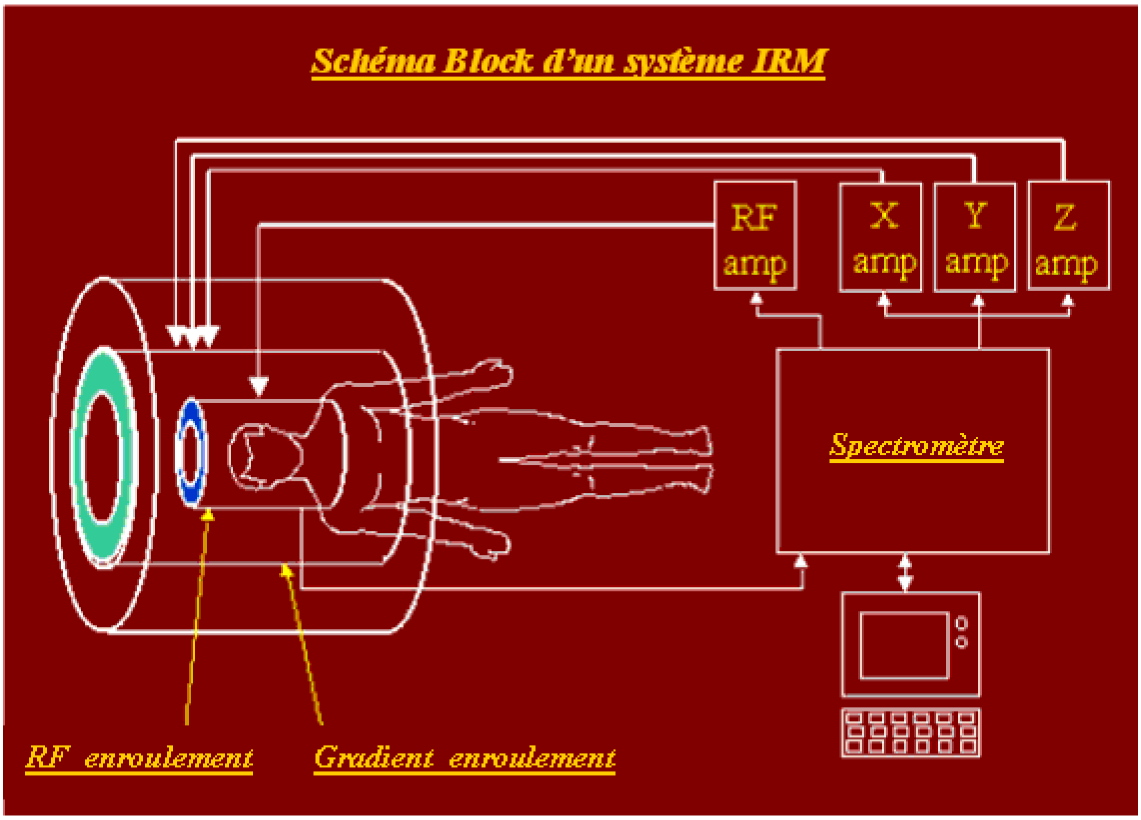


Figure 1.10 – Le procède d'acquisition IRM [Jezzard, 2001].

L'IRM est une technique sans danger puisque, contrairement aux rayons X, elle ne se base pas sur l'utilisation de rayonnements ionisants.

Elle s'applique à de nombreux domaines médicaux: essentiellement imagerie du cerveau, de la moelle épinière, des os et des articulations, mais également cardiologie, imagerie du foie, du sein (Figure 1.11), de l'abdomen, des reins, artériographie.

Cette technique est sans doute la modalité d'imagerie structurelle la plus puissante mais elle n'est toutefois pas dénuée de défauts. En effet, la durée d'acquisition est relativement longue mais c'est surtout son coût très important qui limite son utilisation, ainsi que les équipements encombrants qu'elle nécessite (entre 10 et 30 tonnes pour un appareil "corps entier"). Par ailleurs, l'examen en lui-même est assez contraignant pour le patient qui doit rester immobile et enfermé pendant plusieurs dizaines de minutes.

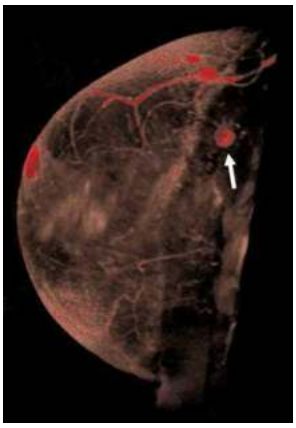


Figure 1.11 – Image IRM d'un sein. La flèche indique une tumeur qui était difficile à localiser sur une mammographie car située trop près du corps. (Source: site http://www.mri.jhu.edu).

1.2.4 La médecine nucléaire

Le principe de la médecine nucléaire consiste à introduire à l'intérieur de l'organisme des traceurs radioactifs spécifiques d'une fonction métabolique ou physiologique.

C'est une technique d'imagerie fonctionnelle et même moléculaire car elle permet de visualiser et de localiser l'accumulation des radiopharmaceutiques. Ces traceurs se décomposent en émettant des photons δ que l'on va détecter. Ce type d'imagerie nécessite donc l'utilisation d'un "radiomédicament": il s'agit d'une molécule fonctionnelle, dont on cherche à connaître le trajet ou les sites de fixation, et dont l'un des atomes est radioactif.

Dans certains cas, c'est l'atome même que l'on cherche à visualiser qui sert de traceur. Ainsi l'injection d'iode radioactif qui se fixe sur la thyroïde permet d'obtenir des images de cet organe. Une autre molécule couramment employée en médecine nucléaire est le fluoro-désoxyglucose. Il s'agit d'une molécule de glucose dont on a remplacé un hydroxyle par un atome de fluor radioactif. C'est grâce au fluor que l'on trace le glucose. Celui-ci permet d'étudier l'activité cérébrale ou encore des sites tumoraux dont le métabolisme glucidique est déréglé.

Deux technologies basées sur des radioéléments différents sont actuellement utilisées : la tomographie à émission de positrons (TEP, ou PET en anglais pour « Positron Emission Tomography ») et la tomographie d'émission monophotonique (TEMP, ou SPECT en anglais pour « Single Photon Emission Tomography »).

1.2.4.1 Tomographie par Emission de Photon Unique

(Ou *SPECT* pour *Single Photon Emission Computerized Tomography* en anglais). C'est une technique d'imagerie qui utilise une caméra gamma pour enregistrer le rayonnement δ émis par les radio-isotopes. La tête de détection de cette caméra est formée d'un collimateur, d'un cristal scintillateur et d'une matrice de photomultiplicateurs. La caméra tourne autour du patient et un algorithme d'inversion permet de reconstruire une section en 2D du corps humain.

En pratique, les lésions tumorales sont préalablement marquées avec un traceur radioactif. Le chirurgien place ensuite le détecteur dans la plaie opératoire et parcourt l'organe ou la région suspectée à l'aide de la tête de la caméra. Sur les images obtenues pour chaque position, le praticien repère les sites tumoraux en identifiant les zones de plus fortes activités correspondant à une concentration du radiotraceur.

1.2.4.2 Tomographie par Emission de Positons

(TEP, ou *PET* pour *Positron Emission Tomography* en anglais). Cette technique s'est développée dans le milieu de années 70. Lors de sa désintégration, l'isotope radioactif émet un positon qui, en s'annihilant avec un électron, émet deux photons δ se propageant dans des directions opposées. Le patient est placé à l'intérieur d'un anneau constitué de détecteurs de rayonnement δ. Lorsque deux détecteurs situés de part et d'autre du patient détectent simultanément un photon, cela signifie qu'un positon a été émis quelque part le long de la ligne joignant les deux détecteurs (Figure 1.12). Par recoupement de plusieurs lignes de détection, il est alors possible de localiser un site d'émission et de réaliser des images avec une résolution de quelques millimètres.

Actuellement, il existe quelques prototypes qui combinent deux techniques d'imagerie, il s'agit de coupler les deux anneaux (scanner et TEP) [Kinahan et al., 1998]. Cela permet de plus de réaliser la cartographie des atténuations aux rayons X, et de compenser sur l'image TEP les pertes par atténuations.

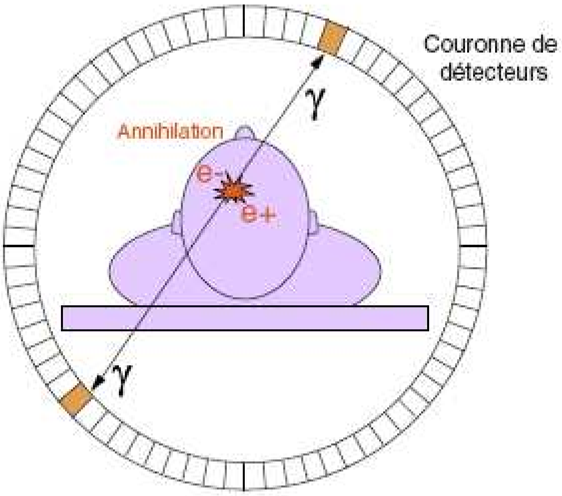


Figure 1.12 – Schéma d'un appareil TEP [Selb, 2002].

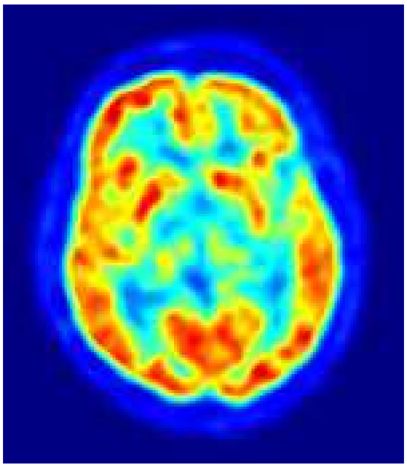


Figure 1.13 Image TEP du cerveau.

L'utilisation de sources radioactives en fait une technique lourde à utiliser en termes de mesures de sécurité.

1.2.5 Imagerie moléculaire

L'imagerie moléculaire est un nouveau domaine de recherche qui est devenue véritablement interdisciplinaire et attire des spécialistes de domaines aussi divers que la biologie, la chimie, la cardiologie, la génétique, la génomique, l'immunologie, la neurologie, la médecine nucléaire, l'oncologie, la pharmacologie, et la radiologie.

On peut définir l'imagerie moléculaire comme la représentation visuelle, la caractérisation et la quantification de processus biologiques à l'échelle cellulaire ou subcellulaire, et également le suivi de processus moléculaires au sein d'organismes vivants de manière non invasive [Massoud et al., 2003], [Weissleder, 2002].

D'autre part, elle a recours à la fois aux techniques non invasives d'imagerie médicale, à des méthodes optiques et des outils moléculaires (radio marqueurs, sondes...). Comme toute technologie médicale fondée sur l'imagerie, elle bénéficie des performances toujours croissantes des programmes de traitement informatique des images numériques.

L'imagerie moléculaire trouve ses applications dans le diagnostic, le traitement et le suivi des tumeurs cancéreuses, des maladies neurologiques ou cardiovasculaires. On outre elle permet d'accélérer le développement de nouvelles thérapies pour ces pathologies grâce à des tests pré cliniques et cliniques permettant l'optimisation des traitements.

Pour être plus claire, elle se base sur l'utilisation d'agents de contraste ou traceurs. Cependant, on distingue deux types de traceurs chaqu'un est destiné à mettre en évidence un processus biologique donné : les traceurs ciblant et les traceurs activables. Les premiers vont se fixer préférentiellement au niveau de cibles, alors que les seconds ne sont détectables qu'après avoir « réagi » avec la cible, ce qui permet de réduire le bruit de fond et améliore le contraste final (Figure 1.14).

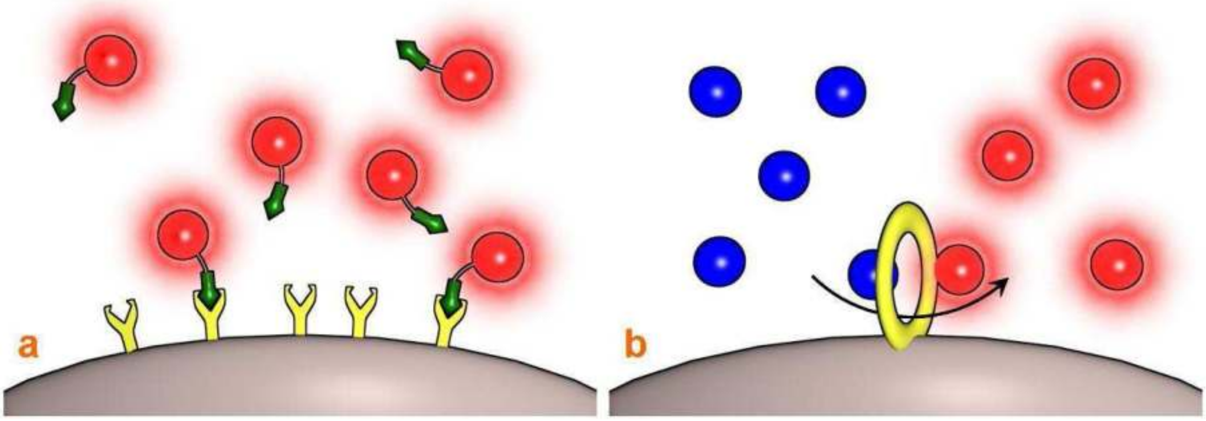


Figure 1.14 Illustration des différents principes de traceurs. a) Traceur ciblant : l'agent de contraste est lié à une molécule (bio marqueur) qui est reconnue ou qui reconnaît spécifiquement une cible biologique donnée. b) Traceur activable: l'agent de contraste est inhibé et c'est l'action d'un processus biologique qui va restituer les propriétés qui permettent de le détecter. [Goutayer, 2008].

L'imagerie moléculaire permet par exemple de détecter d'une manière élégante la présence de certains marqueurs tumoraux dans un organisme vivant, alors que la tumeur est indétectable avec les modalités d'imagerie structurelles classiques sans réaliser de prélèvement.

1.2.6 Fluorescence

L'imagerie par fluorescence est une technique sensible largement utilisée pour la détection de composants particuliers d'entités biomoléculaires, comme les cellules vivantes. Elle a une faible résolution spatiale et une profondeur de détection limitée. Il s'agit malgré tout de la méthode la plus rapide et la moins coûteuse pour imager des molécules ou des cellules dans le petit animal. Elle constitue ainsi une méthode complémentaire de l'IRM ou de la médecine nucléaire [Frangioni, 2003].

La fluorescence permet de faire de l'imagerie moléculaire car il est possible de suivre des traceurs en observant leur émission de fluorescence après les avoir excités par une source lumineuse. A cette fin, un fluorophore (colorant fluorescent) peut être lié chimiquement aux protéines, aux cellules, aux acides nucléiques ou aux anticorps, entre autres molécules biologiques. Ces fluorophores sont conçus pour localiser un spécimen biologique, surveiller la distribution et la quantification des traitements.

Pour obtenir une image fluorescente, le fluorophore est stimulé par une lumière, à une longueur d'onde donnée, à partir d'une source externe, comme une diode laser, afin de promouvoir l'excitation électronique du fluorophore. Une fois excité, le fluorophore émettra de la lumière selon une longueur d'onde plus grande que celle de l'excitation. Un filtre situé devant le détecteur laisse passer la lumière émise mais bloque la lumière d'excitation, permettant ainsi de ne surveiller et ne détecter que la fluorescence émise par une mosaïque captée par une caméra CCD à haute intensité (figure 1.15).

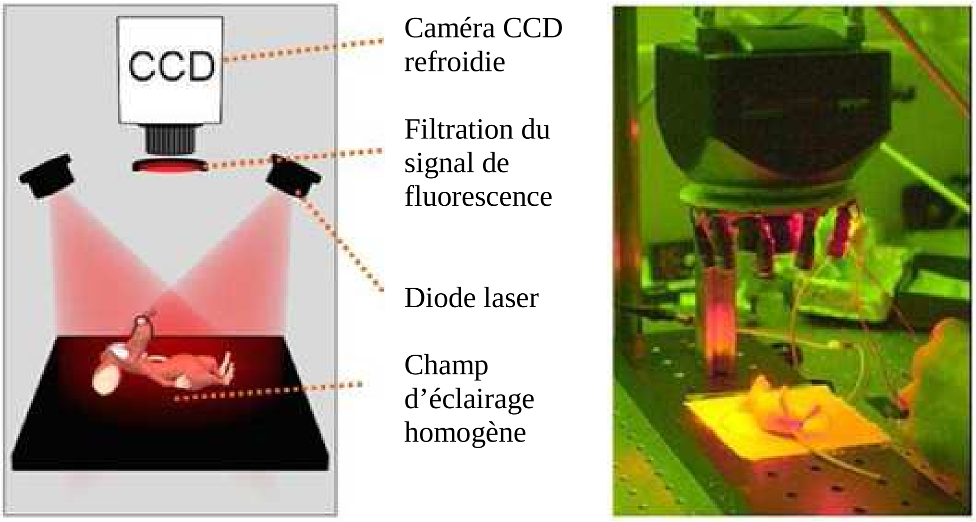


Figure 1-15 Imagerie de fluorescence [Goutayer, 2008].

On retrouve deux types de fluorescence dans les tissus : endogène (c'est-à-dire provenant de matières présentes naturellement dans les tissus) et exogène (c'est-à-dire provenant d'une matière ajoutée afin de permettre le dépistage ou le marquage).

Les fluorophores endogènes, tels que le nicotinamide adénine dinucléotide (NADH), fournissent de l'information sur l'énergétique cellulaire. Par ailleurs, le collagène fournit de l'information sur la quantité et l'intégrité du tissu conjonctif.

Dans le cas des fluorophores exogènes, un anticorps concernant un type particulier de cancer peut être marqué à l'aide d'un fluorophore. En dépistant la fluorescence de l'anticorps marqué, il est possible d’assurer le suivi de l’interaction entre l’anticorps et une cellule cancéreuse particulière. La détection de cet anticorps marqué peut alors être utilisée à titre d’indication de la présence d’une tumeur.

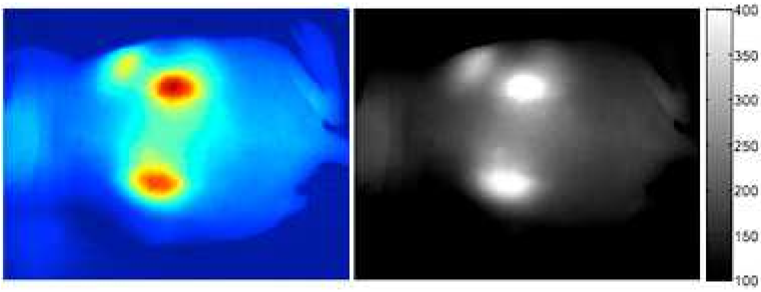


Figure 1-16 Modèle de xénogreffe tumorale sur une souris nude, image proche infrarouge de la distribution de l’anticorps marqué par le colorant fluorescent Cy5. Cet anticorps se retrouve préférentiellement dans les reins, et présente une certaine accumulation au niveau de la tumeur (source site http://www.nrc-cnrc.gc.ca/fra/projets/ibd/imagerie-fluorescence.html).

1.3 Les artefacts en imagerie médicale

Le terme « artefact » est particulièrement utilisé en imagerie médicale il s’agit d’un élément dans une image qui ne représente pas la réalité. Cependant, l'artefact doit être reconnu pour ne pas être interprété à tort par le médecin comme une image lésionnelle.

Certains artefacts sont prévisibles et inévitables, d'autres, comme ceux provoqués par des mouvements peuvent être liés à la coopération du patient. Au pire, les artefacts peuvent rendre l'examen inapproprié ou ininterprétable et conduire le médecin à proposer une autre technique d'examen.

— En radiologie conventionnelle, beaucoup de facteurs concourent à la qualité des images, pour une exposition adaptée avec un bon contraste. On peut citer la corpulence du malade, les paramètres techniques d'exposition, la qualité des films et de leur traitement. La radiologie numérisée apporte de nouvelles possibilités de contrôle du contraste.

— En scan RX, les principaux artefacts sont sans doute ceux liés à l'absorption complète des rayons X par les corps étrangers métalliques et, à un moindre degré, par certaines structures osseuses très denses. Les artefacts d'origine métallique dentaire peuvent être très gênants (Figure 1.17). On commence cependant, à savoir s'en affranchir.

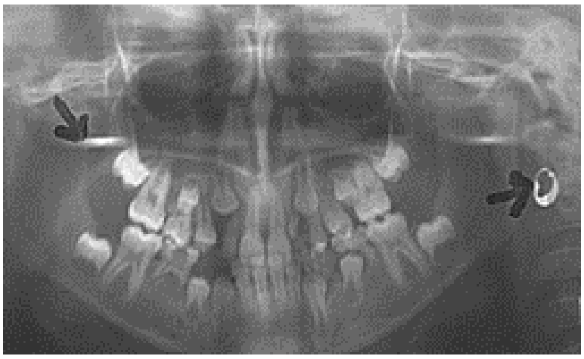


*Figure 1.17 Artéfact causés par une boucle d’oreille [*Bourzgui, et al., 2000]

— En imagerie par résonance magnétique, il existe une grande variété d'artefacts. Les artefacts cinétiques de mouvement ne peuvent être maîtrisés facilement : le cœur bat, les vaisseaux ont des pulsations, le thorax et l'abdomen respirent ; mais on peut choisir de les projeter selon une direction ou une autre, en fonction de la zone d'intérêt de l'image. Les corps métalliques perturbent les lignes de champ magnétique et déforment parfois considérablement l'image ou l'oblitèrent complètement (Figure 1.18).

Figure 1.18 Artefact métallique lié à la présence d'une aiguille de suture. (Source site http:// www.irmcadiac.com).

1.3.1 Problème d'Aliasing

Crènelage ou **repli de spectre,** c'est le phénomène de recouvrement du spectre (Figure 1.19), il peut se produire lors du passage du monde continu au monde discret, d'un signal ou d'une image, lorsque des fréquences qui ne sont pas représentées dans le signal original sont introduites par erreur dans le signal, par conséquence de son échantillonnage ne respectant pas le Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon [Tisserand et al., 2008].

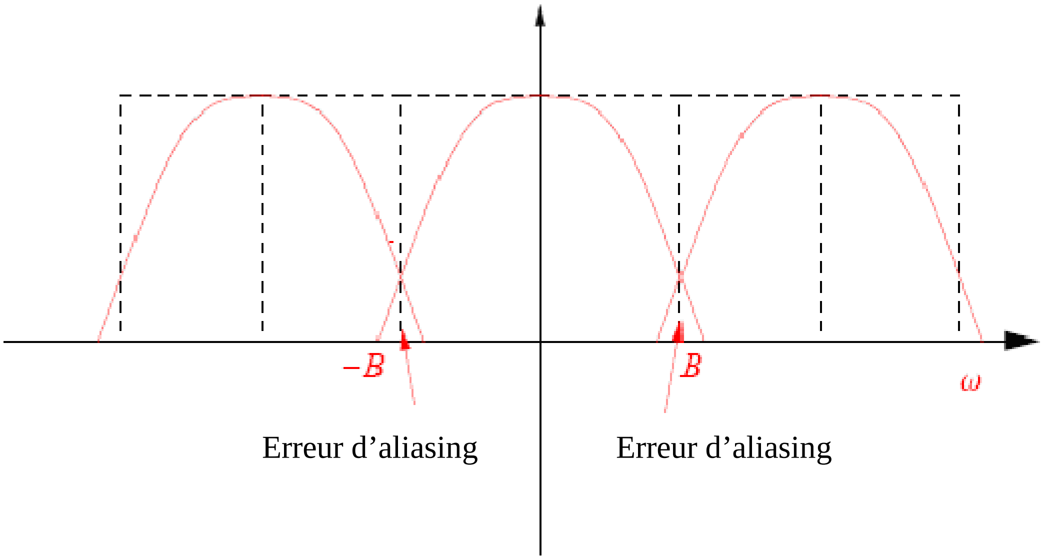


Figure 1.19 problème d'Aliasing [Zhang, 2006].

1.3.2 Phénomène de Gibbs

On peut observer ce phénomène d'oscillation dans les images ou signaux sortis d'un système physique ou numérique en mesurant une fonction *f*. Pour éviter l'artefact d'aliasing, l'échantillonnage nécessite le respect des conditions de Shannon et donc un filtrage passe-bas préalable est effectué. L'approximation par cette fonction filtrée crée des oscillations au voisinage où *f* a une discontinuité qui représente souvent une frontière, un contour dans les images. C'est ce que l'on appelle le phénomène de Gibbs [Zhang, 2006].

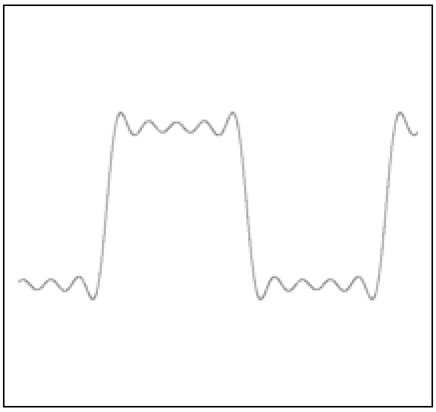


Figure 1.20 Phénomène de Gibbs [Zhang, 2006].

1.4 Modèles de bruits de l'image

A chaque étape de l'acquisition d'une scène, des perturbations (rayures, poussières, caméra, amplification, quantification) vont détériorer la qualité de l'image. Ces perturbations sont regroupées sous le nom de "bruit d'image". Le bruit peut être groupé en deux classes :

1. Bruit indépendant (on parle de bruit aléatoire),
2. Bruit qui dépend des données de l'image.

Cependant, le principe d'une image dégradée est le suivant :

$$y\,(i,j)= Hw\,(i,j)+n(i,j) \tag{1.1}$$

Avec l'image $y\,(i, j)$ est la somme de l'image réelle $w\,(i, j)$ avec le bruit $n\,(i, j)$. Le bruit $n\,(i, j)$ est souvent décrit par sa variance σ_n^2. H est un opérateur borné et linéaire modélise le processus d'acquisition. Dans notre travail nous nous concentrons sur l'exemple de débruitage, où H est l'opérateur identité.

L'effet du bruit sur l'image est souvent décrit par Le rapport signal sur bruit (SNR, pour Signal to Noise Ratio) qui est souvent utilisé comme un paramètre quantitatif de bruit dans les applications de traitement de signaux et d'images, il est donné par la relation suivante :

$$SNR = \frac{\sigma_w}{\sigma_n} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{\sigma_n^2} - 1} \tag{1.2}$$

Où $\sigma_n^2 et \sigma_y^2$ sont les variances respectives de l'image réelle et de l'image traitée. Un autre paramètre quantitatif le PSNR (acronyme de Peak Signal to Noise Ratio), est souvent utilisé pour mesurer la qualité de l'image obtenue par rapport à l'image standard numérique.

Pour une image reconstruite I et l'image de référence I_0 de taille $M \times N$, le PSNR en décibels (db) est défini comme suit :

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{D^2}{EQM} \tag{1.3}$$

$$EQM = \frac{1}{M \times N} \cdot \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (f_0(i,j) - f(i,j))^2 \tag{1.4}$$

Où *D* est l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur d'intensité de l'image.
Dans le cas standard d'une image à niveaux de gris entre 0 et 255, *D* = 255. EQM est l'erreur quadratique moyenne de ces deux images.

Une image parfaitement reconstruite a un PSNR infini et une erreur quadratique moyenne (EQM) nulle.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les principales techniques utilisées en imagerie médicale. Notons qu'ils existent d'autres méthodes et techniques d'imagerie médicale qui représentent des mécanismes hybrides entre ces méthodes.

Carl Friedrich Gauss
(30 avril 1777 — 23 février 1855)

> *Mathematics is the queen of sciences and arithmetic is the queen of mathematics.*
>
> ***By Carl Friedrich Gauss***

Chapitre 2

Quelques méthodes en restauration d’image

2.1 Introduction

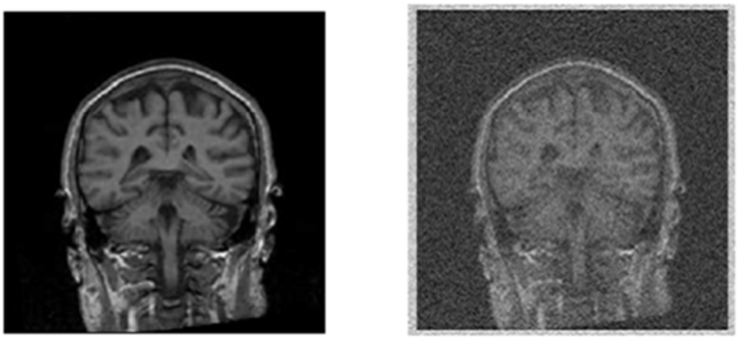
Une image numérique est un objet très irrégulier pour de nombreuses raisons. En effet, elle est souvent confrontée à un phénomène de bruit ce qui rend le traitement des données difficile. Le phénomène de bruit peut être soit d'origine externe, perturbation du système d'acquisition de l'image par des facteurs tel que la luminosité, la pollution, soit d'origine interne au signal du fait des fluctuations spontanées des grandeurs électriques mises en œuvre dans l'acquisition de l'image. L'image peut être aussi détériorée suite à une compression ou décompression mal calibrée.

Cependant, le débruitage est l’un des sujets les plus délicats du traitement des images. Il a vu couler beaucoup d’encre et de nombreuses méthodes lui ont été consacrées, tout d’abord très intuitives, mais progressivement de plus en plus complexes.

En revanche, au cours de Ces dernières années, le problème de la restauration d’image s’est posé en ces termes : comment débruiter l’image tout en respectant les caractéristiques géométriques dans l’image originale ? La difficulté est due au fait que les parties bruitées et les parties discontinues ont généralement des caractéristiques communes.

Dans ce chapitre nous présenterons les différentes méthodes de filtrages linéaires et non linéaires confrontés en traitement d’image. Nous commençons par les filtres linéaires et non linéaires de voisinage, ensuite nous décrirons les différentes méthodes de débruitage à base des équations à dérivées partielles et les différents filtres adaptatifs. La troisième partie présentera le filtrage dans le domaine fréquentielle (transformée de fourier, transformée en ondelettes). La partie finale de ce chapitre est dédiée à une étude complémentaire effectuée sur de nouvelles approches de débruitages qui sont basées sur l’intelligence artificielle (réseaux de neurone artificiel, logique flou, algorithme génétique, PSO).

Les résultats expérimentaux sont présentés sur une image IRM bruitée de taille 353 × 359 (Figure 2.1) avec un bruit blanc gaussien ($\sigma = 10$). Le bruit est important mais visuellement, les informations principales de l’image originale sont conservées.



(a) Image original
353x359

(b) Image bruitée
PSNR=68.1182

Figure 2.1 L’image originale et l’image bruitée simulée en ajoutant un bruit blanc gaussien.

Pour quantifier la différence entre l’image débruitée et l’image bruitée nous allons utiliser deux paramètres. L’un est le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio), l’autre paramètre est l’*EQM* (erreur quadratique moyenne).

Mais avant de pénétrer dans le marais du filtrage il faut passer par deux approches très importantes en traitement d’image c’est le gradient et le laplacien.

Nous utiliserons matlab 7.10.0 pour tester nos algorithmes.

2.2 Gradient d'une image

En utilisant les dérivés partiels, le gradient d'une image donne les taux de changement de niveau de gris par unité de distance dans les directions des axes de coordonnées.
Le gradient d'une image est le vecteur $\nabla I(x,y)$ défini par :

$$\nabla I(x,y) = \left(\left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \right) \right) \tag{2.1}$$

Il est caractérisé par un module m et une direction ϕ dans l'image

$$m = \sqrt{\left(\frac{\partial I(x,y)^2}{\partial x} + \frac{\partial I(x,y)^2}{\partial y} \right)} \tag{2.2}$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \Big/ \frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \right) \tag{2.3}$$

La direction du gradient maximise la dérivée directionnelle.
La dérivée de I (x, y) dans une direction donnée s'écrit $\nabla I^{'}(x,y).d$

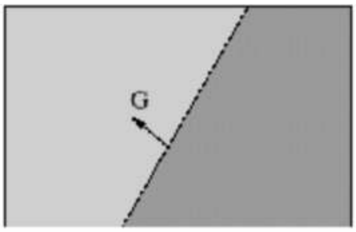


Figure 2.2 Le gradient permet la détection des transitions d'une image.

2.3 Laplacien d'une image

Ressemble à l'opérateur gradient, l'opérateur Laplacien est un autre renforceur de bordure basé sur les dérivés de l'image. L'opérateur du gradient emploie la première dérivée spatiale de l'image, tandis que L'opérateur Laplacien est basé sur la dérivée seconde de l'image.

Le Laplacien d'une image d'intensité *I (x, y)* est défini par :

$$\nabla^2 I(x.y) = \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial \cdot x^2} + \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial \cdot y^2} \tag{2.4}$$

Le Laplacien est souvent utilisé en amélioration d'images :

$$I'(x,y) = I(x,y) - c\nabla^2 I(x,y) \tag{2.5}$$

Cependant, le Laplacien est caractérisé par sa sensibilité au bruit accrue par rapport au gradient.

2.4 Filtrage à base de la convolution numérique

2.4.1 Convolution numérique bidimensionnelle

2.4.1.1 Définition

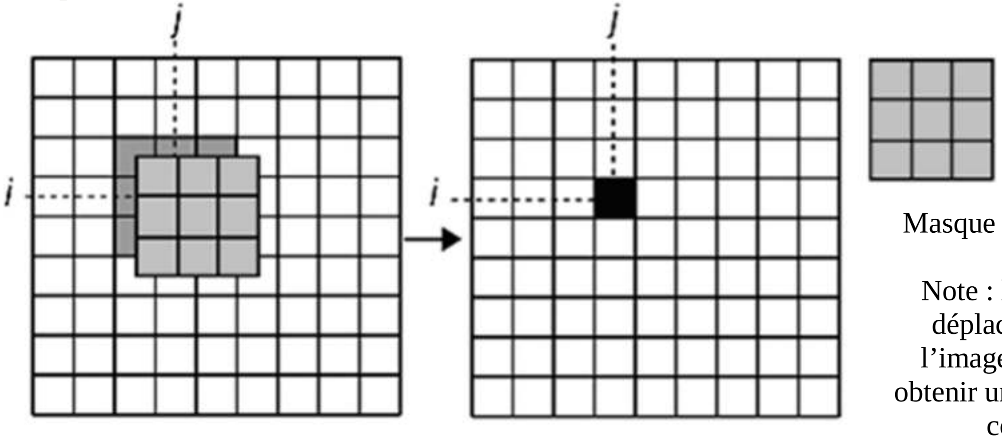
Considérons une image monochrome dans laquelle la fonction *I (i, j)* représente l'intensité lumineuse du pixel de coordonnées *(i, j)*. La convolution numérique de cette fonction avec une réponse impulsionnelle bidimensionnelle *h (m, n)* conduit à une nouvelle image de fonction *g(i, j)*. Cette convolution s'écrit :

$$g(i,j) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} h(m,n) I(i-m, j-n) \tag{2.6}$$

g (i, j) est la somme, pondérée par les coefficients *h (m, n)*, des intensités des pixels appartenant à un voisinage du pixel de coordonnées *(i, j)*. Le traitement est dit localisé. La réponse impulsionnelle *h (m, n)* est appelée masque de convolution.
h(x) est appelé masque de convolution, noyau de convolution, filtre, fenêtre, kernel, …

2.4.1.2 Illustration de l'opération de convolution appliquée à une image numérique

La figure (2.3) illustre le passage d'un masque de convolution sur une image numérique monochrome. Le masque est déplacé dans toute l'image initiale pour obtenir une image traitée complète



Masque de convolution
3×3
Note : le masque est
déplacé dans toute
l'image initiale pour
obtenir une image traitée
complète

Image originale *f (i,j)* Image traitée *g (i,j)*

Figure 2.3 Application d'un masque de convolution sur une image [Tisserand et al., 2008].

En considérant une image numérisée avec les pas *Δx* suivant l'horizontale et *Δy* suivant la verticale, la convolution engendre une modification du spectre des fréquences spatiales dans les intervalles $\left[0, \frac{1}{2\Delta x}\right]$ (Horizontale) et $\left[0, \frac{1}{2\Delta y}\right]$ (verticale).

Par convention pratique, la taille de l'image résultat est la même que celle de l'image d'origine.
En pratique, la convolution numérique d'une image se fera par une **sommation de multiplications.**

Un filtre de convolution est une matrice (image) généralement (mais pas toujours) de taille impaire et symétrique 3x3, 5x5, 7x7, …

Dans la figure (2.4), nous avons illustré une démonstration sur l’application d’un masque de convolution.

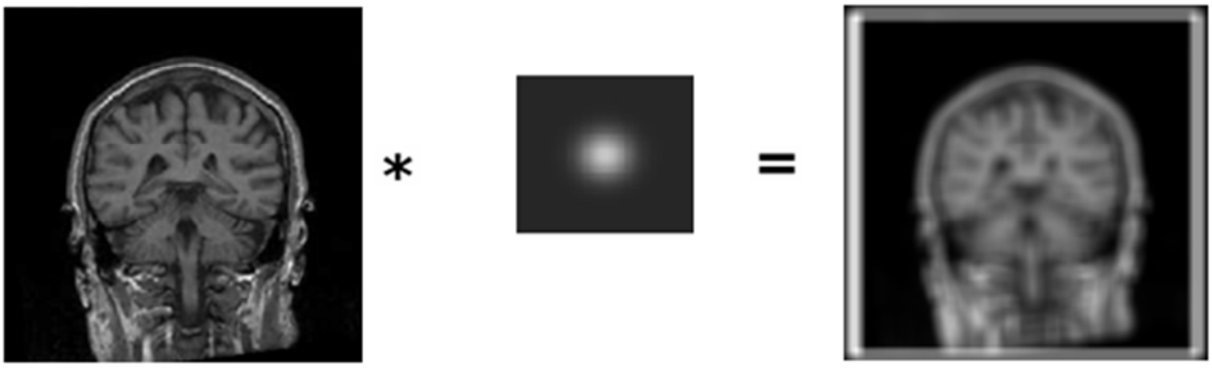


Figure 2.4 Exemple de convolution 2D.

2.4.2 Filtre moyenneur (flou uniforme)

Son principe consiste à remplace chaque pixel par la valeur moyenne de ses voisins. Le filtre moyenneur permet de lisser l'image, réduit le bruit, Réduit les détails non importants et Brouille ou rend l'image floue.

Dans les figures (2.5), (2.6) nous présentons les résultats d’image débruitée par un filtre moyenneur, en utilisant des masques de tailles différentes.

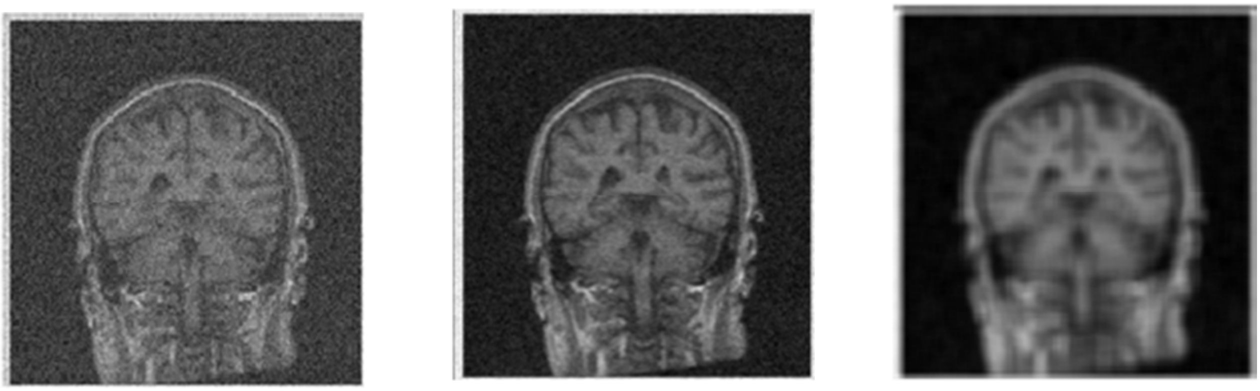
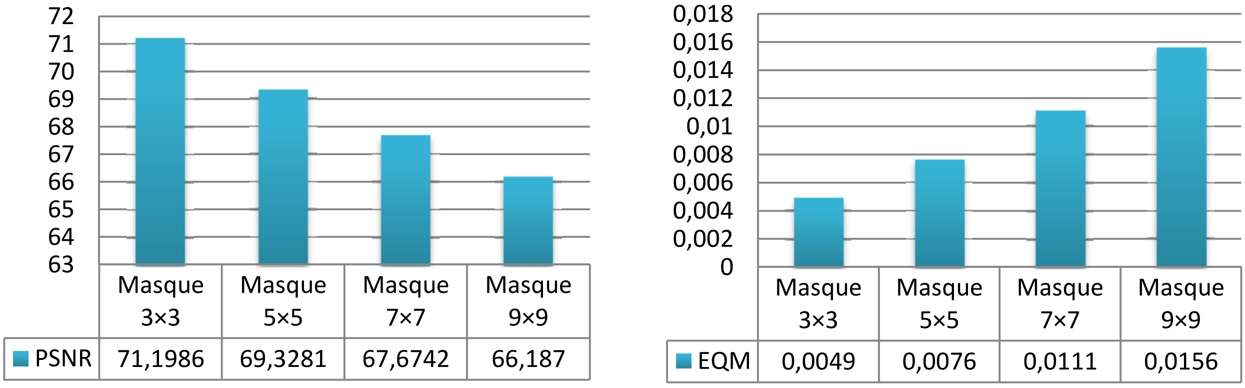


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

masque 3×3
PSNR= 71.1986

masque 9×9
PSNR=66.1870

Figure 2.5 Application du filtre moyenneur.



