

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BATNA 2



Faculté des Mathématiques et Informatique

Thèse de Doctorat

Présentée par :

GASMI BOUTHEINA

En vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT en :

Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

TITRE : *Contribution à l'étude théorique et algorithmique des méthodes de recherche des solutions globales des problèmes d'optimisation quadratiques non convexe*

Devant le jury composé de :

Mr/ Djeffal El Amir	Professeur à l'université de Batna2	Président
Mr/ Benacer Rachid	Professeur à l'université de Batna2	Directeur de thèse
Mr/ Brahim Mahmoud	M.C.A à l'université de batna2	Examineur
Mr/ Djabrane Yahia	Professeur à l'université de Biskra	Examineur
Mr/ Benatia Fateh	Professeur à l'université de Biskra	Examineur
Mr/ Lakhdari Imed Eddine	M.C.A à l'université de Biskra	Examineur

Année Universitaire 2023/2024

A la mémoire de ma mère

A mon père

A mon mari

A mes enfants

A mes sœur et mes frères

A tous les amis

Remerciement

Monsieur le professeur Rachid BENACER, mon directeur de thèse, m'a ouvert tous les horizons, en me faisant profiter de ses connaissances. Je le remercie et je tiens à lui exprimer mes plus vives reconnaissances pour sa gentillesse sa totale disponibilité tout au long de ce travail. Je tiens également à exprimer ma vive reconnaissance au professeur El-Amir DJEFFAL, Professeur à l'université Bantna2, d'avoir bien voulu être président de ce travail.

Je remercie aussi bien les professeur Yahia DJEBRANE et Fateh BENATIA Professeurs à l'université de Biskra, le docteur Imad Eddine LAKHDARI, Maitre de conférences à l'université de Biskra et le docteur Mahmoud BRAHIMI, Maitre de conférences à l'université Batna 2 qui m'a honoré en acceptant d'examiner mon travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à tous ceux qui furent de proche ou de loin, partie prenante ce travail.

Table des matières

1	Préliminaires dans l'analyse convexe et conditions d'optimalités	8
1.1	Ensembles et fonctions convexes	8
1.2	Les fonctions convexes polydrales	14
1.3	Classification des problèmes d'optimisation	15
1.4	Solutions optimales locales et globales	16
1.5	Qualification des contraintes	17
1.6	Résolution d'un problème d'optimisation	17
1.7	Existence et unicité d'une solution optimale d'un programme mathématique	18
1.8	Conditions d'optimalités	18
2	la méthode de séparation et réduction pour résoudre les problèmes d'optimisation quadratiques non convexes	20
2.1	La méthode de séparation et interpolation	20
2.1.1	Description de la méthode	21
2.1.2	La transformation de la forme quadratique par l'utilisation de la structure propre	22
2.1.3	La structure séparable de la fonction f	23
2.1.4	L'approximation linéaire	24
2.1.5	Calcul d'erreur	25
2.1.6	La solution ε -approximative de (PQN)	28
2.1.7	L'algorithme de séparation et interpolation	29

2.1.8	La procédure de séparation et réduction	30
2.2	La méthode de séparation et réduction	31
2.2.1	Description de la méthode	32
2.2.2	Calcul de l'erreur	37
2.2.3	Construction du problème linéaire approximatif (PLA)	37
2.2.4	Les techniques de partition et réduction	38
2.2.5	L'algorithme rectangulaire de séparation et réduction	38
2.2.6	La convergence de l'algorithme	40
3	Nouvelle méthode de Séparation et Elimination pour résoudre les problèmes quadratiques non convexes sur un ensemble borné de R^n	41
3.1	Les formes équivalentes de la fonction f sur les sous-rectangles	42
3.2	L'approximation inférieure et calcul de l'erreur	44
3.2.1	L'approximation linéaire inférieure de la fonction f sur le rectangle S^K	45
3.2.2	La nouvelle approximation quadratique convexe de la fonction f sur le rectangle S^K	45
3.2.3	La nouvelle approximation linéaire inférieure de la fonction f sur le rectangle S^K	46
3.2.4	L'erreurs d'approximation	49
3.2.5	Le problème quadratique approximatif (PAQ)	53
3.3	Les technique de réduction	56
3.4	La convergence de l'algorithme proposé (ARSR)	58
3.4.1	Le rang et le type de la convergence	60
3.5	Exemples	62
3.5.1	Exemple1	62
3.5.2	Exemple2	63

4	La méthode de la transformation duale canonique pour les problèmes quadratique non convexes	66
4.1	Description de la méthode	66
4.2	La méthode (TDC) pour les problèmes quadratiques non convexes	69
4.3	Exemple	74

Notations

- (D_f) : Domaine réalisable de la fonction f .
- (PQN) : Problème quadratique non convexe.
- (TDC) : La transformation duale canonique.
- (PQI) : Problème quadratique indéfini.
- (PQA) : Problème quadratique approximatif.
- (PQP) : Problème quadratique paramétrique.
- (PLA) : Problème linéaire approximatif.
- (PDC) : Problème dual canonique.
- (PI) : Problème d'interpolation .
- (SCI) : Semi continue inférieure.
- (SCS) : Semi continue supérieure.
- (ARSR) : Algorithme rectangulaire de séparation et réduction.

Introduction

Dans notre vie, chaque problème s'écrit en forme mathématique présumée comme un problème d'optimisation généralement non convexe.

Il ya plusieurs formes et catégories de ces problèmes, entre ces formes on a choisi la classe des problèmes d'optimisation quadratiques non convexes, sachons que, chaque problèmes peut s'écrire sous forme d'un problème d'optimisation quadratique avec ou sans contraintes, alors, la classe des problèmes quadratiques non convexes a plusieurs applications dans plusieurs domaines de la vie courante.

La résolution de ce type de problèmes n'est pas facile, plusieurs méthodes sont proposées pour trouver la bonne solution optimale mais la difficulté est dans la recherche de la solution optimale globale. Plusieurs efforts ont proposés pour trouver une méthode efficace dans le but de la simplification de la résolution et pour trouver la solution optimale globale ou bien la solution approximative de la solution optimale globale du problème original non convexe.

Entre ces méthodes, on a choisi la méthode de recherche global Séparation et Réduction (élimination) pour résoudre les problèmes d'optimisation quadratique non convexe sur un ensemble fermé (borné) de \mathbb{R}^n .

Le problème d'optimisation quadratique non convexe est toujours posé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + d^T x \\ x \in S \cap (D_f) \end{cases} \quad (\text{PQN})$$

où :

$$\begin{aligned}
S &= \{x \in \mathbb{R}^n : L_i^0 \leq x_i \leq U_i^0 : i = \overline{1, n}\} \\
(D_f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b; x \geq 0\} \\
Q &\in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{une matrice symétrique non défini positive} \\
A &\in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ une matrice réelle} \\
d^T &= (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n \\
b^T &= (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Ce type des problème admet plusieurs solutions locaux, pour cela, on cherche toujours d'une méthode efficace avec une approche globale.

Cette thèse est organisée comme suit :

Premier chapitre : Nous présentons quelques notions et définitions comme des préliminaires dans l'analyse convexe et conditions d'optimalités qui sont utiles pour la suite de notre travail.

Deuxième chapitre : Nous avons présentés la méthode de séparation et réduction pour résoudre les problèmes d'optimisation quadratiques non convexes dans deux parties :

1. La méthode de séparation et interpolation : où on a appliqué l'approximation linéaire de la partie non convexe de la fonction objective du problème (PQN).
2. La méthode de séparation et réduction : on a présenté une nouvelle approche rectangulaire de la méthode B&B avec des techniques de partition et réduction pour accélérer la convergence de l'algorithme proposé.

Troisième chapitre : Nous présentons une nouvelle méthode de *branch and bound* pour résoudre les problèmes quadratique non convexes sur un ensemble borné de \mathbb{R}^n , où on a présenté une nouvelle approche rectangulaire de cette méthode et construit une fonction quadratique convexe qui approxime inférieurement la fonction optimisée $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sur le rectangle S . cette approximation nous permettra d'obtenir

un problème d'optimisation quadratique convexe qui peut être résolu facilement par les méthodes itératives (les méthodes gradients, Newton, trajectoire central, simplexe,...). La valeur optimale de ce dernier problème est une borne inférieure de la valeur optimale globale du problème original (PQN).

Quatrième chapitre : Nous présentons dans ce dernier chapitre une méthode de recherche globale “la transformation dual canonique (TDC)” pour résoudre globalement un problème d'optimisation quadratique non convexe sur un ensemble borné de \mathbb{R}^n . cette méthode a été étudié par Gao et Strang pour les mécaniques non convexes et non de classe C^∞ . Cette méthode transforme notre problème non convexe avec des contraintes linéaires (NP-hard problem) à un système algébrique facile pour la résolution. On obtient ce système par l'utilisation des notions de dualité canonique qui permet de former un problème dual qui admet le même ensemble de points de KKT avec le problème primal (l'ensemble des solutions admissibles).

Enfinement, on a donné une conclusion général.

Chapitre 1

Préliminaires dans l'analyse convexe et conditions d'optimalités

Dans ce chapitre, on a besoin de rappeler quelques notions et propriétés d'analyse convexe qui sont utiles pour la suite de notre travail.

1.1 Ensembles et fonctions convexes

Définition 1.1.1 *Un sous ensemble Ω de \mathbb{R}^n est dit affine si :*

$$\forall x, y \in \Omega \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega.$$

Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation. L est dite affine si :

$$L((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)L(x) + \lambda L(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.2 *Un sous ensemble Ω de \mathbb{R}^n est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in \Omega \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega.$$

Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall x, y \in \Omega, t \in [0, 1],$$

et si l'inégalité au dessus est stricte, alors f est dite strictement convexe $\forall x \neq y$.

Définition 1.1.3 soit $S \subset \mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe d'un ensemble $S \in \mathbb{R}^n$ notée par $Co(S)$ est l'ensemble des combinaisons convexes finies d'éléments de S donné par :

$$Co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{R}^+; x_i \in S : 1 \leq i \leq n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Définition 1.1.4 Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$, on appelle translaté de C par le point a l'ensemble suivante :

$$T = C + a = \{x + a : x \in C\}$$

Définition 1.1.5 soit C une partie convexe de \mathbb{R}^n , l'enveloppe affine de C noté par $aff(C)$ est la plus petite partie affine de \mathbb{R}^n contenant C et définie par :

$$aff(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i / \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in C, 1 \leq i \leq n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Définition 1.1.6 L'intérieur relatif d'un ensemble C est son intérieur dans $aff(c)$ muni de la topologie induite. On a :

$$ir(C) = \{x \in C / \exists r > 0 : B(x, r) \cap aff(C) \subseteq C\}$$

où :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

Définition 1.1.7 soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, l'épigraphe de f est défini par :

$$epi(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

et le domaine effectif de f est donné par :

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha \in \mathbb{R} : (x, \alpha) \in \text{epi}(f)\} \end{aligned}$$

Définition 1.1.8 soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, la fonction est dit propre si :

$$\text{dom}(f) \neq \Phi \text{ et } f(x) > -\infty : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Définition 1.1.9 l'ensemble de niveau inférieur est défini par :

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Définition 1.1.10 On dit qu'une fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout $x, y \in \text{dom}(f)$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Proposition 1.1.1 soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f est convexe si et seulement si $\text{epi}(f)$ est convexe.

Définition 1.1.11 Soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f est fortement convexe de module ρ sur l'ensemble C s'il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\rho}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \\ \forall x, y &\in \text{dom}(f) : \forall \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

Définition 1.1.12 On a :

$$\begin{aligned}\arg \min(f) &= \left\{ t \in C : f(t) = \min_{x \in C} f(x) \right\} \\ \varepsilon - \arg \min(f) &= \left\{ t \in C : f(t) = \min_{x \in C} f(x) + \varepsilon \right\} \\ \arg \min(f) &= \bigcap \{ \varepsilon - \arg \min(f) : \varepsilon > 0 \}\end{aligned}$$

Définition 1.1.13 soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f est dite semi-continue inférieurement (SCI) en x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \|x - x_0\| \leq \varepsilon \implies f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

et on a aussi :

$$\{f \text{ est (SCI) en } x_0\} \iff \left\{ \forall (x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_n) \longrightarrow x_0 : f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \right\}$$

Définition 1.1.14 Soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f est dite semi-continue supérieurement (SCS) en x_0 si et seulement si $(-f)$ est semi continue inférieurement (SCI) en x_0 .

Définition 1.1.15 une fonction f est dite coèrcive si :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Définition 1.1.16 Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable évalué au point $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^t$$

et l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice Hessianne s'écrit :

$$[\nabla^2 f(x)]_{i j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque 1.1.1 Les deuxièmes dérivées peuvent servir à déterminer la convexité ou la concavité d'une fonction.

Définition 1.1.17 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur un domaine convexe D . f est une fonction convexe sur D si et seulement si la matrice Hessianne est semi-définie positive, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in D, y^t [\nabla^2 f(x)] y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

De même, si la matrice Hessianne est définie positive, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in D, y^t [\nabla^2 f(x)] y > 0, \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

alors f est une fonction strictement convexe sur D .

Définition 1.1.18 Une matrice A est semi-définie (définie) positive si et seulement si les déterminants des mineurs principaux de A sont (strictement) positifs.

Définition 1.1.19 Il s'ensuit qu'on peut vérifier si une fonction est convexe en examinant le signe des mineurs principaux de la matrice Hessianne. De même, on peut vérifier la concavité d'une fonction f en analysant la convexité de $(-f)$. Il n'est pas vrai qu'une fonction est concave si les déterminants des mineurs principaux sont tous négatifs.

Définition 1.1.20 Soit A une matrice tel que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- A est dite semi-définie positive, et l'on notera $A \in \mathbb{S}_+^n$ ou $A \succeq 0$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0.$$

- A est dite définie positive et l'on notera $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ ou $A \succ 0$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x^T A x > 0.$$

Définition 1.1.21 soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, f est coercive si et seulement si :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Définition 1.1.22 la conjuguée de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$$f^*(y) = \sup \{ \langle x, y \rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n \}$$

Propriétés

- 1 f^* est toujours convexe.
- 2 Si $f = -\infty$ alors $f^* = +\infty$.
- 3 On a $(f^*)^* \leq f$, et on trouve l'égalité si $f \in \Gamma_\circ(X)$.
- 4 D'après la dualité de Fanchel Moreau on a : si $f \in \Gamma_\circ(X)$ alors $f^* \in \Gamma_\circ(Y)$ et dans ce cas on a :

$$(f^*)^* = f$$

Proposition 1.1.2 (L'inégalité de Jensen) soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ où C est un convexe de \mathbb{R}^n , on a :

1-Dans le cas convexe :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

2-Dans le cas quasi-convexe :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\}.$$

1.2 Les fonctions convexes polydrales

Définition 1.2.1 Une partie convexe C est dite convexe polyédrale si :

$$C = \bigcap_{i=1}^n \{x / \langle a_i, x \rangle - b_i \leq 0, a_i \in Y, b_i \in \mathbb{R}\}$$

Définition 1.2.2 Une fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite polyédrale si son épigraphe est un ensemble polyédrale de \mathbb{R}^{n+1} .

1

f est polyédrale $\implies f$ est convexe.

2 Tout fonction polyédrale appartient à $\Gamma^\circ(X)$.

On a la proposition suivante :

Proposition 1.2.1 Soit $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. f est polyédrale si et seulement si $\text{dom}(f)$ est convexe polyédrale, et on a :

$$f(x) = \sup \{ \langle a_i, x \rangle - b_i, a_i \in X, b_i \in \mathbb{R}, \forall x \in \text{dom}(f), i = \overline{1, k}, k \leq n \}$$

Proposition 1.2.2 Si $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction polyédrale alors, la fonction duale f^* est aussi polyédrale, et on a :

$$\text{dom}(f^*) = \text{co} \{ a_i / i = \overline{1, k} \},$$

$$f^* = \min \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i / y = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \leq n \right\}.$$

Définition 1.2.3 Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ où C est un convexe de \mathbb{R}^n . On dit que :

1. f est quasi convexe(q.c) sur C si :

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1] \quad f((1-t)x + ty) \leq \max \{ f(x), f(y) \}.$$

2. f est strictement quasi convexe (s.q.c) si l'inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $t \in]0, 1[$

Théorème 1.2.1 Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ où C est un convexe de \mathbb{R}^n . f est quasi-convexe si :

$$S_\alpha(f) = \{x \in C \mid f(x) \leq \alpha\} \text{ est convexe } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.3 Classification des problèmes d'optimisation

Il existe beaucoup d'algorithmes d'optimisation dans différentes applications scientifiques. Cependant beaucoup de méthodes ne sont valables que pour certains types de problèmes. Ainsi, il est important de bien connaître les caractéristiques du problème posé afin d'identifier la technique appropriée pour sa résolution.

les problèmes d'optimisation sont classés en fonction des caractéristiques mathématiques de la fonction objectif, des contraintes et des variables d'optimisation, alors, on a le tableau suivant :

Caractéristiques	Propriétés	Classification
Nombre de variables	Une seule variable plus d'une variable	Mono-variable Multi-variable
Type de variables	Réelles Entières Réelles et entières Entière avec permutation	Continue Discrète Mixte Combinatoire
Type de fonction objectif	Linéaire en fonction des variables Quadratique en fonction des variables Non linéaire en fonction des variables	Linéaire Quadratique Non linéaire
Formulation du problème	Soumis à des limitations Pas de limitations	Avec contraintes Sans contraintes

1.4 Solutions optimales locales et globales

Définition 1.4.1 On appelle solution réalisable (admissible) d'un problème d'optimisation (P) tout point vérifiant les contraintes, c-à-d, appartenant à \mathcal{D} . Une solution réalisable qui minimise l'objectif sur \mathcal{D} est dite solution optimale globale de (P) et on note par :

$$\arg \min_x f(x),$$

l'ensemble des solutions optimales globales.

Définition 1.4.2 Un point $x^* \in \mathcal{D}$ est une solution optimale locale de (P) s'il existe un voisinage U de x^* tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in U,$$

et on note par $\text{locmin}_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ l'ensemble des solutions optimales locales de (P). Nous avons

toujours :

$$\arg \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) \subset \text{locmin}_{x \in \mathcal{D}} f(x),$$

et si (P) est convexe les deux ensembles sont égaux.

Remarque 1.4.1 Le problème d'optimisation précédent consiste :

- à chercher un point optimal (local ou global).
- si un tel point n'existe pas on cherche une borne inférieure de la valeur optimale globale de la fonction à optimiser f .
- à établir que f est non bornée inférieurement sur \mathcal{D} , auquel cas on trouve que :

$$\inf_{\mathcal{D}} f(x) = -\infty.$$

- Lorsque \mathcal{D} est vide immédiatement on a $\inf_{\mathcal{D}} f(x) = +\infty$.

1.5 Qualification des contraintes

La qualification des contraintes est satisfaite pour tout $x^* \in \mathcal{D}$ dans les cas suivants :

- Les contraintes sont affines (linéaires).
- Les gradients des contraintes saturées en x^* sont linéairement indépendants.
- \mathcal{D} est convexe et $\text{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ (condition de Slater).

On dit que le point x^* est régulier si les contraintes sont qualifiées en x^* .

1.6 Résolution d'un problème d'optimisation

La résolution d'un problème d'optimisation (P) est traitée dans l'ordre des points suivants :

- L'existence (et éventuellement l'unicité) d'une solution optimale ;
- Caractérisation de la solution trouvée (local ou global) ;

- construire l'algorithme qui permet de calculer numériquement cette solution.

1.7 Existence et unicité d'une solution optimale d'un programme mathématique

Théorème 1.7.1 (Weirstrass) *Si f est une fonction continue sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et \mathcal{D} est compact (fermé et borné), alors le problème d'optimisation (P) admet au moins une solution optimale $x^* \in \mathcal{D}$.*

Corollaire 1.7.1 *Si $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est non vide et fermé et si f est continue et coercive sur \mathcal{D} alors (P) admet au moins une solution optimale.*

Corollaire 1.7.2 *Si f est strictement convexe et l'ensemble \mathcal{D} est convexe, alors la solution optimal de (P) est une solution unique.*

Remarque 1.7.1 *La stricte convexité n'assure pas l'existence de la solution mais assure l'unicité.*

Proposition 1.7.1 *Soit l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ non vide et fermé, si l'ensemble des courbes de niveaux :*

$$\{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq \alpha\}$$

est borné, alors (P) admet un minimum global. ($f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$).

1.8 Conditions d'optimalités

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) \\ \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) \leq 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}\}, \end{cases} \quad (\text{P})$$

où f, h_j, g_i sont des fonctions continûment différentiables.

La théorie de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T) permet d'écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour tout problème d'optimisation avec contraintes possédant une fonction objective différentiable.

Théorème 1.8.1 *Si x^* est une solution optimale locale de (P) satisfaisant l'une des conditions de qualifications précédentes, alors il existe des multiplieurs $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$ et $\mu \in \mathbb{R}^n$ tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) + \sum_{i=1}^n \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0, \quad (\text{condition d'optimalité}), \\ \lambda_j h_j(x^*) = 0, \quad j = \overline{1, p} \quad (\text{condition de complémentarité}), \\ g_i(x^*) = 0, \quad i = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (\text{K.K.T})$$

Remarque 1.8.1 1- Si (P) est convexe, les conditions de (K.K.T) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que x^* soit un minimum optimal global.

2- Si les contraintes ne sont pas qualifiées en x^* , les conditions de (K.K.T) ne s'appliquent pas (x^* peut être optimal sans vérifier ces conditions).

Chapitre 2

la méthode de séparation et réduction pour résoudre les problèmes d'optimisation quadratiques non convexes

2.1 La méthode de séparation et interpolation

On considère le problème d'optimisation quadratique non convexe suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - d^T x \\ Bx \leq c; \quad x \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{PQI})$$

avec :

Q matrice PQI de $R^{n \times n}$

B matrice de $R^{n \times m}$

$x; d$ des vecteurs de R^n

Les solutions de (PQI) dans le cas d'existence seront produit sur des points de la frontière du domaine réalisable pas nécessairement des sommets, par contre pour les problèmes où la fonction objective est concave ou bien quasi concave, comme était bien montré par le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *La solution optimale de (PQI) se produit sur des points le frontière du domaine réalisable donné par :*

$$\Omega = \{x \in R^n : Ax \leq c; x \geq 0\}$$

2.1.1 Description de la méthode

On peut transformer un problème quadratique à un autre problème où la fonction séparable par l'utilisation de la transformation affine, et on obtient le problème quadratique indéfini avec des contraintes linéaires suivant :

$$\begin{cases} \min \Psi(x, y) = f(x) - g(x) \\ Ax + Bx + c \leq 0; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

L'ensemble réalisable est donné par :

$$\Omega = \{(x, y) \in R^{n+k}; Ax + Bx + c \leq 0; x \geq 0; y \geq 0\},$$

où :

$$f(x) = d^T x - \frac{1}{2} x^T Q x$$

$$g(x) = b^T y$$

Q une matrice réel symétrique, indéfinie de $R^{n \times n}$

$$B \in R^{m \times k}; A \in R^{m \times n}; c \in R^m; b \in R^k; d \in R^n.$$

Généralement, on peut le présenter sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min \Psi(x, y) = f(x) - g(x) \\ Ax + Bx + c \leq 0; x \in X; y \in Y \end{cases}$$

où :

X, Y deux polyèdres de R^n et R^k respectivement

f : fonction quadratique indéfinie

g : fonction linéaire avec k est plus large que n

2.1.2 La transformation de la forme quadratique par l'utilisation de la structure propre

Sachons qu'une matrice Q admet n valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n}$ et $\{\zeta_i\}_{i=1, \dots, n}$ sont les vecteurs propres associés, donc :

$$\begin{aligned} Q &= \zeta D \zeta^T \\ \zeta &= (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \\ D &= \text{diag}(\lambda_i) : 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

alors, on définit :

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_i &= \max \{ \zeta_i^T x : (x, y) \in \Omega \} \\ \underline{\zeta}_i &= \min \{ \zeta_i^T x : (x, y) \in \Omega \}, \end{aligned}$$

qui présentent des problèmes linéaires, à partir de cette définition on définit la borne :

$$\beta_i = \bar{\zeta}_i - \underline{\zeta}_i : 1 \leq i \leq n,$$

dans le problème original (PQN) il suffit de prendre :

$$B = 0 \text{ et } g(y) = 0,$$

alors, on trouve que :

$$\Psi(x, y) = f(x).$$

Alors, on représente le problème sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) = d^T x - \frac{1}{2} x^T Q x \\ x \in \Omega \cap S_x \end{cases}$$

où :

$$\Omega = \{x \in R^n : Ax \leq c\}$$

$$S_x = \{x \in R^n : 0 \leq x_i \leq \beta_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

D'autre part, la fonction f sera représentée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \theta_i(x_i) = \sum_{i=1}^n \left(d_i x_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i^2 \right).$$

2.1.3 La structure séparable de la fonction f

Par l'utilisation des valeurs propres de la matrice Q on va donner la forme séparable de la fonction f par :

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ f_1(x) &= \sum_{i=1}^s \theta_i(x) = \sum_{i=1}^s \left(d_i x_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i^2 \right) \\ f_2(x) &= \sum_{i=s+1}^n \theta_i(x) = \sum_{i=s+1}^n \left(d_i x_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i^2 \right) \\ s &: \text{ le nombre des valeurs propres négatives de } Q. \end{aligned}$$

Immédiatement, f_1 présente la partie concave et f_2 présente la partie convexe.

Pour la suite, on va essayer d'approximer la partie concave par une fonction affine dans le but de trouver un problème d'optimisation approximatif facile pour résoudre par rapport au problème originale (PQN).