	Masque 3×3	Masque 5×5	Masque 7×7	Masque 9×9
🟦 PSNR	71,1986	69,3281	67,6742	66,187

	Masque 3×3	Masque 5×5	Masque 7×7	Masque 9×9
🟦 EQM	0,0049	0,0076	0,0111	0,0156

Figure 2.6 Le PSNR et l’EQM en fonction de la taille du masque pour un filtre moyenneur.

D’après ces résultats nous pouvons constater que l’augmentation de la taille du masque conduit à brouiller l’image.

2.4.3 Filtre gaussien

Dans l’approche gaussien On utilise des masques réalisant la moyenne pondérée dans le voisinage du pixel considéré. Cependant les coefficients du filtre gaussien est calculer par :

$$g(x,y,\sigma)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \tag{2.7}$$

On outre Les pixels du voisinage qui sont proches du pixel central ont un poids plus fort (plus d'influence) que ceux qui sont plus éloignés.

Ainsi nous avons exploité un filtre gaussien pour débruité l’image. Sur les figures (2.7), (2.8) nous présentons les résultats du débruitage.

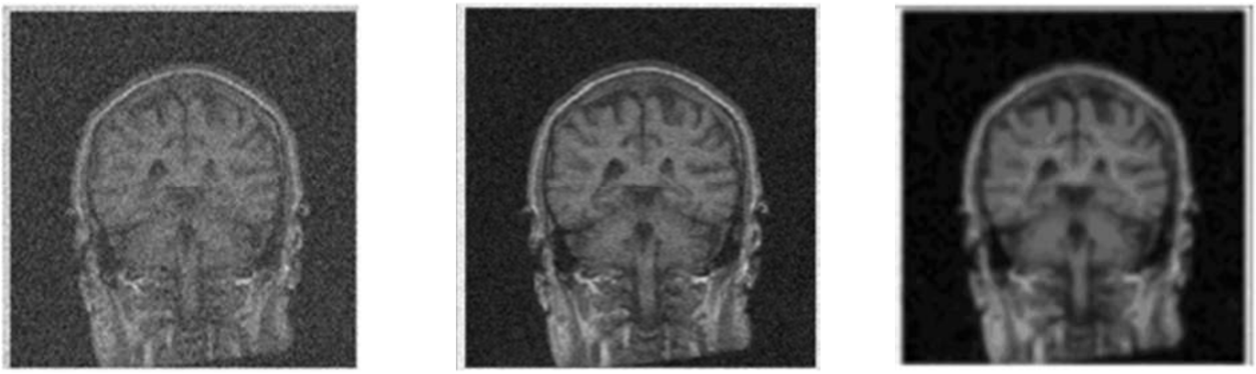


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

masque 3×3
PSNR= 72.0565

masque 9×9
PSNR=70.1947

Figure 2.7 Application du filtre gaussien.

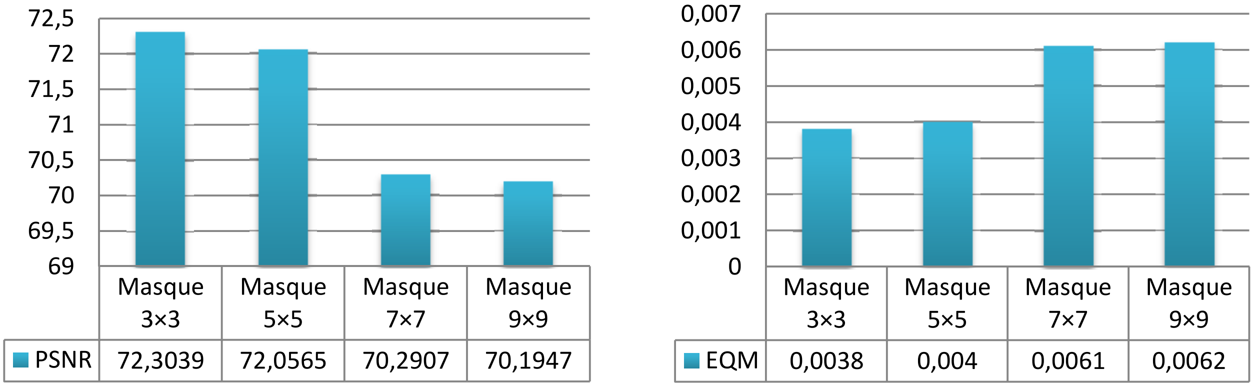


Figure 2.8 Le PSNR et l'EQM en fonction de la taille du masque pour filtre gaussien.

Le filtre gaussien donnera un meilleur lissage et une meilleure réduction du bruit que le filtre moyenneur. Mais il présente lui aussi l'inconvénient de rendre l'image flou si on augmente la taille du masque.

2.5 Masques d'accentuation des contours

Ce traitement est intéressant lorsque l'on désire augmenter l'impact visuel d'une image :

- amélioration de la lisibilité de clichés radiologiques ;
- augmentation de la netteté des contours pour une meilleure séparation des objets ...

On utilise pour cela des masques de type passe-haut tel que [Tisserand et al., 2008], [Deriche, 1990] :

- *Masques de Roberts*
- *Masques de Sobel*
- *Masques de Prewitt*
- *Masques de Kirsh*
- *Masques de Robinson*
- *Laplacien discret*
- *Laplacien de Robinson*
- *Filtre de Deriche*

2.6 Les filtres morphologiques

2.6.1 Morphologie mathématique

Le filtrage morphologique repose sur la morphologie mathématique, basée sur une description ensembliste des images. Les opérateurs morphologiques privilégient la notion de forme plutôt que l'information sur l'amplitude des signaux. Ils s'appliquent aussi bien aux images binaires (deux niveaux : blanc ou noir) qu'aux images monochromes (en niveaux de gris).

Ce filtrage non-linéaire fait appel à deux opérateurs de base (**l'érosion et la dilatation**) et à deux opérateurs complémentaires combinant les deux premiers (**l'ouverture et la fermeture**).

Ces opérateurs morphologiques utilisent une forme de référence avec laquelle le signal d'image est comparé localement. Cette forme de référence est appelée **l'élément structurant**.

Exemple d'un élément structurant à 4-connexité:

0	1	0
1	1	1
0	1	0

1. L'érosion d'une forme X par un élément structurant B est notée « $X \Theta B$ ». Elle est définie par $X \Theta B = \{p \in S, \text{ tel que } B_p \subseteq X\}$. Il s'agit donc de l'ensemble des pixels P d'affixe p du support S de l'image, qui vérifient $B_p \subseteq X$, lorsqu'ils sont pris comme centre de l'élément structurant B.

Exemple1

Elément structurant

0	1	0
1	1	1
0	1	0

a). Elément structurant à 4 connexions

1	1	1
1	1	1
1	1	1

b). Elément structurant à 8 connexions

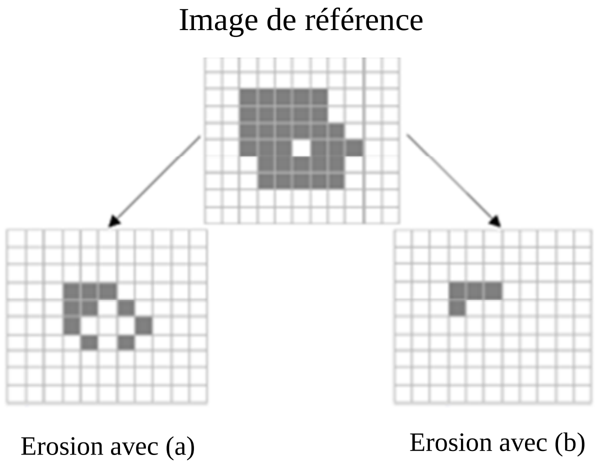


Figure 2.9 Exemple d'Erosion mathématique.

La figure ci-dessus présente deux cas d'érosion. Les deux érosions sont réalisées sur la même image de départ, mais avec deux éléments structurant différents :

- cas a : L'élément structurant est à 4-connexité (origine à 4 voisins). Chaque pixel du support qui a la valeur 0, ou qui a l'un de ses 4 voisins à la valeur 0 est mis à la valeur 0 après filtrage.
- cas b : L'élément structurant est à 8-connexité (origine à 8 voisins). Chaque pixel du support qui a la valeur 0, ou qui a l'un de ses 8 voisins à la valeur 0 est mis à la valeur 0 après filtrage.

2. La dilatation d'une forme X par un élément structurant B est notée « $X \oplus B$ ». Elle est définie par : $X \oplus B = \{p \in S, \text{ tel que } B_p \cap X \neq \emptyset\}$. Il s'agit donc de l'ensemble des pixels P d'affixe p, tel que le translaté Bp , de l'élément structurant symétrique B , ait une intersection non vide avec X.

Exemple2

Elément structurant

0	1	0
1	1	1
0	1	0

a). Elément structurant à 4 connexions

1	1	1
1	1	1
1	1	1

b). Elément structurant à 8 connexions

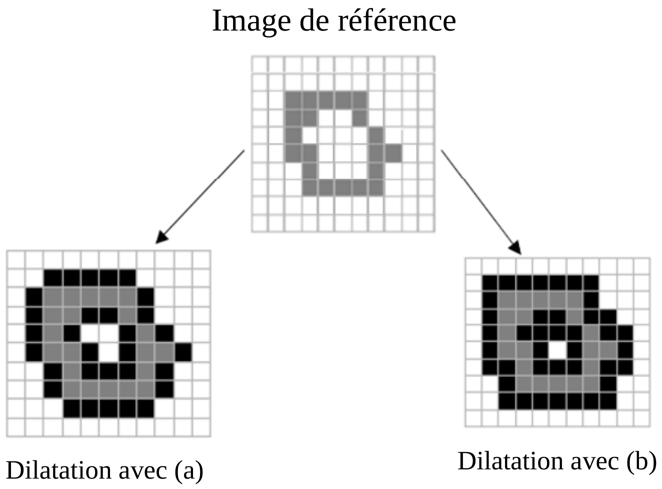


Figure 2.10 Exemple de Dilatation mathématique.

La figure ci-dessus présente deux cas de dilatation.

- cas a : L'élément structurant est à 4-connexité. Chaque pixel du support qui est égal à la valeur 1, ou qui a l'un de ses 4 voisins à la valeur 1 est mis à la valeur 1 après filtrage.
- cas b : L'élément structurant est à 8-connexité. Chaque pixel du support qui est égal à la valeur 1, ou qui a l'un de ses 8 voisins à la valeur 1 est mis à la valeur 1 après filtrage.

À partir des deux opérateurs morphologiques de base, que sont l'érosion et la dilatation, on peut, en les associant, engendrer deux autres transformations morphologiques qui sont l'ouverture et la fermeture morphologique. On définit :

♦ L'Ouverture de X par B, notée X o B.
C'est l'opération correspondant à l'érosion par B suivie de la dilatation par B. Soit :

$$X \circ B = (X \Theta B) \oplus B \qquad (2.8)$$

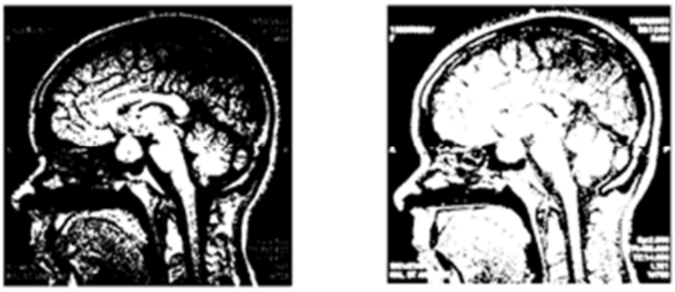
L'ouverture d'une image binaire par un élément structurant circulaire adoucit les bords des formes en supprimant les détails finis de bord et coupe les isthmes étroits.

♦ La Fermeture de X par B, notée X • B.
De manière duale à l'ouverture, la fermeture correspond à la dilatation de X par B suivie de l'érosion par B :

$$X \bullet B = (X \oplus B) \Theta B \qquad (2.9)$$

La fermeture adoucit également les bords des formes X, bouche les canaux étroits, fusionne les objets proches les uns des autres et bouche les trous de petite taille.
À titre de résumé de la ressource, les différents filtrages morphologiques sont appliqués sur une image binaire de référence, avec un élément structurant à 8-connexité :

a. Image binaire de référence



b. Image érodée *c. Image dilatée*

d. Ouverture *e. Fermeture*

Figure 2.11 Morphologie mathématique.

La Figures (2.11) donne une illustration sur la morphologie mathématique.
L'érosion érode les contours et supprime les pixels isolés (Figure 2.11.b). À l'inverse, la dilatation élimine les trous et dilate les contours (Figure 2.11.c).

L'ouverture et la fermeture adoucissent les contours des formes (Figure 2.11.d-e). Pour une ouverture, une érosion est d'abord utilisée. Cette dernière supprime certaines parties des formes qui ne pourront donc pas être ensuite dilatées. Sur l'image obtenue après ouverture, certaines formes sont donc moins grandes que sur l'image obtenue après fermeture.

2.6.2 Chapeau haut de forme

«Chapeau haut de forme» [Jlassi & Hamrouni, 2005] est particulièrement connu pour sa capacité à détecter les maximas locaux dans une image. Il est obtenu en prenant la différence entre l'image source et l'ouvert :

$$CHF(I) = I - O^{B}(I) \tag{2.10}$$

Avec :
I : l'image originale.
$O^B(I)$: l'ouvert de l'image par un élément structurant B.

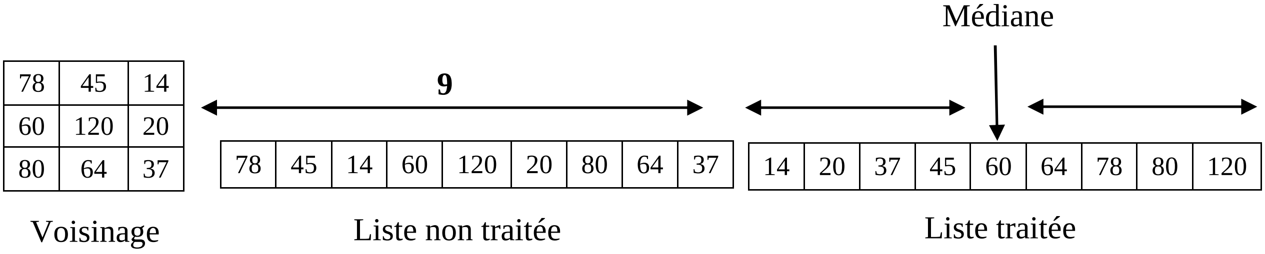
2.7 Le filtre médian

Pour nettoyer le bruit dans une image, il existe mieux que le filtre moyenneur ou le filtre gaussien Il s'agit du filtre médian. C'est un filtre non-linéaire, qui ne peut pas s'implémenter comme un produit de convolution. Le filtrage médian procède tout d'abord par un tri des valeurs de niveau de gris du voisinage suivi d'une sélection de l'élément milieu du tri. Le tri se fait par ordre croissant généralement. Il conduit à former l'ensemble ordonné des valeurs de gris du voisinage de $I(x_0, y_0)$. Les éléments ordonnés étant notés $I\ (i)$, le tri croissant est caractérisé par:

$$I_1 < I_2 < .... I_{\frac{N+1}{2}} < I_{N-1} < I_N$$

L'élément médian du voisinage est $I_{\frac{N+1}{2}}$. Sa propriété est d'être précédée par $\frac{N-1}{2}$ valeurs inférieures et suivi par autant de valeurs supérieures. Le filtrage consiste à remplacer $I(x_0, y_0)$ par la valeur médiane du voisinage $I_{\frac{N+1}{2}}$

Exemple de filtre médian



78	45	14
60	120	20
80	64	37

78	45	14	60	120	20	80	64	37

14	20	37	45	60	64	78	80	120

Le filtre médian est pratiquement toujours préfère au filtre moyenneur ou au filtre gaussien pour améliorer les images bruitées. Après l'application de ce type de filtrage nous avons obtenu les résultats suivants (Figure 2.12 et 2.13) :

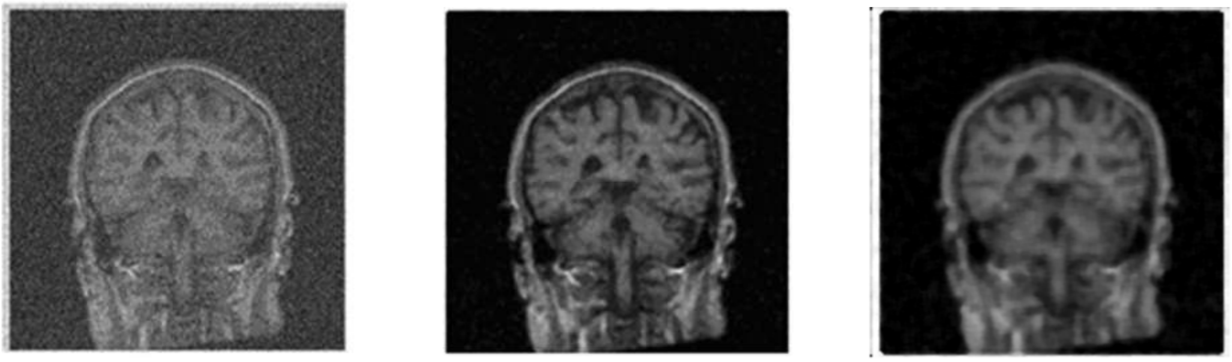
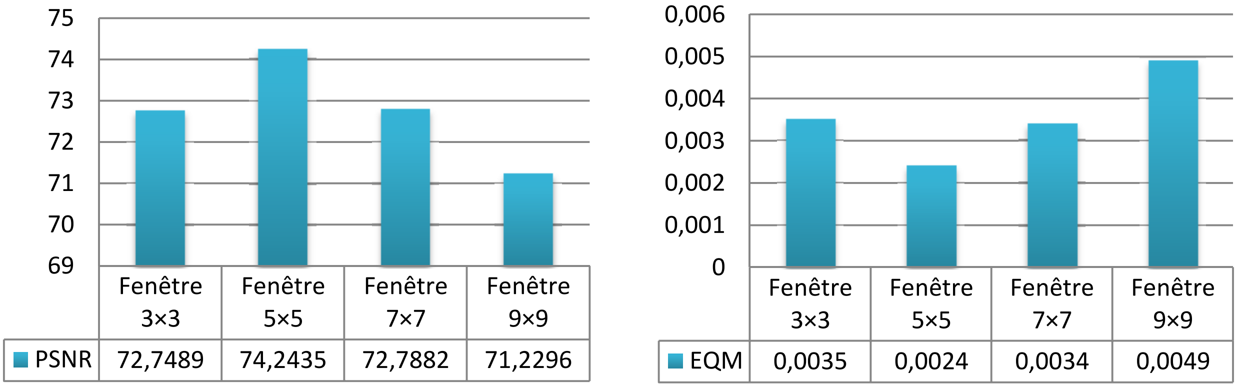


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Médiane 5× 5
PSNR=74.2435

Médiane 9×9
PSNR=71.2296

Figure 2.12 Application d'un filtre médian.



	Fenêtre 3×3	Fenêtre 5×5	Fenêtre 7×7	Fenêtre 9×9
■ PSNR	72,7489	74,2435	72,7882	71,2296

	Fenêtre 3×3	Fenêtre 5×5	Fenêtre 7×7	Fenêtre 9×9
■ EQM	0,0035	0,0024	0,0034	0,0049

Figure 2.13 Le PSNR et l'EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour un filtre médian.

Notons que le filtre médian est utilisé beaucoup plus pour réduire le bruit impulsionnel.

2.8 Le filtre de rang (RANK ORDER FILTER)

Le *Filtre d'ordre* (*Rank Order Filter)* est une généralisation du filtrage médian par choix de la fonction de sélection de l'élément. On considère une fenêtre $I_{x,\,y}$ de $n{\times}n$ pixels entourant le pixel à filtrer. On trie les valeurs des pixels dans la fenêtre $I_{x,\,y}$ par amplitude croissante, on remplace le pixel central par un pixel choisi dans la liste ordonnée :

– si on choisit le plus grand : dilatation en morphologie mathématique,
– si on choisit le plus petit : érosion en morphologie mathématique,
– si on choisit celui du milieu : filtre médian.

2.9 Le filtre d'isolement (Outlier)

Principe

La valeur X de chaque pixel est comparée à la moyenne M de ses 8 voisins :

- si la différence $X – M$ est supérieure à un seuil S fixé au départ, le pixel est assimilé à un pic de bruit et sa valeur est remplacée par M ;
- si la différence est inférieure à S, la valeur X du pixel est conservée.

Le niveau moyen des 8 voisins est obtenu par convolution avec le masque suivant :

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

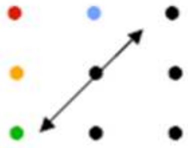
$$M = \frac{1}{8}\sum_{K=1}^{8} P_K \quad \text{; S : seuil fixé à l'avance}$$

$$\text{Si X} - \text{ M > S alors X = M sinon X = X}$$

Le filtre Outlier est adapté à l'élimination du bruit de type impulsionnel présent sur des images dégradées [Tisserand et al., 2008].

2.10 Filtre SNN (Symmetric Nearest Neighbor)

Ce filtre est utilisé comme atténuateur du bruit avec la conservation des contours. Son principe repose sur la symétrie, en effet, pour chaque paire de pixels symétriques par rapport au pixel central, on sélectionne celui dont la valeur est la plus proche de celle du pixel central.



On fait ensuite la moyenne des 4 valeurs et on la remplace dans le pixel central.

Exemple

Image

10	12	40	16	19	10
14	22	52	10	55	41
10	14	51	21	14	10
32	22	9	9	19	14
41	18	9	22	27	11
10	7	8	8	4	5

{9 ,19} → 9
{51,27} → 27
{21,22} → 21
{9 ,14} → 9

Moyenne = 16

Nous avons appliqué ce type de filtrage avec des fenêtres de tailles différentes, les résultats obtenus sont illustrés dans les figures suivantes (Figure 2.14 et 2.15) :

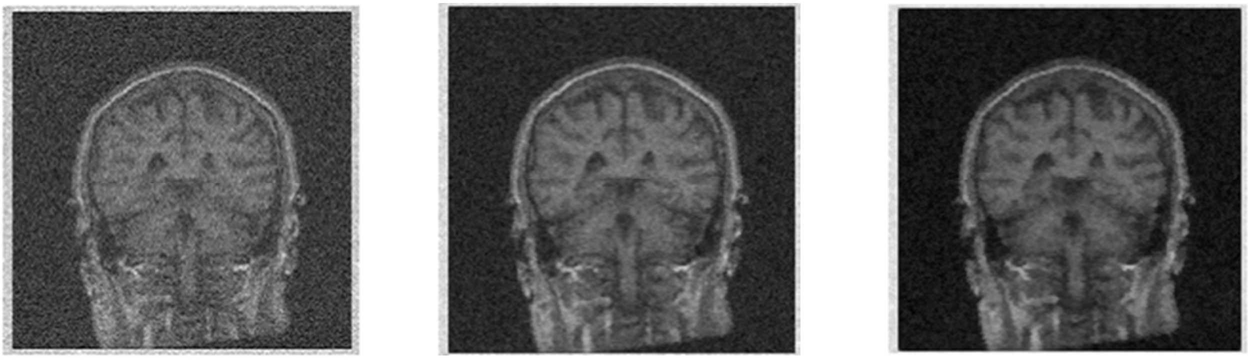


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Filtre SNN fenêtre 3×3
PSNR= 72.5163

Filtre SNN fenêtre 7×7
PSNR= 73.9371

Figure 2.14 Application d'un filtre SNN.

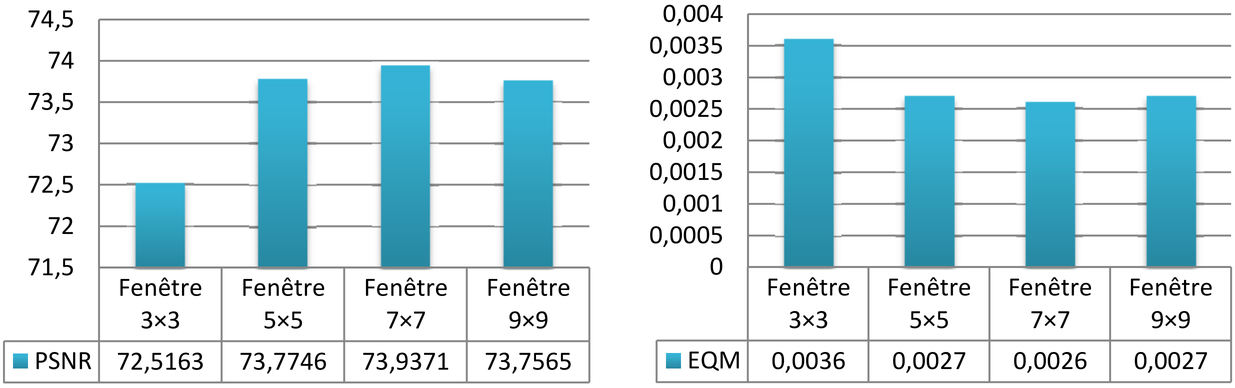


Figure 2.15 Le PSNR et l'EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour un filtre SNN.

Nous constatons que cet algorithme présente une amélioration du PSNR, mais il présente un défaut majeur : il y a un risque d'augmenter la taille de l'image.

2.11 Filtre de voisinage non linéaire

L'idée du filtre de voisinage est que les pixels d'un même objet possèdent une intensité similaire. Ainsi, on se pose le problème de la taille de l'objet qui est souvent contrôlée par un paramètre *h* en tenant compte de la variance du bruit σ^2. Le voisinage peut être considère dans deux espaces : la proximité spatiale comme la plupart des filtres passe-bas de support limité, et la proximité des niveaux de gris comme le filtre SUSAN (Smallest Univalue Segment. Assimilating Nucleus) [Yaroslavsky, 1985], [Smith & Brady, 1995].
On outre Le voisinage des niveaux de gris est défini par

$$B(x,h)=\left\{y\in\Omega \middle| \; \left| I(y)-I(x) \right| \leq h \right\} \tag{2.11}$$

2.11.1 Filtre de Yaroslavsky

Yaroslavsky a proposé dans [Yaroslavsky, 1985] un filtre non- linéaire gaussien où la distance considérée est celle de niveaux de gris des voisins spatiaux et du pixel central. L'image débruitée est définie par :

$$\tilde{I}_{YNF}(x)=\frac{1}{C(x)}\int_{W\rho(x)} I(y)e^{-\frac{|I(y)-I(x)|^2}{h^2}}dy \tag{2.12}$$

Où*)* *Wρ(x)* est le voisinage spatial, *h* est le paramètre de filtre gaussien qui contrôle la proximité des intensités. Le facteur de normalisation est

$$C(x)=\int_{W\rho(x)} e^{-\frac{|I(y)-I(x)|^2}{h^2}}dy \tag{2.13}$$

Le filtre de Yaroslavsky est un filtre qui se base sur la moyenne des voisinages par rapport aux niveaux de gris, il permet de restaurer une image plus nette mais présente *des outliers* par rapport au filtre gaussien.

2.11.2 Filtre bilatéral

Pour ce filtre, en tenant compte des poids de distances spatiales, S.M. Smith et M. Brady proposent un filtre bilatéral [Smith & Brady, 1995]. L'image débruitée est définie par :

$$\tilde{I}_{SUSAN}(x)=\frac{1}{C(x)}\int I(y)e^{-\frac{|y-x|^2}{\rho^2}}e^{-\frac{|I(y)-I(x)|^2}{h^2}}dy \tag{2.14}$$

Avec

$$C(x)=\int e^{-\frac{|y-x|^2}{\rho^2}}e^{-\frac{|I(y)-I(x)|^2}{h^2}}dy \tag{2.15}$$

Les paramètres ρ et *h* contrôlent séparément la moyenne du voisinage spatial et celle de l'intensité.

Nous avons appliqué un filtre bilatéral avec des fenêtres de tailles différentes. Les figures (2.16), (2.17) montrent les résultats du filtrage.

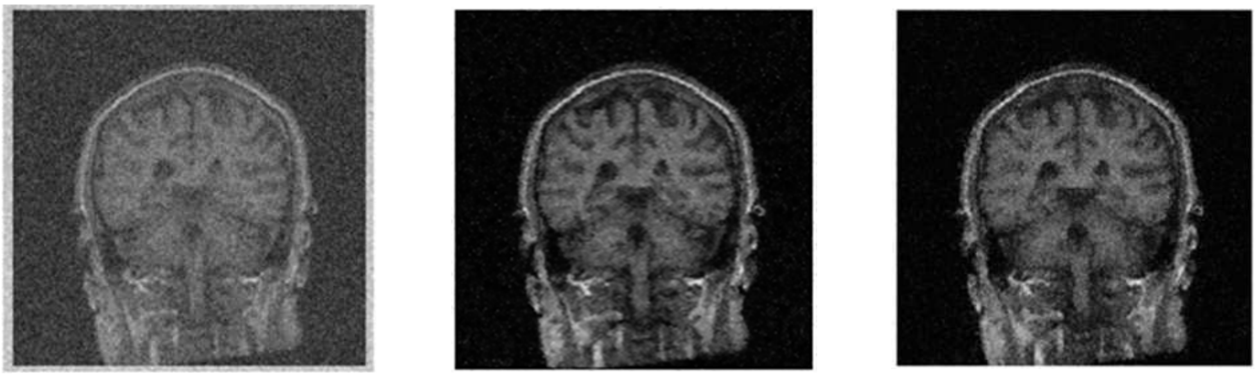


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Filtre bilatéral 3×3
PSNR=73.7421

Filtre bilatéral 9×9
PSNR=73.6522

Figure 2.16 Application du Filtre bilatéral.

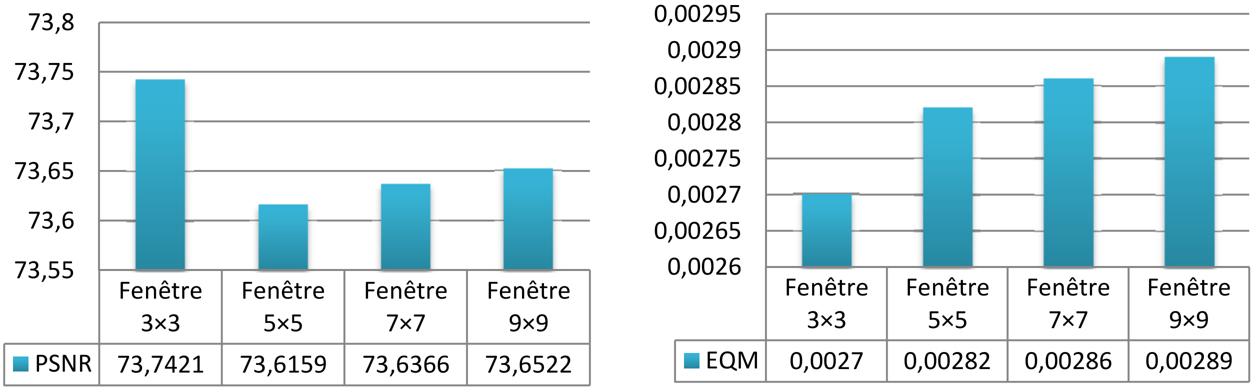


Figure 2.17 Le PSNR et l’EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour un filtre bilatéral.

La méthode du filtre bilatéral (SUSAN) (Figure 2.16) améliore légèrement l’image en intégrant le lissage spatial. Mais nous pouvons observer toutefois des effets de pixellisation dans les images restaurées, car ces filtres visent implicitement à reconstruire une image constante par morceaux. Cependant, ce type de filtrage est utilisé beaucoup plus pour les images couleurs.

2.11.3 Moyennes non-locales (NL-means algorithm)

L’algorithme de moyennes non-locales (NL-means) est proposé par A. Buades, B. Coll. et J. M. Morel dans [Bauades et al., 2005]. L’idée est d’utiliser les informations redondantes dans l’image, et plus particulièrement le fait qu’une vignette dans l’image ressemble à d’autres vignettes de cette image. Un voisinage d’un pixel x est défini comme les points y de l’image pour lesquels on peut associer des vignettes similaires. L’image débruitée est donnée par :

$$\tilde{I}_{NL-means_{h,a}}(x) = \frac{1}{c(x)} \int I(y) \cdot e^{-\frac{G_{a*}|I(x+\cdot)-I(y+\cdot)|^2}{h^2}} dy \tag{2.16}$$

Où G_a est le noyau gaussien d’écart-type a, h est un paramètre de filtrage et la fonction

$$c(x) = \int e^{-\frac{G_{a*}|I(x+\cdot)-I(z+\cdot)|^2}{h^2}} dz \tag{2.17}$$

est un facteur de normalisation.

Remarquons que si la taille de la vignette est réduite à un point, on retrouve le filtre de Yaroslavsky par rapport au niveau de gris. Cet algorithme est optimal asymptotiquement sous un modèle statistique d’image. Récemment, dans [Boulanger & Kervrann, 2005], J. Boulanger et C. Kervrann proposent de sélectionner le voisinage spatial par une méthode adaptative pour chaque pixel. L’approche est basée sur une analyse statistique de l’équivalence entre le biais et la variance de l’estimateur de moyennes non-locales.

Une autre amélioration du filtre de moyennes non-locales est proposée dans [Buades et al., 2006], où A. Buades, B. Coll. et J. M. Morel montrent qu’une simple régression linéaire permet d’éviter les effets d’escaliers.

L’application de l’algorithme « *non local means* » a abouti aux résultats suivants (Figure 2.18 et 2.19) :

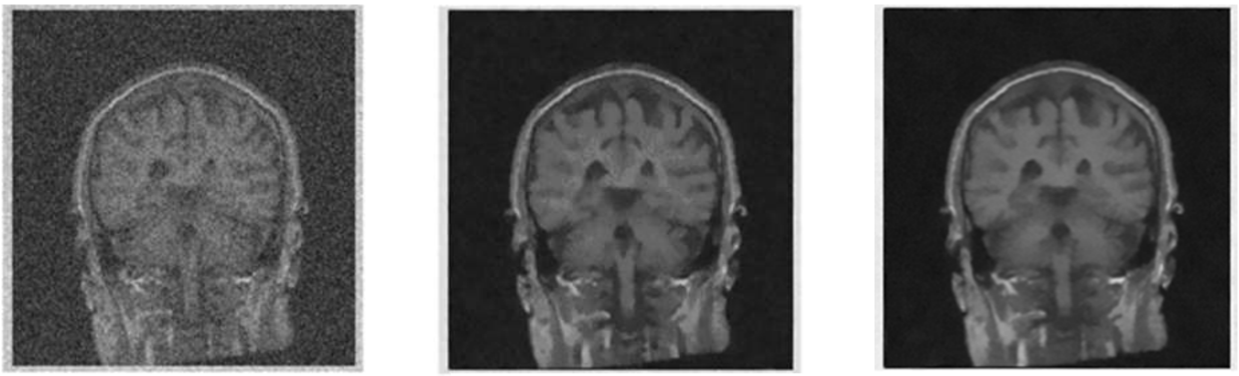


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

NL-means 5×5
PSNR=79.0677

NL-means 9×9
PSNR=78.9015

Figure 2.18 Débruitage par Application de l’algorithme NL-means.

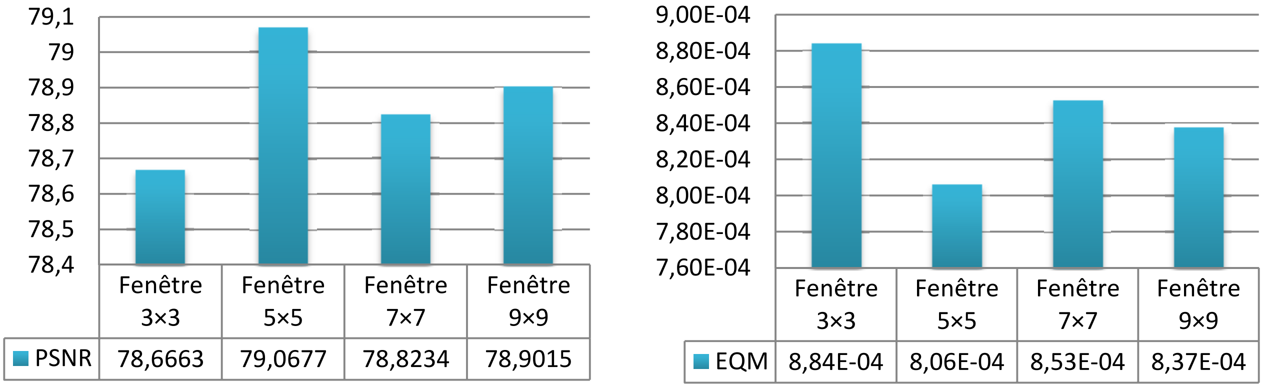


Figure 2.19 Le PSNR et l’EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour l’algorithme non l-means.

Cette méthode montre une grande amélioration en débruitage des images grâce à l’utilisation d’un nombre plus important d’informations (Figure 2.18). Signalons que cet algorithme demande un temps de calcul important par rapport aux autres filtres classiques car les poids des voisins pour chaque pixel doivent être calculés pour chaque vignette. Quand le bruit est important, la taille des voisinages peut être choisie plus grande.

2.12 Filtrage à base des équations aux dérivées partielles (EDP)

Classiquement, en restauration et amélioration d’images à travers les EDP, une image est modélisée par une surface constituée d’un ensemble discret de points (pixels). En considérant l’intensité en niveaux de gris (la luminance) comme une fonction des coordonnées spatiales *(x, y)* et du temps *t*, les propriétés de l’image restaurée ou améliorée que l’on cherche à obtenir sont obtenus par l’intermédiaire d’une EDP ayant comme arguments la fonction luminance et ses dérivées partielles ; la solution de cette EDP, à un certain instant *t*, représente l’image restaurée.

Cependant, l’historique et la description des méthodes pour EDP dans le traitement d’image et la vision assistée par ordinateur sont disponibles dans les ouvrages [Moisan et al., 2002], [Chan et al., 2003].

2.12.1 Filtres basés sur la diffusion (isotrope) de la chaleur

Introduite en 1811 par Joseph Fourrier, l'équation de la chaleur était initialement conçue pour décrire le phénomène de conduction thermique. Elle définit la diffusion de la température d'un point d'un matériau donné à travers ses voisins. Ramené à l'imagerie numérique, on interprète la température comme étant la valeur d'un pixel diffusant sa valeur à ses voisins. Fourrier défini cette équation comme suit :

$$\forall x \in \Omega, \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\Delta T(x,t) + \frac{P}{\rho C} \tag{2.18}$$

Où Δ est l'opérateur laplacien, D le coefficient de diffusivité thermique et P une éventuelle production volumique de chaleur propre.

Dans le cadre de l'imagerie nous prendrons Ω= {pixels de l'image(x, y)}, T=*I*(x, y, t) (l'image bruitée), D=1, P=0, ce qui nous donne :

$$\forall (x,y) \in \Omega, \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \Delta I(x,y,t) \tag{2.19}$$

La solution analytique de cette équation est représentée par la fonction de Green :

$$I(x,y,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(u,v) \cdot G(x-u, y-v) \cdot dudv \tag{2.20}$$

Avec

$$G(x-u, y-v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot t^2} e^{-\frac{(x-u)^2 + (y-v)^2}{2 \cdot t^2}} \tag{2.21}$$

Et c’est une Convolutions successives par un filtre Gaussien !

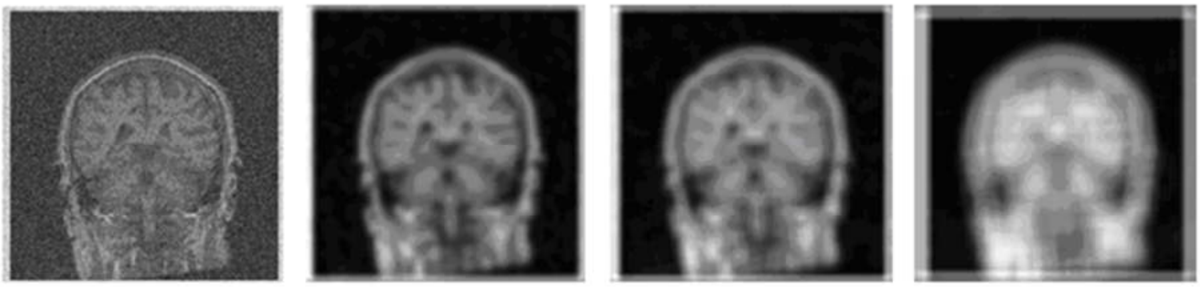
Dans ce cas la diffusion isotrope peut s’exprimer comme un processus itératif qui, pour chaque pixel, consiste à opérer des convolutions avec un masque 3x3 construit en prenant les dérivées secondes de *I(x, y)* selon les axes x et y. Finalement, les auteurs proposent le masque optimale donné par :

L =

1	2	1
2	-12	2
1	2	1

Et donc résoudre l'équation de la chaleur est équivalent à filtrer une image par convolution avec une gaussienne. Cette remarque a été le point de départ de l'introduction des EDP en traitement d'images.

Les résultats de cette méthode sont présentés sur les figures (2.20), (2.21). Où *T* représente le nombre d'itération.



T = 0 *T = 5* *T = 20* *T = 50*

Figure 2.20 Filtrage par diffusion isotrope.

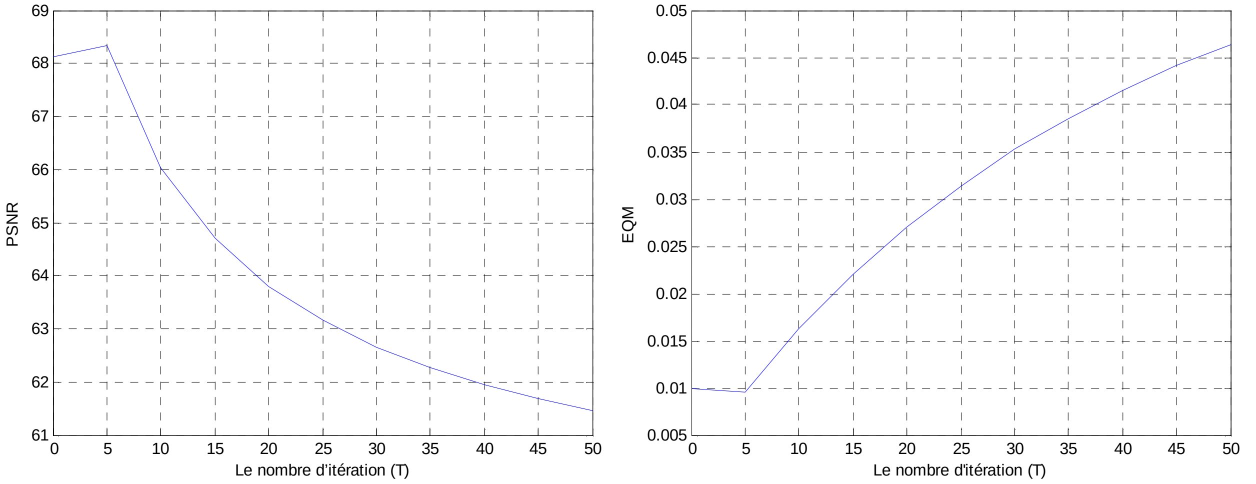


Figure 2.21 PSNR et EQM en fonction du nombre d'itération pour un filtrage isotrope.

Comme nous venons de le voir (Figure 2.20), la convolution avec un noyau Gaussien (ou l'équation de diffusion isotrope), ne permet pas de lisser proprement une image (a le défaut de rendre les contours d'images très flous), mais elle conduit à une simplification progressive de l'image permettant d'obtenir des informations pour des traitements ultérieurs. Parmi les modèles qui utilisent ce principe on retrouve :

1. Le filtre de Marr et Hildreth [Marr & Hildreth, 1980].
2. le modèle de Witkin [Witkin, 1983].
3. le filtre passe-bas de Canny [Canny, 1983, 1986].

2.12.2 Filtres de diffusion anisotrope

Comme nous avons pu le constater la diffusion des pixels par équation de la chaleur présente un défaut majeur pour l'analyse et la classification d'images : les contours sont endommagés par la diffusion des pixels avoisinants. La première idée pour résoudre ces problèmes a été proposée par **Perona** et **Malik** dans [Perona & Malik, 1990] comme un algorithme tend à préserver les contours de l'image en pondérant une fonction de diffusion (diffusion de la chaleur par exemple) par une fonction décroissante normalisée *c (c (0)=1)* ayant pour variable la norme du gradient. Ainsi, quand le gradient est nul la fonction de diffusion opère normalement sur la valeur du pixel (qui se trouve alors dans une zone de valeur uniforme) et quand celui-ci est important (pixel situé sur un contour, zone à forte variation de valeur) la fonction de diffusion est «court-circuitée » par la fonction de conservation proche de zéro aux points de fort gradient.

On définit donc l'équation de diffusion anisotrope comme suit :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = div[c(x,y,t)\nabla I(x,y,t)] \tag{2.22}$$

Le rôle de la fonction *c(x, y, t)* est de Pondérer l'amplitude du gradient en *I(x, y, t).* En d'autre terme la conductivité *c(x, y, t)* est construite de manière à favoriser le lissage intra-région et à pénaliser la diffusion inter-région à travers l'utilisation d'une fonction décroissante, dépendante de la norme du vecteur de gradient :

$$c(x,y,t) = g(|\nabla I|) \tag{2.23}$$

Donc (2.22) devienne :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = div[g(|\nabla I|)\nabla I] \tag{2.24}$$

Les fonctions proposées initialement par Perona-Malik sont :

$$g(|\nabla U|) = \exp[-(|\nabla I|/K)^2] \tag{2.25}$$

et :

$$g(|\nabla U|) = \frac{1}{1+\left[\frac{|\nabla I|}{K}\right]^2} \tag{2.26}$$

Où *k* est un paramètre appelé « seuil ou barrière de diffusion » leur rôle est de conserver les détails. Le coefficient *K* est proportionnel au gradient. Il caractérise l'amplitude des gradients qui autoriseront une forte diffusion. Pour des valeurs de gradient très inférieures à *k*, la diffusion sera très faible car la zone sera considérée comme déjà lisse. Pour des valeurs très supérieures, la diffusion sera interdite (on considérera qu'il y a présence d'un contour que le filtrage devra préserver). Cependant, plusieurs auteurs se sont intéressés aux choix du paramètre *K* dans le modèle de base Perona-Malik. Black et al. [Black et al., 1997, 1998] suggèrent de choisir *K* en utilisant une statistique robuste : $K = 1.4826\, MAD(\nabla I)$, ou MAD est la valeur médiane absolue.

En revanche, la discrétisation de l’équation (2.24) est obtenue en général en utilisant la version discrète du laplacien des schémas utilisant les différences finies de type FTCS (Forward Time Centered Space) [Fletcher, 1990], [Spiteri, 2002].

La mise en œuvre des filtres de diffusion anisotrope se fait en calculant une série d’images I^n telles que [Bloch et al., 2004] :

$$I^n = I^{n-1} + \frac{\partial}{\partial x}[g(\nabla I).\frac{\partial I^{n-1}}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y}[g(\nabla I).\frac{\partial I^{n-1}}{\partial y}] \qquad (2.27)$$

Pour tester cet algorithme nous avons choisi un seuil de diffusion égale à « 30 » et une fonction de conductivité conforme à la relation $g(|\nabla I|) = \frac{1}{1+\left[\frac{|\nabla I|}{K}\right]^2}$ et un pas de temps Δt=1/30.

Les résultats obtenus sont mentionné par les figures (2.22), (2.23). Où *T* représente le nombre d’itération.

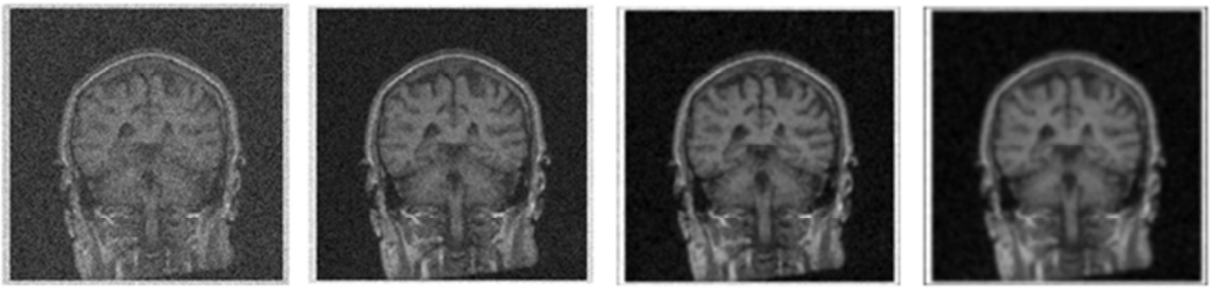

T = 0 *T = 5* *T = 20* *T = 50*

Figure2.22 Filtrage par Diffusion Anisotrope avec k=30.

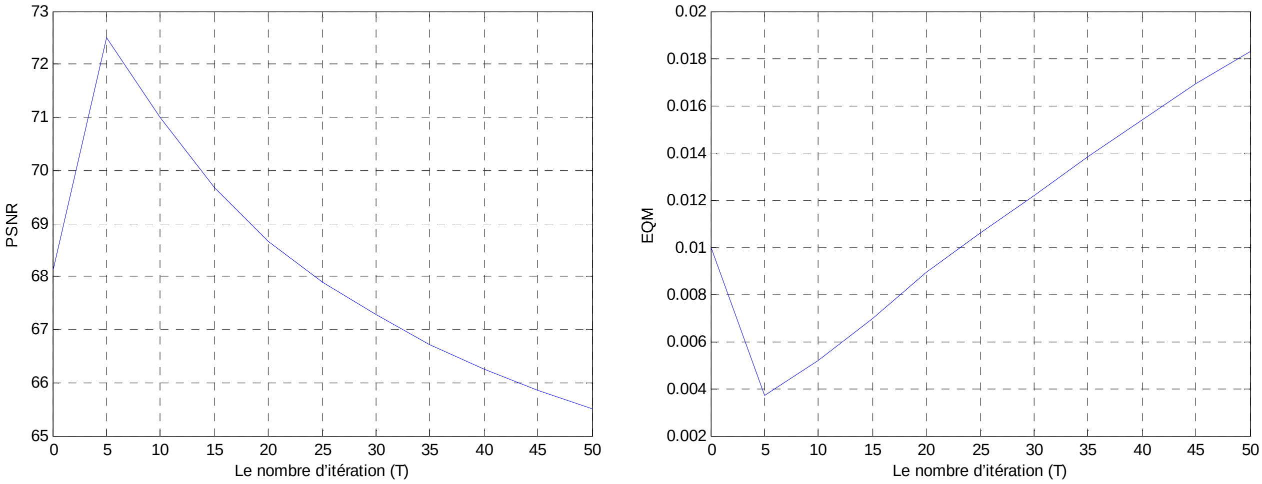


Figure 2.23 PSNR et EQM en fonction du nombre d’itération pour un filtrage anisotrope.

Nous constatons que cet algorithme présente une augmentation dans le PSNR mais il présente un défaut majeur : le bruit correspond à une forte variation de valeur dans une zone uniforme il y a donc un risque que celui-ci soit interprété comme un contour, à fortiori sur une image hautement bruitée. L'augmentation du paramètre *k* permet de limiter ceci mais l'image s'en retrouve grandement altérée.

2.12.3 Filtres de courbure moyenne

Le principe du mouvement par courbure moyenne est de diffuser la valeur des pixels de manière orthogonale aux zones de fort gradient. Koenderink et Witkin ont introduit une analyse dite "scale space" [Witkin, 1983] reliée à l'équation de la chaleur. Pour ce faire ils utilisent un terme de diffusion dégénéré défini par l'équation :

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = |\nabla I| div\left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|}\right) \tag{2.28}$$

L’utilisation de cette équation pour le lissage directionnel des images, à été étudiée par Kimia et Siddiqi [Kimia & Siddiqi, 1996]. Ils montrent de manière théorique et pratique que chaque iso contour de l’image originale I_0 évolue de manière indépendante aux autres, en respectant les propriétés de l’équation de diffusion (2.28).

La méthode est capable d’éliminer le bruit de manière efficace ; les zones bruitées étant caractérisées par des fortes courbures, le lissage est fort. L’utilisation de ce type d’EDP reste par contre limitée, particulièrement pour des temps de diffusion grands : dans ce cas les structures sont réduites à des courbes convexes, de venant de plus en plus circulaire. La méthode peut conserver les coins, mais seulement pour des valeurs de t faible.

2.12.4 La minimisation de la variation totale

Soit I la fonction luminance de R^2 dans R, définie sur $\Omega = [0, a] x\ [0, b]$. Osher, Rudin et Fatemi s’intéressent à la minimisation d’une fonction d’énergie sous contraintes [Rudin et al., 1992]. En particulier, Ils proposent de minimiser :

$$E(I) = \iint_{\Omega} |\nabla I| dxdy \tag{2.29}$$

Avec des contraintes imposées par la nécessité de garder la valeur moyenne de l’image et par la connaissance de l’écart type σ du bruit. Si I_0 représente l’image originale et I la solution, les contraintes s’écrivent :

$$\begin{gathered} \iint_{\Omega} I dxdy = \iint_{\Omega} I_0 dxdy \\ \iint_{\Omega} \frac{1}{2}(I - I_0) dxdy = \sigma^2 \end{gathered} \tag{2.30.a, b}$$

Pour des fonctions différentiables (2.29) représente la variation totale de I :

$$TV(I) = \iint_{\Omega} |\nabla I| dxdy \tag{2.31}$$

La minimisation de la fonction énergie dans l’espace des fonctions de variation bornée peut être une fonction monotone qui n’est pas nécessairement continue. Ceci permet l’élimination du bruit tout en gardant une localisation exacte des discontinuités. Ce qui est particulièrement adapté aux images, [Terebes, 2004].

Les auteurs remarquent que la condition (2.30.a) est automatiquement induite et transforment le problème de minimisation sous contraintes en un problème de minimisation sans contraintes à l’aide des multiplicateurs de Lagrange :

$$E'(I) = E(I) + \lambda\left[\iint_{\Omega} \frac{1}{2}(I - I_0)^2\, dxdy - \sigma^2\right] \tag{2.32}$$

Dans des conditions aux limites de type Neumann [Kern, 2004], le minimum de (2.29), est obtenue par une équation parabolique :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = div\left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|}\right) - \lambda(I - I_0) \tag{2.33}$$

Le multiplicateur de Lagrange est dépendant du temps :

$$\lambda = \lambda(t) = -\frac{1}{2\sigma}\iint_{\Omega} \left(|\nabla I| - \frac{\nabla I \cdot \nabla I_0}{|\nabla I|}\right) dxdy \tag{2.34}$$

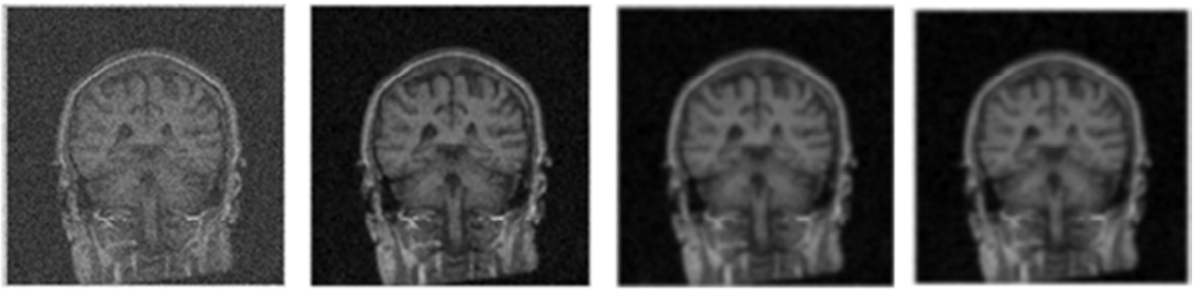
Si les contraintes sont éliminées (2.33) devienne :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = div\left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|}\right) \tag{2.35}$$

Cette équation est connue sous le nom de mouvement sous la courbure moyenne pondérée ou diffusion anisotrope par minimisation de la variation totale.

D’autre part Chan, Osher et Shen présentent en [Chan et al., 1999-2001] une version discrète de la méthode de minimisation de la variation totale. Le filtre numérique obtenu, (*filtre numérique TV*), peut être vu comme une version simplifiée du modèle continue obtenue par différences finies [Spiteri, 2002].

Afin, de vérifier les capacités de cet algorithme, nous avons utilisés un modèle de la variation totale sans contrainte et un pas de temps Δt=1/10. Les figures (2.24), (2.25) présentent les résultats obtenus.



T = 0 *T = 5* *T = 20* *T = 50*

Figure 2.24 Filtrage basé sur minimisation de la variation totale.

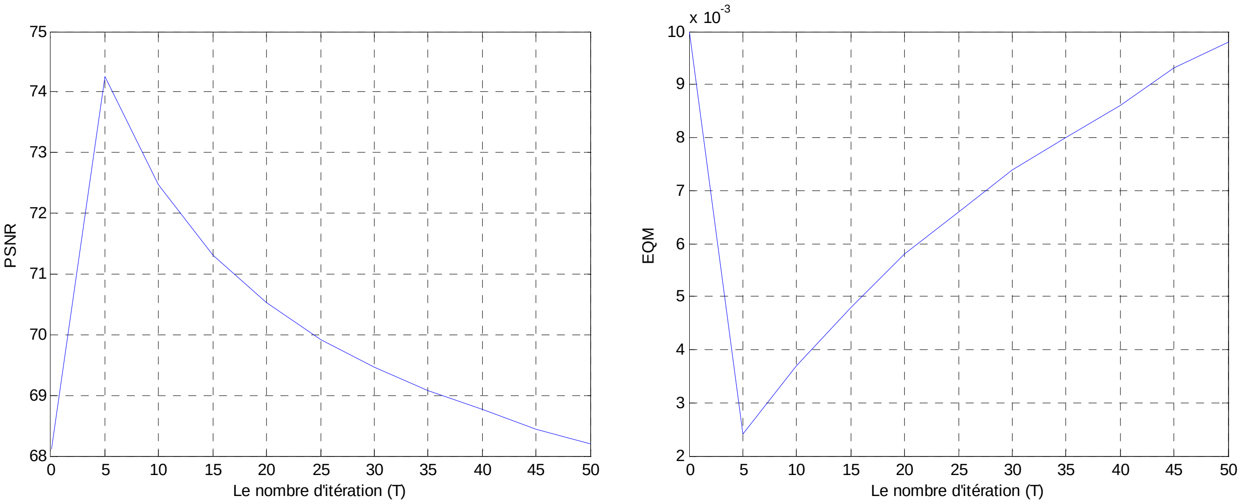


Figure 2.25 PSNR et EQM en fonction du nombre d’itération pour un filtrage qui se base sur la minimisation de la variation totale.

D’après tous ces résultats nous remarquons que l’image obtenue par la méthode de variation totale présente moins de bruits et plus des détails par rapport aux images restaurées par la méthode isotrope et anisotrope, ainsi un meilleur PSNR. Visuellement, dans la figure (2.24), nous remarquons que les contours de l’image obtenue après 50 itérations sont moins précis que ceux après 5 étapes.

Au fil du temps, le modèle de variation totale avec et sans contrainte s’est largement répandu dans tous les domaines de la restauration d’image, et plus particulièrement dans le domaine de la déconvolution. En effet, il est efficace à la fois pour supprimer les effets du flou et ceux du bruit. [Chambolle, 2004], [Chambolle & Lions, 1997], [Chan & Wong, 1998], [Chan et al., 2000], [Combettes & Luo, 2002], [Combettes & Pesquet, 2004], [Candès & Guo 2002].

2.13 Les filtres adaptatifs

2.13.1 Les filtres à coefficients adaptatifs

Ces filtres s’inspirent des filtres de moyenne, mais chaque terme de la moyenne est pondéré par un coefficient qui décroît avec la similarité entre le pixel considère et le pixel central de la fenêtre.

2.13.1.1 Filtre de gradient inverse

Il calcule une moyenne des pixels de la fenêtre, pondérés par l’inverse de leur gradient, de façon que les points trop différents du point traités ne contribuent que peu :

$$I'(i,j) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k}\sum_{l}\frac{I(i+k,j+l)}{\left|I(i,j)-I(i+k,j+l)\right|+1} \tag{2.36}$$

C’est un filtre d’action très modérée que l’on itère généralement plusieurs fois [Bloch et al., 2004].

2.13.1.2 Filtre de Saint Marc

Il repose sur un principe assez semblable, mais la pondération est exponentielle négative :

$$I'^{k+1}(i,j) = \frac{1}{\alpha}\sum_{l}\sum_{l'} I^{k}(i+l, j+l')\exp(-\beta\left|\nabla I^{k}\right| \qquad (2.37)$$

Son action est plus nette que celle du précèdent. Il conduit à de bons filtrages respectant bien les contours [Saint-Marc et al., 1991].

2.13.1.3 Toboggan de Fairfield

Il agit de façon très différente des précédents. Il creuse l’histogramme de l’image en attribuant à chaque pixel le niveau de gris du point de minimum de gradient dans son voisinage. On trace tout d’abord une carte du gradient. Puis, à partir d’un point non déjà parcouru, on descend sur cette carte comme sur un toboggan (d’où le nom) jusqu’à ce qu’on tombe dans un minimum local du gradient. On attribue alors la valeur du niveau de gris du point minimum local. Tous les points du chemin parcouru sont mis au même niveau, et tous ces points sont marqués afin de n’être plus traités. On répète ce traitement jusqu’à ce que tous les points aient été parcourus [Fairfield, 1990].

2.13.1.4 Le filtre de Lee

Le filtre de Lee [Lee, 1980] propose d'estimer la moyenne et la variance de *R* (*R* est l’information que l'on veut mesurer) par la moyenne locale observée, $\bar{I}$ et la variance locale observée, Var (I). $\bar{I}$ et Var (I) sont calculées sur une fenêtre. Cette méthode est dite LS (Local Statistic) [Piovano & Papadopoulo, 2009]. *R* et Var(R) sont exprimées en fonction de $\bar{I}$ et *Var (1)* de la façon suivante**:**

$$\bar{R} = \bar{I} \qquad (2.38)$$

$$\operatorname{var}(R) = \frac{\operatorname{var}(I) - \bar{I}^{2}\sigma_{u}^{2}}{\sigma_{u}^{2} + 1} \qquad (2.39)$$

σ_u est l'écart type du signal bruit *U.* σ_u = C_u étant le coefficient de variation de *U.* Lee propose d'approximer le modèle multiplicatif du signal image *I* par un modèle linéaire de la forme $\hat{R}$ = *aI* + *b* $\bar{R}$ où $\hat{R}$ est l'estimateur de R donnant la plus petite erreur quadratique par rapport à la moyenne *(Minimum Mean* Square *Error* MMSE). Les variables a et b sont choisies de façon à minimiser $E((\hat{R} - R)^2)$, *E* étant est l'espérance mathématique. Nous obtenons:

$$\hat{R} = \alpha\, I + (1-\alpha)\,\bar{R} \qquad (2.40)$$

Avec

$$\alpha = \frac{\operatorname{var}(R)}{\operatorname{var}(I)} \qquad (2.41)$$

En remplaçant Var(R) par l'expression de l'équation (2.39), on aura:

$$\alpha = \frac{\mathrm{var}(I) - \bar{I}^2 \sigma_u^2}{(1+\sigma_u^2)\,\mathrm{var}(I)} \tag{2.42}$$

$1+\sigma_u^2$ peut être remplacée par 1 car $\sigma_u^2 \approx 0$ on aura donc:

$$\alpha = \frac{\mathrm{var}(I) - \bar{I}^2 \sigma_u^2}{\mathrm{var}(I)} = 1 - \frac{C_u^2}{C_I^2} \tag{2.43}$$

Finalement le filtre de Lee est défini de la façon suivante:

$$\hat{R}(t) = w(t)I(t) + (1 - w(t))\bar{I}(t) \tag{2.44}$$

Avec

$$w(t) = 1 - \frac{C_u^2}{C_I^2(t)}, C_I^2(t) = \frac{\mathrm{var}(I)}{\bar{I}(t)^2} \tag{2.45}$$

Notons que le facteur de pondération est une valeur entre 0 et 1. Si l'équation (2.45) donne une valeur négative pour *w(t),* cette valeur sera remplacée par zéro. Le filtre de Lee peut être interprété de la façon suivante: le coefficient de variation au carré d'une région, C_I^2 est comparé au coefficient de variation au carré du bruit.

Si $C_I^2 \leq C_u^2$ le facteur de pondération aura la valeur zéro. Ceci correspond à estimer R(t) par la moyenne calculée sur la fenêtre $\bar{I}$ (t) (région homogène). Par contre, si $C_I^2 > C_u^2$ le facteur de pondération aura une valeur qui dépend du rapport $\frac{C_u^2}{C_I^2}$. Le filtre a tendance à garder la valeur observée du pixel, *I (t)*, tant que ce rapport est plus petit (région hétérogène).

Nous avons appliqué Le filtre de Lee avec une fenêtre de 3×3 et 5×5. Les figures (2.26), (2.27) montrent le résultat du filtrage.

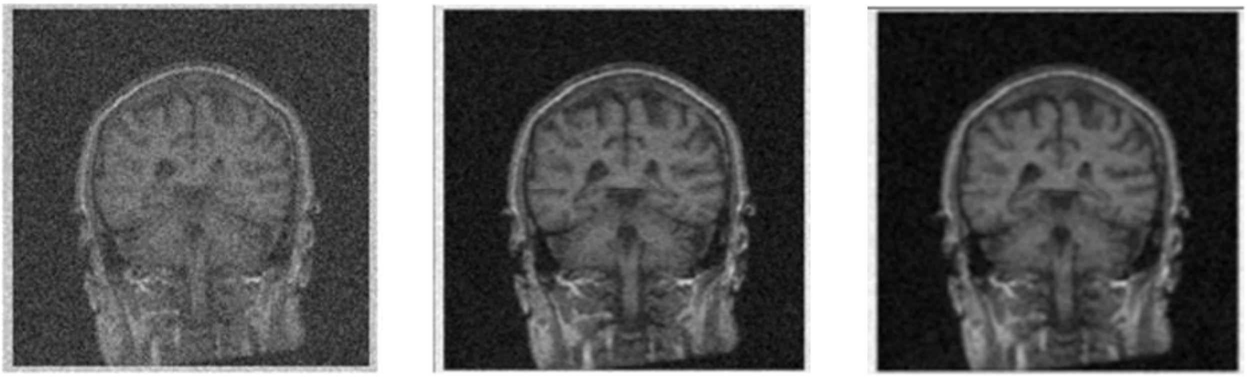


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Filtre de Lee fenêtre 3×3
PSNR=71.2434

Filtre de Lee fenêtre 5×5
PSNR=68.6834

Figure 2.26 Application du Filtre de Lee.

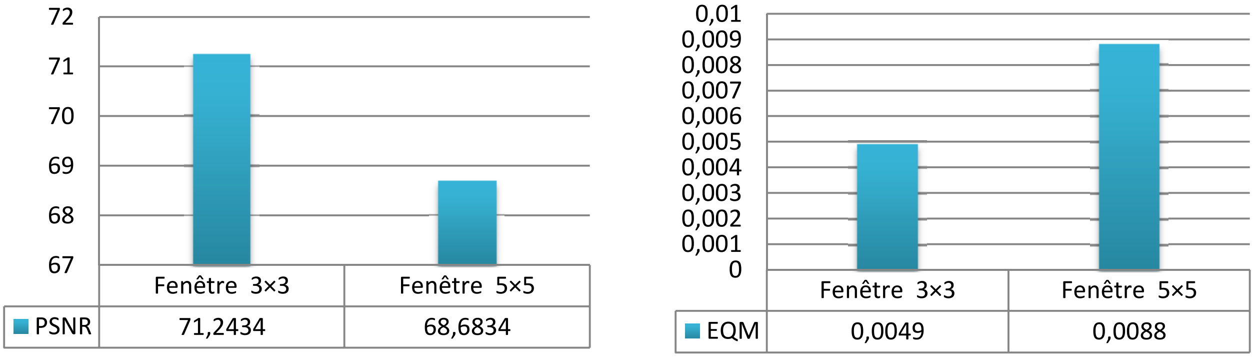


Figure 2.27 Le PSNR et l'EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour le filtre de Lee.

Nous remarquons que ce filtre réduit bien le bruit dans les régions homogènes. Cependant, les zones proches des contours de contraste fort ne sont pas bien filtrées.

2.13.1.5 Le filtre de Henri

Le filtre de Henri [Henri, 1987] est un filtre adaptatif qui se base sur une estimation locale de la variance de bruit, σ_u^2 ainsi que la variance de l'intensité, Var(I). La fonction de pondération, *w(t)*, est définie comme suit:

$$w(t) = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\operatorname{var}(I)} \qquad (2.46)$$

Var (I) est la variance calculée sur la fenêtre (généralement une fenêtre de 5 × 5). σ_u^2 est la variance du bruit, *U*, estimée localement sur une petite fenêtre (3 × 3).

2.13.1.6 Le filtre de Kuan

Le filtre de Kuan [Kuan et al., 1985] transforme le modèle multiplicatif du bruit en un modèle additif sur lequel il applique le critère de MMSE (Minimum Mean Square Error). Le filtre obtenu est un filtre qui à la même forme que le filtre proposé par Lee, mais avec une fonction de pondération différente:

$$w(t) = \frac{1 - \dfrac{C_u^2}{C_I^2(t)}}{1 + C_u^2} \qquad (2.47)$$

Le filtre de Kuan a été appliqué sur notre image IRM avec une fenêtre de 3×3 et 5×5. Les figures (2.28), (2.29) montrent les résultats du filtrage.

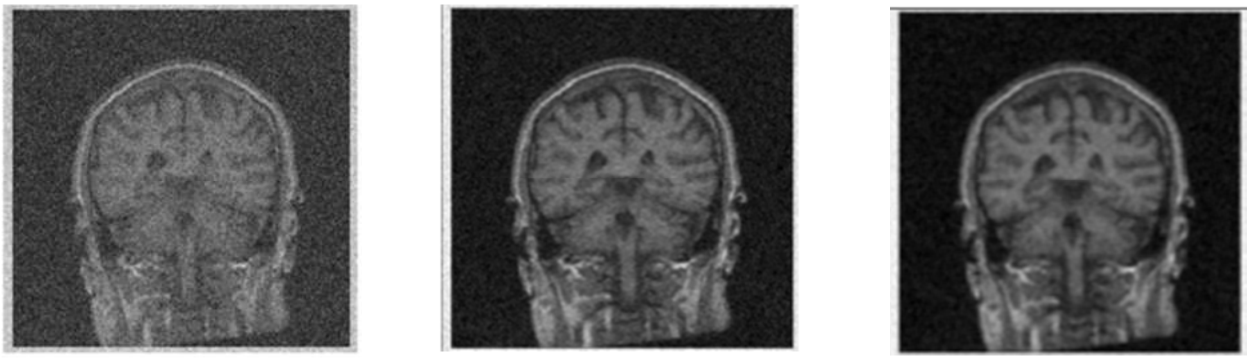


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Filtre de Kuan 3×3
PSNR=71.1947

Filtre de Kuan 5×5
PSNR=68.6382

Figure 2.28 Application du Filtre de kuan.

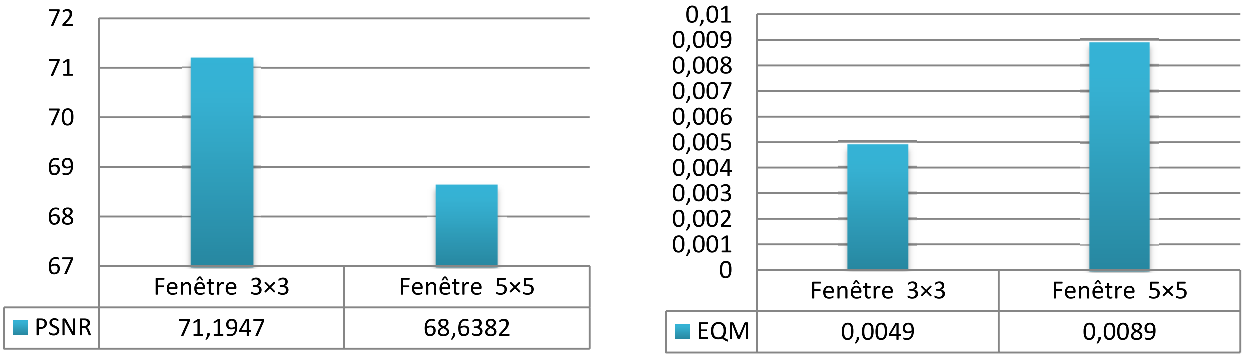


Figure 2.29 Le PSNR et l'EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour le filtre de Kuan.

Nous remarquons que ce filtre se comporte relativement de la même manière que le filtre de Lee.

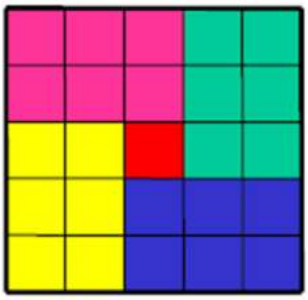
2.13.2 Les filtres à fenêtres adaptatives

Dans le cas de filtres à fenêtres adaptatives, on recherche, autour de chaque pixel, la fenêtre la plus adaptée au filtrage. Cela se fait de deux façons :

1. soit en sélectionnant parmi une famille de fenêtres celle qui convient le mieux (c'est le cas du filtre de KUWAHARA, Nagao),
2. soit en faisant croître une fenêtre et en contrôlant la croissance (cas du filtre de Wu).

2.13.2.1 Filtre de Kuwahara

Ce filtre permet d'atténuer le bruit avec une conservation pour les contours, son principe repose sur le calcul de la valeur moyenne des sous-voisinages et conserver celle qui a la plus petite variance.



On a 4 régions donc 4 moyennes et 4 variances, le pixel central sera remplacé par la moyenne de la région de variance minimale.

Pour avoir une idée sur les performances de ce filtre, nous l'avons appliqué pour une fenêtre de dimension 5×5 et 9×9. Les figures (2.30), (2.31) montrent les résultats du filtrage.

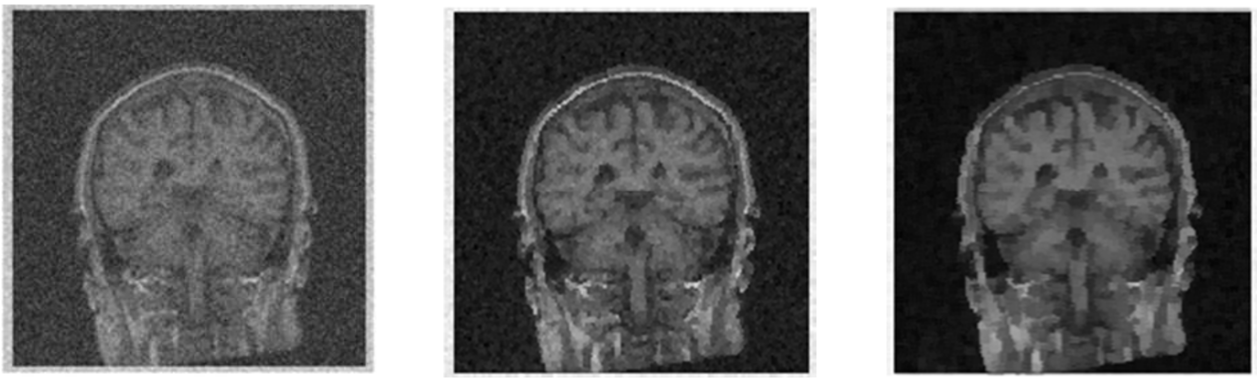


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Filtre de Kuwahara 5×5
PSNR=74.6373

Filtre de Kuwahara 9×9
PSNR=71.8255

Figure 2.30 Application du filtre de Kuwahara.

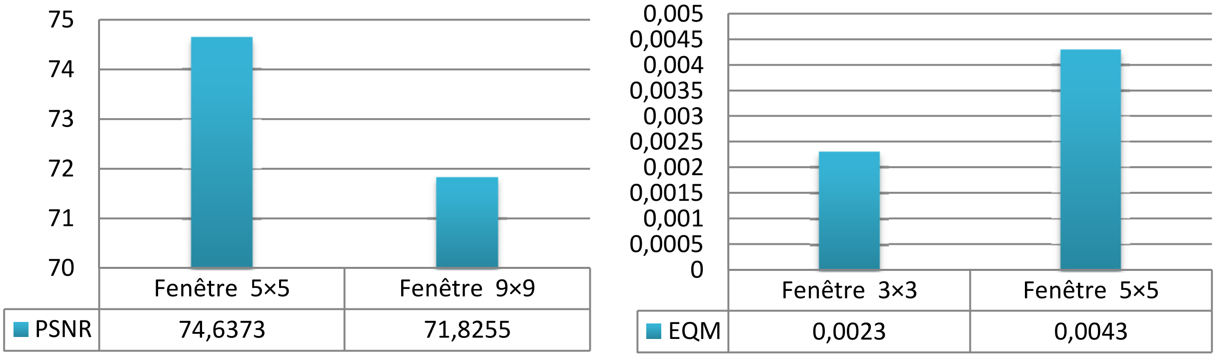


Figure 2.31 Le PSNR et l'EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour le filtre de Kuwahara..

Ce type de filtrage montre une amélioration en PSNR et en EQM par rapport au filtre à coefficients adaptatifs.

2.13.2.2 Filtre de Nagao

Dans l'approche de Nagao [Nagao & Matsuyama, 1979], on travaille sur une fenêtre de taille 5×5 entourant le pixel central (qui appartient à toutes ces fenêtres). On définit 9 fenêtres possibles (Figure 2.32), toutes de 9 pixels, identifiées par un indice *k* Sur chaque fenêtre on mesure la moyenne m_k et la variance σ^2_k des niveaux de gris. On choisit alors de remplacer le pixel central par la valeur moyenne de la fenêtre dont la variance est la plus faible.

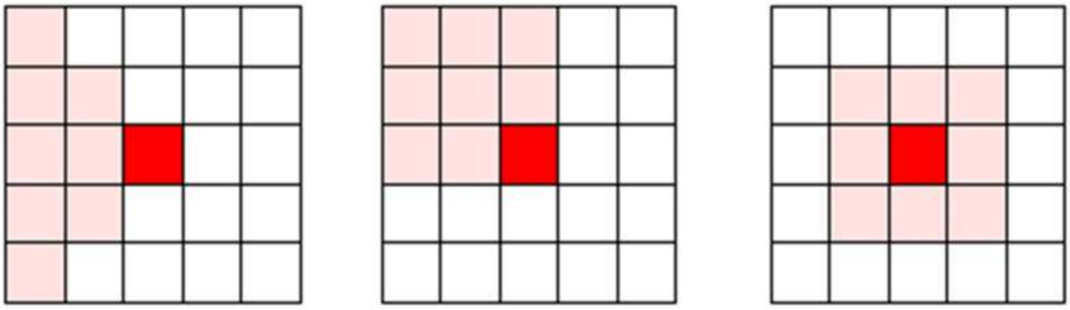


Figure 2.32 Le pixel central d'une fenêtre 5x5 appartient à 9 fenêtres de 9 pixels chacune : 4 se déduisent de la fenêtre représentée à gauche par rotations de nx90° 4 de la fenêtre au centre et la fenêtre de droite [Bloch et al., 2004].

Après l'application de ce type de filtrage, nous avons obtenus les résultats qui sont illustrés dans la figure (2.33).

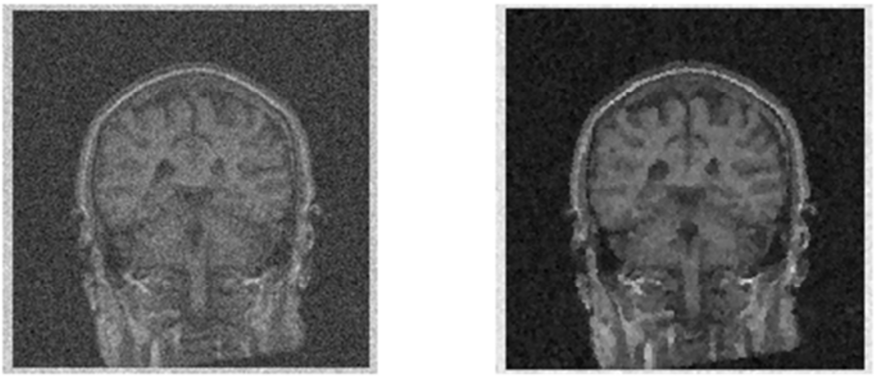


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Filtre de Nagao fenêtre 5x5
PSNR=74.2120

Figure 2.33 Application du Filtre de Nagao.