2.1.4 L'approximation linéaire

Soit le problème (P) défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = \sum_{i=1}^n (d_i x_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i^2) \\ x \in \Omega \cap S_x, \end{array} \right. .$$

On a les définitions suivantes :

Définition 2.1.1 *L'enveloppe convexe de la fonction f sur le rectangle $S_x \in R^n$ est la plus grande minorante affine continue.*

Définition 2.1.2 *Les enveloppes convexes des fonctions $\{\theta_i : 1 \leq i \leq n\}$ notées par $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq n\}$ des fonctions présentent par l'interpolation linéaire de $\{\theta_i : 1 \leq i \leq n\}$ en 0 et β_i .*

Définition 2.1.3 *L'enveloppe convexe de la partie concave f_1 sur $S_x \in R^n$ est donné par :*

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^s \gamma_i(x_i) = \sum_{i=1}^s \left(d_i - \frac{1}{2} \lambda_i \beta_i \right) x_i.$$

Immédiatement, on trouve une forme convexe approximative de la fonction non convexe f définie dans le problème convexe approximatif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f_{\Gamma}(x) = \Gamma(x) + f_2(x) \\ x \in \Omega \cap S_x \end{array} \right. . \quad \text{(PQA)}$$

2.1.5 Calcule d'erreur

L'erreur sera estimée dans le théorème suivant :

Théorème 2.1.2 *On a :*

$$|f(x) - f_{\Gamma}(x)| \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^s (\lambda_i \beta_i^2).$$

Preuve 1 *On a :*

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{\Gamma}(x)| &= |f_1(x) + f_2(x) - (\Gamma(x) + f_2(x))| \\ &= |f_1(x) - \Gamma(x)| \\ &= \left| \sum_{i=1}^s \theta_i(x_i) - \sum_{i=1}^s \gamma_i(x_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^s (\theta_i(x_i) - \gamma_i(x_i)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^s |\theta_i(x_i) - \gamma_i(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^s \left| \left(d_i x_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i^2 \right) - \left(d_i - \frac{1}{2} \lambda_i \beta_i \right) x_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^s \left| \frac{1}{2} \lambda_i \beta_i x_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda_i |x_i(\beta_i - x_i)|. \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq x_i \leq \beta_i$ et $1 \leq i \leq s$ le maximum de $|x_i(\beta_i - x_i)|$ atteint au point médial

$x_i = \frac{\beta_i}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\Gamma(x)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda_i |x_i(\beta_i - x_i)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda_i \left| \frac{\beta_i}{2} (\beta_i - \frac{\beta_i}{2}) \right| \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^s (\lambda_i \beta_i^2) \end{aligned}$$

La relation entre la solution primale et la solution approximative de (PQN)

Si on suppose que $f^* = f(x^*)$ la valeur optimale globale de (PQN) et \tilde{x} la solution de (PQA), alors, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.1 *On a les deux relations suivantes :*

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(\tilde{x}) - f^* \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^s (\lambda_i \beta_i^2) \\ f_\Gamma(\tilde{x}) &\leq f^* \leq f(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Le but de notre travail est de trouver une limite inférieure d'erreur relative au rang de la fonction f_1 sur S_x . notons par :

$$\begin{aligned} f_{1 \max} &= \max \{f_1(x) : x \in S_x\} \\ f_{1 \min} &= \min \{f_1(x) : x \in S_x\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.2 *Soit la fonction d'erreur défini par :*

$$E(x) = f_1(x) - \Gamma(x),$$

où :

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^s \gamma_i(x_i) = \sum_{i=1}^s \left(d_i - \frac{1}{2} \lambda_i \beta_i \right) x_i.$$

Alors, on a :

$$f(\tilde{x}) - f^* \leq E(\tilde{x}),$$

où :

f^* : l'optimum globale de (PQN)

\tilde{x} : la solution approximative

Définition 2.1.4 Le rang de f_1 sur S_x est donné par l'intervalle $[f_{1 \min}, f_{1 \max}]$.

Pour réduire l'erreur il faut trouver une limite inférieure de la valeur :

$$\Delta f_1 = f_{1 \max} - f_{1 \min},$$

alors, on suppose que :

$$\lambda_1 \beta_1^2 > \lambda_i \beta_i^2 : 1 \leq i \leq s.$$

D'autre part, on définit les valeurs :

$$\rho_i = \frac{\lambda_i \beta_i^2}{\lambda_1 \beta_1^2} \leq 1 : 1 \leq i \leq s,$$

sachons que, les fonctions concaves $\{\theta_i : 1 \leq i \leq s\}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \theta_i(x_i) &= \left(d_i x_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i^2 \right) : 1 \leq i \leq s \\ &= \left(d_i - \frac{1}{2} \lambda_i x_i \right) x_i : 1 \leq i \leq s. \end{aligned}$$

Le maximum de ces fonctions est atteint au point :

$$\bar{x}_i = \frac{d_i}{\lambda_i} : 1 \leq i \leq s,$$

alors, si $\bar{x}_i \in [0, \beta_i]$ alors la limite inférieure de Δf_1 dépend de la distance :

$$\left| \bar{x}_i - \frac{\beta_i}{2} \right| : 1 \leq i \leq s.$$

D'autre part, lorsque $|\beta_i| \rightarrow 1$ la dépendance entre Δf_1 et $\left| \bar{x}_i - \frac{\beta_i}{2} \right|$ est estimée par :

$$\eta_i = \min \left\{ 1, \left| \bar{x}_i - \frac{\beta_i}{2} \right| = \left| \frac{2\bar{x}_i}{\beta_i} - 1 \right| \right\}.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *La relation suivante est satisfaite :*

$$\Delta f_1 \geq \frac{1}{8} \lambda_1 \beta_1 \sum_{i=1}^s \rho_i (1 + \eta_i)^2 := \overline{\Delta f_1}.$$

Lemme 2.1.2 *La borne supérieure de la fonction d'erreur E est donnée dans l'inégalité suivante :*

$$E(x) \leq \frac{1}{8} \lambda_1 \beta_1^2 \sum_{i=1}^s \rho_i.$$

Le théorème suivant est très importante :

Théorème 2.1.3 *On a l'inégalité suivante :*

$$\frac{f(\tilde{x}) - f^*}{\Delta f_1} \leq \delta(\rho, \eta) : \frac{1}{4} \leq \delta \leq 1$$

2.1.6 La solution ε -approximative de (PQN)

On divise chaque intervalle $[0, \beta_i]$ à k_i sous-intervalles avec un pas égale à :

$$h_i = \left(\frac{\beta_i}{k_i} \right),$$

alors :

$$S_x = \prod_{i=1}^s S_{ix},$$

donc, on fait notre travail sur chaque sous-rectangle S_{ix} de S_x .

Les fonctions d'interpolation de $\{\theta_i : 1 \leq i \leq s\}$ deviennent des fonctions d'interpolation au point :

$$x_i = jh_i : 0 \leq j \leq k_i$$

donc, on trouve que :

$$\begin{aligned} E(x) &\leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^s \lambda_i \left(\frac{\beta_i}{k_i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^s \lambda_i \left(\frac{\beta_i^2}{k_i^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{8} \lambda_1 \beta_1^2 \sum_{i=1}^s \frac{\rho_i}{k_i^2}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *La relation suivante est satisfaite :*

$$\frac{f(\tilde{x}) - f^*}{\Delta f_1} \leq \frac{\sum_{i=1}^s \frac{\rho_i}{k_i^2}}{\sum_{i=1}^s \rho_i (1 + \eta_i)^2}.$$

La division k_i est choisi telle que :

$$k_i \geq \sqrt{\left(\frac{s}{\alpha} \rho_i \right)} \text{ où } \alpha = \varepsilon \sum_{i=1}^s \rho_i (1 + \eta_i)^2.$$

2.1.7 L'algorithme de séparation et interpolation

Pour trouver la solution ε -approximative du problème d'optimisation quadratique non convexe (PQN), on propose l'algorithme suivant :

la (les) solution(s) approximative(s) du solution optimale globale du (PQN) est donnée dans l'algorithme suivante :

1-calculer les valeurs propres $\{\lambda_i\}$ de la matrice Q et les vecteurs propres associées.

2-résoudre le problème linéaire approximatif.

3-trouver l'ensemble $Front$ de points du frontière de l'ensemble Ω .

4-calculer les valeurs de la fonction f en chaque points du frontière.

5-choisir le point x^* qui satisfait :

$$f(x^*) = \min f(x) : x \in Front$$

6-poser $IFV = f(x^*)$.

7-trouver la forme linéaire approximative Γ et résoudre le problème approximatif pour trouver le point \tilde{x} .

8-calculer Δf_1 et $\overline{\Delta f_1}$.

9- si $f(\tilde{x}) < IFV$ alors $IFV = f(x^*) = f(\tilde{x})$

10-si $IFV - f_\Gamma(\tilde{x}) < \varepsilon \overline{\Delta f_1}$ alors \tilde{x} est la solution $\varepsilon - \text{approximative}$ du (PQN).

11-sinon continue avec la procédure du Séparation et Réduction.

2.1.8 La procédure de séparation et réduction

On a les étapes suivantes :

1- Choisir l'intervalle $[0, \beta_j]$ tel que $\beta_j = \min_{1 \leq i \leq s} \{\beta_i\}$ qu'est équivalent à choisir l'intervalle qui correspondent à :

$$\rho_j = \max_{1 \leq i \leq s} \{\rho_i\}.$$

2- Subdiviser l'intervalle $[0, \beta_j]$ en deux sous rectangles $\left[0, \frac{\beta_j}{2}\right]$ et $\left[\frac{\beta_j}{2}, \beta_j\right]$.

3- On obtient :

$$\gamma_i(x_i) = \begin{cases} \Gamma_{j1}(x) : x_i \in \left[0, \frac{\beta_j}{2}\right] \\ \Gamma_{j2}(x) : x_i \in \left[\frac{\beta_j}{2}, \beta_j\right] \end{cases}$$

4- On obtient les deux problèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \gamma_i(x_i) = \Gamma_{j1}(x) \\ x \in S_{x1} = \left\{ x \in R^n : x_i \in \left[0, \frac{\beta_j}{2} \right] \right\} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \min \gamma_i(x_i) = \Gamma_{j2}(x) \\ x \in S_{x2} = \left\{ x \in R^n : x_i \in \left[\frac{\beta_j}{2}, \beta_j \right] \right\} \end{array} \right. .$$

5- Résoudre les deux problèmes et calculer la valeur IFV pour chaque problème.

6- Posons le point \tilde{x} qui vérifiée :

$$\gamma(\tilde{x}) = \min \{ \Gamma_{j1}(\tilde{x}), \Gamma_{j2}(\tilde{x}) \} .$$

7- Vérifier l'étape (9).sinon, on choisi le plus petit intervalle entre les deux intervalles $\left[0, \frac{\beta_j}{2} \right]$ et $\left[\frac{\beta_j}{2}, \beta_j \right]$, et retourner à l'étape (2).

2.2 La méthode de séparation et réduction

Dans cette partie on va présenter une autre approche rectangulaire de la méthode séparation et interpolation pour résoudre globalement une classe des problèmes d'optimisation quadratiques non convexes. on va présenter une nouvelle fonction linéaire approximée inférieurement la fonction quadratique non convexe à optimiser sur un rectangle de R^n .

Soit le problème d'optimisation quadratique non convexe suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = x^T Q x + d^T x \\ Ax \leq c. \end{array} \right.$$

avec :

Q matrice non positive de $R^{n \times n}$

A matrice de $R^{m \times n}$

x, d des vecteurs de R^n et $c \in R^m$

le domaine réalisable de (PQN) présente l'ensemble fermé défini par :

$$(\chi_f) = \{x \in R^n : Ax \leq c\}.$$

2.2.1 Description de la méthode

Le rectangle initial qui contient le domaine réalisable de (PQN) est défini par :

$$S^0 = \{x \in R^n : L^0 \leq x \leq U^0\},$$

tel que, on résout les n -problème linéaire :

$$\min \{x_i : x \in (\chi_f) : 1 \leq i \leq n\}$$

pour trouver la valeur de L^0 et on résout :

$$\max \{x_i : x \in (\chi_f) : 1 \leq i \leq n\}$$

pour trouver la valeur de U^0 dans ce cas, le rectangle S^0 sera présenté par :

$$S^0 = \{x \in R^n : L_i^0 \leq x_i \leq U_i^0 : 1 \leq i \leq n\}$$

l'étape suivante est de diviser le rectangle S^0 en :

$$\begin{aligned} S_{+1}^0 &= \{x \in R^n : L_s^0 \leq x_s \leq h_s : L_j^0 \leq x_j \leq U_j^0 : 1 \leq j \leq n : j \neq s\} \\ S_{+2}^0 &= \{x \in R^n : h_s \leq x_s \leq U_s^0 : L_j^0 \leq x_j \leq U_j^0 : 1 \leq j \leq n : j \neq s\} \end{aligned}$$

Définition 2.2.1 Soit le nombre défini par :

$$\theta \geq |\lambda_{\min}|$$

où λ_{\min} est la valeur propre minimale de la matrice Q pour la quelle la matrice $(Q + \theta I)$ sera définie positive.

On peut trouver deux formes équivalentes de la fonction f par l'utilisation de L^0 et U^0 . on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 Sur le rectangle S^k on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &\quad + 2(L^K)^T (Q + \theta I) x - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K \end{aligned}$$

par l'utilisation de la borne inférieure L^k , et elle est donnée par :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - U^K)^T (Q + \theta I) (x - U^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &\quad + 2(U^K)^T (Q + \theta I) x - (U^K)^T (Q + \theta I) U^K \end{aligned} \tag{2.1}$$

par l'utilisation de la borne supérieure U^k du rectangle S^k .

Preuve 2 On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^T Q x + d^T x \\
&= x^T Q x + d^T x + \theta x^T x - \theta x^T x \\
&= x^T (Q + \theta I) x - \theta x^T x + d^T x
\end{aligned}$$

par l'utilisation de la borne L^K , on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^T (Q + \theta I) x - \theta x^T x \\
&= (x + L^K - L^K)^T (Q + \theta I) (x + L^K - L^K) + d^T x - \theta x^T x \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + (x - L^K)^T (Q + \theta I) L^K + (L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) \\
&\quad + (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K) + d^T x - \theta x^T x \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K) \\
&\quad + d^T x - \theta \|x\|^2 \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) x \\
&\quad - (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K)
\end{aligned}$$

même manière avec l'utilisation de la borne U^K , on trouve :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - U^K)^T (Q + \theta I) (x - U^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&\quad + 2 (U^K)^T (Q + \theta I) x - (U^K)^T (Q + \theta I) U^K
\end{aligned}$$

Définition 2.2.2 Soient la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ et S^0 un rectangle de \mathbb{R}^n vérifiant

$C \subseteq S^0 \subseteq R^n$, l'enveloppe convexe de la fonction f sur le rectangle S^0 est donné par :

$$\begin{aligned} f_i^0(x) &= \delta_i x_i + \eta_i \\ \delta_i &= \frac{f_i(U_i^0) - f_i(L_i^0)}{U_i^0 - L_i^0} : 1 \leq i \leq n \\ \eta_i &= f_i(L_i^0) - \delta_i L_i^0 : 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 Soient L_j^k et U_j^k les j^{eme} composantes des vecteurs L^k et U^k respectivement, alors, l'enveloppe convexe de la fonction $h(x) = (-x_j^2)$ sur le rectangle S^k est donné par la fonction linéaire suivante :

$$\bar{h}(x) = -(U_j^k + L_j^k)x_i + L_j^k U_j^k$$

alors, on obtient la bonne borne inférieure de $h(x) = \sum_{j=1}^n (-x_j^2)$ par la fonction :

$$\varphi_{S^k}(x) = -(U^k + L^k)^T x + (L^k)^T U^k$$

Théorème 2.2.1 Les deux formes linéaires approximant inférieurement la fonction non convexe f sur le rectangle $S^k = [L^k, U^k]$ sont données par :

$$\begin{aligned} L_{S^k}(x) &= (a_{S^k})^T x + b_{S^k} \\ U_{S^k}(x) &= (\overline{a_{S^k}})^T x + \overline{b_{S^k}} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} a_{S^k} &= d + 2(Q + \theta I)L^K - \theta(L^K + U^K) \\ b_{S^k} &= -(L^K)^T(Q + \theta I)L^K + \theta(L^K)^T(U^K) \\ \overline{a_{S^k}} &= d + 2(Q + \theta I)U^K - \theta(L^K + U^K) \\ \overline{b_{S^k}} &= -(U^K)^T(Q + \theta I)U^K + \theta(L^K)^T(U^K) \end{aligned}$$

Preuve 3 On a :

$$L_{SK}(x) = (a_{SK})^T x + b_{SK}$$

et :

$$\begin{aligned}
a_{SK} &= \frac{f(U^K) - f(L^K)}{U^K - L^K} \\
&= \frac{d^T U^K - \theta \sum_{i=1}^n (U_i^K)^2 + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) U^K - (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K)}{U^K - L^K} \\
&\quad - \left(\frac{d^T L^K - \theta \sum_{i=1}^n (L_i^K)^2 + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) L^K - (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K)}{U^K - L^K} \right) \\
&= \frac{d^T U^K - \theta \sum_{i=1}^n (U_i^K)^2 + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) U^K - d^T L^K + \theta \sum_{i=1}^n (L_i^K)^2}{U^K - L^K} \\
&\quad - \frac{2 (L^K)^T (Q + \theta I) L^K}{U^K - L^K} \\
&= \frac{d^T (U^K - L^K) - \theta \sum_{i=1}^n ((U_i^K)^2 - (L_i^K)^2) + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) (U^K - L^K)}{(U^K - L^K)} \\
&= \frac{d^T (U^K - L^K) - \theta \sum_{i=1}^n (U_i^K - L_i^K)(U_i^K + L_i^K) + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) (U^K - L^K)}{(U^K - L^K)} \\
&= d - \theta \sum_{i=1}^n (U_i^K + L_i^K) + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) \\
&= d - \theta (U^K + L^K) + 2 (L^K)^T (Q + \theta I)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
b_{S^k} &= f(L^K) - a_{S^k} L^K \\
&= d^T L^K - \theta \sum_{i=1}^n (L_i^K)^2 + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) L^K - (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K) \\
&\quad - \left(d - \theta (U^K + L^K) + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) \right)^T L^K \\
&= - (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K) - \theta \sum_{i=1}^n (L_i^K)^2 + \theta (U^K)^T L^K + \theta (L^K)^T L^K \\
&= - (L^K)^T (Q + \theta I) (L^K) + \theta (U^K)^T L^K.
\end{aligned}$$

Même manière pour la deuxième fonction où on utilise la deuxième forme de f qui est définie par la borne U^K .

Théorème 2.2.2 On a :

$$\begin{aligned}
L_{S^k}(x) &\leq f(x) : x \in (\chi_f) \cap S^K \\
U_{S^k}(x) &\leq f(x) : x \in (\chi_f) \cap S^K
\end{aligned}$$

2.2.2 Calcul d'erreur

Pour le calcul d'erreur on a le théorème suivante :

Théorème 2.2.3 Soient θ le nombre positif pour le quel la matrice $(Q + \theta I)$ sera semi définie positive, et soit $\rho(Q + \theta I)$ la plus grande valeur propre de la matrice $(Q + \theta I)$, donc, on a :

$$\begin{aligned}
\max \{ |f(x) - L_{S^k}(x)| : x \in S^K \} &\leq (\rho(Q + \theta I) + \theta) \|U^K - L^K\|^2 \\
\max \{ |f(x) - U_{S^k}(x)| : x \in S^K \} &\leq (\rho(Q + \theta I) + \theta) \|U^K - L^K\|^2.
\end{aligned}$$

2.2.3 Construction du problème linéaire approximatif (PLA)

D'après le théorème précédent on a :

$$L_{S^K}(x) \leq f(x) : x \in S^K$$

$$U_{S^K}(x) \leq f(x) : x \in S^K,$$

alors, on peut écrire :

$$f(x) \geq \max \{L_{S^K}(x), U_{S^K}(x) : x \in S^K\} = \gamma(x).$$

Donc, le problème est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \max \{L_{S^K}(x), U_{S^K}(x) : x \in S^K\} \\ Ax \leq b \end{array} \right. . \quad (\text{PLA})$$

Immédiatement, on a les résultats suivants :

- Corollaire 2.2.1** 1- La valeur optimale du (PLA) est une borne inférieure de la valeur optimale globale du problème original (PQN).
- 2- La solution optimale du (PLA) est une solution approximative de la solution optimale globale du (PQN).

2.2.4 Les techniques de partition et réduction

On va utiliser des techniques de partition et réduction qui sont bien expliquées dans pour accélérer la convergence de l'algorithme proposer.

2.2.5 L'algorithme rectangulaire de séparation et réduction

Soit $\alpha(S^k)$ la valeur optimal obtenue par la résolution du problème (PLA), alors, on peut écrire :

$$\alpha(S^k) \leq f(x) : x \in S^k,$$

donc :

$$\alpha(S^k) \leq f(x^*),$$

où x^* présente la solution optimal global du problème d'optimisation quadratique non convexe (PQN).

l'algorithme est donné par :

Algorithme (ARSR)

initialisation : déterminer le rectangle initial S^0 avec $(\chi_f) \subset S^0$ et proposer que :

$$LLBP_{S^0} := S^0 \cap (\chi_f).$$

itération k

Si $LLBP_{S^0} \neq \phi$ **alors**

résoudre le problème linéaire approximatif (LPA) où $k = 0$

soit x^0 la solution optimale de (PLA) et $\alpha(S^0)$ la valeur optimale associée à x^0

$$H := \{S^0\}$$

$$\alpha_0 := \min\{\alpha(S^0)\}, \beta_0 := f(x^0)$$

$$k := 0$$

si Stop=false alors

si $\alpha_k = \beta_k$ **alors**

Stop=true (x^k est la solution optimale globale de (NQP))

sinon

on divise le rectangle S^k en deux sous-rectangles $\{S_j^k : j = 1, 2\}$

pour $j = 1, 2$ **faire**

appliquée la procédure de "the Linearity Based Range Reduction" sur les deux sous-rectangle $\{S_j^k\}$

noter par S_j^k le rectangle obtenue

si $S_j^k \neq \phi$ **alors,**

$$(LLBP)_{S_j^k} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in S_j^k \cap (\chi_f)\}$$

résoudre le problème linéaire (*LLBP*) où $S^k := S_j^k$
soit x^{k_j} la solution optimale et $\alpha(S_j^k)$ être la valeur optimale associée
 $H := H \cup \{S_j^k\}$
 $\beta_{k+1} := \min\{f(x^k), f(x^{k_j})\}$
 $x^k := \arg \min \beta_{k+1}$
fin si
fin pour
 $H := H - \{S^k\}$
 $\alpha_{k+1} := \min_{S \in H} \{\alpha(S)\}$; choisir un rectangle $S^{k+1} \in H$
tel que $\alpha_{k+1} = \alpha(S^{k+1})$
 $k \leftarrow k + 1$;
fin si
fin si
fin si
fin program

2.2.6 La convergence de l'algorithme

L'algorithme est convergent par rapport aux autres algorithmes, la différence est dans la stratégie de séparation et réduction. La solution optimale globale du (PQN) peut être obtenu si l'algorithme termine dans un nombre fini de pas.

Par contre, si l'algorithme ne termine pas dans un nombre fini de pas alors, on peut vérifier l'existence de solution mais on ne peut pas trouver l'unicité, comme elle est bien expliquée dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.4 *Si l'algorithme génère un nombre infini de suites $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ alors, tout point d'accumulation x^* de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ présente une solution optimale pour le problème original (PQN).*

Chapitre 3

Nouvelle méthode de Séparation et Elimination pour résoudre les problèmes quadratiques non convexes sur un ensemble borné de R^n

Dans ce chapitre, on va présenter une nouvelle approche rectangulaire pour la méthode de Branch and Bound, qui est proposée pour résoudre globalement une classe de problèmes d'optimisation non convexes ou bien de la classe **NP-hard**.

Pour minimiser une fonction **quadratique non convexe** sur un rectangle donné $S^0 = [L^0, U^0] \subseteq \mathbb{R}^n$; on a construit une fonction quadratique convexe qui **approxime** inférieurement la fonction optimisée $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur le rectangle S^0 , alors, on obtient un problème d'optimisation quadratique convexe qui peut être résolu facilement par les méthodes itératives (les méthodes gradients, Newton, trajectoire central, simplexe,...). La valeur optimale de ce dernier problème est une borne inférieure de la valeur optimale globale du problème original (PQN).

L'algorithme proposé converge vers la solution approchée de la solution optimale globale. Pour accélérer la convergence de cet algorithme, des techniques de partition et de réduction étaient appliqués.

Soit le problème d'optimisation quadratique non convexe donné par :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + d^T x \\ x \in S \cap (D_f) \end{cases} \quad (\text{PQN})$$

où :

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R}^n : L_i^0 \leq x_i \leq U_i^0 : i = \overline{1, n}\} \\ (D_f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b; x \geq 0\} \\ Q &\in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{une matrice symétrique non défini positive} \\ A &\in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ une matrice réel} \\ d^T &= (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n \\ b^T &= (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

3.1 Les formes équivalentes de la fonction f sur les sous-rectangles

On va construire les formes équivalentes de la fonction quadratique non convexe f sur le rectangle $S^k = [L^k, U^k]$ où S^k, L^k et U^k sont bien définies dans le chapitre précédent dans le but de trouver la borne inférieure de la valeur optimal global du problème originale (PQN).