L'EQM est de l'ordre de 0.0025.

Nous remarquons que ce filtre nous donne un résultat relativement similaire de celle de Kuwahara.

2.13.2.3 Filtre de Wu : filtrage par fenêtre maximale

Le filtre de Wu [Wu & Maître, 1992] se base sur la détection d'une région homogène autour de chaque pixel. L'idée est d'augmenter récursivement la taille d'une fenêtre autour de chaque pixel, tant que la région incluse dans la fenêtre est homogène. On calcule à chaque fois la variation des coefficients de variation des deux fenêtres qui se suivent:

$$\Delta C_1 = C_1(fen1) - C_1(fen2) \tag{2.48}$$

Si ΔC_1 est assez grande, alors on est passé d'une région homogène à une région hétérogène. La dernière fenêtre, qui est dans une région hétérogène, sera décomposée afin d'extraire la sous-région homogène.

2.14 Filtrage dans le domaine fréquentiel

Divers problèmes inverses mal-posés impliquent une transformée linéaire et orthogonale appliquée sur l’image, et rentrent donc dans le cadre de l’analyse harmonique.

2.14.1 Le filtre de Wiener

Le modèle de dégradation d’image peut être défini par :

$$g = HI + n \tag{2.49}$$

g : l’image dégradée, *I :* l’image à restaurer, *H :* la dégradation, *n :* le bruit additif. L’objectif de la restauration d’image est d’obtenir une estimée $\hat{I}$ de l’image originale *I* à partir de l’image dégradée *g*.

La fonction de coût du filtre de Wiener est une estimation de la moyenne statistique de l’erreur entre *I* et $\hat{I}$:

$$j(\hat{I}) = E\left\{ \left\| I - \hat{I} \right\|^2 \right\} \tag{2.50}$$

L’image $\hat{I}$ qui minimise (2.50) est donnée dans l’espace de Fourier par [Russ 1999]:

$$\underline{\hat{I}} = \frac{1}{\underline{H}} \cdot \frac{\left|\underline{H}\right|^2}{\left|\underline{H}\right|^2 - \frac{\underline{S_{nn}}}{\underline{S_{II}}}} \underline{g} \tag{2.51}$$

Où S_{II} et S_{nn} représentent respectivement les densités spectrales de puissance de l’image originale *I* et du bruit *n*. Le filtre de Wiener exige des connaissances à priori sur ces deux grandeurs.

Les résultats de l’application du filtre de Wiener sont illustrés sur les figures (2.34), (2.35).

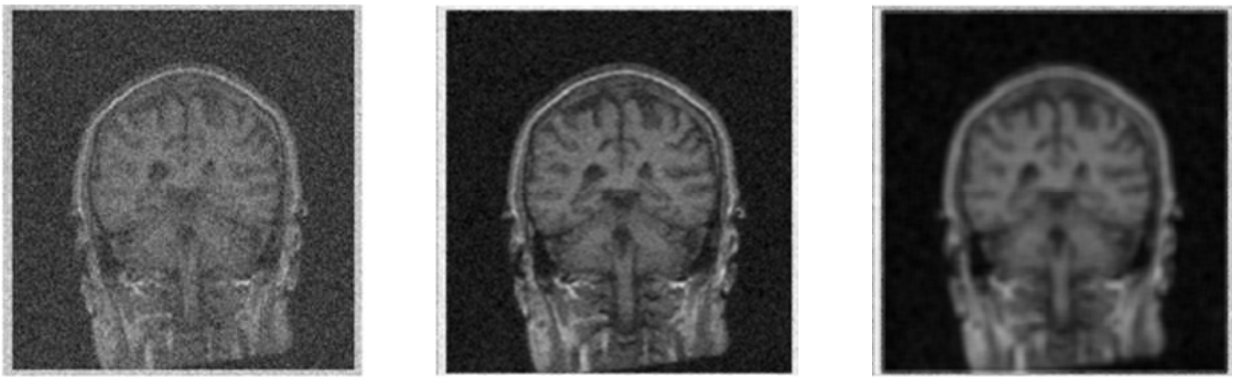


Image originale bruitée PSNR=68.1182

Filtre de Wiener 3×3 PSNR=73.4207

Filtre de Wiener 9×9 PSNR=69.1577

Figure 2.34 Application du Filtre de Wiener.

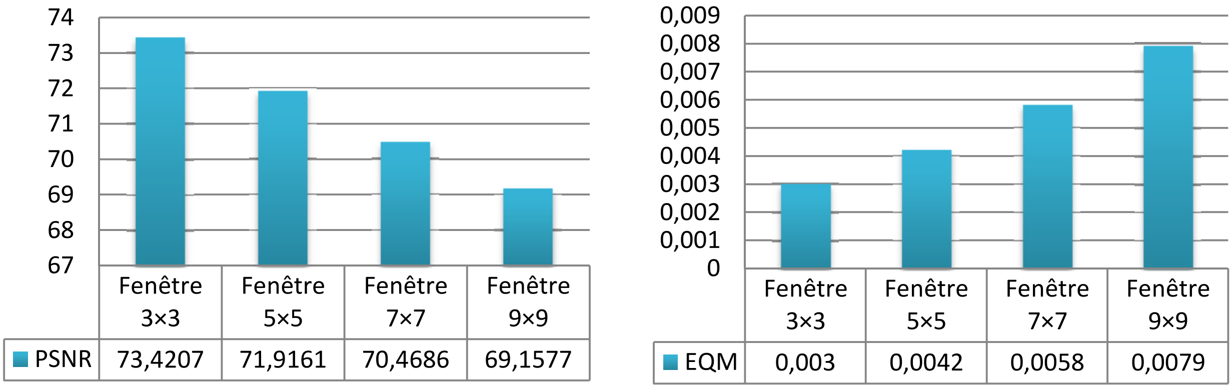


Figure 2.35 Le PSNR et l'EQM en fonction de la taille de la fenêtre pour le filtre de Wiener.

Malheureusement, compte tenu des difficultés à estimer les paramètres exacts du signal et du bruit, ce filtre conduit parfois à un filtrage médiocre.

2.14.2 Les méthodes basées sur la représentation en ondelettes

Les ondelettes ont été introduites à la fin des années 80 comme outil d'analyse multi échelle du signal et des images. La théorie permet de sélectionner des bases intrinsèquement adaptées à la représentation d'une classe de signaux et ainsi d'approcher la fonction précisément en respectant le plus possible l'information. Ainsi, les ondelettes sont appliquées à la restauration d'images bruitées et à la compression des images.

Le débruitage par ondelettes consiste à décomposer l'image bruitée dans une base orthogonale en ondelettes, à supprimer les coefficients inférieurs à un seuil donné en utilisant le seuillage dur, doux, NNG, SCAD,….et à reconstruire une image par la formule de synthèse.

Le choix de seuil $T = \sigma\sqrt{2\log N}$ où N est la taille d'échantillonnage, σ^2 est la variance du bruit donne un estimateur optimal au sens minimax quand N tend vers l'infini [Donoho, 1995]. Ces algorithmes sont formulés par Donoho et Johnstone dans [Donoho & Johnstone, 1994], [Donoho, 1995]. L'image débruitée est représentée par des coefficients larges et la performance de l'estimateur dépend donc de la vitesse de décroissance des coefficients. Grâce à sa localisation en temps et en échelle, la base d’ondelettes permet de représenter des fonctions régulières par morceaux plus efficacement qu’avec des bases orthogonales classiques comme la base de Fourier ou en cosinus car la décroissance des coefficients en ondelettes dans un voisinage d’une discontinuité est plus rapide que celle des coefficients de Fourier.

Nous représentons sur les figures (2.36), (2.37) les résultats obtenus par l’application de cet algorithme. Le test sera effectué sur la base d’un seuillage dur et d’un type de seuil universel. L’ondelette analysante choisie pour l’expérience sera celle de Haar. [Les détails de la transformée en ondelette plus les résultats se trouve dans le chapitre 4].

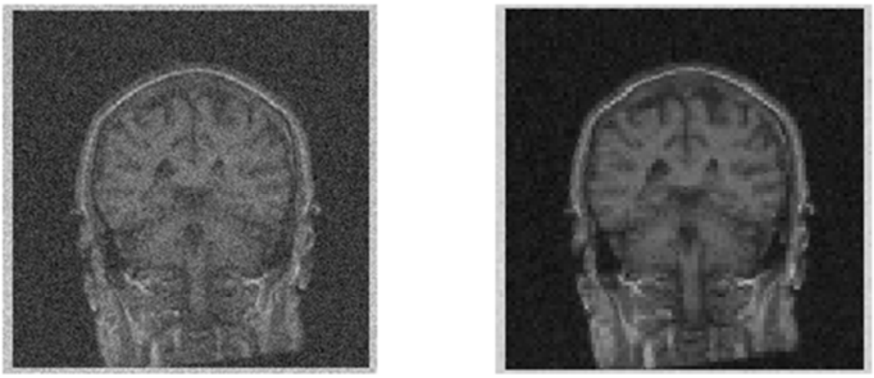


Image originale bruitée
PSNR=68.1182

Ondelette de Haar
PSNR=75.1317

Figure 2.36 Débruitage par l’ondelette de haar.

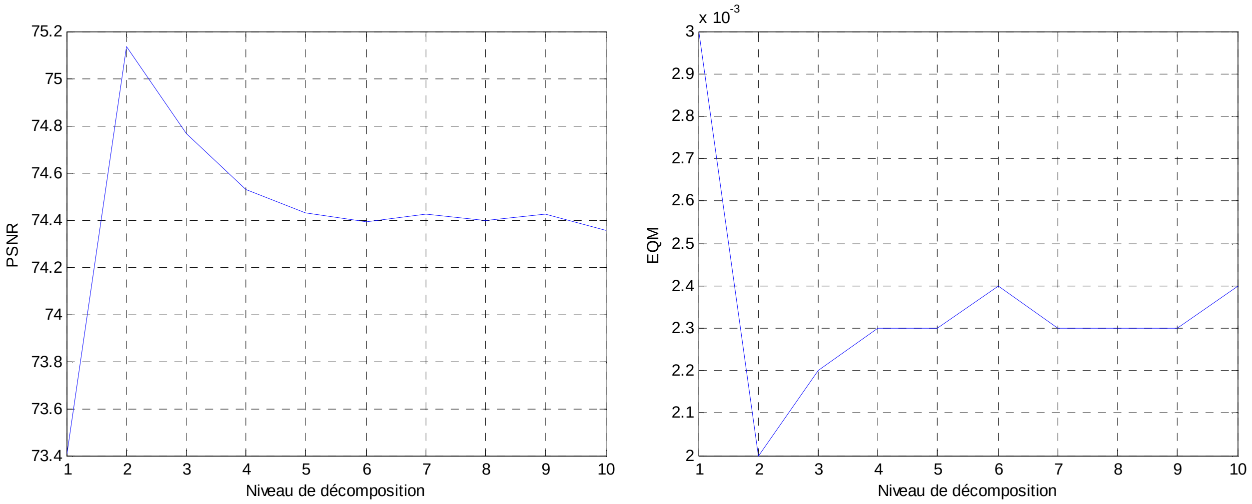


Figure 2.37 PSNR et EQM en fonction du niveau de décomposition.

D’après ces résultats on peut constater que le débruitage par seuillage de coefficients d’ondelette présente une solution optimale pour le problème de débruitage. Ainsi, cet algorithme est largement utilisé par les ingénieurs depuis son apparition grâce à sa simplicité et efficacité.

2.14.3 Ridgelets et curvelets

Les ondelettes n’étaient pas adaptées à rendre compte de la géométrie, de nouvelles transformées ont été introduites, comme les ridgelets [Candès, 1999] et les curvelets [Candès &

Guo, 2002]. Les ridgelets permettent d’analyser efficacement les discontinuités en ligne droite et les curvelets sont adaptées à représenter les discontinuités le long des courbes.

2.15 Méthode ”ICA”

Une nouvelle méthode appelée “Independent Component Analysis” (ICA) a attiré l’attention de beaucoup de chercheurs dans le domaine de débruitage d’image. Elle a été exécutée avec succès dans [Jung, 2002], [Hyvärinen et al., 1998] pour des signaux non Gaussiens.

L’avantage de la méthode ICA c’est le fait qu’elle suppose que le signal est non Gaussien. Ceci garantit de bon résultat de débuitage aussi bien pour les signaux non Gaussiens que pour les signaux Gaussiens.

2.16 Algorithme shift-mean

Le Mean Shift est un algorithme itératif inventé par Fukunaga [Fukunaga et al., 1975], il représente un estimateur non paramétrique du gradient de la densité de probabilité. Son objectif est de faire converger un point vers le maximum local le plus proche :

1. On commence par choisir un point de départ P.
2. On cherche l'ensemble E des points qui sont dans le voisinage de P.
3. On déplace P vers l'isobarycentre de E.
4. On réitère depuis l'étape 2 jusqu'à convergence.
5. Les déplacements successifs vers l'isobarycentre font converger le point P vers les zones de fortes densités.

2.17 Filtrage à base des techniques de l’intelligence artificiel

2.17.1 Les réseaux de neurones artificiels(RNA)

Parmi les différents modèles de réseaux de neurones, l'utilisation du modèle de Hopfield s’avère être le plus approprié pour résoudre les problèmes d'optimisation tel que le problème de restauration d'images [Hopfield, 1982], [Hopfield & Tank, 1985], [Lip.man, 1987], [Paik & Katsaggelos, 1992], [Yeh et al., 1991], [Zenati et al., 2000]. Ce réseau consiste en n interconnexions. Le signal d’entrée de chaque neurone *i* est donné par :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} W_{ij} v_j + b_i \tag{2.52}$$

Où b_i et W_{ij} représentent respectivement le biais attaché à chaque neurone et le poids d’interconnexion entre le neurone *i* et le neurone *j*.

L’état de chaque réseau à un instant *t* est donné par : $v(t) = (v_1(t),.......,v_n\ (t))$, où $v_i(t)$ est l’état de chaque neurone *i* à l’instant *t*. L’état du neurone à l’instant *(t+1)* est donné par l’équation suivante :

$$v_i(t+1)=\begin{cases} v_i(t)+1 & si \quad u_i>\theta_i \\ v_i(t) & si \quad u_i=\theta_i \\ v_i(t)-1 & si \quad u_i<\theta_i \end{cases} \tag{2.53}$$

Le réseau de Hopfield introduit une fonction d'énergie égale à :

$$f(x)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}v_j(t)v_i(t)-\sum_{i=1}^{n}b_iv_i(t)=-\frac{1}{2}v^T(t)Wv(t)-b^Tv(t) \tag{2.54}$$

Le problème de la restauration consistera en la minimisation de la fonction (2.54). Zhou dans [Zhou & Chellap, 1988] propose l'utilisation du réseau de Hopfield pour résoudre le problème de restauration d'images. Pour assurer la convergence de ce réseau, $\Delta f\ (x)$ est contrôlée à la mise à jour de chaque neurone. Mais cette méthode possède deux inconvénients majeurs : d'une part le temps perdu lors du contrôle du signe de $\Delta f\ (x)$ à chaque étape de mise à jour, et d'autre part la difficulté du parallélisme et de l'analyse de la convergence l'algorithme. Pour résoudre ces problèmes plusieurs chercheurs ont proposés d'autre algorithme tel que le modèle de réseau de *Hopfield modifié* [Achour et al., 2002].

2.17.2 Les algorithmes évolutionnaires (Optimisation par Essaim de Particules (OEP))

L'optimisation par essaim de particules est une technique évolutionnaire qui utilise une population de solutions candidates pour développer une solution optimale au problème. Le degré d'optimalité est mesuré par une fonction fitness [Clerc & Kennedy, 2002], [Kennedy et al. 1995 et 2001]. En effet Le problème de restauration d'image est converti en un problème d'optimisation.

Dans ce cas une fonction coût est présentée et qui doit être optimisé. La solution qui donne la valeur optimale constitue l'image désirée. La fonction coût de notre problème [Perry, 1999] est la suivante :

$$J(\hat{I})=\frac{1}{2}\hat{I}^T\times(H^T\times H+\lambda C^T\times C)\times\hat{I}-g^T\times H\times\hat{I}+\frac{1}{2}\|g\|^2 \tag{2.55}$$

Dite fonction de coût avec contrainte CLS (Constrained Least Square Error).

C : Matrice $M \times N$ associée à l'opérateur passe- haut qui représente la contrainte de bruit.
λ : facteur de régularisation.
$\hat{I}$: est l'image désirée ou estimée.

L'image est prise comme l'essaim entier, et les particules sont les pixels, ainsi on effectue une restauration locale. La procédure à suivre est la suivante :

- La dimension de l'espace de recherche est prise : D=1, notre variable est le pixel;
- L'image représentée par une matrice est convertie en un vecteur ligne ;
- La taille d'essaim est le nombre total des pixels de l'image;
- La fonction coût est appliquée à chaque pixel comme le montre l'équation suivante :

$$J(\hat{I}(i))=\frac{1}{2}\hat{I}^T(i)\times(H^T\times H+\lambda C^T\times C)(i,j)\times\hat{I}(i)-g^T(i)\times H(i,j)\times\hat{I}(i)+\frac{1}{2}\|g\|^2 \tag{2.56}$$

- Les équations de mises à jour de la vitesse et de la position de l'OEP deviennent :
  - La vitesse :

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + r_1c_1(y_i(t) - x_i(t)) + r_2c_2(\hat{y}(t) - x_i(t)) \qquad (2.57)$$

  - La position :

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \qquad (2.58)$$

Dans ce cas $x_i(t)$ est le pixel courant, $\hat{y}(t)$ est le meilleur pixel global obtenu, et $v_i(t)$ est la vitesse du pixel. ***Cependant, le pixel est utilisé comme une particule qui peut se déplacé possédant ainsi une vitesse et une position***.

217.3 Logique floue

La logique floue a prouvé sa puissance dans plusieurs domaines. En classification, comme filtre flou pour l'élimination de bruit, La restauration d'image flouée [Schaefer et al., 2009].

On outre, comme nous l'avons signalé précédemment, Le filtre de Wiener exige des connaissances à priori sur les densités spectrales de puissance de l'image originale et le bruit, cependant l'utilisation d'un estimateur flou est judicieuse [Toumi et al., 2008]. Il s'agit d'estimer la valeur de B (S_{nn} / S_{II}) dans l'équation (2.51) à partir de e_1 et e_2 qui sont :

e_1 : L'erreur quadratique moyenne (EQM) entre l'image originale I et l'image restaurée $\hat{I}$:

$$e_1 = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}[I(i,j) - \hat{I}(i,j)]^2 \qquad (2.59)$$

e_2 : L'erreur quadratique moyenne (EQM) entre l'image dégradée g et l'image restaurée :

$$e_2 = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}[g(i,j) - \hat{I}(i,j)]^2 \qquad (2.60)$$

Pour estimer la valeur B (S_{nn} / S_{II}), on doit suivre les étapes suivantes :

2.17.3.1 Fuzzification

Il effectue la conversion d'une donnée numérique en une donnée linguistique. Les entrées floues de l'inférence ont déterminé à partir des valeurs de *e1* et *e2*.

Nom	Signification	Valeur de e_1	Valeur de e_2
NG	Négatif Grand	[0, 1.25]	[0, 2.5]
NM	Négatif Moyen	[0, 2.5]	[0, 5]
ZO	Zéro	[1.25, 3.75]	[2.5, 7.5]
PM	Positif Moyen	[2.5, 5]	[5, 10]
PG	Positif Grand	[3.75, 5]	[7.5, 10]

Tableau 2.1 Exemple des variables linguistiques.

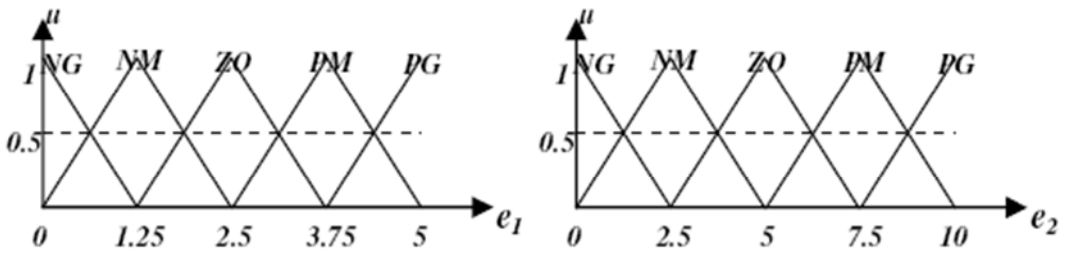


Fig. 2.38 Fonctions d'appartenance des variables d'entrées.

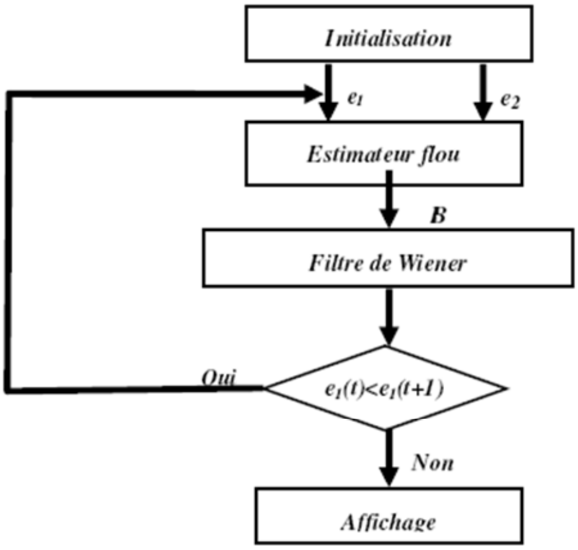
2.17.3.2 Moteur d'inférence

Il est chargé d'interpréter les règles pour calculer l'ensemble flou de sortie. Le mécanisme d'inférence le plus utilisé est celui de Mamdani [Czoga et al. 2000].

2.17.3.3 Déffuzification

Il effectue la conversion linguistique / numérique.

2.17.3.4 L'organigramme de l'algorithme



Organigramme 2.1. L'algorithme EFFW [Toumi et al., 2008].

2.18 Étude comparative

Dans cette dernière partie du chapitre Nous avons effectué un récapitulatif qui fait une comparaison entre les différentes méthodes présentées dans ce chapitre.

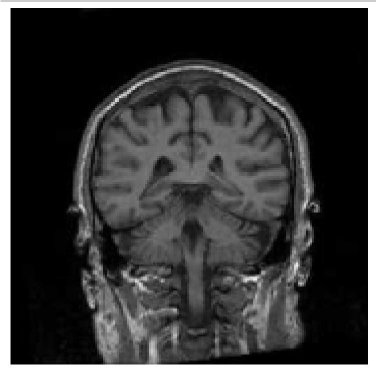


Image originale

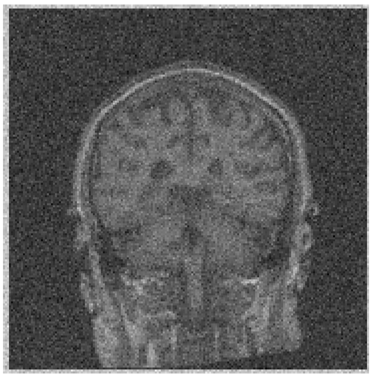
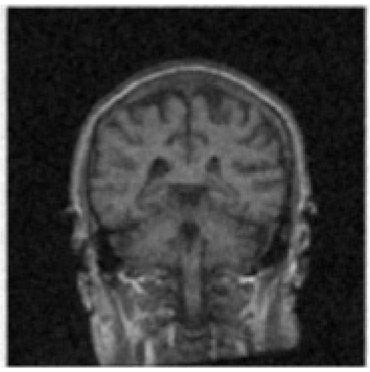


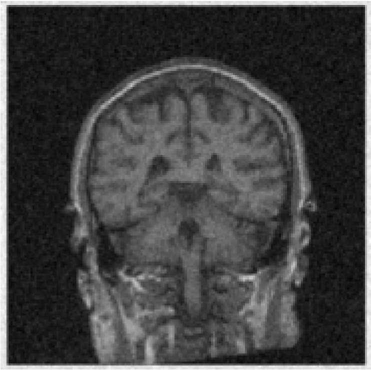
Image bruitée
EQM : 0.0100
PSNR : 68.1182

Filtre moyenneur



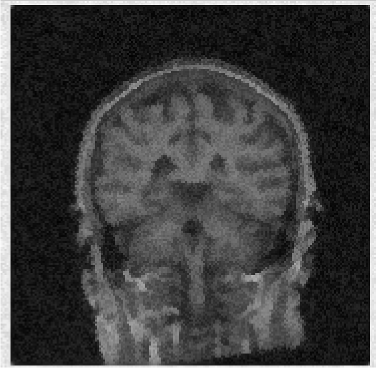
EQM : 0.0049
PSNR : 71.1986
Temps de calcul : 0.0150 (s)
Taille de la fenêtre : 3×3

Filtre gaussien



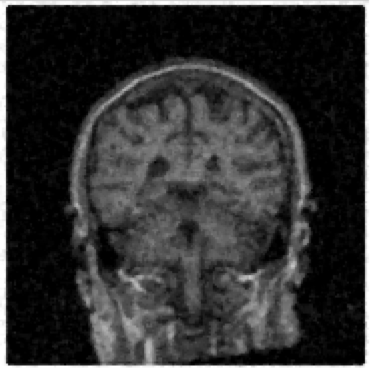
EQM : 0.0038
PSNR : 72.3039
Temps de calcul : 0.0581 (s)
Taille de la fenêtre : 3×3

Filtre SNN

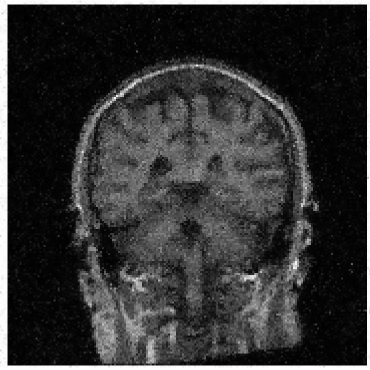
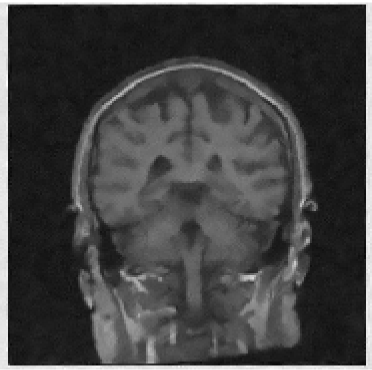


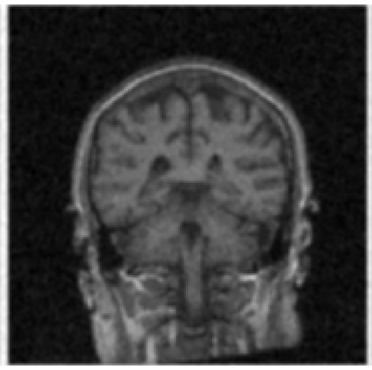
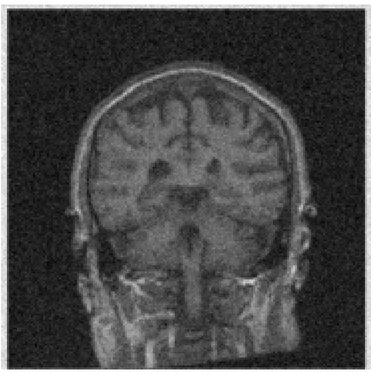
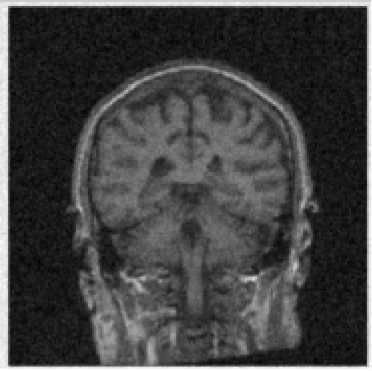
EQM : 0.0026
PSNR : 73.9371
Temps de calcul : 11.3568 (s)
Taille de la fenêtre : 7

filtre médian

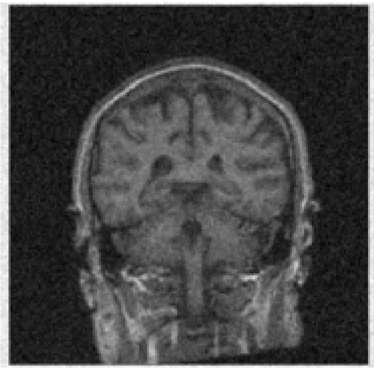


EQM : 0.0024
PSNR : 74.2435
Temps de calcul : 0.1492 (s)
Taille de la fenêtre : 5×5

Filtre bilatéral	*Moyennes non-locales*
	
EQM : 0.0027 *PSNR : 73.7421* *Temps de calcul : 7.9022 (s)*	*EQM : 8.0596e-004* *PSNR : 79.0677* *Temps de calcul : 163.4636 (s)*

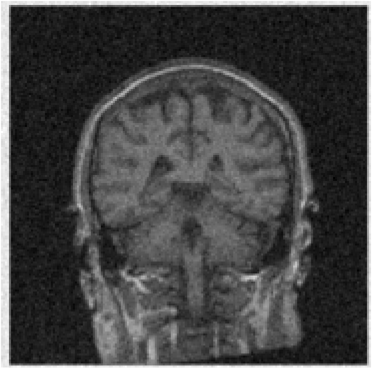
Filtre isotrope	*Filtre anisotrope*	*Filtrage à Variation Totale*
		
Nombre d’itération : 5	*Nombre d’itération : 5* *Seuil de diffusion k : 30* *Fonction de conductivité : 2* *Le pas de temps : 1/30*	*Nombre d’itération : 5* *Le pas de temps : 1/10*
EQM : 0.0095 *PSNR : 68.3430* *Temps de calcul : 0.0497 (s)*	*EQM : 0.0037* *PSNR : 72.4903* *Temps de calcul : 0.3781 (s)*	*EQM : 0.0024* *PSNR : 74.2460* *Temps de calcul : 0.4239 (s)*

Filtre de Lee



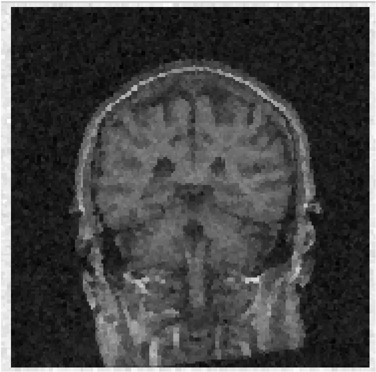
EQM : 0.0049
PSNR : 71.2434
Temps de calcul : 19.1688 (s)

Filtre de Kuan



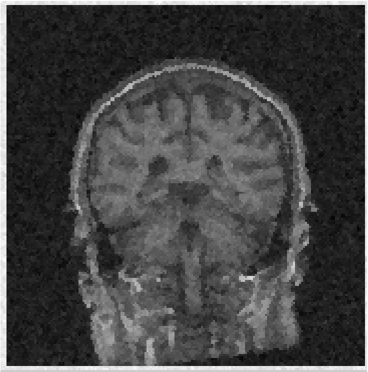
EQM : 0.0049
PSNR : 71.1947
Temps de calcul : 19.2242 (s)

Filtre de KUWAHARA

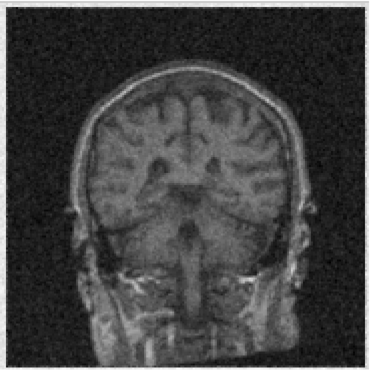
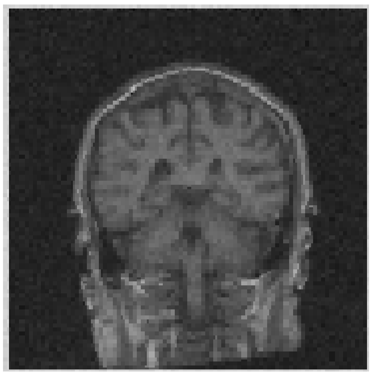


EQM : 0.0023
PSNR : 74.6373
Temps de calcul : 0.5897 (s)
Taille de la fenêtre : 5

Filtre de Nagao



EQM : 0.0025
PSNR : 74.2120
Temps de calcul : 31.7431 (s)
Taille de la fenêtre : 5

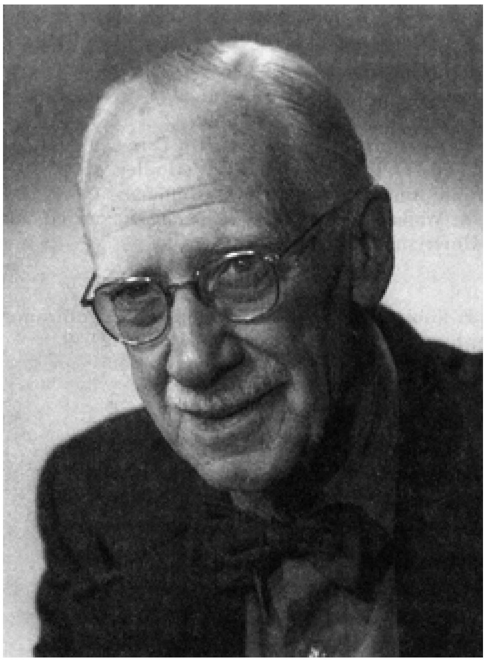
Filtre de Wiener	*Filtrage par les ondelettes orthogonales (haar)*
 *EQM : 0.0030* *PSNR : 73.4207* *Temps de calcul : 0.0345 (s)*	 *Niveau de décomposition : 2* *Type de seuillage : Hard* *Type de seuil : universel* *EQM : 0.0020* *PSNR : 75.1317* *Temps de calcul : 0.1281 (s)*

Le travail effectué ci-dessus, nous a permis de conclure que les ondelettes présentent l'outil le plus approprié à utiliser dans le problème de débruitage. En effet, les algorithmes de débruitage à base de seuillage des coefficients d'ondelette présentent un compromis entre le temps de calcul et le PSNR.

Notons que l'algorithme « non local means » présente la plus faible erreur quadratique moyenne. En revanche, il présente un grand inconvénient lié au temps de calcul.

2.19 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, un large panorama des méthodes permettant d'obtenir une restauration ou une amélioration des images. Chacune des approches présente des caractéristiques qui les rendent opérationnelle pour une certaine classe d'images. Nous avons énoncé ces caractéristiques et présenté, pour chaque méthode, son comportement général.



Kenneth Stewart Cole
(July 10, 1900 – April 18, 1984)

What we know is a drop; what we don't know is an ocean.

By Isaac Newton

Chapitre 3

Opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

Depuis quelques temps les méthodes fractionnaires sont considérées comme des outils puissants dans le domaine de traitement du signal et de l'image. En effet l'application de ces méthodes en restauration, en rehaussement de contours ou encore à la segmentation des images montre de façon évidente leur supériorité [Mathieu, 2003].

Cependant, un opérateur d'ordre fractionnaire (dérivateur ou intégrateur), est une généralisation de la notion de dérivée d' ordre entière d' une fonction $x(t)$ par rapport à la variable t à des valeurs réelles non entières. Lorsque l'ordre est négatif, il s'agit en fait d' une intégration d'ordre fractionnaire, mais nous avons utilisé indifféremment le terme dérivation d'ordre fractionnaire, que l'ordre soit positif ou négatif.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés de ces opérateurs ainsi que les différentes méthodes d'approximations et les transformées qui se base sur cette analyse.

3.2 Définitions mathématiques

Dans la littérature il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. La définition que nous avons retenue pour les applications au traitement d'image est basée sur la généralisation de la définition bien connue de la dérivée d'ordre entier [Sun & charef, 1990].

La dérivée d'ordre 1 d'une fonction discrète *x*, $(t = k \cdot h)$ est définie par :

$$D^{(1)}x(k \cdot h) = \frac{x(k \cdot h) - x((k-1) \cdot h)}{h} \tag{3.1}$$

Avec h infiniment petit.
Soit q^{-1} un opérateur retard applicable à une fonction défini par :

$$q^{-1}x(k \cdot h) = x((k-1) \cdot h) \tag{3.2}$$

Nous permettons d'écrire :

$$D^{(1)}x(k \cdot h) = \frac{1-q^{-1}}{h} x(k \cdot h) \tag{3.3}$$

La généralisation à un ordre de dérivation quelconque *n* (entier ou non entier, réel ou complexe) est immédiate [Sun & charef, 1990] :

$$D^{(n)}x(k \cdot h) = \frac{(1-q^{-1})^n}{h^n} x(k \cdot h) \tag{3.4}$$

On peut développer $(1\text{-}q^{-1})^n$ par la formule du binôme de Newton, L'équation (3.4) sera donner par :

$$D^{(n)}x(k \cdot h) = \frac{1}{h^n} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} q^{-\ell} x(k \cdot h) \tag{3.5}$$

Où :

$$\begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\ell) \cdot \Gamma(n-\ell)} \tag{3.6}$$

Et $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1} \cdot dt$ est la fonction Gamma (généralisation de la notion de factorielle).

Ou encore, étant donné que

$$q^{-\ell}x(k \cdot h) = x((k-\ell)h) = x(t - \ell \cdot h) \tag{3.7}$$

$$D^{(n)}x(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} \cdot x(t - \ell \cdot h) \tag{3.8}$$

Ou bien, sous une écriture plus condensée :

$$D^{(n)}x(t)=\frac{1}{h^n}\sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell x(t-\ell\cdot h) \tag{3.9}$$

Avec

$$a_\ell=(-1)^\ell\cdot\begin{pmatrix}n\\ \ell\end{pmatrix} \tag{3.10.a}$$

Pour $\ell=1$, 2, 3 …... et $a_0=1$

On peut calculer ces coefficients par la relation récurrente suivante [Goldberger, 1942]:

$$a_\ell=\frac{\ell-n-1}{\ell}a_{\ell-1} \tag{3.10.b}$$

Pour $\ell=1$, 2, 3 …... et $a_0=1$

Dans le cas d'une fonction *x(t)* causale, la somme infinie de l'équation (3.9) se réduit à un nombre K de termes, soit :

$$D^{(n)}x(t)=\frac{1}{h^n}\sum_{\ell=0}^{K}a_\ell x(t-\ell\cdot h) \tag{3.11}$$

Cette définition est appelée définition de Grünwald-Letnikov [Miller & Ross, 1993].

3.3 Conditions d’existence et propriétés des opérateurs d’ordre fractionnaire

3.3.1 Conditions d’existence

Pour que la dérivée d’ordre fractionnaire d’une fonction temporelle *y (t)* existe, il suffit que *y(t)* puisse s’écrire sous la forme [Miller & Ross, 1993]:

$$y(t)=(t-t_0)^\lambda\eta(t-t_0) \tag{3.12}$$

Avec

$\lambda\in C$

$\mathrm{Re}(\lambda)>-1$

η(t) fonction analytique de C pour t ≥ 0

Et pour que son intégrale d’ordre fractionnaire existe, il suffit que *y(t)* soit continue par morceaux sur $]t_0,+\infty[$ et intégrable sur $[t_0, t]$.

3.3.2 Propriétés

- l’opérateur de dérivation d’ordre fractionnaire (réel ou complexe) est linéaire [Chen, 2003]. Ainsi, si *f* et *g* sont deux fonctions continues et (λ, μ) réelles, on aura :

$$D^{(n)}(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)=\lambda\cdot D^{(n)}(f)+\mu\cdot D^{(n)}(g) \tag{3.13}$$

- Pour α = 0, $D^{\alpha} f(t)$ est l'opérateur identité ($D^{0} f(t) = f(t)$).