Posons λ_{\min} et λ_{\max} la valeur propre minimal et la valeur propre maximal respectivement de la matrice Q , et soit le nombre θ avec $\theta \geq |\lambda_{\min}|$.

les deux formes sont présentées par :

$$f(x) = (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) x - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K,$$

par l'utilisation de la borne inférieure L^k , et :

$$f(x) = (x - U^K)^T (Q + \theta I) (x - U^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (3.1) \\ + 2 (U^K)^T (Q + \theta I) x - (U^K)^T (Q + \theta I) U^K,$$

par l'utilisation de la borne supérieure U^k du rectangle S^k .

D'autre part, on a les définitions suivantes :

Définition 3.1.1 Soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $S^\circ \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectangle de \mathbb{R}^n , l'enveloppe convexe de la fonction f est donné par :

$$f_i(x_i) = \delta_i x_i + \eta_i : i = \overline{1, n}$$

avec :

$$\delta_i = \frac{f_i(U_i^\circ) - f_i(L_i^\circ)}{U_i^\circ - L_i^\circ} : i = \overline{1, n} \\ \eta_i = f_i(L_i^\circ) - \delta_i L_i^\circ : i = \overline{1, n}.$$

Alors, par l'utilisation de cette définition, l'enveloppe convexe de la fonction $h(x) = (-x_j^2)$ sur l'intervalle $S_j^k = [L_j^k, U_j^k]$ est donnée par :

$$\overline{h}(x) = -(U_j^k + L_j^k)x_j + L_j^k U_j^k,$$

qui présente une fonction linéaire, alors, on obtient la bonne borne linéaire de la fonction :

$$h(x) = \sum_{j=1}^n (-x_j^2),$$

donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_{S^k}(x) &= \sum_{j=1}^n (-(U_j^k + L_j^k)x_j + L_j^k U_j^k) \\ &= -(U^k + L^k)^T x + (L^k)^T U^k. \end{aligned}$$

3.2 L'approximation inférieure et calcul de l'erreur

Par définition, le rectangle initial S^0 est donné par :

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : L_i^0 \leq x_i \leq U_i^0 : i = \overline{1, n}\}.$$

On va diviser ce rectangle en deux sous-rectangles, qui sont :

$$\begin{aligned} S_{+1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : L_s^0 \leq x_s \leq h_s^0 : L_j^0 \leq x_j \leq U_j^0 : j = \overline{1, n} : j \neq s\} \\ S_{+2} &= \{x \in \mathbb{R}^n : h_s^0 \leq x_s \leq U_s^0 : L_j^0 \leq x_j \leq U_j^0 : j = \overline{1, n} : j \neq s\}, \end{aligned}$$

où, on a calculé le point h_s par une sous-division normale (ω -subdivision).

3.2.1 L'approximation linéaire inférieure de la fonction f sur le rectangle S^K

La bonne approximation linéaire inférieure pour la fonction objective f sur S^K est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 : Soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $S^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectangle où $C \subseteq S^0 \subseteq \mathbb{R}^n$, la fonction linéaire approximant inférieurement la fonction f est donnée par :

$$\begin{aligned} L_{S^K}(x) &= (a_{S^K})^T x + b_{S^K} \\ U_{S^K}(x) &= (\overline{a_{S^K}})^T x + \overline{b_{S^K}}, \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned} a_{S^K} &= d + 2(Q + \theta I)L^K - \theta(L^K + U^K) \\ b_{S^K} &= -(L^K)^T(Q + \theta I)L^K + \theta(L^K)^T(U^K) \\ \overline{a_{S^K}} &= d + 2(Q + \theta I)U^K - \theta(L^K + U^K) \\ \overline{b_{S^K}} &= -(U^K)^T(Q + \theta I)U^K + \theta(L^K)^T(U^K). \end{aligned}$$

3.2.2 La nouvelle approximation quadratique convexe de la fonction f sur le rectangle S^K

On utilise la fonction linéaire approximative de f sur S^K pour déterminer la fonction quadratique qui approximant inférieurement la fonction f sur le même rectangle, cette fonction est donnée par :

Définition 3.2.1

$$L_{quad}(x) := L_{S^K}(x) - \frac{1}{2}K (U^K - x) (x - L^K),$$

et :

$$U_{quad}(x) := U_{S^K}(x) - \frac{1}{2}K (U^K - x) (x - L^K),$$

K est un nombre réel présente le rayon spectral de la matrice $(Q + \theta I)$

$$\theta \geq |\lambda_{\min}|$$

$L_{S^K}(x)$ l'approximation linéaire inférieure de f sur le rectangle S^K .

3.2.3 La nouvelle approximation linéaire inférieure de la fonction f sur le rectangle S^K

Par l'utilisation de la définition précédente, on peut définir la nouvelle fonction linéaire approximée inférieurement la fonction f sur S^K par :

Définition 3.2.2

$$\tilde{L}_{quad}(x) := L_{S^K}(x) - \frac{1}{8}K h^2,$$

et :

$$\tilde{U}_{quad}(x) := U_{S^K}(x) - \frac{1}{8}K h^2,$$

avec :

$$h := \|U^K - L^K\|.$$

La relation entre l'approximation quadratique convexe et l'approximation linéaire

On a le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 : les deux inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{quad}(x) & : = L_{S^K}(x) - \frac{1}{8}Kh^2 \leq L_{quad}(x) \leq f(x) \\ \tilde{U}_{quad}(x) & : = U_{S^K}(x) - \frac{1}{8}Kh^2 \leq U_{quad}(x) \leq f(x),\end{aligned}$$

pour tout $x \in (D_f) \cap S^K$ et $h := \|U^K - L^K\|$ et $\left\| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right\| \leq K$ (la condition de normalité).

Preuve 4 Soit la fonction $g_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ défini par :

$$\begin{aligned}g_1(x) & = \tilde{L}_{quad}(x) - L_{quad}(x) \\ & = L_{S^K}(x) - \frac{1}{8}Kh^2 - (L_{S^K}(x) - \frac{1}{2}K(U^K - x)(x - L^K)) \\ & = L_{S^K}(x) - \frac{1}{8}Kh^2 - L_{S^K}(x) + \frac{1}{2}KU^Kx - \frac{1}{2}KU^KL^K - \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}KL^Kx \\ & = \frac{1}{2}K(-x^2 + (L^K + U^K)x - L^KU^K - \frac{1}{4}h^2) \\ & = \frac{1}{2}K(-x^2 + (L^K + U^K)x - L^KU^K - \frac{1}{4}\|U^K - L^K\|^2).\end{aligned}$$

Passons à la dérivée d'ordre 1 de la fonction g_1 , alors, on obtient :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x) = \frac{1}{2}K(-2x + (L^K + U^K)),$$

donc :

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x) = 0\right) \iff \left(x = \frac{(L^K + U^K)}{2}\right).$$

Le point critique de la fonction g_1 se produit sur le point médiale de bord $[L^K, U^K]$, d'autre part, la fonction g_1 est concave, alors, elle atteint son maximum au point médiale :

$$x^* = \frac{(L^K + U^K)}{2} \text{ de } [L^K, U^K],$$

donc, on obtient :

$$g_1(x) \leq \max \{g_1(x) : x \in (D_f) \cap S^K\} = g_1(x^*) = 0,$$

alors ;

$$\tilde{L}_{quad}(x) - L_{quad}(x) \leq 0.$$

D'autre part, on a la fonction $g_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ donnée par :

$$\begin{aligned} g_2(x) &= f(x) - L_{quad}(x) \\ &= f(x) - (L_{S^K}(x) - \frac{1}{2}K(U^K - x)(x - L^K)). \end{aligned}$$

Passons à la dérivée d'ordre 1 de g_2 , alors, immédiatement on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x) - \frac{\partial L_{S^K}}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}K \frac{\partial}{\partial x}((U^K - x)(x - L^K)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x) - a_{S^K} + \frac{1}{2}K \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 + (U^K + L^K)x - L^K U^K) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x) - a_{S^K} + \frac{1}{2}K(-2x + (U^K + L^K)), \end{aligned}$$

alors, la dérivée seconde de g_2 est donnée par :

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) - K.$$

En utilisant la condition de normalité suivante :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \leq K,$$

On obtient :

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x) \leq 0.$$

Et puisque la fonction g_2 est concave sur le rectangle S^K on a :

$$g_2(x) \geq \min \{g_2(x) : x \in S^K\} = \min \{g_2(L^K), g_2(U^K)\} = 0,$$

qui implique que :

$$(g_2(x) = f(x) - L_{quad}(x) \geq 0) \implies L_{quad}(x) \leq f(x).$$

Finalement, on trouve :

$$\tilde{L}_{quad}(x) \leq L_{quad}(x) \leq f(x) : x \in S^K.$$

La même chose si on utilise la borne supérieure $U_{quad}(x)$ où on trouve :

$$\tilde{U}_{quad}(x) \leq U_{quad}(x) \leq f(x) : x \in S^K.$$

3.2.4 L'erreures d'approximation

L'erreur d'approximation est estimée par la distance entre la fonction objective non convexe f et sa fonction approximative sur le rectangle S^K .

L'erreur d'approximation linéaire

Elle est toujours présentée par la distance entre la fonction f et la nouvelle fonction linéaire approximative \tilde{L}_{quad} sur le rectangle S^K , donc, on a la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 : Soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $C \subseteq S^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\theta \geq |\lambda_{\min}|$ pour la quelle la matrice $(Q + \theta I)$ sera semi-définie positive, alors, on a les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \max_{x \in S^K \cap (D_f)} \left\{ \left| f(x) - \tilde{L}_{quad}(x) \right| \right\} &\leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{8}K \right) \|U^K - L^K\|^2 \\ \max_{x \in S^K \cap (D_f)} \left\{ \left| f(x) - \tilde{U}_{quad}(x) \right| \right\} &\leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{8}K \right) \|U^K - L^K\|^2. \end{aligned}$$

Preuve 5 On a :

$$\begin{aligned}
f(x) - \tilde{L}_{quad}(x) &= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&\quad + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) x - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K - (L_{SK}(x) - \frac{1}{8}Kh^2) \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&\quad + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) x - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K \\
&\quad - ((d + 2(Q + \theta I)L^K - (L^K + U^K))^T x + (-(L^K)^T (Q + \theta I)L^K + (L^K)^T U^K)) \\
&\quad + \frac{1}{8}Kh^2 \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&\quad + 2 (L^K)^T (Q + \theta I) x - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K \\
&\quad - d^T x - 2 (L^K)^T (Q + \theta I)x + (L^K + U^K)^T x + (L^K)^T (Q + \theta I)L^K - (L^K)^T U^K \\
&\quad + \frac{1}{8}Kh^2 \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + \frac{1}{8}Kh^2 + \theta((L^K + U^K)^T x - x^T x - (L^K)^T U^K)
\end{aligned}$$

d'autre part, on a :

$$(x - L^K) (U^K - x) = (L^K + U^K)^T x - x^T x - (L^K)^T U^K,$$

donc, on obtient :

$$f(x) - \tilde{L}_{quad}(x) = (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + \frac{1}{8}Kh^2 + \theta (x - L^K) (U^K - x),$$

alors :

$$\begin{aligned}
\left\| f(x) - \tilde{L}_{quad}(x) : x \in S^K \cap (D_f) \right\| &= \max_{x \in S^K \cap (D_f)} \left\{ \left| f(x) - \tilde{L}_{quad}(x) \right| \right\} \\
&= \left\| (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + \frac{1}{8} K h^2 + \theta (x - L^K) (U^K - x) \right\| \\
&\leq \left\| (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) \right\| + \theta \left\| (x - L^K) (U^K - x) \right\| \\
&\leq (\rho(Q + \theta I) \|U^K - L^K\|^2) + \theta \|U^K - L^K\|^2 + \frac{1}{8} K h^2 \\
&\leq (\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{8} K) h^2 : h^2 = \|U^K - L^K\|^2.
\end{aligned}$$

La même chose si on utilise la borne supérieur $U_{quad}(x)$ où on obtient :

$$\left\| f(x) - \tilde{U}_{quad}(x) : x \in S^K \cap (D_f) \right\| \leq (\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{8} K) h^2 : h^2 = \|U^K - L^K\|^2,$$

et dans se cas la preuve est complète.

L'erreur d'approximation quadratique

Cette erreur est présentée par la distance entre la fonction f est la nouvelle fonction quadratique approximative L_{quad} sur le rectangle S^K , donc, on a la proposition suivante :

Proposition 3.2.2 : Soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $C \subseteq S^0 \subseteq \mathbb{R}^n$, et soit $\theta \geq |\lambda_{\min}|$ pour le quelle la matrice $(Q + \theta I)$ sera semi défini positive, donc, on a :

$$\begin{aligned}
\max_{x \in S^K \cap (D_f)} \{ |f(x) - L_{quad}(x)| \} &\leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2} K \right) \|U^K - L^K\|^2 \\
\max_{x \in S^K \cap (D_f)} \{ |f(x) - U_{quad}(x)| \} &\leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2} K \right) \|U^K - L^K\|^2.
\end{aligned}$$

Preuve 6 Par définition on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - L_{quad}(x) &= f(x) - L_{S^K}(x) + \frac{1}{2}K (U^K - x) (x - L^K) \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&\quad + 2(L^K)^T (Q + \theta I) x - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K \\
&\quad - L_{S^K}(x) + \frac{1}{2}K (U^K - x) (x - L^K) \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(L^K)^T (Q + \theta I) x \\
&\quad - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K - (d + 2(Q + \theta I)L^K - \theta(L^K + U^K))^T x \\
&\quad - (- (L^K)^T (Q + \theta I) L^K + \theta(L^K)^T (U^K)) + \frac{1}{2}K (U^K - x) (x - L^K) \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + d^T x - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(L^K)^T (Q + \theta I) x \\
&\quad - (L^K)^T (Q + \theta I) L^K - d^T x - 2(L^K)^T (Q + \theta I) x + \theta(L^K + U^K)^T x \\
&\quad + (L^K)^T (Q + \theta I) L^K - \theta(L^K)^T (U^K) + \frac{1}{2}K (U^K - x) (x - L^K) \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) - \theta \sum_{i=1}^n x_i^2 + \theta(L^K + U^K)^T x \\
&\quad - \theta(L^K)^T (U^K) + \frac{1}{2}K (U^K - x) (x - L^K) \\
&= (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) + (\frac{1}{2}K + \theta)(U^K - x)(x - L^K)
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - L_{quad}(x)\|_\infty &= \max \{f(x) - L_{quad}(x) : x \in S^K \cap (D_f)\} \\
&\leq \left\| (x - L^K)^T (Q + \theta I) (x - L^K) \right\|_\infty + \left\| \left(\frac{1}{2}K + \theta \right) (U^K - x)(x - L^K) \right\|_\infty \\
&\leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2.
\end{aligned}$$

Même, manière si on utilise la fonction U_{quad} avec la forme équivalente de la fonction f

sur S^K on trouve :

$$\|f(x) - U_{quad}(x)\|_\infty \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2,$$

donc, la preuve est terminée.

3.2.5 Le problème quadratique approximatif (PAQ)

La construction de problème d'interpolation (PI)

Il est clair que :

$$f(x) \geq \max \{L_{quad}(x), U_{quad}(x) : \forall x \in (D_f) \cap S^K\} = \gamma(x),$$

cette fonction présente la bonne approximation quadratique inférieure de f sur S^K , alors, on peut construire le problème d'interpolation par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_h = \max \hat{x} \\ \hat{x} \in \{L_{quad}(x), U_{quad}(x)\} : \forall x \in (D_f) \cap S^K \end{array} \right. \quad (\text{PI})$$

quadratique convexe est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \alpha_h \\ \forall x \in (X_f) \cap S^K \end{array} \right. \quad (\text{PQA})$$

La question est : qu'elle est la relation entre les valeurs optimales $f(\tilde{x})$, $f(x^*)$ et $L_{quad}(\tilde{x})$?

On a la proposition suivante :

Proposition 3.2.3 Soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $S^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $C \subseteq S^0 \subseteq \mathbb{R}^n$,

on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(\tilde{x}) - f(x^*) \leq (\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K) \|U^K - L^K\|^2 \\ L_{quad}(\tilde{x}) &\leq f^* \leq f(\tilde{x}), \end{aligned}$$

avec $f^* = f(x^*)$ est la valeur optimal global du problème original (PQN) et \tilde{x} être la solution optimal de (ACQP).

Preuve 7 D'après la proposition précédente, on a :

$$f(x) - L_{quad}(x) \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2 : x \in S^K \cap (D_f),$$

et pour $x = \tilde{x}$:

$$f(\tilde{x}) - L_{quad}(\tilde{x}) \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2$$

alors :

$$f(\tilde{x}) - f^* + f^* - L_{quad}(\tilde{x}) \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2,$$

et :

$$f(\tilde{x}) - f^* \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2 + (L_{quad}(\tilde{x}) - f^*).$$

Et puisque $L_{quad}(\tilde{x}) - f^* \leq 0$, on trouve :

$$0 \leq f(\tilde{x}) - f^* \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2,$$

d'autre part, on a :

$$\begin{cases} L_{quad}(\tilde{x}) - f^* \leq 0 \\ f(\tilde{x}) - f^* \geq 0 \end{cases} \implies (L_{quad}(\tilde{x}) \leq f^* \leq f(\tilde{x})),$$

alors, la preuve est complète.

Question : est ce que le point solution \tilde{x} présente la bonne solution approximative de la solution optimal global de (PQN) ?

On a la proposition suivante :

Proposition 3.2.4 *Laisser prendre la fonction estimative :*

$$E(x) := f(x) - L_{quad}(x)$$

pour tout $x \in S^K \cap (D_f)$, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$E(\tilde{x}) \geq f(\tilde{x}) - f^*$$

Preuve 8 *On a :*

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) - f^* &= f(\tilde{x}) - L_{quad}(\tilde{x}) + L_{quad}(\tilde{x}) - f^* \\ &= E(\tilde{x}) + L_{quad}(\tilde{x}) - f^*, \end{aligned}$$

et d'après la proposition précédente on a :

$$L_{quad}(\tilde{x}) \leq f^* \leq f(\tilde{x}),$$

alors :

$$L_{quad}(\tilde{x}) - f^* \leq 0,$$

donc :

$$f(\tilde{x}) - f^* \leq E(\tilde{x}).$$

Lemme 3.2.1 *Si la valeur $E(\tilde{x})$ est plus petite, alors $f(\tilde{x})$ est une valeur approximative acceptable pour la valeur optimal global $f^* = f(x^*)$ sur le rectangle S^K , qui implique que*

le point \tilde{x} est une solution approximative de la solution optimale globale x^* de (PQN) sur S^K .

Preuve 9 On a :

$$f(\tilde{x}) - f^* \leq E(\tilde{x}),$$

donc, laisser prendre que $E(\tilde{x})$ est une petite valeur, on trouve :

$$f(\tilde{x}) - f^* \leq E(\tilde{x}) \ll \varepsilon \text{ tel que } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

alors :

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\| \ll \varepsilon,$$

et :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(\tilde{x}) - f^*\| = 0.$$

Immédiatement, on trouve que $f(\tilde{x})$ est une valeur approximative acceptable pour la valeur optimal global $f^* = f(x^*)$. alors, on trouve que le point \tilde{x} est une solution approximative de la solution optimal global x^* de (PQN) sur S^K .

D'autre part, le rang de la fonction non convexe f sur le nouveau rectangle S^K est plus petit que leur rang sur le rectangle initial S° , qui bien expliqué que la valeur $E(\tilde{x})$ sera aussi plus petite.

3.3 Les technique de réduction

On va donner la méthode de partition pour diviser le rectangle initial S° dans les étapes suivantes :

étape(0) : soit $S^K = \{x^k \in \mathbb{R}^n : L_i^K \leq x_i^k \leq U_i^K : i = \overline{1, n}\}$ tel que $x^k \in S^K$,

étape(1) : on cherche d'un point du partition h_s par :

$$h_s = \max \{(x_i - L_i^K) (U_i^K - x_i) : i = \overline{1, n}\},$$

étape(2) : si $h_s \neq 0$ alors, on divise le rectangle S^K à deux sous-rectangle en le bord $[L_s^K, U_s^K]$ par le point h_s , sinon, par le point médial $\left(\frac{L^K+U^K}{2}\right)$ qui est noté aussi par h_s .

étape(3) : on note par S^K le rectangle qui reste.

alors, on utilise l'algorithme de "Linearity based range reduction" [ref] pour appliquer les techniques de réduction sur le rectangle S^K .

Algorithme (ARSR) : Séparation et Réduction

Algorithme (ARSR) : Séparation et Réduction

Initialisation : Déterminer le rectangle initial S^0 où $(D_f) \subset S^0$ et supposons que :

$$QLBP_{S^0} := S^0 \cap (D_f)$$

itération k :

if $QLBP_{S^0} \neq \phi$ **then**

résoudre le problème quadratique convexe (PQA) si $k = 0$

soit x^0 la solution optimal de (PQA) et $\alpha(S^0)$ la valeur optimal associée à x^0

$$H := \{S^0\}$$

$$\alpha_0 := \min\{\alpha(S^0)\}, \beta_0 := f(x^0)$$

$$k := 0$$

while **Stop=false** **do**

if $\alpha_k = \beta_k$ **then**

Stop=true (x^k est une solution optimale globale de (PQN))

else

on divise le rectangle S^k en deux sous-rectangle $\{S_j^k : j = 1, 2\}$

for $j = 1, 2$ **do**

appliquer l'algorithme "Linearity Based Range Reduction" en les deux sous-rectangle $\{S_j^k\}$

le reste rectangle est noté par S_j^k

```

if  $S_j^k \neq \phi$  then
   $(QLBP)_{S_j^k} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in S_j^k \cap (D_f)\}$ ,
  résoudre le problème  $(QLBP)$  si  $S^k := S_j^k$ 
  soit  $x^{k_j}$  la solution optimale et  $\alpha(S_j^k)$  la valeur optimale
   $H := H \cup \{S_j^k\}$ 
   $\beta_{k+1} := \min\{f(x^k), f(x^{k_j})\}$ 
   $x^k := \arg \min \beta_{k+1}$ 
end if
end for
 $H := H - \{S^k\}$ 
 $\alpha_{k+1} := \min_{S \in H} \{\alpha(S)\}$ ; choisir un rectangle  $S^{k+1} \in H$ 
tel que  $\alpha_{k+1} = \alpha(S^{k+1})$ 
 $k \leftarrow k + 1$ ;
end if
end do
end if
end program

```

3.4 La convergence de l'algorithme proposé (ARSR)

On a le théorème suivant :

Théorème 3.4.1 *Si l'algorithme termine dans un nombre fini d'étapes alors, la solution optimale globale de (PQN) est atteinte. Sinon, l'algorithme génère une infinité de suites $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ et dans ce cas, chaque point d'accumulation x^* présente une solution local de (PQN) (la solution de (PQN) n'est pas unique).*

Preuve 10 *Si l'algorithme se termine dans un nombre fini des étapes alors, il est claire que $\alpha_k = B_k$, alors x^k est une solution optimale globale de (PQN) . Sinon, supposons*

que x^* est un point d'accumulation pour la suite $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ et soit $\{x_p^k\}_{k \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*}$ être les suites extraites du $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergent à x^* . évidemment, la suite inférieure $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite supérieure $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, alors, on peut écrire :

$$\alpha_k = l_{quad}(x^k), B_k = f(x^k),$$

donc :

$$\alpha_k = l_{quad}(x^k) \leq \min_{x \in S_k} f(x) \leq B_k = f(x^k),$$

alors, les deux suites $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont converge et on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{q \rightarrow \infty} B_{k_q} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \lim_{q \rightarrow \infty} f(x^{k_q}) = f(x^*).$$

Si on suppose que x^{k_q} est une solution optimal de (QLBP) sur S_{k_q} qui vérifié $S_{k_{q+1}} \subset S_{k_q}, q \geq 1$, alors, d'après la propriétés des techniques de partition de S_{k_q} on trouve que :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} S_{k_q} = x^*,$$

alors, on a :

$$0 \leq B_{k_q} - \alpha_{k_q} = f(x_{k_q}^k) - l_{quad}(x_{k_q}^k) \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U_q^K - L_q^K\|^2,$$

donc :

$$\lim_{q \rightarrow 0} (f(x_{k_q}^k) - l_{quad}(x_{k_q}^k)) = \lim_{q \rightarrow 0} (B_{k_q} - \alpha_{k_q}) = 0,$$

alors :

$$\lim_{q \rightarrow 0} (B_{k_q} - \alpha_{k_q}) = \lim_{q \rightarrow 0} (\alpha_{k_q} - B_{k_q} - (B_{k_q} - \alpha_{k_q})) = 0,$$

qui implique que :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \alpha_k = \lim_{q \rightarrow 0} \alpha_{k_q} = \lim_{q \rightarrow 0} (B_{k_q} - (B_{k_q} - \alpha_{k_q})) = \lim_{q \rightarrow 0} B_{k_q}$$

d'autre part, on a :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \alpha_k = \lim_{q \rightarrow 0} B_{k_q} = \lim_{q \rightarrow \infty} f(x^{k_q}) = f(x^*),$$

donc, le point x^* est une solution optimale globale du problème original (PQN).

3.4.1 Le rang et le type de la convergence

L'algorithme proposée est converge vers la solution approximative de la solution optimale globale de problème original non convexe (PQN) avec une vitesse de convergence quadratique sur le rectangle S^K .

D'autre part, le rang de la fonction non convexe f sur S^K sera plus petit que leur rang sur le rectangle initial S° , qui immédiatement implique que la valeur $E(\tilde{x})$ sera plus petite aussi.

D'après ces résultats, on trouve que la solution \tilde{x} est une solution approximative de la solution optimale globale x^* du problème non convexe (PQN) sur le reste rectangle S^K .