- L'opérateur fractionnaire vérifier la loi de composition suivante:

$$D^{(n1+n2)} f(t) = D^{(n1)} \left\{ D^{(n2)} f(t) \right\} = D^{(n2)} \left\{ D^{(n1)} f(t) \right\} \tag{3.14}$$

- la dérivée d’ordre fractionnaire de l’intégrale de même ordre d’une fonction temporelle $y(t)$ donne:
-

$$D^{(n)} \circ I^{(n)} y(t) = y(t) \text{ Avec } \mathrm{Re}(n) > 0 \tag{3.15}$$

Cette relation n’étant pas toujours vraie pour Re(α) < 0

- la définition de Grünwald-Letnikov décrit l’unification des deux notions ; l’intégral et la dérivée d’ordre fractionnaire [Miller & Ross, 1993],

- la définition de la dérivation d’ordre fractionnaire étant basée sur celle d’une intégration d’ordre fractionnaire, une dérivation d’ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s’avère en effet que la dérivée d’ordre fractionnaire d’une fonction nécessite la connaissance de $y(t)$ sur l’intervalle [t_0, t]**,** alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de *y* autour de *t* est nécessaire. Cette propriété permet d’interpréter les systèmes d’ordre fractionnaire comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte; [Djouambi, 2008].

- La loi additive (propriété du semi-groupe) [Samko et al., 1993]:

$$D^{n1} D^{n2} f(z) = D^{n2} D^{n1} f(z) = D^{n1+n2} f(z) \tag{3.16}$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction *f(z).*

Pour en savoir plus sur les propriétés des opérateurs d’ordre fractionnaire consulter l’ouvrage [Podlubny, 1999].

3.3.3 Transformée de Laplace

La transformation de Laplace d'un opérateur d'ordre fractionnaire n de la fonction f(t) est donnée par la relation :

$$L\left\{ D^{(n)} f(t); s \right\} = s^{n} \cdot L\left\{ f(t); s \right\} \tag{3.17}$$

3.4 Calcul numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul de la dérivée ou l’intégrale d’ordre fractionnaire *n* d’une fonction quelconque est généralement très difficile en utilisant les méthodes analytiques. Par conséquence, une approximation numérique est nécessaire. La méthode la plus simple à utiliser est celle basée sur la définition de Grünwald-Letnikov. Cependant l'équation (3.9) fournit un signal échantillonné *y (k)*:

$$y(k) = \frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{\infty} a_i x(kh - ih) \tag{3.18}$$

Approximant la sortie d'un opérateur d'ordre fractionnaire *n*. Cette approximation est d'autant meilleure que la période d'échantillonnage *h* très petite.

Pour un signal causal :

$$y(k) = \frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{K} a_i x(kh - ih) \tag{3.19}$$

La relation (3.19.) peut être implémentée soit en calculant séparément les coefficients a_i, soit en exploitant la propriété de récurrence [Goldberger, 1942].

3.5 Exemples de calcul de dérivée d’ordre fractionnaire

3.5.1 Dérivée d’ordre fractionnaire réel d’une exponentielle

Soit la fonction $y(t) = e^{at}$ où $a = \frac{1}{\tau} + jw$ est un nombre complexe. En utilisant les définitions citées dans la section (2), la dérivée d’ordre fractionnaire réel *n* de *y(t)* est donnée par [Oustaloup et *al.*, 2005]:

$$D^n e^{at} = a^n e^{at} = ((\frac{1}{\tau})^2 + w^2)^{\frac{n}{2}} e^{t/\tau} e^{j(wt + n\arg(n))} \tag{3.20}$$

Dans le cas d’une fonction réelle (*w* = 0), l’expression précédente se réduit à :

$$D^n e^{at} = \tau^{-n} e^{t/\tau} \tag{3.21}$$

3.5.2 Dérivée d’ordre fractionnaire réel d’un cosinus (ou d’un sinus)

D’après [Djouambi, 2008] :

$$D^n[\cos(w_0 t - \varphi)] = w_0^n \cos(w_0 t - \varphi + n\frac{\pi}{2}) \tag{3.22}$$

$$D^n[\sin(w_0 t - \varphi)] = w_0^n \sin(w_0 t - \varphi + n\frac{\pi}{2}) \tag{3.23}$$

La figure (3.1) ci-dessous illustre cette notion de dérivation non entière pour une fonction sinusoïdale caractérisée par une pulsation de 10 rad/s et un déphasage nul.

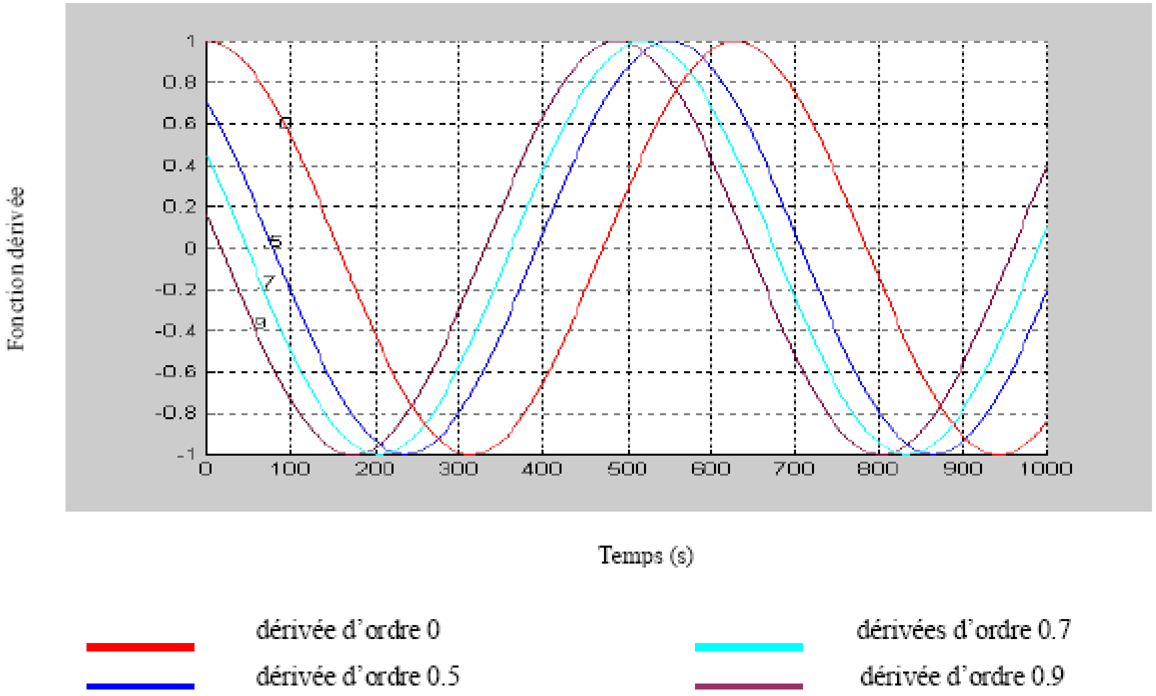


Figure 3.1 Dérivation d'ordre n d'une fonction sinusoïdale

3.6 Représentation d'un système d'ordre fractionnaire

Si plusieurs formes de représentation sont à même de décrire un système entier (équation différentielle, équation récurrente, représentation d'état, fonction de transfert…), le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenants des opérateurs d'ordre fractionnaire.

3.6.1 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite

Dans le domaine temporel, un modèle est dit *d'ordre fractionnaire explicit* lorsqu'il est fondé sur une représentation par une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{l=0}^{L} a_l D^{n_{al}} y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^{n_{bm}} u(t) \qquad (3.24)$$

Où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $\{n_{a_l}, n_{b_m}\} \in C$ et $\{a_l, b_m\} \in \Re, (l = 0,1,\ldots,L; m = 0,1,\ldots,M)$.

Dans le domaine opérationnel, sa fonction de transfert est donnée par un rapport de deux polynômes à puissances fractionnaires, soit,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{n_{b0}} + \ldots + b_M s^{n_{bM}}}{a_0 s^{n_{a0}} + \ldots + a_L s^{n_{aL}}} \qquad (3.25)$$

Dans le cas où tous les exposants de s sont multiples d'une certaine valeur réelle q (ordres commensurables), la fonction de transfert (3.25) peut être réécrite sous la forme :

$$G(s)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^{mq}}{\sum_{l=0}^{L} a_l s^{lq}} \tag{3.26}$$

Où q est un nombre réel, M et L sont des entiers tel que $M < L$.

Un système d’ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert de la forme (3.26) est appelé système commensurable.

Bien que n’importe quelle valeur réelle q suffise pour que le système soit commensurable, la valeur de q est généralement prise comme étant un nombre rationnel $1/Q$, avec $Q \in \aleph$, soit :

$$G(s)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^{m/Q}}{\sum_{l=0}^{L} a_l s^{l/Q}} \tag{3.27}$$

3.6.2 Fonction de transfert d’ordre fractionnaire implicite

La dérivée d’ordre fractionnaire d’une fonction est dite implicite lorsqu’elle ne porte pas directement sur *g(t)* mais sur le produit de *g(t)* par une exponentielle croissante de constante du temps τ, $e^{t/\tau}$ [Oustaloup et *al*., 2005], soit :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}_{imp} g(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}\Big(\big(g(t)e^{t/\tau}\Big) \tag{3.28}$$

La relation (3.28) définisse ce que nous appelons la dérivée implicite d’ordre α de *g(t).* La transformée de Laplace de cette équation donne [Lay, 1998]:

$$G(s)=\frac{1}{(1+\tau\cdot s)^{\alpha}}\,,\ \text{Avec } \tau\in\Re^{+} \text{ et } \Re(\alpha)>0 \tag{3.29}$$

Expression dont la forme évoque bien la présence implicite d’une dérivée d’ordre α.

Dans le cas général, un modèle est dit à dérivée d’ordre fractionnaire implicite lorsqu’il est fondé sur le produit de pôles et zéros d’ordre fractionnaire, soit :

$$G(s)=\prod_{i=1}^{N}(1+\tau_i\cdot s)^{\alpha_i}\,,\ \text{Avec } \Re(\tau_i)\in\Re^{+}\quad \alpha_i(i=1,\ldots,N)\in C \tag{3.30}$$

3.7 Approximation rationnelle des Opérateurs Fractionnaires

3.7.1 Cas discret

Cette approche consiste à approximer le modèle d’ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en substituant l’opérateur de Laplace *s* dans le modèle fractionnaire par son équivalent en temps discret.

Parmi les méthodes les plus répondues celles d’Euler (Grünwald), de Tustin, de Simpson ou d’Al-alaoui [Al-Alaoui, 1994], [Vinagre et al., 2000].

Euler (Grünewald) : $(w(z^{-1}))^{\alpha} = \left(\frac{1}{T}(1-z^{-1})\right)^{\alpha} = \frac{1}{T^{\alpha}}\left(1-\alpha z^{-1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^{-2}+...\right)$
Tustin : $(w(z^{-1}))^{\alpha} = \left(\frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}\right)^{\alpha} = \left(\frac{2}{T}\right)^{\alpha}(1-2\alpha z^{-1}+2\alpha^{2}z^{-2}+...)$
Simpson : $(w(z^{-1}))^{\alpha} = \left(\frac{3}{T}\frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{1+4z^{-1}+z^{-2}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{3}{T}\right)^{\alpha}(1-4\alpha z^{-1}+2\alpha(4\alpha+3)z^{-2}+...)$
Al_alaoui : $(w(z^{-1}))^{\alpha} = \left(\frac{8}{7T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}\right)^{\alpha} = \left(\frac{8}{7T}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{8}{7}\alpha z^{-1}+(-\frac{24}{49}\alpha+\frac{32}{49}\alpha^{2})z^{-2}+...\right)$

Tableau 3.1 Approximation en temps discret de l’opérateur d’ordre fractionnaire. [Djouambi, 2008].

3.7.2 Cas continu

Cette approche consiste à calculer la sortie du système en utilisant un modèle rationnel continu équivalent, obtenu à partir de l’approximation du modèle d’ordre fractionnaire dans une bande de fréquence bien définie. Plusieurs méthodes d’approximation ont été développées. Le choix d’une méthode parmi les autres, dépend de la structure des systèmes que l’on cherche à simuler.

Méthode CFE (continued fraction expansion)

En général l’approximation rationnelle de la fonction $G(s) = s^{-n}$,$0 < n < 1$ est obtenue en utilisant la CFE [Vinagre et al., 2003]:

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+sT)^{n}} \tag{3.31}$$

$$G_i(s) = \left(1+\frac{1}{s}\right)^{n} \tag{3.32}$$

Ou $G_h(s)$ est l'approximation dans les hautes fréquences, et $G_i(s)$ est l'approximation dans les basses fréquences.

Notons qu'il existe d'autres méthodes d'approximation :

- Méthode de Carlson [Carlson & Halijak 1964] ;
- Méthode de Matsuda [Matsuda & Fuji, 1993] ;
- Méthode d'Oustaloup [Oustaloup, 1991] ;
- Méthode de Charef [Charef A. et al., 1992] ;
- Méthode basée sur la fonction de distribution des temps de relaxation cole-cole [Cole & Cole, 1941] ;

3.8 Ondelettes fractionnaires

En peut définir une transformation en ondelettes par une fonction fractionnaire comme la fonction de distribution des temps de relaxation de Cole-Cole et ses dérivées [Cole & Cole, 1941].

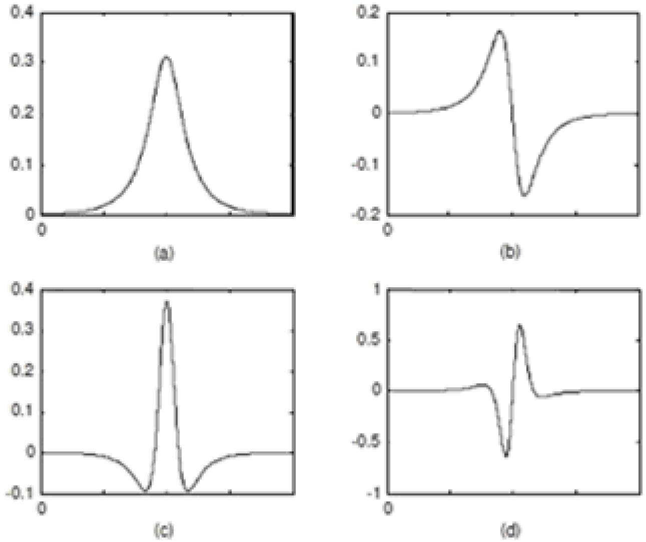


Figure 3.2 (a) Fonction de Cole-Cole. (b), (c) et (d) ondelettes (dérivées première, deuxième et troisième respectivement).

3.9 Implémentation des opérateurs fractionnaire dans les réseaux de neurones artificiels

L'implémentation des opérateurs fractionnaires se fait entre la règle de propagation et la fonction d'activation, cette implémentation est illustrée dans la figure suivante :

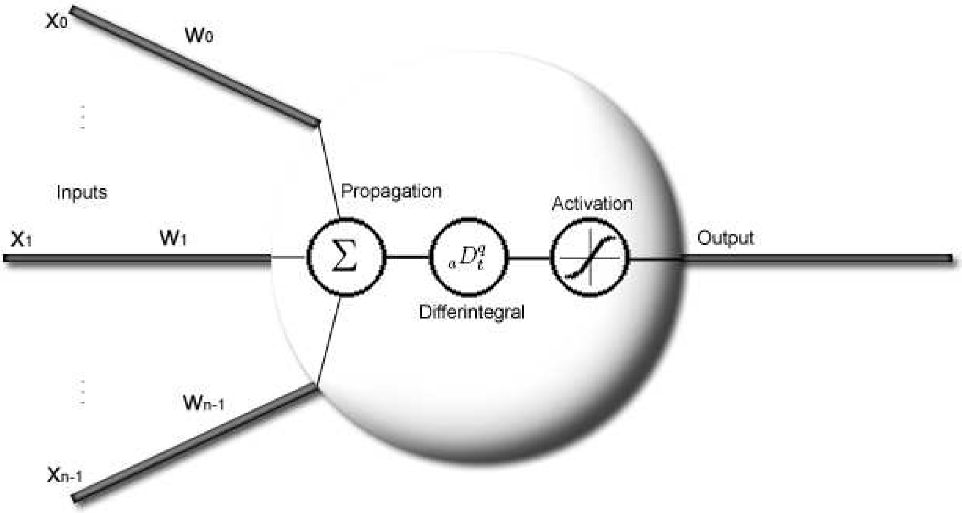


Figure 3.3. Implémentation d'un opérateur fractionnaire dans un réseau de neurones artificiels [Gardner, 2009].

3.10 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. Nous avons présenté quelques définitions mathématiques des opérateurs d'ordre fractionnaire et leurs différentes propriétés. Nous avons ensuite répertorié une évaluation numérique de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire basée sur la définition de Grünwald-Letnikov. Des méthodes d'approximations continues et discrètes sont également présentées. Une troisième partie est dédié pour la transformée en ondelette fractionnaire et l'implémentation des opérateurs fractionnaire dans les réseaux de neurones artificiels.

Jean Morlet
(13 janvier 1931 — 27 avril 2007)

“After all, I'm using location and modulation, let’s do differently. Let's take one of these functions that have some oscillations and let's put that in different places and squish it so that I have a different thing, really wavelet”

By Jean morlet

Chapitre 4

Débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes

4.1 Introduction

La Transformée en Ondelettes est devenue en quelques années un sujet de recherche très débattu. On ne compte plus aujourd'hui les applications qui utilisent cette technique. Il s'agit d'un algorithme permettant d'analyser et de repérer les discontinuités d'un signal à une ou à deux dimensions, et à des échelles différentes. Cette caractéristique est utilisée pour le débruitage des images. En effet, dans l’imagerie médicale, le débruitage cherche à pouvoir discerner les informations utiles dans les images médicales comme la forme, le contour… Par seuillage des coefficients d'ondelettes, on peut débruiter une image par élimination des détails les plus fins.

Nous commençons par présenter un aperçu global sur la transformée en ondelette et l’analyse multirésolution. Ensuite, nous abordons l’algorithme de débruitage par seuillage des coefficients d’ondelettes, avant de passer aux résultats obtenus après l’application de cet algorithme. Nous terminons alors par le développement d’un modèle d’ondelette fractionnaire et son application.

4.2 Rappels sur La transformée en ondelette

4.2.1 Insuffisance de l'analyse de Fourier

L'analyse de Fourier est sans conteste l'un des outils les plus puissants mis à la disposition des mathématiciens et physiciens d'aujourd'hui. Néanmoins, bien que bâtie sur la base du concept physique de fréquence (spatiale ou temporelle), elle se révèle imparfaitement adaptée à la description de fonction ou signaux que l'on peut rencontrer couramment. Parmi ses limitations on peut citer :

1. Les fréquences mesurées ne peuvent pas être situées dans le temps ;
2. La correspondance temps-fréquence est inexistante ;
3. Son efficacité n'est remarquable que pour les signaux stationnaires[1].

4.2.2 Introduction sur les ondelettes

L'analyse par ondelettes est apparue sous ses **formes modernes**, au début des années 80, dans un remarquable article d'Alex Grossmann et Jean Morlet. Cette approche est apparue initialement en géophysique pour l'analyse des signaux sismiques. Des avancées significatives ont notamment été faites par Meyer, Mallat, Daubechies, Ronald Coifman, et Victor Wickerhauser [Mallat, 1989], [Daubechies, 1992], [Coifman, Meyer, 1991], [Wickerhauser et al., 1992]. Ces avancées ont alors influencé d'autre domaine de recherche, de mène que l'interaction entre développement et application favorise aujourd'hui l'évolution rapide de l'outil « ondelettes ».

On note également que l'attention des chercheurs s'est progressivement tournée de l'analyse basée sur la fréquence à l'analyse basée sur l'échelle quand elle a prouvé que les fluctuations moyennes de mesure d'une approche à différentes échelles s'est avérée moins sensible au bruit.

4.2.3 Définition d'une ondelette

Une ondelette est une forme d'onde de durée limitée et de valeur moyenne nulle. C'est une onde localisée dans un temps court. Son utilisation consiste à représenté un signal (ou une fonction) comme une somme pondérée de ces petites ondes translatées ou dilatées.

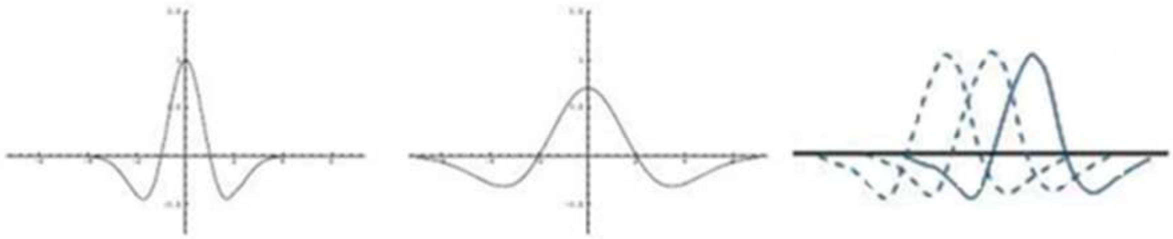
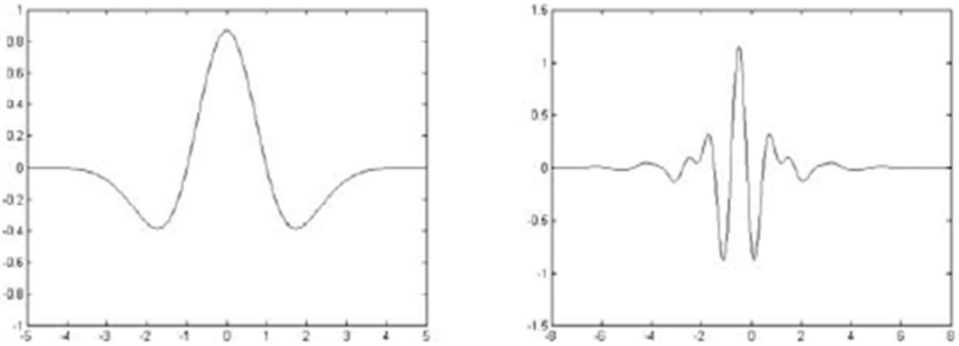


Figure 4.1. Ondelette dilatée et translatée.

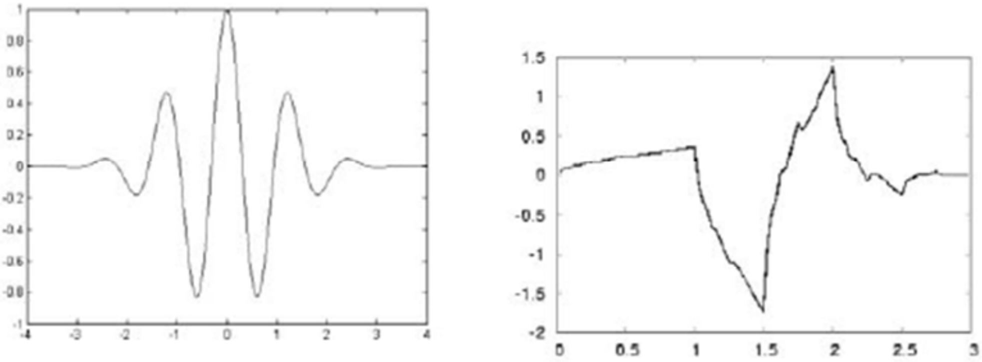
---

[1] Signaux dont le contenu en fréquence ne change pas au cours du temps (ne dépend pas du temps)

4.2.4 Quelques exemples des ondelettes



(d) Chapeau Mexicain (c) Meyer



(b) Morlet (a) Daubechies

Figure 4.2 Exemple d'ondelette.

4.2.5 La transformation en ondelette continue

Définition

Une ondelette Ψ_1 est une fonction de $L^2(\Re)$ intégrable de moyenne nulle (ici supposée à valeurs réelles) qui oscille localement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(t)dt = 0 \qquad (4.1)$$

Qui peut être dilatée/contractée (facteur d'échelle $e \in \Re_+^*$) et translatée (paramètre de localisation $u \in \Re$) :

$$\Psi_{u,e}(t) = \frac{1}{\sqrt{e}}\psi_1\left(\frac{t-u}{e}\right) \qquad (4.2)$$

La transformée en ondelettes continue du signal *f* (avec une ondelette dilatée/contractée de *e* et translatée de *u*) est donnée par :

$$W_f(u,e)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{e}}\Psi_1^*\left(\frac{t-u}{e}\right)dt=\left\langle f,\Psi_{u,e}\right\rangle \tag{4.3}$$

Le signal *f* peut-être reconstruit à partir de $W_f(u,e)$ en employant la relation suivante :

$$f(t)=\frac{1}{C_{\Psi_1}}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_f(u,e)\frac{1}{\sqrt{e}}\Psi_1\left(\frac{t-u}{e}\right)du\frac{de}{e^2} \tag{4.4}$$

Avec

$$C_{\Psi_1}=\int_{0}^{+\infty}\frac{\left|\Psi_1(w)\right|^2}{w}dw \tag{4.5}$$

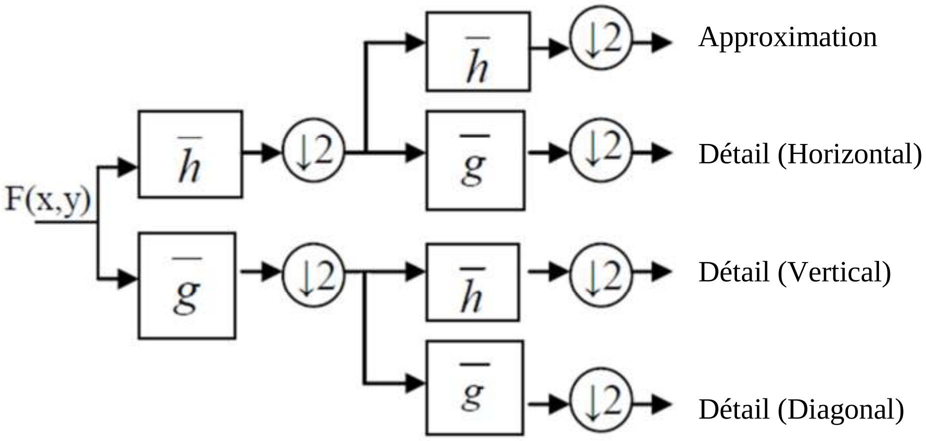
Cette constante C_{Ψ_1} doit être finie. C’est ce que l’on appelle la «condition d’admissibilité». Cette condition implique que l’ondelette soit de moyenne nulle. La représentation intégrale (4.1) permettant de reconstruire *f*, fait intervenir des ondelettes correspondant à toutes les localisations temporelles et à tous les facteurs d’échelle.

4.2.6 La transformation en ondelette discrète

4.2.6.1 Définition

La transformée en ondelettes discrètes est une représentation multi-résolutions/multi fréquences, [Panchanathan et al., 1996]. C’est un outil qui découpe les données, les fonctions ou les opérateurs en composantes fréquentielles suivant une résolution adaptée à l’échelle.

Pour être claire La transformation en ondelettes discrètes peut être considérée comme un processus de décomposition du signal en approximations et en détails. Le signal d’origine, traverse deux filtres complémentaires, passe-haut et passe-bas, et émerge en tant que deux signaux: respectivement le signal d’approximations A et le signal de détails D [Mallat, 1989] comme le montre la Figure (4.3).



2 ↓ : Décimation d’une ligne (colonne) sur deux.

g/h : Convolution avec le filtre (h, g).

Figure 4.3 Processus de décomposition d’ondelette.

4.2.6.2 Exemple de filtre d'ondelette

En réalité il y a 2 tableaux qui représentent l'ondelette car une ondelette se compose de 2 filtres : un filtre passe-bas et un filtre passe-haut.

Ondelette de Haar

Passe-bas : [0.71 0.71]

Passe-haut : [-0.71 0.71]

Ondelette de Daubechies (db4)

Passe-bas : [-0.0106 0.0329 0.0308 -0.1870 -0.0280 0.6309 0.7148 0.2304]

Passe-haut : [-0.2304 0.7148 -0.6309 -0.0280 0.1870 0.0308 -0.0329 -0.0106]

Ondelette de Coiflets (coif1)

Passe-bas : [-0.0157 -0.0727 0.3849 0.8526 0.3379 -0.0727]

Passe-haut : [0.0727 0.3379 -0.8526 0.3849 0.0727 -0.0157]

4.2.6.3 Analyse multirésolution (AMR)

Les ondelettes permettent de représenter une image, comme le font les fonctions cosinus dans l'analyse de Fourier. Elles autorisent une bonne localisation en temps et en fréquence, toute l'information se concentre sur très peu de coefficients. La décomposition se fait à partir d'un ensemble d'ondelettes de base obtenu à partir d'une ondelette mère notée : $\psi(x)$. Cette base d'ondelette est obtenue par translations et dilatation. L'analyse temps-fréquence par transformation d'un signal dans la base de Fourier est limitée. Il est impossible d'avoir une bonne localisation en temps et en fréquence, même en utilisant des méthodes à base de fenêtres glissantes à cause de la taille de la fenêtre d'analyse. L'AMR qui nous permet de s'affranchir de ces problèmes. Dans cette analyse, le signal sera projeté sur des fonctions d'analyses pour toutes les résolutions 2^{-j} qui composent le signal de longueur 2^{j} échantillons avec $j \in Z$. En effet, comme nous le verrons par la suite, le signal d'approximation de résolution 2^{-j} sera ensuite décomposé pour la construction du signal d'approximation et de détails de résolution $2^{-(j+1)}$.

L'itération de ce processus conduit à un pavage temps-fréquence. L'analyse étant réversible sous certaines conditions [Feilner et al., 2001], on peut reconstruire le niveau i d'approximation à partir des sous-bandes $i+1$. Après plusieurs itérations le signal original sera reconstruit. L'approximation d'une fonction à une résolution 2^{-j} est déterminée par des moyennes locales sur 2^{j} échantillons.

D'une façon plus formelle, l'approximation d'une fonction à la résolution 2^{-j} est définie comme sa projection orthogonale sur un espace $Vj \subset L^2(R)$. L'espace Vj regroupe toutes les approximations possibles à l'échelle 2^{j}. La projection orthogonale de f sur Vj est la fonction $fj \in Vj$ qui minimise la distance $\left\| f_j - f \right\|$. La transformée en ondelettes offre une étude pyramidale (figure 4.4). L'analyse se fait à partir de dilatation et de translation de l'ondelette mère. Cette transformation décrit les détails d'une image pour chaque niveau de résolution. Ces détails correspondent à la différence d'information entre deux niveaux de résolutions successives.

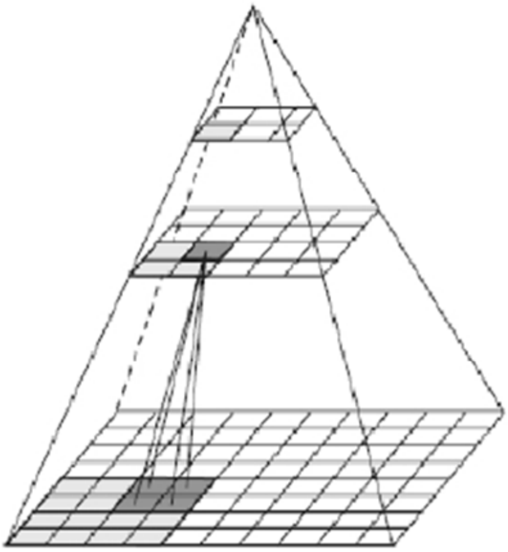


Figure 4.4 Contexte d’analyse multirésolution.

4.2.6.3.1 La multirésolution

Une suite $\{V_j\} j \in z$ de sous-espaces fermés $\{V_j\} j \in z$ de $L^2(R)$* est une suite d'approximations multirésolution si elle vérifie les sous propriétés suivantes :

1. $\forall (j,k) \in Z^2, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$ (4.6)

Vj est invariant pour toute translation de longueur proportionnelle à l'échelle 2^{-j}. Il existe une grille spatiale ou temporelle sous jacente par pas de 2^j.

2. $\forall j \in Z, V_{J+1} \subset V_j$ (4.7)

Une approximation à la résolution 2^{-j} contient toute l'information nécessaire à la construction d'une résolution plus grossière $2^{-(j+1)}$, c'est une propriété de causalité

3. $\forall j \in Z, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2} \in V_{j+1}\right)$ (4.8)

La dilatation par un facteur de *2* agrandit les détails d'un facteur de 2, on a bien une approximation à une résolution plus grossière. Il existe une grille fréquentielle sous-jacente en progression géométrique.

4. $\lim_{j \to +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j = 0$ (4.9)

L'intersection des Vj est réduite à 0 dans L^2 Si la résolution est trop faible, c'est-à-dire que 2^{-j} tend vers 0, on perd tous les détails. A résolution minimale, on perd toute l'image.

5. Il existe une fonction θ telle que $\{\theta(t-n)\}_{n \in Z}$ soit une base de Riesz de V_0 [Atto, 2008].

L'application directe de (AMR) est l'algorithme de Mallat [Mallat, 1989] (figure 4.5). L'idée est de décomposer un signal S en sa moyenne A1 (approximation) et en ses détails D1 (détails). On répète ensuite l'opération en prenant pour signal A1, puis A2... On s'arrête quand on atteint la résolution souhaitée ou quand la décomposition n'est plus possible. Donc, le signal est décomposé en plusieurs composantes de basse résolution.

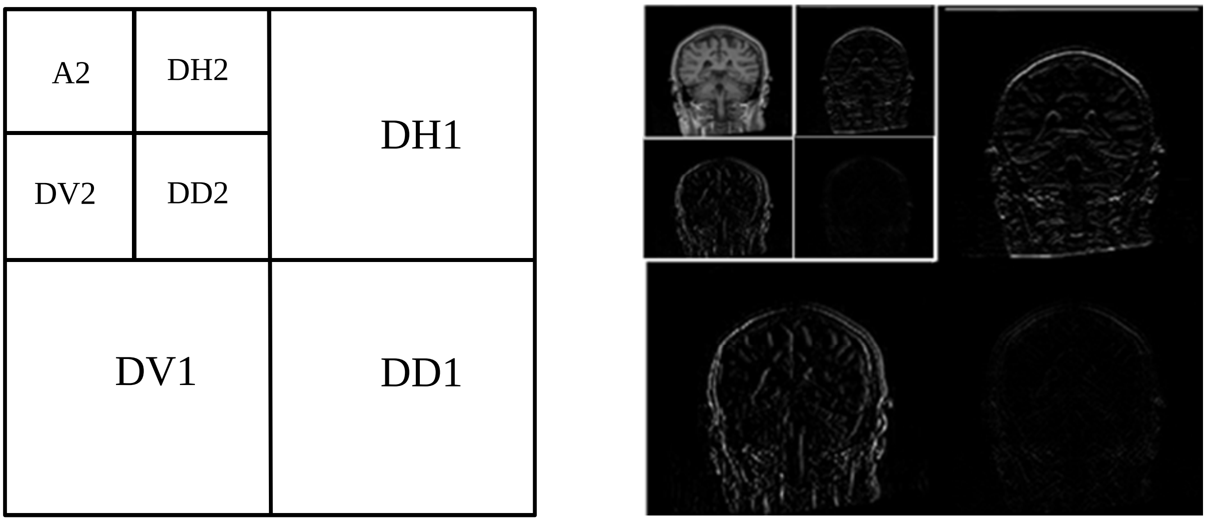
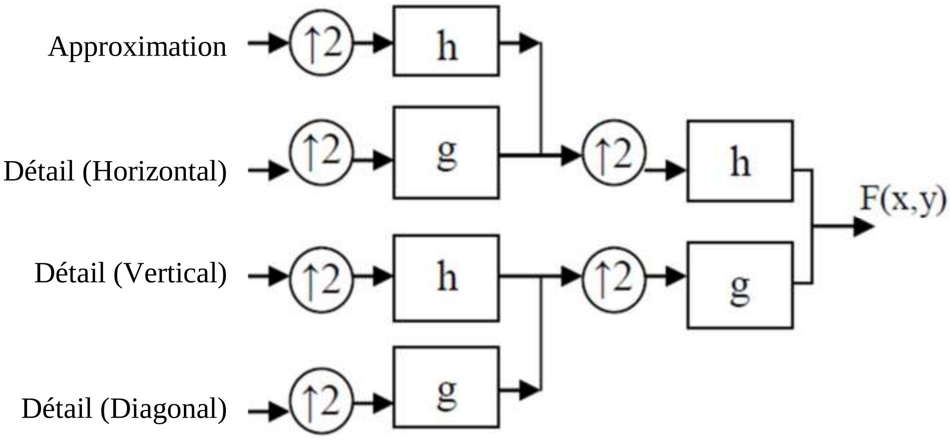


Figure 4.5 Application de l'analyse multirésolution.

L'autre partie est comment ces composants peuvent être assemblés dans le signal original sans perte d'information. Ce processus est appelé *reconstruction* ou *synthèse*.

4.2.6.3.2 Reconstruction du signal

Pour synthétiser un signal, on le reconstruit à partir des coefficients d'ondelette. Où l'analyse par ondelette inclus le filtrage et le sous-échantillonnage, et la reconstruction contient le filtrage et le sur-échantillonnage [Feilner et al., 2001] Ce principe est illustré en figure (4.6).



↑2 : Interpolation des lignes (colonnes), c'est-à-dire mettre une ligne (colonne) de zéros entre deux.

g/h : Convolution avec le filtre (h, g)

Figure 4.6 La reconstruction du signal.

4.2.7 Ondelettes orthogonales et biorthogonales

4.2.7.1 Ondelettes orthogonales

La fonction d'échelle est une solution à une équation fonctionnelle fractal, appelée l'équation de raffinement [Delyon, 2010]:

$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi(2x-k) \tag{4.10}$$

Ou la séquence $(a_0, a_1, ...a_{N-1})$ des entiers flottants est appelé la séquence d'échelle ou le masque d'échelle. L'ondelette exacte est obtenue par la combinaison linéaire similaire :

$$\Psi(x)=\sum_{k=0}^{M-1} b_k \phi(2x-k) \tag{4.11}$$

Ou la séquence $(b_0, b_1, ...b_{M-1})$ des entiers flottants est appelé la séquence d'ondelette ou le masque d'ondelette. Une condition nécessaire pour l'orthogonalité des ondelettes est que l'ordre d'échelle est orthogonal à tous ses décalages par un chiffre pair des coefficients [Delyon, 2010]:

$$\sum_{n\in Z} a_n \cdot a_{n+2m} = 2\delta_{m,0} \tag{4.12}$$

Dans ce cas-ci, il y a le même nombre M=N de coefficients dans la dilatation comme dans l'ordre d'ondelette, l'ordre d'ondelette peut être déterminé comme $b_n = (-1)^n a_{N-1-n}$

4.2.7.2 Ondelettes biorthogonales

Une autre classe des ondelettes rendues populaires par I. Daubechies sont les ondelettes biorthogonales [Daubechies, 1992]. Elles peuvent être construites pour avoir la symétrie temporelle. Dans ce cas-ci, il y a deux fonctions de dilatation $\phi, \tilde{\phi}$ qui peuvent générer des différentes analyses de multirésolution, et en conséquence deux fonctions différentes d'ondelette $\phi, \tilde{\phi}$. Ainsi les nombres M, N des coefficients dans les ordres de dilatation a, $\tilde{a}$ peuvent être différents. La séquence de dilatation doit satisfaire la condition suivante de biorthogonalité [Delyon, 2010] :

$$\sum_{n\in Z} a_n \cdot \tilde{a}_{n+2m} = 2\delta_{m,0} \tag{4.13}$$

Les séquences d'ondelette peuvent-être déterminés par $b_n = (-1)^n \tilde{a}_{M-1-n}$, $n = 0,...,M-1$ et $\tilde{b}_n = (-1)^n a_{M-1-n}$, $n = 0,...,N-1$

4.3 Débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes

4.3.1 Formulation générale du problème

En général, il est possible de réaliser une décomposition en ondelettes d'une image puis de reconstruire cette image à partir de ses coefficients d'ondelettes. Pourtant, cette technique n'aurait pas grand intérêt si on ne modifiait pas ces coefficients car on obtiendrait une image finale identique à l'image initiale [Cohen, 1992], [Truchetet, 1998].

Les coefficients d'ondelettes marquent les discontinuités qui interviennent dans l'image. Ils correspondent donc aux détails. Si, maintenant, on seuille ces coefficients, cela revient à éliminer les détails les plus fins de l'image. Il en découle donc deux grandes applications de cette technique de seuillage des coefficients d'ondelettes : la compression et le débruitage des images [Misiti et al., 2003].