D'autre part, on peut trouver la solution ε -approximative de la solution optimale globale avec la vitesse de convergence quadratique suivante :

$$0 \leq f(\tilde{x}) - f(x^*) \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2.$$

Et si on atteint la solution alors, on écrit :

$$\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \|U^K - L^K\|^2 \leq \varepsilon.$$

Si on pose $f(\tilde{x}) = \alpha_m$ alors, on a :

$$0 \leq f(\tilde{x}) - \alpha_m \leq \left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) h^2 \leq \varepsilon,$$

tel que $h = \frac{U^K - L^K}{m-1}$, donc :

$$\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right) \left(\frac{U^K - L^K}{m-1} \right)^2 \leq \varepsilon,$$

alors :

$$\left(\frac{U^K - L^K}{m-1} \right) \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}},$$

donc :

$$\frac{1}{(m-1)} \leq \frac{1}{U^K - L^K} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}},$$

alors :

$$(m-1) \geq \frac{U^K - L^K}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}}},$$

qui implique que :

$$m \geq \frac{U^K - L^K}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}}} + 1,$$

alors, on prend la valeur de l'ordre m par :

$$m = \left\lceil \frac{U^K - L^K}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}}} + 1 \right\rceil + 1.$$

Et puisque la valeur $\left(\frac{U^K - L^K}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}}} \right)$ est plus petite alors on choisi m par :

$$m = \left\lceil \frac{U^K - L^K}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}}} \right\rceil + 1,$$

donc, on trouve la solution approximative de la solution optimal global de (PQN) dans l'ordre :

$$m = \left\lceil \frac{U^K - L^K}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\rho(Q + \theta I) + \theta + \frac{1}{2}K \right)}}} \right\rceil + 1.$$

3.5 Exemples

3.5.1 Exemple1

Soit la fonction quadratique non convexe défini par :

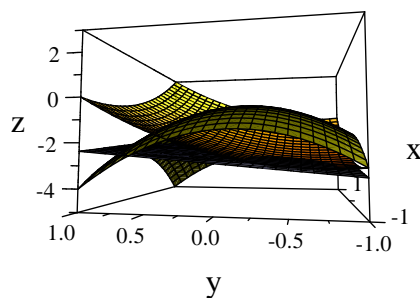
$$f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - \frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 3(x_1^2 + x_2^2) - 2,$$

alors, on a :

$$L_{quad}(x) = (x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) - 2,$$

$$\tilde{L}_{quad}(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - 2 - \frac{1}{8}(3),$$

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - \frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 3(x_1^2 + x_2^2) - 2$$



tel que :

f : brown whit black

L_{quad} : red whit yellow

\tilde{L}_{quad} : darkgray whit navy

la représentation graphique de la fonction quadratique non convexe f , la fonction

linéaire approximative et la fonction quadratique convexe approximée inférieurement la fonction f sur le rectangle $[-1, 0] \subseteq \mathbb{R}^n$

il est clair que la fonction quadratique convexe approximative est entre la fonction objective et la fonction linéaire approximative sur le rectangle $S^0 = [-1, 0] \subseteq \mathbb{R}^n$.

3.5.2 Exemple2

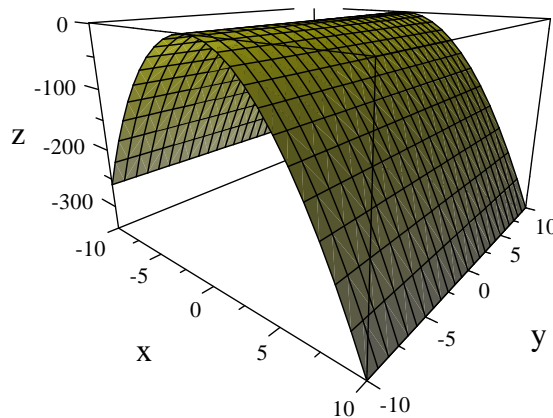
Soit le problème d'optimisation quadratique donné par :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - dx \\ |x| \leq r \end{cases}$$

alors, si $a \geq 0$ le problème sera convexe, donc, il est facile pour résoudre, par contre, si $a < 0$.

Immédiatement, posons $a = -6$, $d = 4$ et $r = 1.5$, alors, on obtient la forme suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) = -3x^2 - 4x \\ |x| \leq 1.5 \end{cases}$$



Candidate(s) for extrema : $\{\frac{4}{3}\}$, at $\{[x = -\frac{2}{3}]\}$

Cette fonction admet un seul point extrema au point $x = -\frac{2}{3}$ avec la valeur optimale associée est $f(x) = \frac{4}{3}$

donc, on applique la méthode de résolution et réduction à se type de problème et on trouve la fonction quadratique approximative est donnée par :

$$L_{quad}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x$$

alors, le problème quadratique convexe approximatif de (PQN) est défini par :

$$\begin{cases} \min L_{quad}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x \\ x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

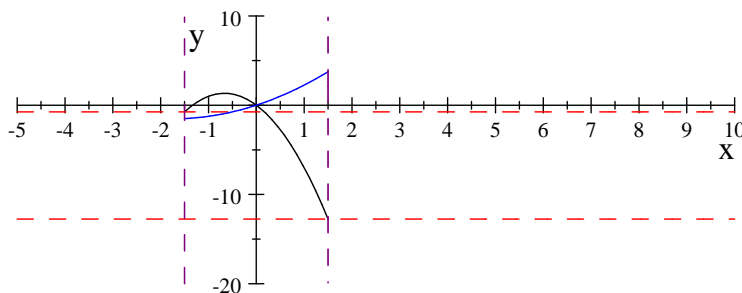
par l'utilisation de techniques de partition et réduction sur le rectangle initial S° on obtient un rectangle noté aussi par S^0 donné par :

$$S^\circ := \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

et le reste rectangle est :

$$S^1 := \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

D'autre part, on obtient la représentation graphique suivante :



$f(x)$: black

$(-12, 75)$ and $(-0, 75)$: lightred

$L_{quad}(x)$: lightblue

la representetion graphique de la fonction primal f et la fonction quadratique convexe approximative L_{quad}

alors, sur le rectangle $S^1 := [0, \frac{1}{2}]$ on trouve les résultats suivantes :

- $(\frac{1}{2})$ présente le minimum de la fonction f et le maximum de la fonction quadratique convexe L_{quad} sur le rectangle $S^1 := [0, \frac{1}{2}]$.
- (0) présente le maximum de la fonction f et le minimum de la fonction quadratique convexe L_{quad} où :

$$f(0) = L_{quad}(0)$$

- On trouve la solution approximative de la solution optimale globale de (PQN) dans l'ordre :

$$\begin{aligned}
 m &= \left\lceil \frac{U^K - L^K}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{(\rho(Q+\theta I) + \theta + \frac{1}{2}K)}}} \right\rceil + 1 \\
 m &= \left\lceil \frac{\frac{1}{2} - 0}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{(2+2+\frac{1}{2}(2))}}} \right\rceil + 1 \quad \text{tel que} \begin{cases} \rho(Q + \theta I) = 2 \\ \theta = 2 \\ K = 2 \end{cases} \\
 &= \left\lceil \frac{1}{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}} \right\rceil + 1 \\
 &= \left\lceil \frac{1}{2\sqrt{0.001}} \right\rceil + 1 \\
 &= 23
 \end{aligned}$$

Chapitre 4

La méthode de la transformation duale canonique pour les problèmes quadratique non convexes

Dans ce chapitre on va présenter une méthode de recherche globale “la transformation duale canonique (TDC)” pour résoudre globalement un problème d’optimisation quadratique non convexe sur un ensemble borné de \mathbb{R}^n . Cette méthode transforme notre problème non convexe avec des contraintes linéaires (NP-hard problem) à un système algébrique facile pour la résolution. On obtiens ce système par l’utilisation de les notions de la dualité canonique qui permet de former un problème dual qui admet le même ensemble de points de KKT avec le problème primal (l’ensemble des solutions admissibles).

4.1 Description de la méthode

Le problème d’optimisation non convexe est généralement donné par la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - d^T x \\ Ax \leq b; \quad x \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ matrice indéfinie} \\ \text{tel que } A \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ matrice quelconque} \\ b, x \text{ vecteurs de } \mathbb{R}^n \end{array}$$

L'idée fondamentale de cette méthode est dans le choix de l'opérateur :

$$\Lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

où on peut écrire la fonction objective f sous la forme canonique suivante :

$$f(x) = \Phi(x, \Lambda(x)).$$

La fonction f sera défini de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vers \mathbb{R} dont la condition que f est canonique en chaque composante x et y .

On a la définition suivante :

Définition 4.1.1 Soit la fonction $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que g est canonique sur \mathbb{R}^m si la relation $y^* = Dg(y)$ est inversible pour tout $y \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 4.1.1 La fonction canonique $\Phi(x, \Lambda(x))$ peut représenter par :

$$\Phi(x, \Lambda(x)) = f(x) = \overline{W}(y) - \overline{F}(y) : y \in \mathbb{R}^m,$$

qu'est défini de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ vers \mathbb{R} , avec :

$$\overline{W} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\overline{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

des fonctions canoniques.

D'autre part, on utilise la transformation duale Λ -canonique pour calculer la fonction conjuguée de $\bar{F}(y)$ et on obtient :

$$\bar{F}^\Lambda(y^*) = \{(\Lambda(x))^T y^* - \bar{F}(x) : \Lambda_t^T(x)y^* - D\bar{F}(x) = 0\},$$

tel que :

$$\Lambda_t^T(x) = D\Lambda(x) \text{ la dérivée de Gâteaux de l'opérateur } \Lambda(x).$$

D'après les notions définies précédemment, on peut construire la fonction dual canonique associée à f par la forme suivante :

$$f^d(y^*) = \bar{F}^\Lambda(y^*) - \bar{W}^*(y^*).$$

On a la proposition suivante :

Proposition 1 Si (x^*, y^*) est un point critique de la fonction $f^d(y^*)$ alors :

$$f^d(y^*) = f(x^*)$$

tel que :

- $f(x^*)$: la valeur optimale globale primale
- $f^d(y^*)$: la valeur optimale globale duale

4.2 La méthode (TDC) pour les problèmes quadratiques non convexes

Il faut ajouter la *condition de régularité* pour garente l'existence de la solution optimale globale. Cette condition est donnée par :

$$|x|^2 \leq 2\mu.$$

Alors, le problème d'optimisation quadratique paramétrique est défini par la forme suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - d^T x \\ Ax \leq b; \quad x \geq 0 ; |x|^2 \leq 2\mu \end{cases} . \quad (\text{PQP})$$

On peut écrire le problème (PQP) sous la forme :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - d^T x \\ Ax \leq b; \frac{1}{2}|x|^2 \leq \mu \end{cases} ,$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} A & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Remarque 4.2.1 *Le domaine réalisable (l'ensemble des solutions admissibles) est présenté par l'ensemble fermé et borné*

$$D_{PQP} = \left\{ Ax \leq b; \frac{1}{2}|x|^2 \leq \mu \right\}$$

qui nous garent que le problème paramétrique (PQP) admet au moins un solution optimale globale.

Donc, on applique la méthode (TDC) sur le problème paramétrique (PQP) à la place de (PQN) comme suit :

Etape(1) : la forme de l'opérateur $\Lambda(x)$

Pour ce type des problèmes l'opérateur géométrique canonique $\Lambda(x)$ est définie par :

$$\Lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R},$$

où :

$$y = \Lambda(x) = \left(Ax, \frac{1}{2} |x|^2 \right) = (\varepsilon, \rho) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, le domaine réalisable du (PQP) sera définie par :

$$D_{PQP} = \{y = (\varepsilon, \rho) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : \varepsilon \leq b, \rho \leq \mu\}.$$

Etape(2) : la structure de la fonction $\overline{W}(y)$

La fonction $\overline{W}(y)$ est présentée par la fonction Indicatrice sur l'ensemble D_{PQP} comme suit :

$$\overline{W} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$y \mapsto \overline{W}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in D_{PQP} \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases},$$

alors, il est clair que la fonction $\overline{W}(y)$ est toujours convexe- d'après les propriétés de la fonction indicatrice- .

D'autre part, la fonction $\overline{W}(y)$ est propre et semi continue inférieurement sur l'ensemble D_{PQP} .