Pour le problème du débruitage (ou "*denoising*") qui nous intéresse : on peut le mettre sous la forme générale suivante :

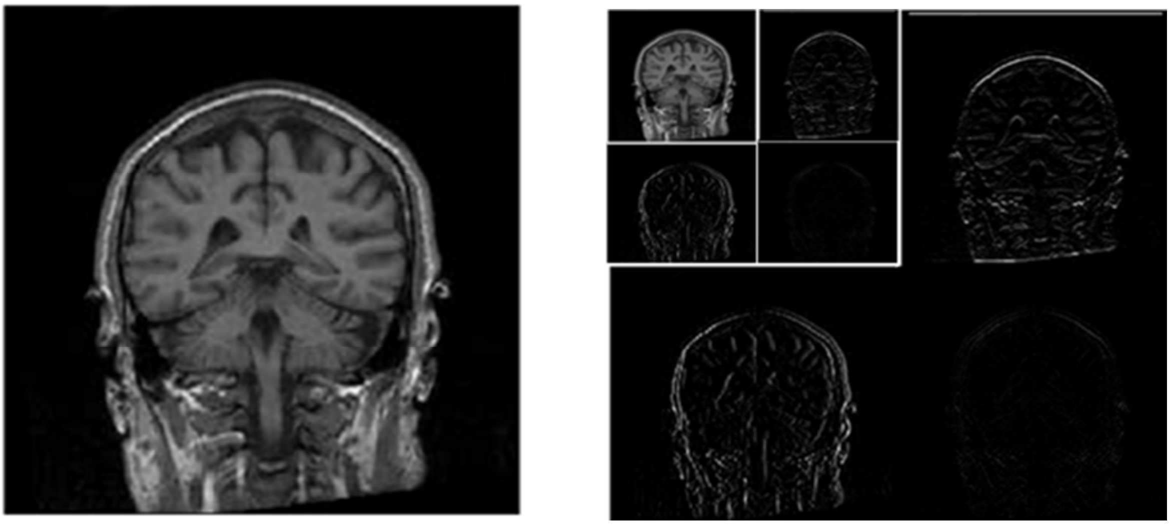
$$y_{mn} = g_{mn} + \varepsilon_{mn} \tag{4.14}$$

Où nos observations dégradées $y_{m,n}$, $m, n = 0, \ldots\ldots, N-1$ représentant les valeurs réelles échantillonnées d'une image bruitée, sont modélisées comme la somme d'un signal g_{mn} à estimer et d'un bruit blanc gaussien ε_{mn} de moyenne nulle et de variance σ^2. L'objectif est de recouvrer l'information g contenue dans le signal bruité y sans pour autant faire d'hypothèse sur une structure paramétrique de g. Etant donné le vecteur y qui représente les valeurs échantillonnées de y, la transformée multi-échelle de y est donnée par $d = \Phi^T y$ où Φ est une matrice (dite dictionnaire) de taille $N^2 \times L$ (avec $L \geq N^2$).

Dans le cas de la transformée d'ondelettes discrète orthogonale, la matrice $\Phi = W$ où W est une matrice orthogonale associée à la base orthonormée choisie, et d'un vecteur comprenant d'une part les coefficients d'approximation et d'autre part les coefficients de détail de la transformée en ondelettes discrète (DWT). Du fait de l'orthogonalité de la matrice *W*, la transformée en ondelettes discrète inverse (IDWT) est donnée par $y = W^T d$. Dans le cas où la taille *N* peut se mettre sous la forme $N = 2^j$ avec J ∈ N, la DWT ainsi que sa transformée inverse peuvent être implémentées à l'aide de l'algorithme pyramidal proposé par Mallat [Mallat, 1989] employant un banc de filtres miroirs en quadrature. Dans le cas bidimensionnel, les sous-bandes HH_j, HL_j et LH_j, $j = J_c, \ldots\ldots, J-1$ correspondent respectivement aux coefficients de détail d'orientations diagonale, horizontale et verticale. La sous-bande LLj_c représente les coefficients d'approximations à l'échelle la plus grossière. En appliquant la DWT [Mallat, 1989] à l'image bruitée *y* nous obtenons alors à partir de l'Equation (4.14) :

$$\begin{cases} c_{mn} = a_{mn} + \varepsilon_{mn} & m, n = 0, \ldots, 2^{j_c} - 1 \\ d^{oj}_{mn} = s^{oj}_{mn} + \varepsilon_{mn} & j = J_c, \ldots J-1; m, n = 0, \ldots, 2^j - 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

Où nous notons a_{mn} (resp. c_{mn}) Le coefficient d’approximation de la DWT de l’image *g* (resp. *y*) à la position *(m, n)* et s_{mn}^{oj} (resp. d_{mn}^{oj}) Le coefficient de détail de la DWT de l’image *g* (resp. *y*) à la position *(m, n)*, l’´echelle *j* et l’orientation *o*. Un exemple d’application de la DWT sur une image test est illustré par la figure (4.7). Du fait du caractère orthogonal de la transformée en ondelettes, les coefficients ε_{mn} sont des variables aléatoires indépendantes $N(0,\sigma^2)$ qui définissent aussi un bruit blanc gaussien.



(a) Image test *(b) Décomposition à 2 échelles*

Figure 4.7 Application de la transformée d’ondelettes séparable 2D sur une image IRM.

4.3.2 Débruitage d’une image

Les approches de débruitage classique sont des approches basées sur une sélection judicieuse des coefficients d’image coefficient par coefficient. Du fait du caractère creux des transformées multi-échelles [Mallat, 1999], nous pouvons supposer de façon intuitive que seuls quelques coefficients de détail s_{mn}^{oj} ayant une valeur suffisamment élevée contribuent à l’image à recouvrer *g*, alors que les coefficients de faibles valeurs sont dus essentiellement au bruit qui contamine de façon uniforme tous les coefficients. Il est également recommandé de conserver les coefficients d’approximation c_{mn}. Ces derniers, relatifs aux composantes de basses fréquences, sont essentiellement caractéristiques du signal original.

Le diagramme suivant représente le processus complet de débruitage dans le domaine des transformées multi-échelles.

$$y \xrightarrow{\Phi^T} \left\{c_{mn}, d_{mn}^{oj}\right\} \xrightarrow{\textit{estimateur non linéaire } \delta_\lambda} \left\{c_{mn}, \delta_\lambda(d_{mn}^{oj})\right\} \xrightarrow{R} \hat{g}$$

Où Φ^T représente une transformée multi-échelle et *R* est l’opérateur de reconstruction. δ_λ est un opérateur non linéaire de type seuillage de coefficients, reposant sur la conservation en intégralité des coefficients c_{mn} et sur une sélection judicieuse des coefficients d_{mn}^{oj}. Les coefficients ayant été traités, le signal restauré est reconstruit par la transformée inverse.

4.3.3 Estimation du niveau de bruit

Dans la littérature, la majorité des méthodes de débruitage n'aborde que le cas de bruit blanc gaussien, plus simple à traiter, bien que, en situation de données réelles, il ne soit pas spécialement facile d'estimer le niveau de bruit σ_ε. Notons que le bruit poissonnien à forte intensité ou le bruit de mélange poissonnien-gaussien peut être stabilisé pour le ramener au cas gaussien. Avec une transformée discrète orthogonale en ondelettes, le bruit blanc se décompose en série de coefficients aléatoires normaux centrés et décorrélés ε_{mn} (Eq 4.15).

En utilisant des arguments de la statistique robuste, Donoho & Johnstone ont proposé une estimation de σ_ε dans le domaine des ondelettes [Donoho et al., 1995] en ne considérant que les coefficients de l'échelle de décomposition la plus fine. Le choix de l'échelle la plus fine repose sur l'hypothèse que les coefficients en ondelettes correspondants sont en grande majorité dus au bruit blanc. Une estimée de $\hat{\sigma}_\varepsilon$ est alors obtenue par un résultat classique en statistique robuste :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \frac{MAD(\{d_{mn}^{J-1}\})}{0.6745} \tag{4.16}$$

Où le MAD est la valeur médiane absolue des coefficients de détail de l'échelle la plus fine. Le facteur 0.6745 est choisi après une calibration avec une distribution gaussienne. Cet estimateur très robuste est également très populaire pour le débruitage multi-échelle.

4.3.4 Estimateurs par seuillage d'ondelettes

Durant les années 90, Donoho & Johnstone ont proposé un estimateur non-linéaire de g reposant sur la conservation en intégralité des coefficients c_{mn} et sur une sélection judicieuse des coefficients d_{mn}^{oj} [Donoho et al., 1995], [Donoho & Johnstone, 1994], [Donoho & Johnstone, 1995]. Ces auteurs suggèrent l'extraction des coefficients de détail significatifs par comparaison de ces derniers avec un paramètre de seuillage λ > 0 dont le choix est décrit ultérieurement. Les fonctions de seuillage résultantes, se déclinent sous deux formes, seuillage dur (noté H, figure 4.8 (a)) et seuillage doux (noté S, figure 4.8 (b)).

4.3.4.1 Seuillage dur ou "hard thresholding"

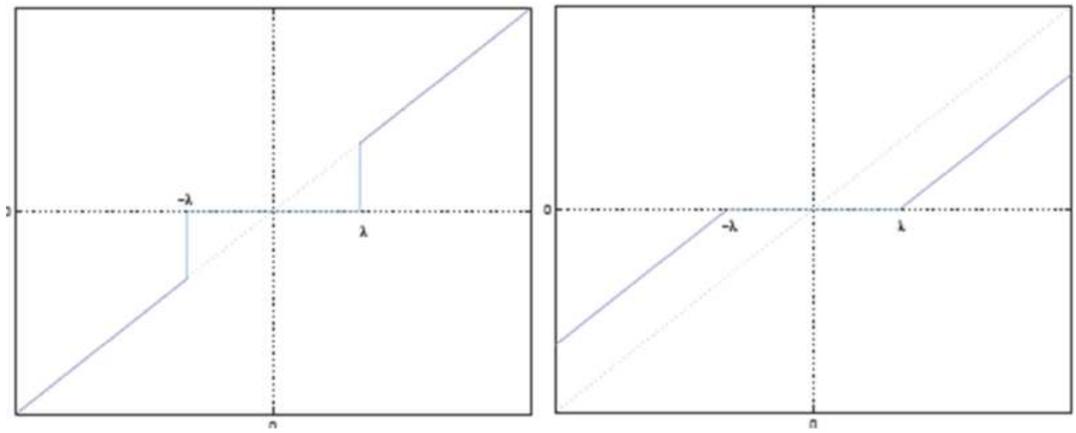
Le seuillage dur est celui qui est le plus "intuitif". On se fixe un seuil λ>0. On ne conserve que les coefficients d'ondelettes supérieurs à λ et on met à zéro les autres. [Donoho & Johonstone, 1994], [Donoho, 1995], [Mallat, 2000]. Pour un seuil λ choisi, La règle du seuillage est définie par :

$$\delta_\lambda^H(d_{mn}^{oj}) = \begin{cases} 0 & si \ \left|d_{mn}^{oj}\right| \le \lambda \\ d_{mn}^{oj} & si \ \left|d_{mn}^{oj}\right| > \lambda \end{cases} \tag{4.17}$$

4.3.4.2 Seuillage doux ou "soft thresholding"

Le seuillage doux conduit à mettre à zéro les valeurs de coefficients qui sont plus petites que le seuil λ et à ne conserver que ce qui dépasse le seuil pour les autres coefficients. [Donoho & Johonstone, 1994], [Donoho, 1995], [Mallat, 2000]. Il est défini par la règle suivante :

$$\delta_{\lambda}^{S}(d_{mn}^{oj}) = \begin{cases} 0 & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| \le \lambda \\ d_{mn}^{oj} - sign(d_{mn}^{oj})\lambda & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| > \lambda \end{cases} \tag{4.18}$$



(a) Seuillage dur *(b) Seuillage doux*

Figure 4.8 Estimateurs par seuillage d'ondelettes.

4.3.5 Autres variantes

Plusieurs méthodes ont été proposées afin de trouver un compromis entre le seuillage dur et le seuillage doux [Gao & Bruce, 1997], [Gao, 1998], [Vidakovic, 1999], [Antoniadis et al., 2001]. Chacune des fonctions d'estimation citées précédemment est dépendante du choix du seuil λ.

4.3.5.1 Seuillage Firm

L'estimateur de seuillage de loi Firm proposée par Gao & Bruce [Gao & Bruce, 1997] évite la discontinuité du seuillage dur et le biais d'estimation du seuillage doux, et se place comme cas intermédiaire entre les deux. Il est défini de la manière suivante

$$\delta_{\lambda 1,\lambda 2}^{F}(d_{mn}^{oj}) = \begin{cases} 0 & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| \le \lambda_1 \\ sign(d_{mn}^{oj})\dfrac{\lambda_2(\left|d_{mn}^{oj}\right| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & si \quad \lambda_1 < \left|d_{mn}^{oj}\right| \le \lambda_2 \\ d_{mn}^{oj} & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| > \lambda_2 \end{cases} \tag{4.19}$$

Le seuillage firm groupe les avantages du seuillage dur et doux, mais l'inconvénient de la fonction de seuillage firm qu'elle exige deux seuils. Cela alourdit d'avantage les procédures du choix de seuil [Gao, 1998].

4.3.5.2 Seuillage non négative garrote

Afin de pallier le problème de l'estimateur précédent concernant le choix de deux seuils, Gao [Gao, 1998] propose le seuillage 'non négative garrote' qui conserve les avantages de la loi précédente tout en ne nécessitant que le choix d'un seul seuil. Le seuillage non négative garrote est défini par :

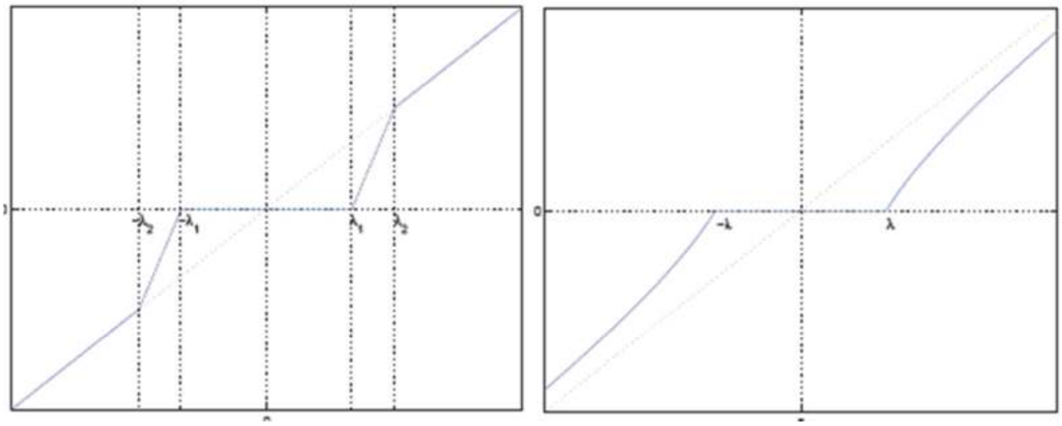
$$\delta_\lambda^G(d_{mn}^{oj}) = \begin{cases} 0 & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| \le \lambda \\ d_{mn}^{oj} - \dfrac{\lambda^2}{d_{mn}^{oj}} & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| > \lambda \end{cases} \tag{4.20}$$

4.3.5.3 Seuillage SCAD

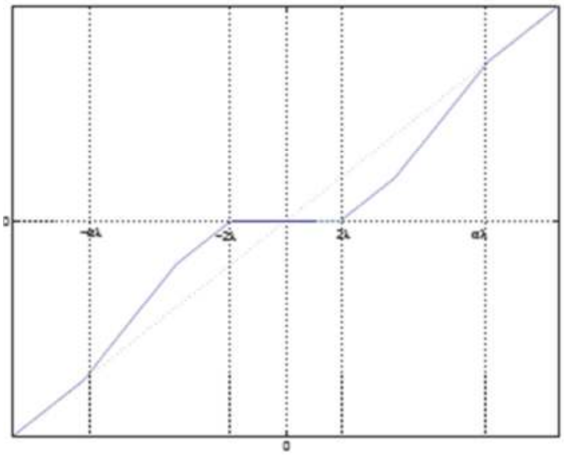
Dans le même sens, Antoniadis & Fan [Antoniadis et al., 2001] ont proposé le seuillage SCAD dont la règle de seuillage est définie comme suit :

$$\delta_\lambda^{SCAD}(d_{mn}^{oj}) = \begin{cases} sign(d_{mn}^{oj})\max(0,\left|d_{mn}^{oj}\right| - \lambda) & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| \le 2\lambda \\ \dfrac{(\alpha-1)d_{mn}^{oj} - \alpha\cdot\lambda\cdot sign(d_{mn}^{oj})}{\alpha-2} & si \quad 2\lambda < \left|d_{mn}^{oj}\right| \le \alpha\lambda \\ d_{mn}^{oj} & si \quad \left|d_{mn}^{oj}\right| > \alpha\lambda \end{cases} \tag{4.21}$$

Où $\alpha = 3.7$ (recommandé par Antoniadis & Fan).



(a) Seuillage firm *(b) Seuillage Non négative garrote*



(c) Seuillage SCAD

Figure 4.9 Autres variantes des estimateurs par seuillage d’ondelettes.

4.3.5.4 Seuillage neuronal (THRESHOLDING NEURAL NETWORK)

Xiao-Ping Zhang a proposé dans [Zhang, 2001] un nouveau type de seuillage (TNN) pour atteindre une réduction du bruit. La structure du TNN est montrée dans la figure (4.10).

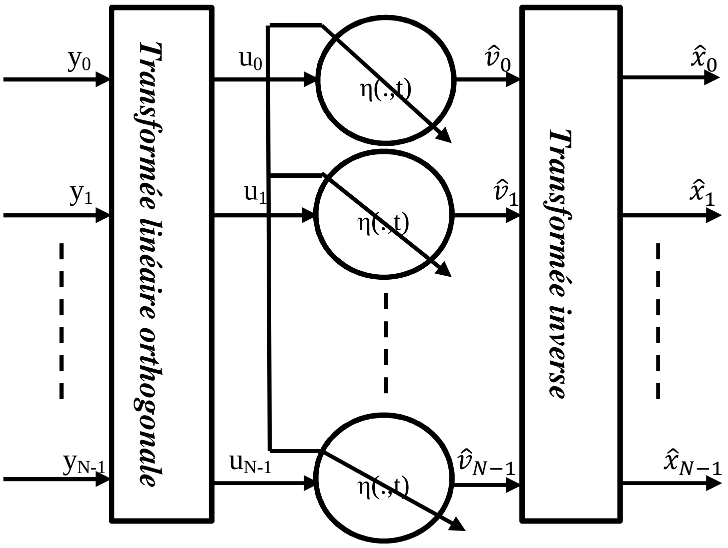


Figure 4.10 La structure du seuillage neuronal (TNN).

Les entrées du TNN sont des échantillons du signal bruité, $y_i = x_i + n_i$, $i = 0, 1,\ldots, N-1$, où x est le vrai signal et n est un bruit additif.

La transformée utilisée en TNNs est une transformation linéaire orthogonale. Il est également intéressant de souligner le terme «réseaux de neurones» parce qu'il y a une différence entre le TNN et les réseaux de neurones multicouches classiques. En TNNs, on utilise une transformation linéaire fixe et une fonction d'activation non linéaire adaptative, alors que dans les réseaux de neurone conventionnels, la fonction d'activation est fixe et les poids des connexions d'échantillons du signal d'entrée sont adaptatifs. En revanche, nous utilisons ce terme «réseau neuronal» parce que le TNN a quelques éléments de base similaire à un réseau de neurone conventionnel ex : les interconnexions des échantillons du signal d'entrée, les fonctions d'activation non linéaire, et l'adaptabilité à une entrée spécifique, etc.

4.3.5.4.1 Seuillage neuronal dur

La nouvelle fonction du seuillage dur est motivée par la fonction sigmoïdale [Haykin, 1999], elle est définie par :

$$\delta_{\lambda}^{HTNN}(d_{mn}^{oj}) = \left(\frac{1}{1+\exp\left\{\dfrac{-d_{mn}^{oj}+\lambda}{\mu}\right\}} - \frac{1}{1+\exp\left\{\dfrac{-d_{mn}^{oj}-\lambda}{\mu}\right\}} + 1 \right) \cdot d_{mn}^{oj} \tag{4.22}$$

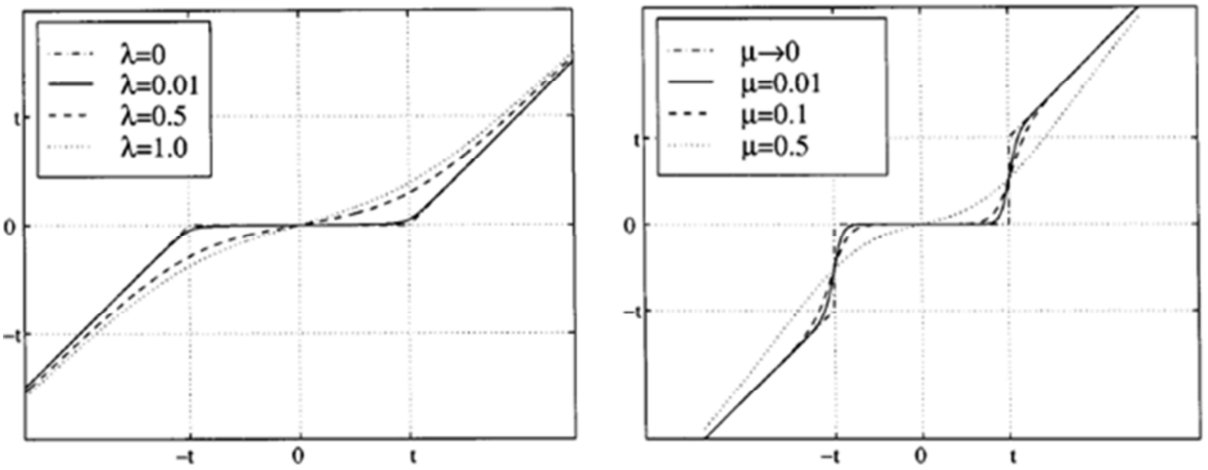
Où λ est le seuil et u est un paramètre fixe défini par l'utilisateur.

4.3.5.4.2 Seuillage neuronal doux

La nouvelle fonction du seuillage doux est définie de la manière suivante :

$$\delta_{\lambda}^{STNN}(d_{mn}^{oj}) = d_{mn}^{oj} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{(d_{mn}^{oj} - \lambda 1)^2 + \lambda} - \sqrt{(d_{mn}^{oj} + \lambda 1)^2 + \lambda}\right) \tag{4.23}$$

Où $\lambda 1$ est le seuil et λ est un paramètre fixe défini par l'utilisateur.



(a) Seuillage neuronal doux *(b) seuillage neuronal dur*

Figure 4.11 Seuillage neuronal dur et doux.

4.3.6 Choix du seuil

Il existe de nombreuses méthodes permettant de déterminer la valeur du seuil, les plus utilisées sont proposées par Donoho & Johnstone dans [Donoho & Johnstone, 1994] sous le nom du seuil minimax et seuil universel.

4.3.6.1 Seuil minimax

Donoho & Johnstone ont proposé le seuillage minimax qui applique un seuil optimal (au sens minimax) [Donoho & Johnstone, 1994]. Le seuil minimax dépend de la taille de l'échantillon, et est choisi de manière à minimiser le risque maximum [Coifman & Donoho, 1995]. En d'autres termes, le seuil minimax est défini de la manière suivante :

$$\lambda^{M} = \hat{\sigma}_{\varepsilon} \lambda_{N}^{*} \tag{4.24}$$

Où λ_N^* est correspond à la valeur de λ vérifiant

$$\lambda_{N}^{*} = \inf_{\lambda} \sup_{d_{mn}^{oj}} \left(\frac{R_{\lambda}(d_{mn}^{oj})}{N^{-2} + R_{oracle}(d_{mn}^{oj})} \right) \tag{4.25}$$

Avec $R_{\lambda}(d_{mn}^{oj}) = \mathrm{E}[\delta_{\lambda}(d_{mn}^{oj}) - d_{mn}^{oj}]^2$ et $R_{oracle}(d_{mn}^{oj})$ est le risque optimal obtenu à l'aide d'un oracle, qui simplifie l'estimation en fournissant de l'information normalement disponible sur l'image. Donoho & Johnstone considèrent deux oracles [Donoho & Johnstone, 1994]: le DLP (en anglais Diagonal Linear Projection), faisant intervenir un opérateur diagonal réalisant une projection linéaire et aboutissant à une décision de type « kill or keep », et le DLS (en anglais Diagonal Linear Shrinker), oracle définissant le facteur d'atténuation à appliquer à chacun des coefficients de détail d'ondelettes.

4.3.6.2 Seuil universel

Une alternative à l'utilisation du seuil minimax a été proposée par Donoho & Johnstone [Donoho & Johnstone, 1994]. Elle repose sur l'utilisation d'une valeur de seuil universel :

$$\lambda^U = \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{2 \cdot \log(N^2)} \qquad (4.26)$$

Où N^2 est la taille du signal en nombre d'échantillons. Une autre valeur de seuil universel a été longtemps utilisée dans la communauté astronomique : $\lambda^U \cong 3 - 4\hat{\sigma}_\varepsilon$ pour $N \simeq 256$ [Starck et al., 2002].

Le seuillage universel est substantiellement plus important que celui obtenu au sens minimax, mais s'avère aisément imprésentable. Aussi, un nombre plus limité de coefficients est employé lors de la reconstruction ce qui a pour effet de lisser le signal en sortie par rapport au cas minimax d'où un biais d'estimation plus élevé. Il est de loin le plus répandu dans la communauté de traitement du signal et des images.

Notons qu'il existe d'autre type de seuil tel que :

1. SureShrink [Donoho & Johnstone, 1995];
2. Test d'hypothèses simples et multiples [Abramovich & Benjamini, 1995] ;
3. Test d'hypothèses récursives [Ogden & Parzen, 1996] ;
4. Validation croisée [Jansen et al., 1997], [Nason, 1994, 1996] ;
5. Seuillage invariant par translation [Coifman & Donoho, 1995] ;

4.4 Résultats du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes

Notre analyse est effectuée en deux étapes :

Etape 1 : Choix de l'ondelette adéquate et le niveau de décomposition convenable. Ce choix s'effectue comme suit :

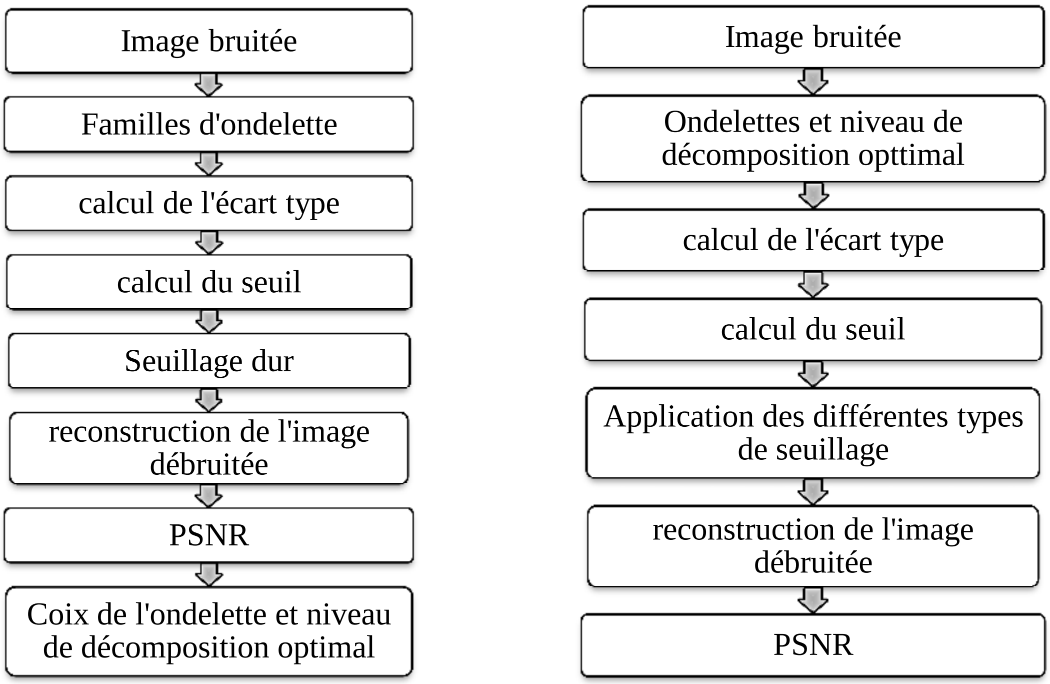
1. Chaque famille d'ondelette est constituée d'ondelettes ;
2. Chaque ondelette permet dix niveaux de décomposition de l'image ;
3. Pour chaque niveau de décomposition, on détermine l'écart type et le seuil, puis on applique un seuillage dur, ensuite on fait une reconstruction de l'image et on calcule le PSNR ;
4. Le choix est alors basé sur le PSNR le plus élevé.

Etape 2 : Application des différents types de seuillage (doux, NNG, SCAD…) sur les ondelettes choisis.

1. Pour chaque niveau et ondelette choisi dans l'étape précédente, on calcule l'écart type et le seuil ;
2. On applique ensuite les différentes techniques de seuillage (doux, NNG, SCAD…) ;

3. Reconstruction de l'image débruitée ;
4. Pour chaque type de seuillage, on calcule le PSNR.

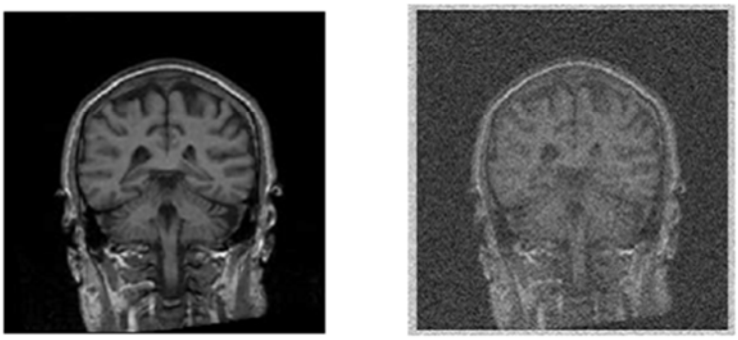
Ces étapes sont résumées dans l'organigramme suivant :



(a) Première Etape *(b) Deuxième partie*

Organigramme 4.1 L'algorithme de débruitage utilisé.

Les résultats sont présentés sur une image IRM bruitée de taille 353×359 (Figure 4.12) avec un bruit blanc gaussien (σ = 10). Le bruit est important mais visuellement, les informations principales de l'image originale sont conservées.



(a) Image original 353×359 *(b) Image bruitée PSNR=68.1182*

Figure 4.12 L'image originale et l'image bruitée simulée en ajoutant un bruit blanc gaussien.

Nous présentons les résultats par simulation sous matlab 7.10.0.

Les familles d’ondelettes analysantes utilisées sont présentées dans le Tableau (4.1)

Famille d’ondelettes orthogonales	Famille d’ondelettes biorthogonales
Haar(haar) Daubechies (db…) Symelet (sym…) Coiflet(coif…) Meyer discrète (dmey)	Biorthogonal (bior…) Biorthogonal reversible (rbior…)

Tableau 4.1 Ondelettes analysantes utilisées

4.4.1 Choix de l’ondelette analysante et niveau de décomposition

Dans le cadre d’un seuillage dur (Hard) et un seuil universel, nous décrivons la variation du PSNR en fonction du niveau de décomposition pour chaque famille d’ondelette. L’ondelette analysante choisie sera celle qui présentera le plus grand PSNR. Ceci permettra d’établir, à la fois l’ondelette analysante optimale, et de choisir le niveau de décomposition convenable.

4.4.1.1 Résultats avec l’utilisation de l’ondelette de Haar

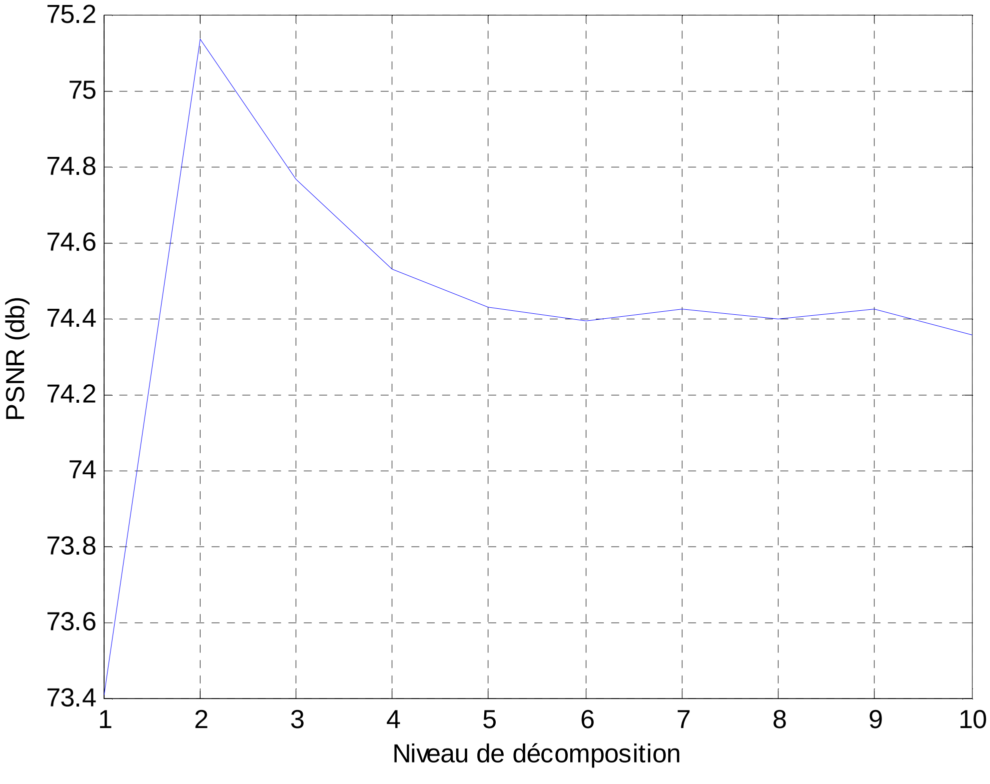


Figure 4.13 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant l’ondelette de Haar.

D’après cette courbe, le niveau de décomposition *« 2 »* permet d’obtenir le PSNR le plus élevé (PSNR = 75.1800).

4.4.1.2 Résultats avec l'utilisation de l'ondelette de Daubechies

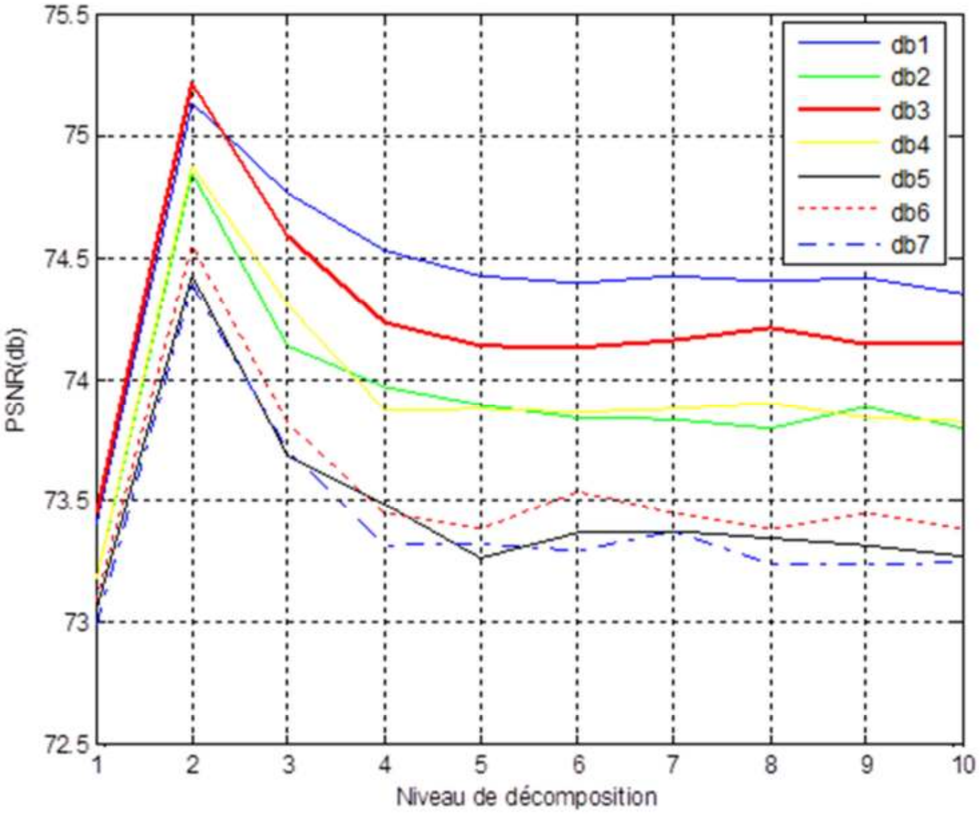


Figure 4.14 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant différentes ondelettes (db1, db2, db3, …..db7) et un seuillage dur.

Une observation de ces courbes permet de constater que l'ondelette *« db3 »* peut être considérée comme étant l'ondelette adéquate d'analyse, car elle fait apparaître clairement le plus grand PSNR. On revanche, le niveau de décomposition pour obtenir un PSNR maximal est *« 2 »* (PSNR=75.2586), ceci s'explique par le fait qu'une augmentation du niveau de décomposition correspond à un lissage de l'approximation c'est-à-dire à un filtrage passe bas. Si le niveau de décomposition dépasse ces valeurs, l'image débruitée devient trop lisse ou floue.

4.4.1.3 Résultats avec l'utilisation de l'ondelette de Symelet

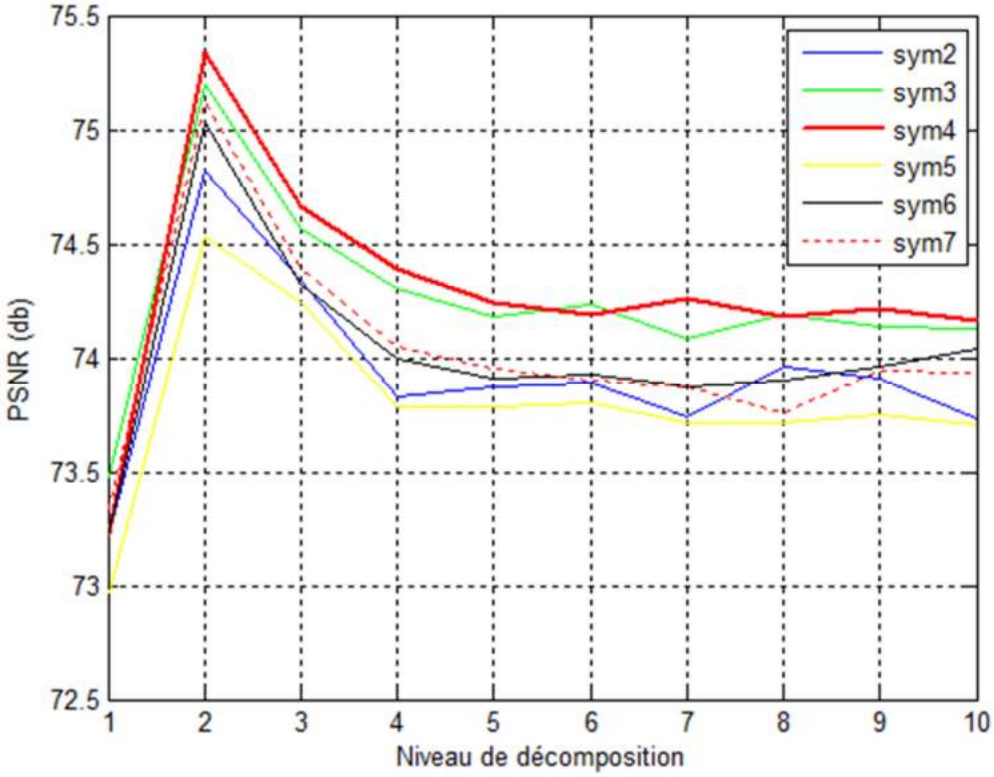


Figure 4.15 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant différentes ondelettes (Sym2, Sym3,……..Sym7) et un seuillage dur.

Ces courbes décrivent la variation du PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant des ondelettes issues de la famille de *Symelet.* A partir des résultats présentés à la figure (4.15), on recommande l'ondelette *« Sym4 »* comme étant l'ondelette adéquate pour notre analyse. Le niveau de décomposition *« 2 »* permet d'obtenir le plus grand PSNR. (PSNR=75.3317).

4.4.1.4 Résultats avec l’utilisation de l’ondelette de coiflet

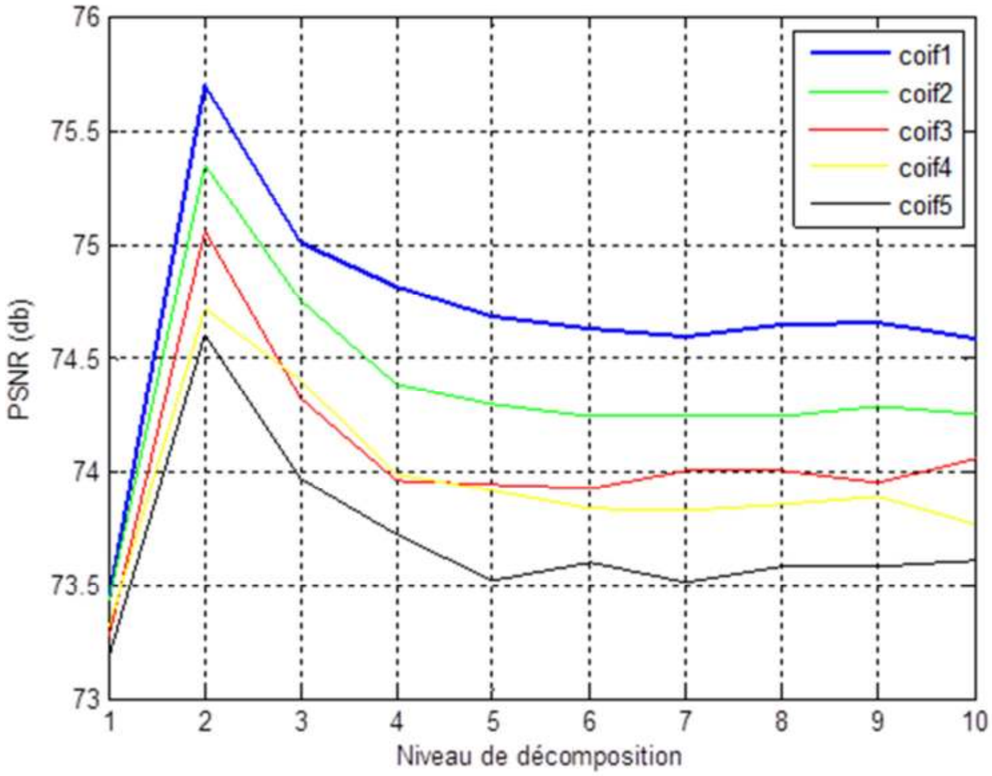


Figure 4.16 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant différentes ondelettes (Coif1, Coif2,…..Coif5) et un seuillage dur.

L’ondelette optimal qu’on va choisie est l’ondelette *« coif1 »* avec un niveau de décomposition « 2 ». Car elle présente le plus grand PSNR (PSNR=.75.6376).

4.4.1.5 Résultats avec l'utilisation de l'ondelette de Meyer discrète

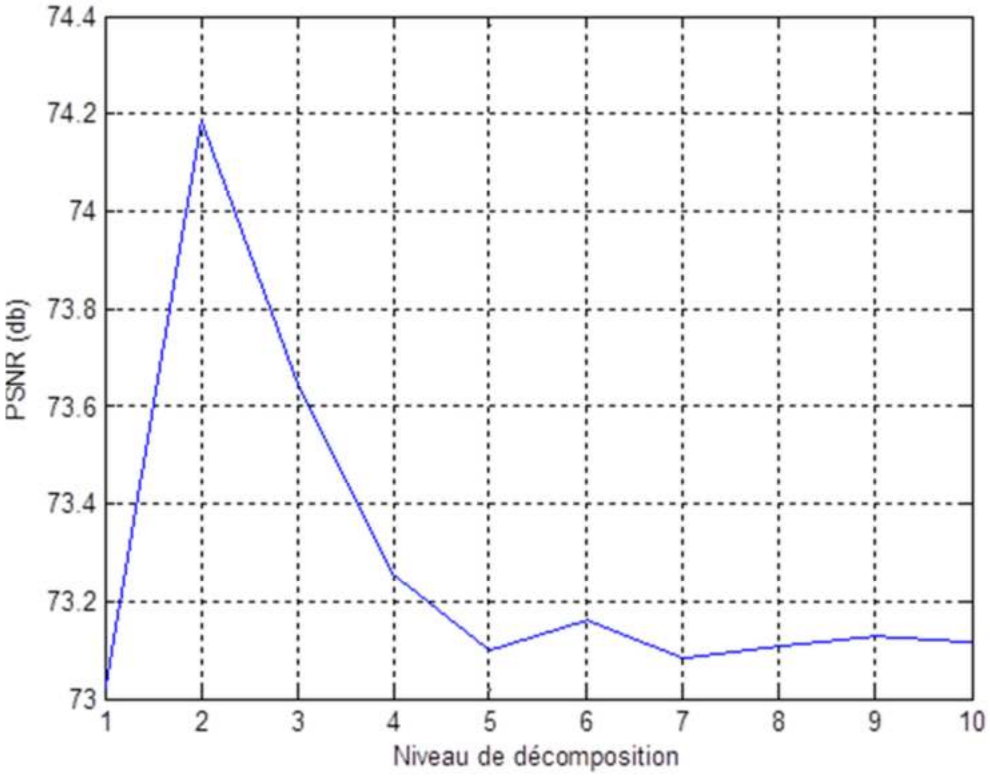


Figure 4.17 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant l'ondelette de Meyer discrète.

Il apparaît clairement que le niveau de décomposition *« 2 »* présente le plus grand PSNR (PSNR=74.1782).

4.4.1.6 Résultats avec l’utilisation de l’ondelette de Biorthogonal

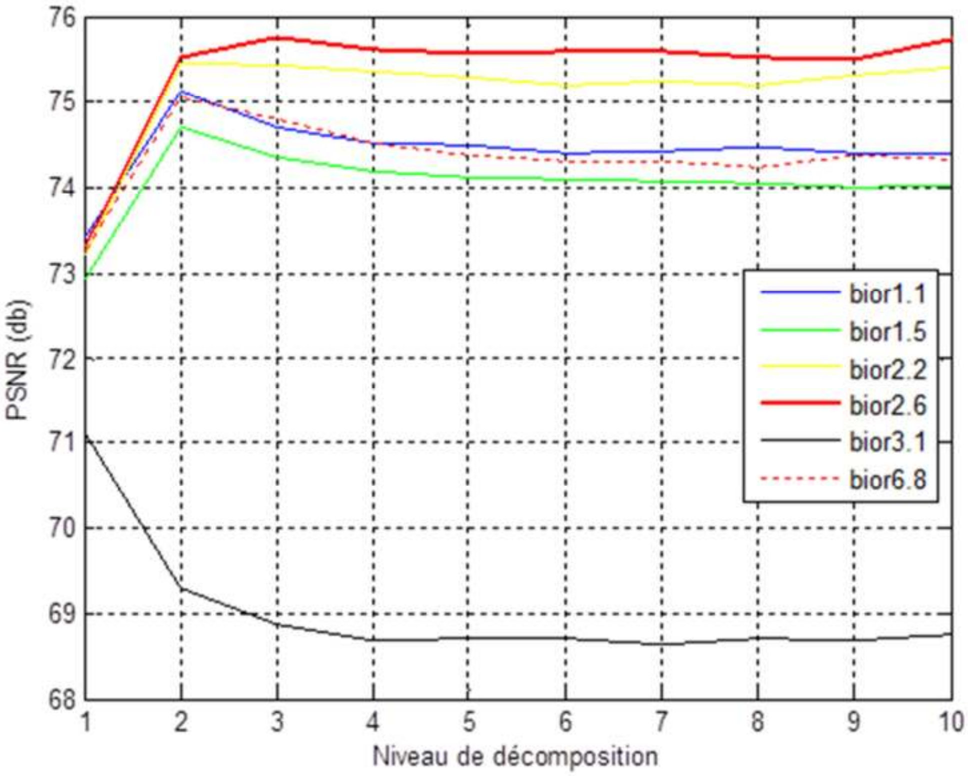


Figure 4.18 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant différentes ondelettes (bior1.1,……….bior6.8) et un seuillage dur.

D’après ces courbes, l’ondelette optimale est l’ondelette *« bior2.6 »* pour un niveau de décomposition égale à *« 3 »*, (PSNR=75.7213).

4.4.1.7 Résultats avec l'utilisation de l'ondelette de Biorthogonal réversible

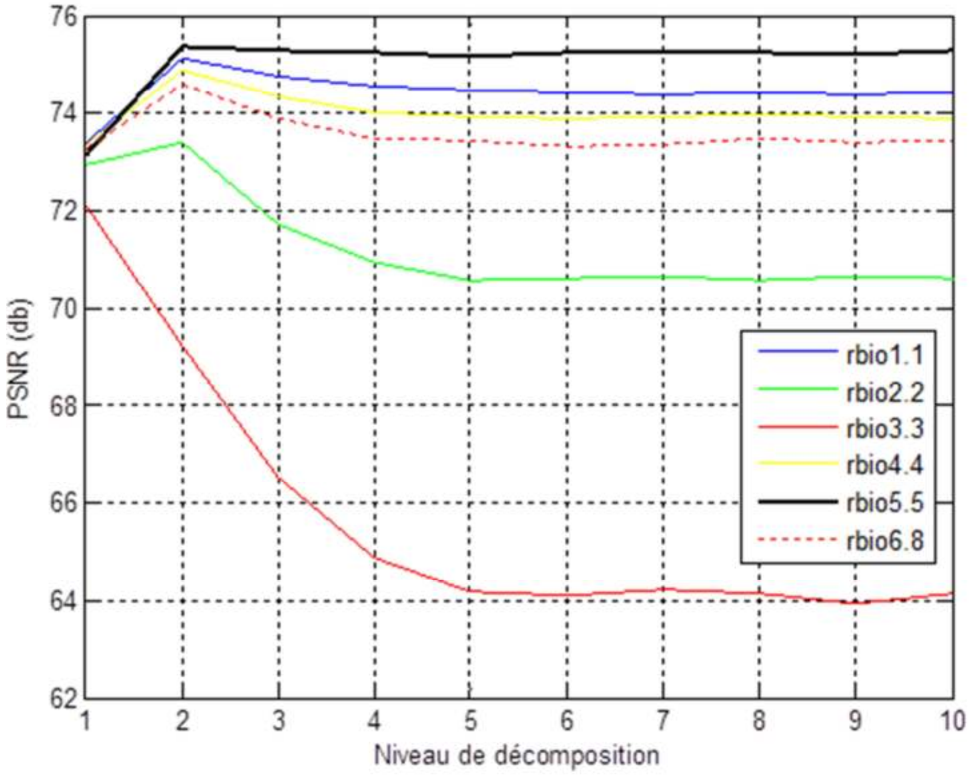


Figure 4.19 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant différentes ondelettes (rbio1.1,……….rbio6.8) et un seuillage dur.

Les courbes obtenues dans la figure (4.19) indique que l'ondelette « *rbio5.5* » représente l'ondelette appropriée pour notre analyse. En outre il apparaît que le niveau de décomposition « *2* » présente le plus grand PSNR, (PSNR= 75.3355).

A partir des résultats présentés dans les Figures (4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19), on dresse le Tableau (4.2) qui regroupe les meilleurs résultats obtenus pour les familles d'ondelettes étudiées avec un seuillage dur et un seuil universel.

Famille d'ondelette	*Ondelettes optimales*	*Niveau de décomposition convenable*	*PSNR*
Haar	Haar	2	75.1800
Meyer discrète	Meyer discrète	2	74.1782
Daubechies	db3	2	75.2586
Symelet	sym4	2	75.3317
Coiflet	coif1	2	75.6376
Ondelette biorthogonale	bior2.6	3	75.7213
Ondelette biorthogonale réversible	bio5.5	2	75.3355

Tableau 4.2 Ondelettes optimales et niveau de décomposition convenable.

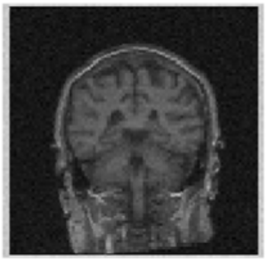
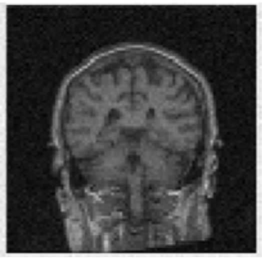
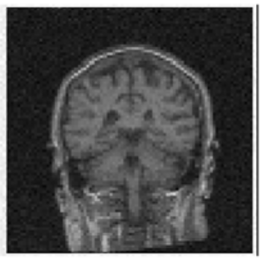
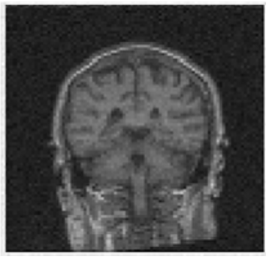
Le travail effectué ci-dessus, nous a permis de trouver et de choisir l'ondelette optimale et le niveau de décomposition convenable pour chaque famille d'ondelette.

4.4.2 Application des différents types de seuillage

Dans la partie précédente, nous avons utilisé un seul type de seuillage (seuillage dur) pour choisir le type d'ondelette et le niveau de décomposition optimal. En revanche, dans cette partie, nous allons appliquer d'autres types de seuillages (doux, NNG, SCAD, TNN), en tenant compte des choix effectués dans l'étape précédente.

4.4.2.1 L'ondelette de Haar

Pour un niveau de décomposition égale à *« 2 »* nous avons obtenus les résultats suivants :

Seuillage dur	*Seuillage doux*	*Seuillage NNG*	*Seuillage SCAD*
			
PSNR : 75.1800	*PSNR : 73.8683*	*PSNR : NAN*	*PSNR : 74.1958*

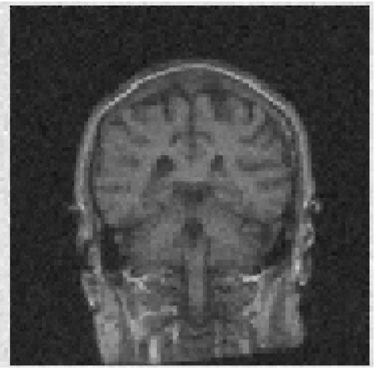
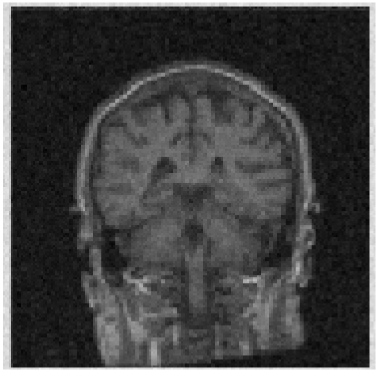
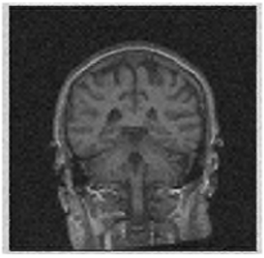
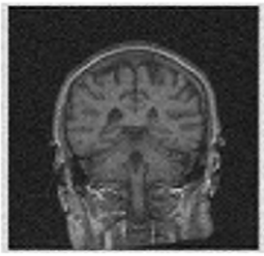
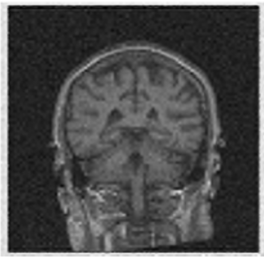
Seuillage neuronal dur	*Seuillage neuronal doux*
	
PSNR : 75.7234	*PSNR : 74.2426*

Figure 4.20 Résultat de l'application des différents types de seuillage pour l'ondelette de Haar.

4.4.2.2 L'ondelette de Daubechie « db3 »

Nous utilisons l'ondelette *« db3 »* et un niveau de décomposition *« 2 »*. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (4.21).

Seuillage dur	*Seuillage doux*	*Seuillage NNG*	*Seuillage SCAD*
			
PSNR : 75.2586	*PSNR : 72.6655*	*PSNR : 73.7233*	*PSNR : 72.9099*

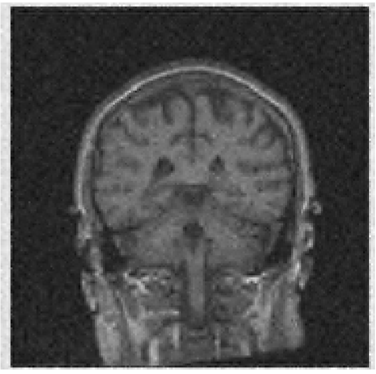
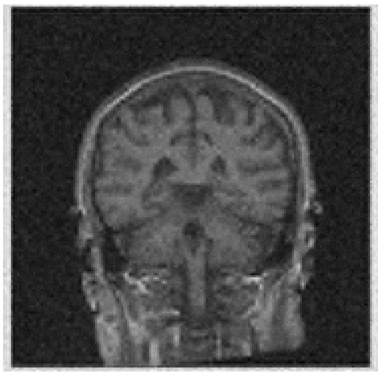
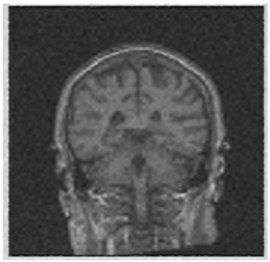
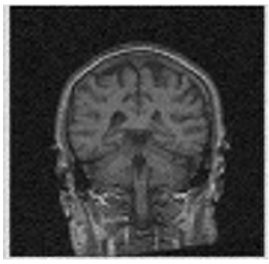
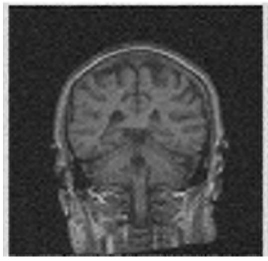
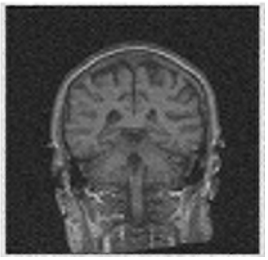
Seuillage neuronal dur	*Seuillage neuronal doux*
	
PSNR : 75.6522	*PSNR : 73.4772*

Figure 4.21 Résultat de l'application des différents types de seuillage pour l'ondelette de Daubechies « db3 ».

4.4.2.3 L'ondelette de Symelet « sym4 »

Pour les ondelettes de Symelet nous allons exploiter l'ondelette *« sym4 »* avec un niveau de décomposition *« 2 »*. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (4.22).

Seuillage dur	*Seuillage doux*	*Seuillage NNG*	*Seuillage SCAD*
			
PSNR : 75.3317	*PSNR : 73.2349*	*PSNR : 74.2224*	*PSNR : 73.3351*

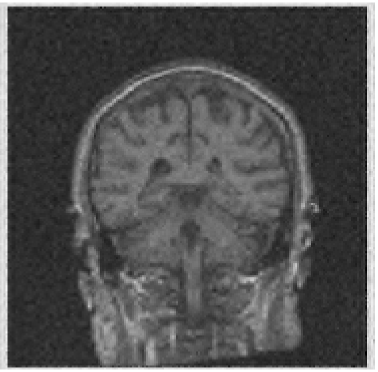
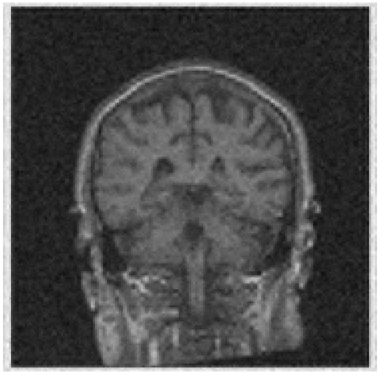
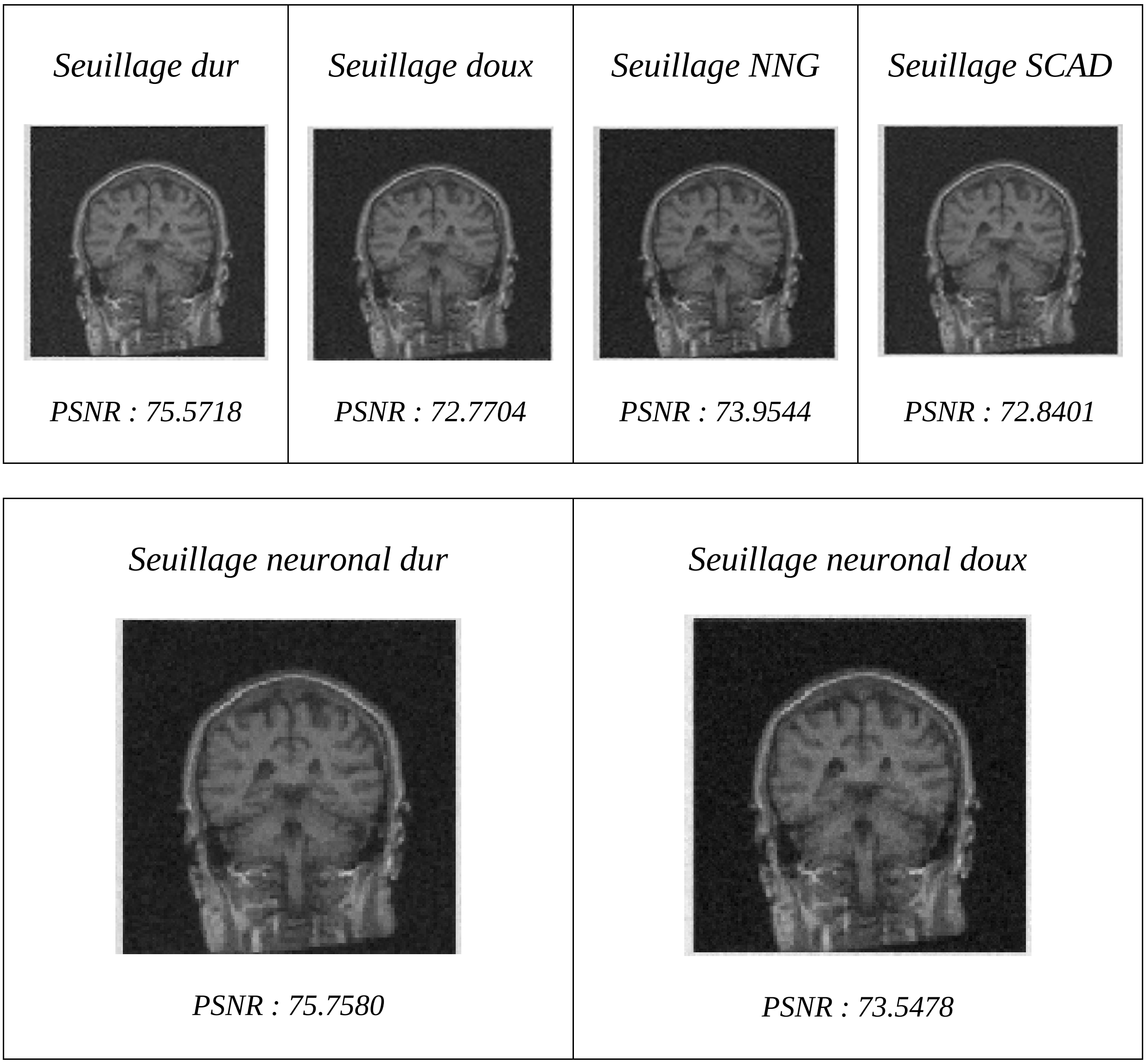
Seuillage neuronal dur	*Seuillage neuronal doux*
	
PSNR : 75.7436	*PSNR : 73.9580*

Figure 4.22 Résultat de l'application des différents types de seuillage pour l'ondelette de Symelet « sym4 ».

4.4.2.4 L'ondelette de Coiflet « coif1 »

Dans la famille de Coiflet nous allons employer l'ondelette *« coif1 »* et un niveau de décomposition égal à *« 2 »*. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (4.23).



Seuillage dur — *PSNR : 75.5718*

Seuillage doux — *PSNR : 72.7704*

Seuillage NNG — *PSNR : 73.9544*

Seuillage SCAD — *PSNR : 72.8401*

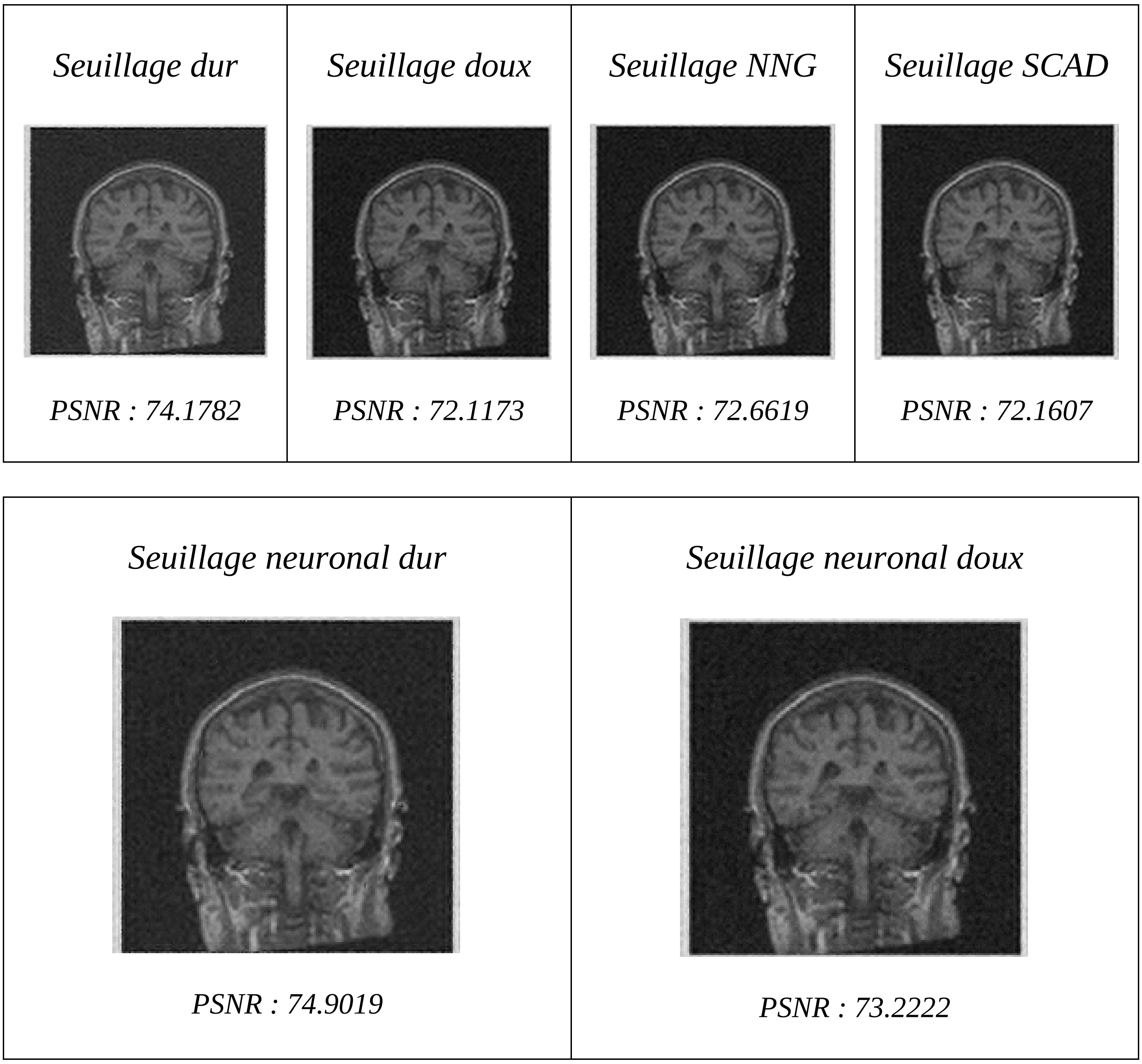
Seuillage neuronal dur — *PSNR : 75.7580*

Seuillage neuronal doux — *PSNR : 73.5478*

Figure 4.23 Résultat de l’application des différents types de seuillage pour l’ondelette de Coiflet « coif1 ».

4.4.2.5 L’ondelette de Meyer discrète

Le niveau de décomposition est de l’ordre de *« 2 »*. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (4.24).



Seuillage dur

PSNR : 74.1782

Seuillage doux

PSNR : 72.1173

Seuillage NNG

PSNR : 72.6619

Seuillage SCAD

PSNR : 72.1607

Seuillage neuronal dur

PSNR : 74.9019

Seuillage neuronal doux

PSNR : 73.2222

Figure 4.24 Résultat de l'application des différents types de seuillage pour l'ondelette de Meyer discrète.

4.4.2.6 L'ondelette biorthogonale « bior 2.6 »

Pour cette famille nous allons utiliser l'ondelette *« bior2.6 »* avec un niveau égal à *« 3 »*. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (4.25).

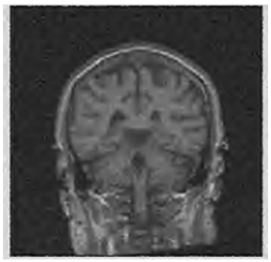
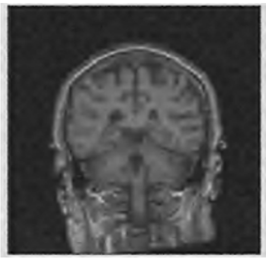
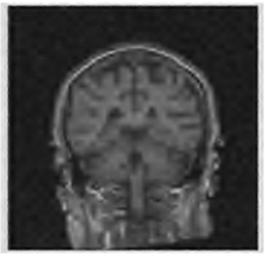
Seuillage dur	*Seuillage doux*	*Seuillage NNG*	*Seuillage SCAD*
			
PSNR : 75.7213	*PSNR : 72.6611*	*PSNR : 74.2153*	*PSNR : 73.0067*

Figure 4.25 Résultat de l'application des différents types de seuillage pour l'ondelette biorthogonale « bior 2.6 ».

Notons que les ondelettes biorthogonales ne supportent pas le seuillage TNN [Zhang, 2001].

4.4.2.7 L'ondelette biorthogonale réversible « rbio5.5 »

Nous allons adopter l'ondelette *« rbio5.5 »* et un niveau de décomposition *« 2 »*. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (4.26).

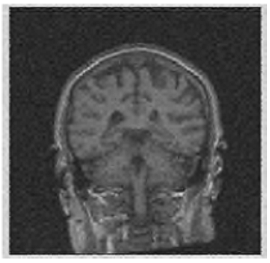
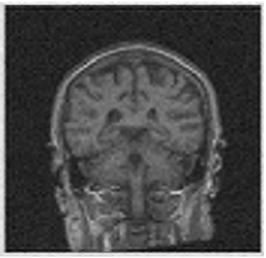
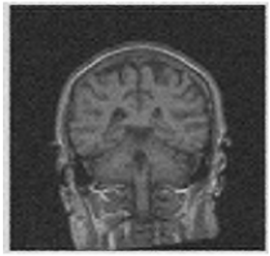
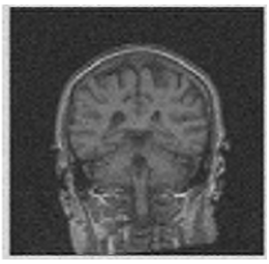
Seuillage dur	*Seuillage doux*	*Seuillage NNG*	*Seuillage SCAD*
			
PSNR : 75.3355	*PSNR : 72.8060*	*PSNR : 73.8182*	*PSNR : 72.9431*

Figure 4.26 Résultat de l'application des différents types de seuillage pour l'ondelette biorthogonale réversible « rbio5.5 ».

Bien que Les résultats sont très proches non seulement visuellement, mais aussi par rapport au paramètre de PSNR, il apparaît la supériorité du seuillage neuronale dur par rapport aux autres types de seuillage. Ceci grâce à la flexibilité de ça fonction d'activation. En revanche, malgré ces modestes résultats, le seuillage doux, NNG et SCAD présentent un grand lissage pour les images. Ils conduisent à une simplification progressive de l'image permettant d'obtenir des informations pour des traitements ultérieurs.

En fin d'après tous ces résultats nous venons de voir que le résultat de débruitage d'une image par seuillage des coefficients d'ondelettes, dépend du type de seuillage, du choix du seuil utilisé, de l'ondelette utilisée, le niveau de décomposition et aussi de l'écart type du bruit.

4.5 Modèle développé : Débruitage par ondelette fractionnaire

Notre modèle consiste à présenter un algorithme de débruitage qui fait appelle à une ondelette fractionnaire réunie avec une opération de seuillage.

4.5.1 Ondelette fractionnaire

L'idée est simple, comme nous savons que les ondelettes sont composées par des bancs de filtres passe-bas et passe-haut, alors on peut créer une ondelette fractionnaire à base des filtres d'ordres fractals. Pour être claire la transformée en ondelette discrète est représentée comme suit :

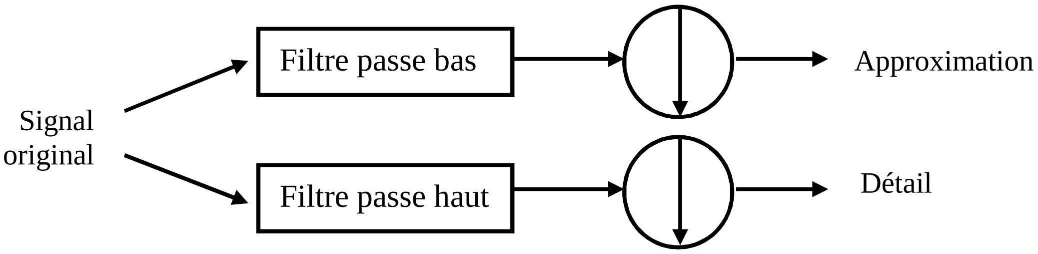


Figure 4.27 la transformée en ondelette discrète

Il suffit alors de remplacer ces filtres ordinaires (passe-bas et passe-haut) par des filtres fractionnaires (figure 4.28) c'est-à-dire des filtres qui ont des fonctions de transfert d'ordre fractal et on obtient alors une transformée en ondelette fractionnaire. Cependant, le comportement d'un filtre d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenants des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Le problème essentiel à résoudre est donc la définition de la fonction de transfert des filtres !

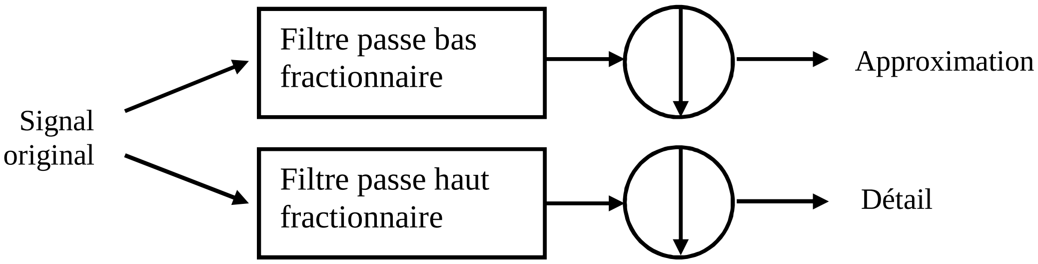


Figure 4.28 La transformée en ondelette fractionnaire

4.5.2 Fonction de transfert fractionnaire

En effet, il s'agit là d'un problème très complexe dont on n'a de solution que pour des architectures très particulières comme Les bancs de filtres en quinconce [Feilner et al., 2001]. On propose également certaine fonction de transfert d'ordre fractionnaire de type implicite d'un filtre passe-bas :

$$FT = \frac{1}{(1+s)^m} \tag{4.27}$$

Où m est l'ordre du système, et à chaque fois on ajoute un pôle ou on changera le degré du pôle ou bien on multiplie le pôle par un nombre réel en tous cas on cherchera souvent à minimiser, l'erreur quadratique moyenne entre le signal (image) analysé et le signal de synthèse.

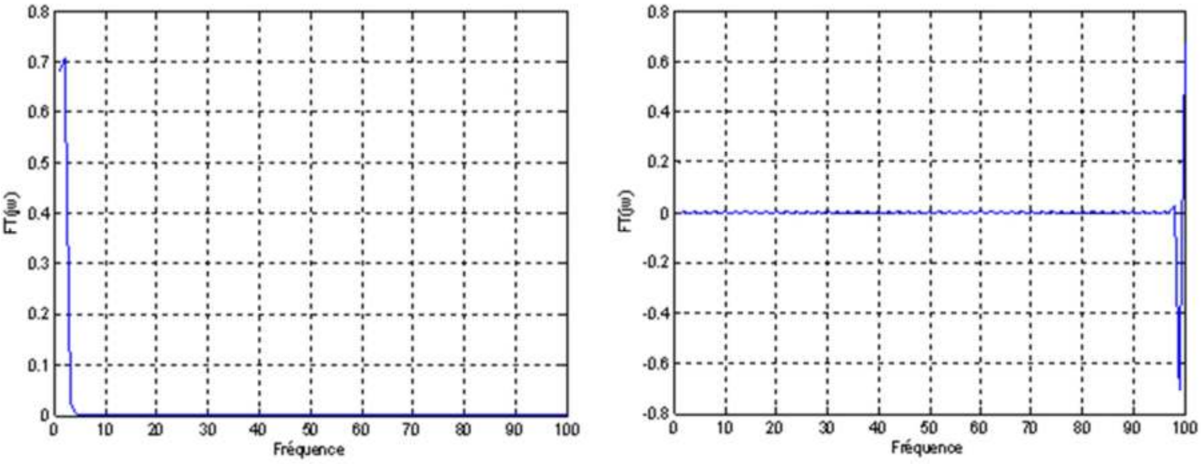
D'après plusieurs expériences nous avons obtenus la fonction de transfert suivante :

$$FT = \frac{1}{1{,}2+(0{,}9s)^{m1}-(0{,}4+s)^{m2}+(0{,}51+s)^{m3}} \tag{4.28}$$

Où : *m1=2,7*
m2=5,05
m3=1,91

Cependant, on peut mettre au point une formule donnant directement le filtre passe-haut à partir du passe-bas (Figure 4.29) :

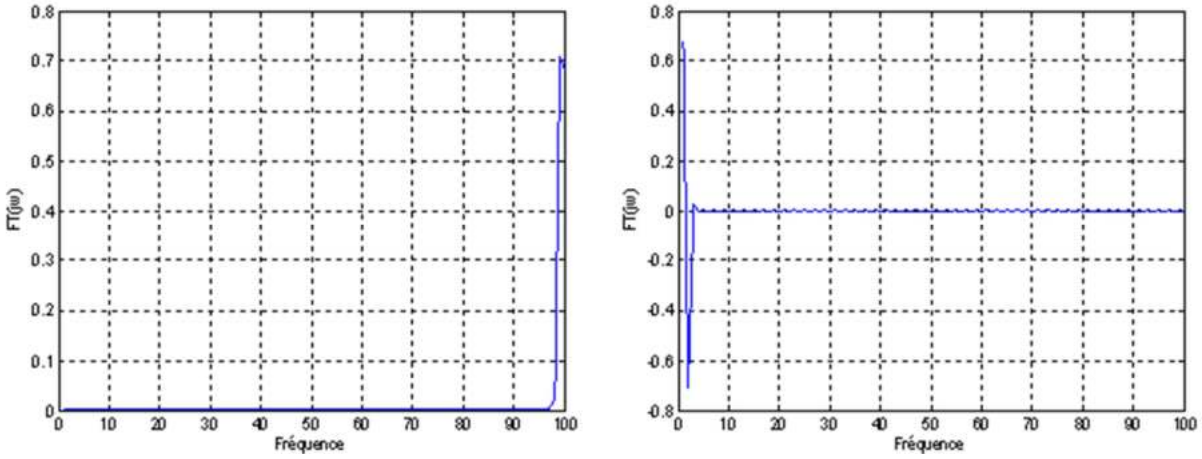
$$FT_{passe-haut} = FT_{passe-bas} \cdot (-1)^{i+1} \tag{4.29}$$



(a). Filtre passe-bas *(b). Filtre passe-haut*

Figure 4.29 Filtres de décompositions fractionnaires

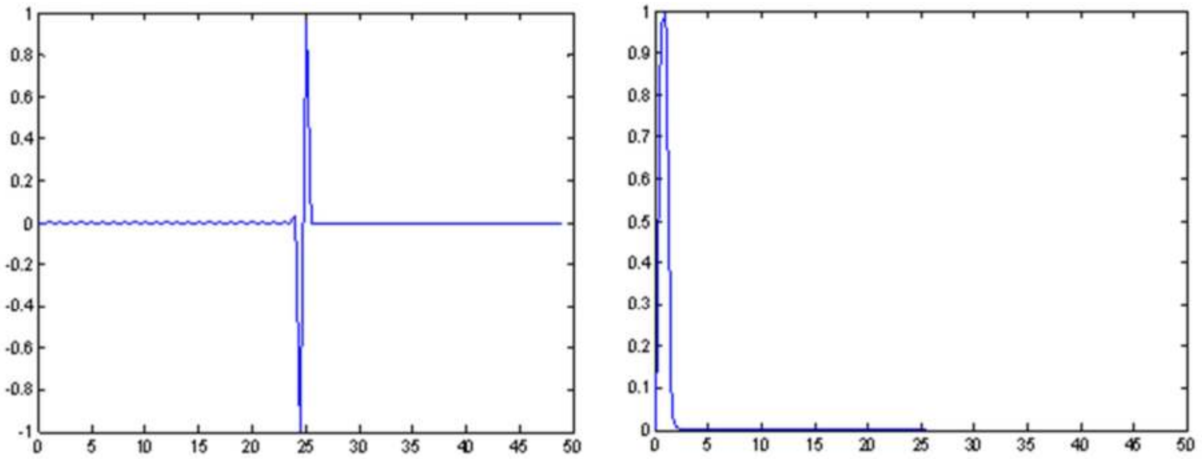
En revanche, les filtres de reconstructions passe-bas et passe-haut sont des filtres symétriques aux filtres de décomposition par rapport à un axe verticale. Ils sont définis par les courbes suivantes :



(c). Filtre passe-bas *(d). Filtre passe-haut*

Figure 4.30 Filtre de reconstruction fractionnaire

La combinaison de touts ces résultats avec l'opération de sous-échantillonnage [Feilner et al., 2001] nous conduit à reconstruire notre ondelette fractionnaire qui est représentée par les courbes suivantes :



(a) Fonction d'ondelette *(b) Fonction d'échelle*

Figure 4.31 Fonction d'ondelette et fonction d'échelle

4.6 Application et résultats

4.6.1 Choix du niveau de décomposition

Tout d'abord, nous allons choisir le niveau de décomposition qui présente un PSNR maximal. Pour cela nous avons appliqués un seuillage dur et un seuil universel sur notre ondelette. La variation du PSNR en fonction du niveau de décomposition est illustrée par la courbe suivante :

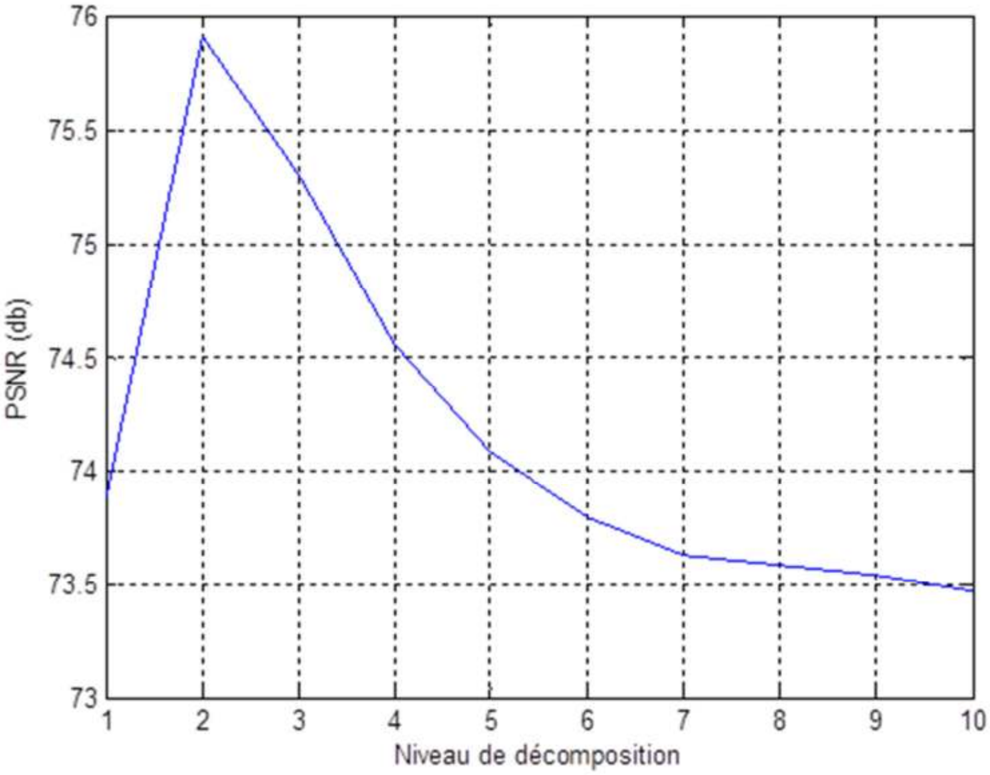
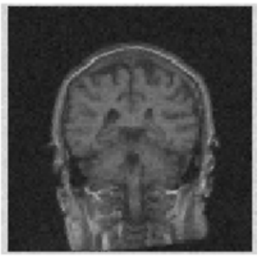
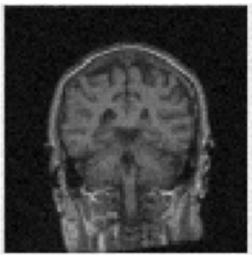
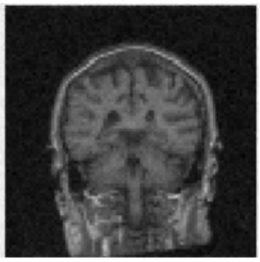
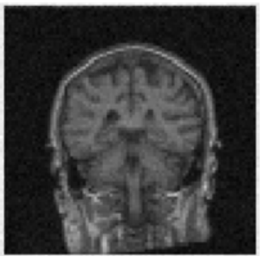


Figure 4.32 PSNR en fonction du niveau de décomposition en utilisant une ondelette Fractionnaire et un seuillage dur.

D'après cette courbe, il apparaît clairement que le niveau de décomposition *« 2 »* présente le plus grand PSNR (PSNR=75.7613).

4.6.2 Application des autres types de seuillage

Pour un seuil universel et un niveau de décomposition *« 2 »*, nous avons appliqués les différents type de seuillage. Les résultats obtenus sont les suivants :

Seuillage dur	*Seuillage doux*	*Seuillage NNG*	*Seuillage SCAD*
			
PSNR : 75.7613	*PSNR : 73.8730*	*PSNR : 74.8783*	*PSNR : 74.4118*

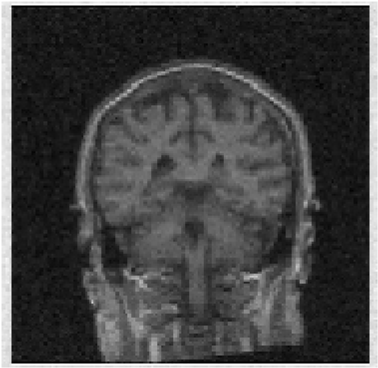
Seuillage neuronal dur	*Seuillage neuronal doux*
	
PSNR : 76.0201	*PSNR : 74.3461*

Figure 4.33 Résultat de l'application des différents types de seuillage pour l'ondelette fractionnaire

D'après la figure (4.33), on remarque que le seuillage neuronal dur présente le meilleur résultat.

Enfin, sur le plan d'une comparaison globale on peut extraire le tableau (4.3).

4.7 Comparaison des résultats

Dans le tableau (4.3) nous avons faire un récapitulatif qui regroupe les meilleurs résultats obtenus précédemment.

seuillages *ondelettes*	*Seuillage dur*	*Seuillage doux*	*Seuillage NNG*	*Seuillage SCAD*	*Seuillage neuronale dur*	*Seuillage neuronale doux*
Haar	75.1800	73.8683	NAN	74.1958	75.7234	74.2426
Daubechie « db3 »	75.2586	72.6655	73.7233	72.9099	75.6522	73.4772
Symelet « sym4 »	75.3317	73.2349	74.2224	73.3351	75.7436	73.9580
Coiflet « coif1 »	75.5718	72.7704	73.9544	72.8401	75.7580	73.5478
Meyer discrète	74.1782	72.1173	72.6619	72.1607	74.9019	73.2222
Biorthogonale « 2.6 »	75.6293	72.6611	74.2153	73.0067	Non autoriser	Non autoriser
Biorthogonale réversible « 5.5 »	75.3355	72.8060	73.8182	72.9431	Non autoriser	Non autoriser
Fractionnaire développer	75.7613	73.8730	74.8783	74.4118	76.0201	74.3461

Tableau 4.3 Résultats du PSNR obtenus par l'application des divers types de seuillage pour des familles d'ondelette différentes.

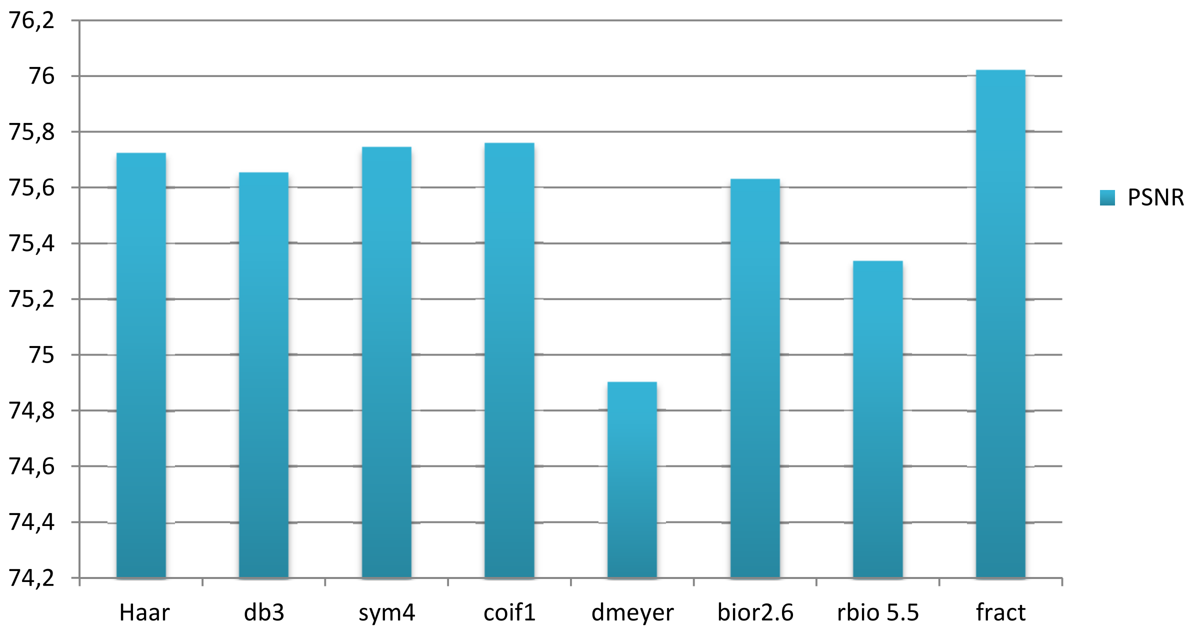


Figure 4.34 Résultats du meilleur PSNR obtenus par l'application des divers types de seuillage pour des familles d'ondelette différentes.

D'après la figure (4.34) nous pouvant remarquer clairement que notre modèle (ondelette fractionnaire) aboutit aux résultats les plus performants par rapport aux autres types d'ondelettes. Ceci grâce à la flexibilité des fonctions de transfert des filtres qui constitues l'ondelette fractionnaire.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés un rappel sur les ondelettes et leur application pour résoudre le problème de débruitage dans le domaine d’imagerie médicale. Plusieurs techniques de seuillage ont été appliquées afin de supprimer les bruits et améliorer la qualité d’image.

En revanche, grâce à l’analyse fractionnaire nous avons pu développer une ondelette fractionnaire qui présente un haut niveau de performances en comparaison avec ce qui est fait actuellement dans l’état de l’art. Nos résultats sont donc très encourageants.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème du débruitage qui a engendré d'importantes recherches en prétraitement des images. D'où l'idée de restaurer une image de bonne qualité à partir de sa version dégradée. Nous nous sommes focalisés sur le seuillage des coefficients d'ondelette comme solution au problème.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons effectué un état de l'art méthodique sur les différentes techniques d'imagerie médicale et les différents artefacts et bruit liée à ce type d'imagerie.

Dans la deuxième partie nous avons présentés un large panorama des méthodes permettant d'obtenir une restauration ou une amélioration des images. Chacune des approches présente des caractéristiques qui les rendent opérationnelle pour une certaine classe d'images. Nous avons énoncé ces caractéristiques et présenté, pour chaque méthode, son comportement général.

Dans la troisième partie, nous avons présentés les bases théoriques sur le calcul fractionnaire.

La quatrième partie de ce mémoire montrent que les algorithmes qui se base sur la transformée multi-échelle produisent des résultats intéressants par rapport à ce qui est fait actuellement dans l'état de l'art. Après, l'application de tels algorithmes, la structure de l'image est relativement bien conservée et le bruit bien réduit avec un temps de calcul raisonnable. Cependant, le résultat du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelette dépend du type de seuillage, du choix du seuil, de la base d'ondelette utilisés, ainsi le niveau de décomposition. Dans la dernière étape de ce travail, nous avons proposé une nouvelle famille d'ondelettes qui se base sur le calcul fractionnaire. L'évaluation de ce type d'ondelette montre qu'il produit des résultats meilleurs que ceux offerts par les ondelettes classiques. En effet, la flexibilité des filtres qui constitue l'ondelette nous a permet de réduire le bruit d'une manière élégante. Signalons, que les résultats des débruiteurs à base des ondelettes fractionnaires que nous avons développées, sont en cours de préparation pour publication.

Pour conclure, les algorithmes de débruitage à base de seuillage des coefficients d'ondelette que nous avons réalises, notamment ce lui qui ce base sur le calcul fractionnaire présente un bon niveau de performances en comparaison avec ce qui est fait actuellement dans l'état de l'art. Nos résultats sont satisfaisants.

Plusieurs voies peuvent être envisagées dans le sillage de ce travail. Tout d'abord, nous souhaitons étudier d'autre approche de débruitage dans le domaine multi-échelle comme l'approche bayèsienne qui se base sur des modèles statistiques adaptés à la modélisation des coefficients d'ondelette [Boubchir, 2007], ou les méthodes liées à d'autres transformées adaptatives comme les bandelets [LePennec & Mallat, 2005] ou la DCT adaptative [Foi et al., 2007]. Nous désirons aussi élargir notre étude sur des images de taille plus grande et des images 3D. Par ailleurs, des réflexions doivent être engagées pour savoir comment adapter les algorithmes de débruitage que nous avons proposés au problème de la déconvolution et à d'autres types de bruit. Nous envisageons aussi d'approfondir notre étude sur le débruitage dans le domaine multi-échelle avec plus d’une transformée. Plus précisément, sur la nécessité de prendre en compte la diversité morphologique des structures incluses dans une image, nous appliquons plusieurs transformées multi-échelle, chacune adaptée pour représenter de façon parcimonieuse une partie de l’image. Signalons que nous souhaitons étudier toutes ces perspectives sous l’approche fractionnaire.

Bibliographie

[Abramovich & Benjamini, 1995] Abramovich, F. & Benjamini, Y. (1995). *Thresholding of wavelet coefficients as multiple hypotheses testing procedure*. In Antoniadis, A. and Oppenheim, G., editors, Wavelets and Statistics, volume 103 of Lecture Notes in Statistics, (pp. 5–14).

[Achour et al., 2002] Karim Achour, Nadia Zenati, Oualid Djekoune. (2002). *Contribution à la restauration d'images par un modèle de réseau de neurones*. Laboratoire de Robotique et d'Intelligence artificielle, Equipe Vision Artificielle Centre de Développement des Technologies Avancées, ARIMA. Baba Hassen, Algérie. Vol.1, pp:15-38.

[Al-Alaoui, 1994] Al-Alaoui, M.A. (1994). *Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule,* IEEE Transactions on Circuits and Systems I. Fundamental Theory and Applications, 41 (2): 186-187.

[Atto, 2008] Abderrahmane Mahamane Atto. (2008). *Analyse en Ondelettes et par Paquets d'Ondelettes de Processus Aléatoires Stationnaires, et Application à l'Estimation Non-Paramétrique*. Thèse de doctorat**,** l'Université Européenne de Bretagne.

[Antoniadis et al., 2001] Antoniadis, A., Bigot, J., & Sapatinas, T. (2001). *Wavelet estimators in nonparametric regression: A comparative simulation study*. Journal of Statistical Software, 6(6): 1–83.

[Bauades et al., 2005] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel. (2005). A *review of image denoising algorithms, with a new one*. Multiscale Model. Simul., 4(2).

[Black et al., 1997] M. Black, G. Sapiro, D. Heeger. (1997). *Robust anisotropic diffusion and sharpening of scalar and vector images*. Proceedings of the International Conference on Image Processing, ICIP'97, Santa-Barbara, California, 3: 263-266.

[Black et al., 1998] M. Black, G. Sapiro, D. Heeger. (1998). *Robust anisotropic diffusion*. IEEE transactions on Image Processing. 7(3) : 421-4320.

[Bloch, 1946] Bloch, F. (1946). *Nuclear induction. Physical Review*. P: 460–474.

[Bloch et al., 2004] I. Bloch, Y. Gousseau, H. Maître, D. Matignon, B. Pesquet-Popescu, F. Schmitt, M. Sigelle, F. Tupin**.** (2004*). Le traitement des images, Tome 2,* Polycopié du cours ANIM, version 5.0. Département TSI - Télécom-Paris.

[Bourzgui, et al., 2000] F. Bourzgui, Z. Bentahar, L. Ousehal, M. Baite,. F. El Quars. (2000). *Les pièges et les limites de la radiographie panoramique.* Service d'orthopédie dento-faciale Centre de consultations et de traitements dentaires CHU Ibn Rochd de Casablanca.

[Boulanger & Kervrann, 2005] J. Boulanger & C. Kervrann. (2005). *Local adaptivity to variable smoothness for exemplar based image denoising and representation*. Rapport de Recherche RR-5624, INRIA.

[Boubchir, 2007] Boubchir, L. (2007). *Approches bayésiennes pour le débruitage des images dans le domaine des transformées multi-échelles parcimonieuses orientées et non orientées*. Thèse doctorat. Université de Caen/ Basse Normandie.

[Bovik, 2000] Bovik A. (2000). *Hand Book of Image and Video Processing*, Academic Press. New York.

[Buades et al., 2006] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel. (2006). *The staircasing effect in neighborhood filters and its solution*. IEEE Transactions on Image Processing, 15(6).

[Candès, 1999] E. J. Candès. (1999). *Harmonic analysis of neural networks*. Appl. Comput. Harmon. Anal., 6:197–218.

[Candès & Guo, 2002] E. J. Candès & F. Guo. (2002). *New multiscale transforms, minimum total variation synthesis : Applications to edge-preserving image reconstruction*. Signal Processing, 82:1519–1543

[Canny, 1983] Canny, J. F.(1983). *Finding edges and lines in images*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institue of technology, London.

[Canny, 1986] Canny, J. F. (1986). *A computational approach to edge detection*. IEEE transactions on pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6): 679-698.

[Carlson & Halijak 1964] Carlson G. E. & Halijak C. A. (1964). *Approximation of fractional capacitors by a regular Newton process*, IRE Transactions on Circuit Theory, CT-11, No. 2, 210-213.

[Chan & Wong, 1998] T. F. Chan & C. Wong. (1998). *Total variation blind deconvolution*. IEEE. Trans. Image Process, 7:370–375.

[Chan et al., 1999-2001] T. F. Chan, S. Osher, J. Shen. (1999). *The digital TV filter and nonlinear denoising*. Technical Report, CAM 99-34, Departement of Mathematics, UCLA, USA. Une version plus complete a apparu en 2001 dans IEEE transactions on Image Processing, 10(2).

[Chan et al., 2000] T. F. Chan, A. Marquina, and P. Mulet. (2000). *High-order total variation-based image restoration*. SIAM J. Sci. Comput., 22(2):503–516.

[Chan et al., 2003] T. F. Chan, J. Shen, and L. Vese. (2003). *Variational pde models in image processing*. Notices of AMS, 50(1):14–26.

[Chambolle, 2004] A. Chambolle. (2004). *An algorithm for total variation minimization and applications*. J. Math. Imaging. 20(1-2):89–97.

[Chambolle & Lions, 1997] A. Chambolle & P. L. Lions. (1997). *Image recovery via total variational minimization and related problems*. Numer. Math., 76:167–188.

[Charef A. et al., 1992] Charef A. et al. (1992). *Fractional System as represented by singularity function*, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 37(9).

[Chen, 2003] Chen Y. Q. (2003). *Fractional order calculus, Fractional filter and fractional-order control: An overview & some recent developments*, Disponible sur Internet: http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/, USU Industrial math seminar.

[Clerc & Kennedy, 2002] Clerc M. & Kennedy J. (2002). *The Particle Swarm: Explosion, Stability and Convergence in a Multi- Dimensional complex Space*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6.

[Cohen, 1992] Cohen A. (1992). *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Edition Masson, Paris.

[Coifman, Meyer, 1991] R.R.Coifman, Y.Meyer. (1991). *Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre*. Série I, C. R. Acad. Sci. Paris, 312: 259-261.

[Coifman & Donoho, 1995] Coifman, R. R. & Donoho, D. L. (1995). *Translation-invariant denoising*. In Lecture Notes in Statistics: Wavelets and Statistics, vol. New York : Springer-Verlag, (pp. 125–150).

[Cole & Cole, 1941] Cole, K. S. and Cole, R. H. (1941). *Dispersion and absorption in dielectrics, alternation current characterization*, Journal of Chem. Physics 9.

[Combettes & Luo, 2002] P. L. Combettes & J. Luo. (2002). *An adaptive level set method for nondifferentiable constrained image recovery*. IEEE Trans. on Image Proc., 11(11):1295–1304.

[Combettes & Pesquet, 2004] P. L. Combettes & J. C. Pesquet. (2004). *Image restoration subject to a total variation constraint*. IEEE Trans. on Image Proc., 13(9):1213–1222.

[Czoga et al. 2000] Czoga A. E., Eski J. (2000). *Fuzzy and Neuro-Fuzzy Intelligent Systems*: *Studies in Fuzziness & Soft Computing*, springer.

[Damadian, 1977] Damadian, P. (1977). *Multi-planar image formation using NMR spin echoes*. J Phys C, 10(L55):349–352.

[Daubechies, 1992] I.Daubechies. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics.

[Delyon, 2010] Bernard Delyon. (2010). *Ondelettes orthogonales et biorthogonales*. IRMAR, Cours d'Université Rennes-I.

[Deriche, 1990] Deriche, R. (1990). *Fast Algorithms for low level-vision*. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12(1).

[Donoho & Johnstone, 1994] D. L. Donoho & I. M. Johnstone. (1994). *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*. Biometrika, 81(3):425–455.

[Donoho & Johonstone, 1994] Donoho D.L. & Johnstone I.M. (1994). *Ideal Denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases*. Department of Statistics. Stanford University, 1994.

[Donoho, 1995] Donoho D. L. (1995). *De-Noising By Soft-Thresholding.* IEEE Transactions on Information Theory.

[Donoho et al., 1995] Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkyacharian, G., & picard, D. (1995). *Wavelet shrinkage: Asymptopia?* J. R. Statist. Soc. B., 57(2): 301–337.

[Donoho & Johnstone, 1995] Donoho, D. L. & Johnstone, I. M. (1995). *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*. Journal of the American Statistical Association, 90(432), 1200–1224.

[Djouambi, 2008] Djouambi, A. (2008). *Contribution à la commande crone*. Thèse Doctorat, Université Mantouri de Constantine, Algérie.

[Durand et al., 2001] E. Durand, G. Guillot, L. Darrasse, G. Tastevin, P.-J. Nacher, A. Vignaud, D. Vattolo, and J. Bittoun. (2001). *Cpmg measurements and ultrafast imaging in human lungs with hyperpolarised helium-3 at low field (0.1t).* Magnetic Resonance in Medicine.

[Fairfield, 1990] Fairfield, J. (1990). *Toboggan contrast enhancement for contrast segmentation*. In IAPR 10th Int. Conf. on Pattern Recognition 712–716, Atlantic City.

[Farr, 2002] Farr, G. (2002). *Radiologic imaging / magnetic resonance imaging (MRI).* Available online http://www.becomehealthynow.com/article/diagradiology/637.

[Feilner et al., 2001] M. Feilner, M. Jacob and M. Unser. (2001). *Orthogonal quincunx wavelets with fractional orders*. EPFl, BIG, 2001.

[Fink, 1984] Fink, M. (1984). *L'imagerie du corps humain, chapitre : Les méthodes ultrasonores en imagerie médicale*. Responsable scientifique: J. Lewiner, les éditions de physique édition.

[Fletcher, 1990] Fletcher, C. A. J. (1990). *Computational Techniques for Fluid Dynamics*1: *Fundamental and General Techniques*. Second edition. Springer- Verlag.

[Foi et al., 2007] Foi, A., Katkovnik, V., & Egiazarian, K. (2007). *Pointwise shape-adaptive dct for high-quality denoising and deblocking of grayscale and color images*. IEEE Trans. Image Processing, 16(5): 1395–1411.

[Frangioni, 2003] Frangioni, J.V. (2003). *In vivo near-infrared fluorescence imaging.* Current Opinion in Chemical Biology. 7: 626-634.

[Fukunaga & Hostetler, 1975] K. Fukunaga & L. Hostetler. (January 1975). *The Estimation of the Gradient of a Density Function, with Applications in Pattern Recognition.* IEEE Transactions on Information Theory.

[Gao & Bruce, 1997] Gao, H. Y. & Bruce, A. G. (1997). *Waveshrink with firm skrinkage*. Static. Sinica, 7, 855–874.

[Gao, 1998] Gao, H. Y. (1998). *Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote*. Journal of Computational and Graphical Statistics, 7(4), 469–488.

[Gardner, 2009] Samuel Alan Gardner. (2009). *Exploring Fractional Order Calculus as an Artificial Neural Network Augmentation*. Master of Science, Montana State University. USA, 2009.

[Goldberger, 1942] E. Goldberger. (1942). *A simple, indifferent, electrocardiographic electrode of zero potentials and a technique of obtaining augmented*. unipolar, extermity leads. Am. Heart J, Vol. 23: 483-92.

[Goutayer, 2008] Goutayer, M. (2008). *Nano-émulsions pour la vectorisation d'agents thérapeutiques ou diagnostiques ; étude de la biodistribution par imagerie de fluorescence in vivo*, Thèse de doctorat**,** université Pierre et Marie Curie, Paris.

[Grenier, 2005] Thomas Grenier. (2005). *Filtrage Mean Shift: Théorie, application, implémentation*. Chapitre XII. Thèse doctorat. Institus national des sciences appliquées de Lyon.

[Haar, 1910] Haar, A. (1910). *Sur la théorie des systèmes de fonctions orthogonales (1ère version).* Thèse Rédiger sous la supervision de David Hilbert.

[Haykin, 1999] S. Haykin (1999). *Neural Network: A Comprehensive Foundation, 2nd ed.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[Heisenberg, 1932] Werner Heisenberg. (1932). *Les principes physiques de la théorie des quanta*. Gauthier-Villars. Réédition par Jacques Gabay (1989). ISBN 2-87647-080-2.

[Henri, 1987] Henri H. A. (1987*). Information extraction kom images degraded by speckle*. IEEE International Geoscience and Remote *Sensing Symposium*. 18-21.

[Hopfield, 1982] Hopfield J.J. (1982). *Neural network and Physical system with emergent collective computational abilities*. In proc.Nat.Acad.Sci.79: 2554-2558, USA.

[Hopfield & Tank, 1985] Hopfield J.J. & Tank D.W. (1985). *Neural computation of decisions in optimization problems*. BIO. Cybern. 52:141-152.

[Hounsfield, 1973] Hounsfield, G.N.(1973). *Computerized transverse axial scanning (tomography). Part I: Description of system. Part II: Clinical applications*. British Journal of Radiology, 46: 1016–1022.

[Hyvärinen et al., 1998] A. Hyvärinen, E. Oja. P. Hoyer, and J. Hurri. (1998). *Image feature extraction by sparse coding and independent component analysis*. In Proc. Int. Conf. on Pattern Recognition (ICPR'98).p: 1268-1273, Brisbane, Australia.

[Jansen et al., 1997] Jansen,M., Malfait,M., & Bultheel, A. (1997). *Generalized cross-validation for wavelet thresholding*. Signal Processing, 56: 33–44.

[Jezzard, 2001] Jezzard, P. (2001). *Introduction to NMR*. Available online at http://www.fmrib.ox.ac.uk/ stuart/lectures/lecture1/sld001.htm.

[Jlassi & Hamrouni, 2005] H. Jlassi & Hamrouni, K. (2005). *Caractérisation de la rétine en vue de l'élaboration d'une méthode biométrique d'identification de personnes*. 3rd International Conference: Sciences of Electronic, Technologies of Information and Telecommunications TUNISIA.

[Jung, 2002] Jung, A. (2001). *An Introduction to a New Data Analysis tool: independent component analysis*, Proceedings of Workshop GK "Nonlinearity"- Regensburg.

[Kennedy et al. 1995 et 2001] Kennedy J. and Eberhart R. (1995). *Particle Swarm Optimization*. In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, Australia, vol. 4.
Kennedy J. & Eberhart R.C. (2001). *Swarm Intelligence*, Morgan Kaufman Publishers, Academic Press.

[Kern, 2004] Kern, M. (2004). *Introduction à la méthode des éléments finis*. INRIA, Rocquencourt. Cours de l'école nationale supérieure des mines de paris.

[Kimia & Siddiqi, 1996] B. Kimia & K Siddiqi. (1996). *Geometrical heat equation and nonlinear diffusion of shapes and images*. Technical Report LEMS-124, Division of Engineering, Brown University, une version plus complete a apparu en Computer vision and image Understanding, 64: 305-322.

[Kinahan et al., 1998] P.E. Kinahan, D.W. Townsend, T. Beyer, and D. Sashin. (1998). *Attenuation correction for a combined 3d pet/ct scanner*. Medical Physics, 25, 2046–2053.

[Kuan et al., 1985] D.T. Kuan, A.A. Sawchuk, T.C. Strand, and P. Chavel. (1985). *Adaptive noise srnoothing filter for images with signal-dependent noise*. IEEE Trans. ASSP., 7(2): 165-1 77.

[Lanza & Wickline, 2001] Lanza, G.M. & Wickline, S.A. (2001). *Targeted ultrasonic contrast agents for molecular imaging and therapy*. Progress in Cardiovascular Diseases. 44(1): 13-31.

[Lauterbur, 1973] Lauterbur, P. (1973). *Image formation by induced local interactions: examples employing nuclear magnetic resonance*. Nature, 242(5394):190–191.

[Lay, 1998] L. Le Lay. (1998). *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*, Thèse de Doctorat, 1998.

[Lee, 1980] Lee Jong-Sen. (1980). *Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics*. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2(2): 165-168.

[LePennec & Mallat, 2005] LePennec, E. & Mallat, S. G. (2005). *Bandelet image approximation and compression*. SIAM journal of Multiscale Modeling and Simulation, 4(3): 992–1039.

[Li, 1995] Li, S. Z. (1995). *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*. New York: Springer-Verlag.

[Lip.man, 1987] Lip.man R.P., R (1987). *An introduction to computing with neural nets*. IEEE ASSP Mag: 4-22.

[Mallat, 1989] Mallat, S. (1989). *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(7): 674–693.

[Mallat, 1999] Mallat, S. G. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2nd Edition, San Diego: Academic Press.

[Mallat, 2000] Mallat S. (2000) *Une exploration des signaux en ondelettes.* Editions de l'Ecole Polytechnique, France, 2000

[Malvino, 1999] Malvino, A.P. (1999): *Electronic principles, 6th edition*. The McGraw-Hill Companies.

[Marr & Hildreth, 1980] D.Marr & E. Hildreth. (1980). *Theory of Edge Detection*, In: Proceedings of the Royal Society of London, Series B, 207:187-217.

[Massoud et al., 2003] Massoud, T.F. & Gambhir S.S.(2003). *Molecular imaging in living subjects: seeing fundamental biological processes in a new light.* Genes & Development, 17(5): 545-580.

[Mathieu et al., 2003] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, Ch. Ceyral. (2003). *Fractional differentiation for edge detection*. Signal Processing 83 : 2421 – 2432.

[Matsuda & Fuji, 1993] Matsuda K. & Fuji H. (1993). H_∞ *Optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 16, No. 6, 1146-1153.

[Miller & Ross, 1993] Miller K.S. & Ross B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations,* John Wiley and Sons.

[Misiti et al., 2003] Misiti Y., Oppenheim G. , Poggi J. M. (2003). *Les ondelettes et leurs applications.* Hermès, Paris.

[Moisan et al., 2002] L. Moisan, F. Guichard, and J. M. Morel. (2002). *A review of p. d. e. models in image processing and image analysis*. Journal de Physique, 12:137–154.

[Nason, 1994] Nason, G. P. (1994). *Wavelet regression by cross-validation*. Technical report, Dep. of Stat., Stanford University.

[Nason, 1996] Nason, G. P. (1996). *Wavelet shrinkage by cross-validation*. Journal of the Royal Statistical Society B, 58: 463–479.

[Nagao & Matsuyama, 1979] M. Nagao, Matsuyama, T. (1979). *Edge preserving smoothing*. Computer Graphics and Image Processing, 9:394–407.

[Ogden & Parzen, 1996] Ogden, R. T. & Parzen, E. (1996). *Change-point approach to data analytic wavelet thresholding*. Statist. Comput., 6, 93–99.

[Oustaloup, 1991] Oustaloup, A. (1991). *La commande CRONE*, Paris: Hermès.

[Oustaloup et *al.*, 2005] Oustaloup A. et *al*. (2005). *Représentation et identification par modèle non entier*, LAVOISIER. France.

[Paik & Katsaggelos, 1992] Paik J.K. & Katsaggelos A.K. (1992). *Image restoration using a modified Hopfield network.* IEEE. Trans. on Image Processing. 1(1): 546-555.

[Panchanathan et al., 1996] S. PANCHANATHAN, N. GAMAZ, A. JAIN. (April 1996) «Image scalability using wavelet vector quantization». Journal of Electronic imaging, vol. 5(2): 167.

[Perry, 1999] Perry S. W. (1999). *Adaptive Image Restoration: Perceptron Based Neural Network Model and Algorithms*. Ph.D. Theses, School of Electrical and Information Engineering University of Sidney, Australia..

[Perona & Malik, 1990] P. Perona & J. Malik (1990). *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE transactions on pattern Analysis and Machine Intelligence, 12(7): 629-639.

[Piovano & Papadopoulo,2009] J. Piovano & T. Papadopoulo. (2009*). Local Statistic based Region Segmentation with Automatic Scale Selection*, Odyssée Project Team, INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée, France.

[Podlubny, 1999] I. Podlubny. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego.

[Röntgen, 1985] Röntgen, W.C. (1895*). On a new kind of rays*. Science, 3(59):227–231.

[Rudin et al., 1992] L. Rudin, E. Fatemi, S. Osher. (1992). *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D, 60 : 259-268.

[Russ 1999] Russ, J. (1999) *The Image Processing Handbook*, 3rd edn. CRC Press Inc., Boca Raton.

[Sahambi et al., 1997] J.S. Sahambi, S.N. Tandon, R.K.P. Bhatt. (1997). *Using wavelet transforms for ECG characterization*. IEEE Eng. Med. Biol. Mag., 16(1): 77-83.

[Saint-Marc et al., 1991] Saint-Marc, P., Chen, J., et Medioni, G. (1991). *Adaptive smoothing: A general tool for early vision*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, pages 618–624.

[Samko et al., 1993] Samko S.G., Kilbas A.A., and Marichev O.I. (1993). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers.

[Schaefer et al., 2009] G. Schaefer et al., (2009). *Computational Intelligence in Medical Imaging Techniques and Applications*. CRC press. A Chapman & Hall Book.

[Selb, 2002] Selb, J.(2008). *Source virtuelle acousto-optique pour l'imagerie des milieux diffusants*, Thèse de doctorat**,** université Paris XI.

[Smith & Brady, 1995] S. M. Smith and M. Brady. (1995). *SUSAN. A new approch to low-level image processing*. Int. J. Com. Vis., 23(1).

[Spiteri, 2002] Pierre SPITERI**.** (2002). *Méthode des différences finies pour les EDP d'évolution*. Technique d'ingénieur, l'École nationale supérieure d'électronique, d'électrotechnique, d'informatique, d'hydraulique et de télécommunication de Toulouse.

[Starck et al., 2002] Starck, J.-L., Candès, E. J., & Donoho, D. L. (2002). *The curvelet transform for image denoising*. IEEE Transaction on Image Processing, 11(6): 670–684.

[Sun & charef, 1990] H. H. Sun & A. charef. (1990). *Fractal systems-A time domain approach*. Ann. Biomed. Eng. Vol. 18: 587-621.

[Terebes, 2004] Romulus Mircea Terebes. (2004). *Diffusion Directionnelle. Application à la restauration et à l'amélioration d'images des documents anciens*. Thèse de doctorat**,** Université Technique de Cluj-Napoca (Roumanie).

[Theis & Anke, 2010] Theis, F.J. & Anke M.B. (2010): *Biomedical Signal Analysis*: *Contemporary methods and applications,* The MIT Press Cambridge, Massachusetts. London, England.

[Tisserand et al., 2008] E. Tisserand, J.F. Pautex, P. Schweitzer (2008). *Analyse et traitement des signaux 2ème édition*. DUNOD, Paris.

[Toumi et al., 2008] Abida Toumi , Abdelmalik Taleb-Ahmed , Khier Benmahammed, Naima Rechid, Ahmed Betayeb, Mekki Berbeche. (2008). *Conception d'un estimateur flou pour le filtre de Wiener Application à la restauration d'image*. Université Farhat Abbas Setif, Algérie.

[Truchetet, 1998] Truchetet F. (1998). *Ondelettes pour le signal numérique.* Edition Hermès, Paris.

[Unger et al., 2004] Unger, E.C., & al. (2004). *Therapeutic applications of lipid-coated microbubbles*. Advanced Drug Delivery Reviews. 56(9): 1291-1314.

[Vidakovic, 1999] Vidakovic, B. (1999). *Statistical Modeling by Wavelets*. New York : John Wiley & Sons.

[Vinagre et al., 2000] Vinagre B., et al. (2000). *Some approximations of fractional operators used in control theory and applications,* Fractional calculus and App. Anal. Vol. 3(3): 231-248.
[Vinagre et al., 2003] B. M. Vinagre, Y. Q. Chen, I. Petras. (2003). *Two direct Tustin discretization methods for fractional order differentiator/ integrator*. Journal of the franklin institute, Vol. 340: 349-346.

[Weissleder, 2002] Weissleder, R.(2002). *Scaling down imaging: Molecular mapping of cancer in mice.* Nature Reviews Cancer, 2(1): 11-18.

[Wickerhauser et al., 1992] P.Aucher, G.Weiss, V.Wickerhauser.(1992). *Local Sine and cosine Bases of Coifman and Meyer and the Construction of smooth Wavelets*. In Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, pp 237-256, Academic Press.

[Wild & Reid, 1952] Wild, J.J. & Reid, J.M. (1952). *Application of echo-ranging techniques to the determination of structure of biological tissues*. Science, 115 : 226–230.

[Winkler, 1995] Winkler, G. (1995). *Image analysis, random fields and dynamic Monte Carlo methods*: *A mathematical introduction*. Springer-Verlag.

[Witkin, 1983] Witkin, A. (1983). *Scale-space filtering*. In: Proceedings of the international joint conference on artificial intelligence, New-York: 1019-1021, 1983

http://www.lkb.ens.fr/recherche/flquant/hpg.html. Cette page web du lkb, intitulée *hyperpolarized 3he gas m.r.i*, décrit la technique et renvoie à d'autres références.

[Wu & Maître, 1992] Wu, Y. & Maître, H. (1992). *Smoothing speckled synthetic aperture radar images by using maximum homogeneous region filters*. Optical Engineering, 31(8):1785–1792.

[Yaroslavsky, 1985] Yaroslavsky, L. P. (1985). *Digital Picture Processing*: *An introduction*. Spinger-Verlag.

[Yeh et al., 1991] Yeh S.J., Stark H., and Sezan M.I. (1991). *Hopfield-type neural networks in Digital Image Restoration,* ed. Berlin, Germany : Springer-Verlag, vol.23, ch.3.

[Zenati et al., 2000] Zenati N., Achour K., Djekoune O. (2000). *Contribution à la restauration d'images par réseau de Hopfield modifié*. Conférence Africaine sur la Recherche en Informatique et en Automatique CARI'2000. P : 335-342, Antanarivo, Madagascar.

[Zhang, 2001] Xiao-Ping Zhang. (2001). *Thresholding Neural Network for Adaptive Noise Reduction.* IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 12(3).

[Zhang, 2006] Zhang, X. (2006). *Reconstruction et Régularisation en Tomographie par une Méthode de Fourier Basée sur la Variation Totale,* Thèse de doctorat **:** Université de Bretagne-Sud.

[Zhou & Chellap, 1988] Zhou Y. & Chellap.a R. (1998). *Stereo matching using a neural network***.** Proc of the Int.Conf on ASSP-ICASSP, p:1940-1943.

[Zhu et al., 2000] Zhu, S. C., Liu, X. W., & Wu, Y. N. (2000). *Exploring texture ensembles by efficient markov chain Monte Carlo-toward a 'trichromacy' theory of texture*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(6): 554–569.