Etape(3) : la structure de la fonction $\overline{W}^*(y^*)$

$$\begin{aligned}
\overline{W}^*(y^*) &= \sup_{y \in D_{PQP}} \{ \langle y, y^* \rangle - \overline{W}(y) \} \\
&= \sup_{\varepsilon \leq b} \sup_{\rho \leq \mu} \{ (\varepsilon, \rho)^T (\varepsilon^*, \rho^*) - \overline{W}(y) : y \in D_{PQP} \} \\
&= \sup_{\varepsilon \leq b} \sup_{\rho \leq \mu} \{ \varepsilon^T \varepsilon^* + \rho^T \rho^* : y \in D_{PQP} \} \\
&= \begin{cases} \varepsilon^T \varepsilon^* + \rho^T \rho^* & \text{si } \varepsilon^* \geq 0, \rho^* \geq 0 \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Etape(4) : la structure de la fonction $\overline{F}^\Lambda(y^*)$

La fonction $\overline{F}(y)$ est linéaire, et puisque :

$$f(x) = \Phi(x, \Lambda(x)) = \overline{W}(y) - \overline{F}(y) : y \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.$$

Alors, on obtient :

$$f(x) - \overline{W}(y) = -\overline{F}(y) : y \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R},$$

et pour tout $y \in D_{PQP}$ on a :

$$-f(x) = \overline{F}(y).$$

Immédiatement, la conjugué Λ -canonique de la fonction $\overline{F}(y)$ sera donnée par :

$$\begin{aligned}
\overline{F}^\Lambda(y^*) &= \sup_{y \in D_{PQP}} \{ y^T y^* - \overline{F}(y) : \Lambda_t^T(x) y^* - D\overline{F}(x) = 0 : x \in D_{PQP} \} \\
&= \sup_{y \in D_{PQP}} \{ (\Lambda(x))^T y^* - \overline{F}(y) : \Lambda_t^T(x) y^* - D\overline{F}(x) = 0 : x \in D_{PQP} \} .
\end{aligned}$$

Et d'après l'étape(1) on trouve que :

$$y = \Lambda(x) = \left(Ax, \frac{1}{2} |x|^2 \right) = (\varepsilon, \rho) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R},$$

donc :

$$\begin{aligned}
\overline{F}^\Lambda(y^*) &= \sup_{y \in D_{PQP}} \{(\Lambda(x))^T y^* - \overline{F}(\Lambda(x)) : \Lambda_t^T(x) y^* - D\overline{F}(x) = 0 : x \in D_{PQP}\} \\
&= \sup_{y \in D_{PQP}} \left\{ \frac{1}{2} x^T (Q + \rho^* I) x - (d - A^T \varepsilon^*)^T x \right\} : x \in D_{PQP} \\
&= \frac{-1}{2} (d - A^T \varepsilon^*)^T (Q + \rho^* I)^{-1} (d - A^T \varepsilon^*) \text{ tel que } x = (Q + \rho^* I)^{-1} (d - A^T \varepsilon^*).
\end{aligned}$$

Etape(5) : la structure de la fonction duale canonique $f^d(y^*)$

D'après l'étape(4), on défini la fonction duale canonique associée à f par :

$$\begin{aligned}
f^d(y^*) &= \overline{F}^\Lambda(y^*) - \overline{W}^*(y^*) \\
&= \left(\frac{-1}{2} (d - A^T \varepsilon^*)^T (Q + \rho^* I)^{-1} (d - A^T \varepsilon^*) \right) - (\varepsilon^T \varepsilon^* + \rho^T \rho^*) \text{ tel que } x = (Q + \rho^* I)^{-1} (d - A^T \varepsilon^*) \\
&= \frac{-1}{2} (d - A^T \varepsilon^*)^T (Q + \rho^* I)^{-1} (d - A^T \varepsilon^*) - \varepsilon^T \varepsilon^* - \rho^T \rho^* : (\varepsilon^*, \rho^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Alors, le problème dual canonique (PDC) est donné par la forme suivante :

$$\begin{cases} \max f^d(\varepsilon^*, \rho^*) \\ \varepsilon^* \geq 0, \rho^* \geq 0, \det(Q + \rho^* I) \neq 0 \end{cases} \quad \text{(PDC)}$$

D'autre part, quelle est la relation entre le problème primal non convexe et le problème duale associé ?. La réponse est bien expliquée dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.1 : *Si $\overline{y}^* = (\overline{\varepsilon}^*, \overline{\rho}^*)$ est un point de (K.K.T) pour le problème (CPD) alors, le point :*

$$\tilde{x} = (Q + \overline{\rho}^* I)^{-1} (d - A^T \overline{\varepsilon}^*),$$

est un point de (K.K.T) pour le problème paramétrique (PQP). Dans ce cas on a :

$$f^d(\overline{y}^*) = f(\tilde{x}).$$

Si on note par id à le nombre des valeurs propres distincts de la matrice Q alors, le problème d'optimisation sera non convexe si $id > 0$.

On pose la question "qu'elle est la relation entre les solutions primales du problème quadratique paramétrique (PQP), les solution du problème primal non convexe (NQP) et problème dual paramétrique (CPD) ?

On a le théorème suivante :

Théorème 4.2.2 Soit Q une matrice tel que $id > 0$ et $\{\lambda_i\}_{i=1,p} : p \leq n$ des valeurs propres distinctes dont :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{id} < 0 \leq \lambda_{id+1} < \lambda_{id+2} < \dots < \lambda_p,$$

et soit $(\bar{\varepsilon}^*, \bar{\rho}^*)$ un point de (K.K.T) pour le problème dual paramétrique (PDC), et :

$$\tilde{x} = (Q + \bar{\rho}^* I)^{-1}(d - A^T \bar{\varepsilon}^*),$$

un point de (K.K.T) pour le problème primal paramétrique (PQP), alors, on a :

1- Si $\bar{\rho}_i^* > -\lambda_1 > 0$ alors, le vecteur $(\bar{\varepsilon}^*, \bar{\rho}^*)$ est un maximum de la fonction duale $f^d(y^*)$ sur l'ensemble D_{PQP}^+ si et seulement si le point \tilde{x} est un minimum de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble D_{PQP}^s , et on a :

$$f(\tilde{x}_i) = \min_{x \in D_{PQP}^s} f(x) = \max_{(\varepsilon^*, \rho^*) \in D_{PQP}^+} f^d(\varepsilon^*, \rho^*) = f^d(\bar{\varepsilon}^*, \bar{\rho}^*).$$

2- Si $0 \leq \bar{\rho}_i^* < -\lambda_{id}$ alors, le vecteur $(\bar{\varepsilon}^*, \bar{\rho}^*)$ est un maximum de la fonction duale $f^d(y^*)$ sur l'ensemble D_{PQP}^- si et seulement si le point \tilde{x} est un maximum global de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble D_{PQP} , et on a :

$$f(\tilde{x}_i) = \max_{x \in D_{PQP}} f(x) = \max_{(\varepsilon^*, \rho^*) \in D_{PQP}^-} f^d(\varepsilon^*, \rho^*) = f^d(\bar{\varepsilon}^*, \bar{\rho}^*).$$

3- Si $0 < \bar{\rho}_i^* < -\lambda_{id}$ alors, le vecteur $(\bar{\varepsilon}^*, \bar{\rho}^*)$ est un minimum de la fonction duale $f^d(y^*)$ sur l'ensemble D_{PQP}^i si et seulement si le point \tilde{x} est un minimum global de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble D_{PQP} , et on a :

$$f(\tilde{x}_i) = \min_{x \in D_{PQP}} f(x) = \min_{(\varepsilon^*, \rho^*) \in D_{PQP}^i} f^d(\varepsilon^*, \rho^*) = f^d(\bar{\varepsilon}^*, \bar{\rho}^*).$$

4.3 Exemple

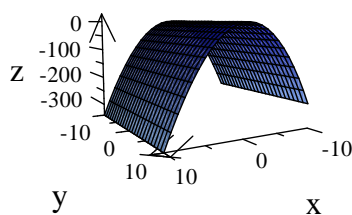
Soit le problème d'optimisation quadratique suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - dx \\ |x| \leq r, \end{cases}$$

Il est claire que si $a \geq 0$ alors, le problème sera convexe, dans ce cas on peut le résoudre par l'utilisation des méthodes dérivées, par contre si $a < 0$ où le problème est non convexe.

Prend par exemple $a = -6$, $d = 4$ et $r = 1.5$, alors, on trouve :

$$\begin{cases} \min f(x) = -3x^2 - 4x \\ |x| \leq 1.5 \end{cases} \quad (\text{PQN})$$



Candidate(s) for extrema : $\{\frac{4}{3}\}$, at $\{[x = -\frac{2}{3}]\}$

Cette fonction admet un seul point extrimat en le point $\tilde{x} = -\frac{2}{3}$ avec la valeur

optimale associée est :

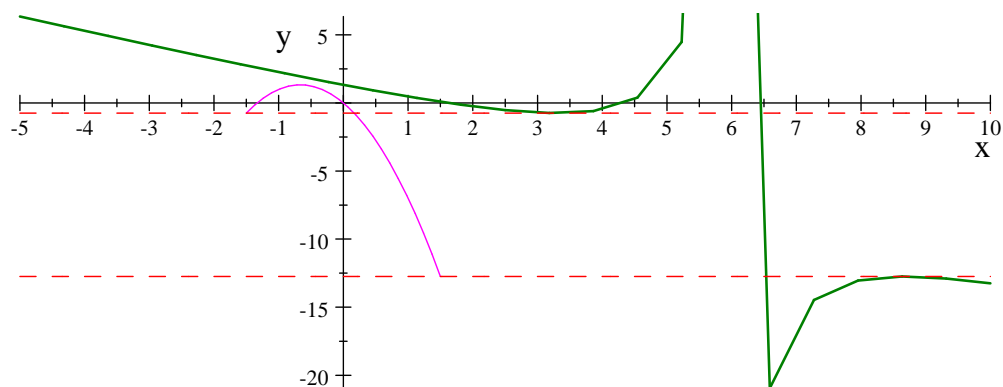
$$\tilde{f} = f(\tilde{x}) = \frac{4}{3}.$$

D'autre part, par l'utilisation de la transformation duale canonique on trouve la forme duale associée à la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f^d(\rho^*) &= \frac{-1}{2}d(a + \rho^*)^{-1}d - \mu\rho^* \\ &= \frac{-1}{2}(16)(-6 + \rho^*)^{-1} - \frac{1}{2}(1.5)^2\rho^* \\ &= -(1.125\rho^* + (\frac{8}{\rho^* - 6})) \end{aligned}$$

Donc, le problème dual canonique est donné par :

$$\begin{cases} \max f^d(\rho^*) = -(1.125\rho^* + (\frac{8}{\rho^* - 6})) \\ \rho^* \geq 6. \end{cases} \quad (\text{PDC})$$



$f(x)$: magenta

$f^d(\rho^*)$: green

Candidate(s) for extrema : $\{-0.75, -12.75\}$, at $\{[\rho_1^* = 3.3333], [\rho_2^* = 8.6667]\}$

Alors, on trouve les résultats suivants :

fonction	extremas	valeurs optimales
primal	-0,6666	1,3333
dual	3,3333	-0,7500
	8,6667	-12,7500

Tel que :

$$\tilde{x}_1 = (a + \overline{\rho}_1^*)^{-1}d = -1,4998$$

$$\tilde{x}_2 = (a + \overline{\rho}_2^*)^{-1}d = 1,5000$$

Immédiatement, on trouve le tableau suivant :

Extremas duales $\overline{\rho}_i^*$	Solutions primales \tilde{x}_i	Valeur $f(\tilde{x}_i)$	Valeurs duales
3,3333	-1,4998	-0,7490	-0,7500
8,6667	1,5000	-12,7500	-12,7500

D'autre parts, on a trouvée que :

$$\overline{\rho}_1^* = 3,3333 < -a = 6$$

Avec :

$$f(\tilde{x}_1) = \min_{x \in D_{PQP}} f(x) = \min_{(\rho^*) \in D_{PQP}^+} f^d(\rho^*) = f^d(\overline{\rho}_1^*) = -0,75$$

Et on a aussi :

$$\overline{\rho}_2^* = 8,6667 > -a = 6$$

Avec :

$$f(\tilde{x}_2) = \min_{x \in D_{PQP}^s} f(x) = \max_{(\rho^*) \in D_{PQP}^+} f^d(\rho^*) = f^d(\overline{\rho}_2^*) = -12,75$$

Alors, on applique la méthode de Séparation et élimination sur cet exemple, dans ce

cas, la nouvelle forme convexe quadratique approximative de la fonction f est donnée par :

$$L_{quad}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x$$

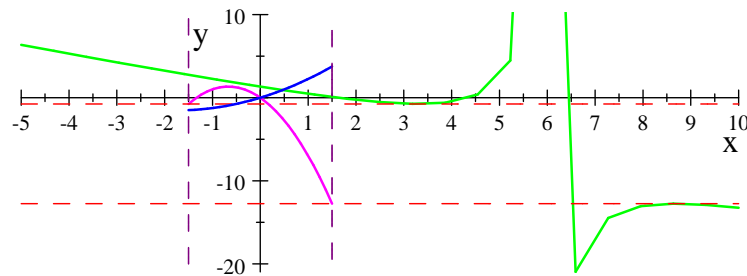
Donc, le problème quadratique convexe approximative associé au problème non convexe est donné par :

$$\begin{cases} \min L_{quad}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x \\ x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (\text{PQA})$$

où on a appliqué les techniques de réduction sur le rectangle initial $S^\circ := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et on a trouvé que le rectangle qui reste est donné par :

$$S^1 := \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

finalement, on a la représentation graphique de la fonction primal non convexe f , la fonction duale f^d et la fonction quadratique convexe approximative $L_{quad}(x)$ suivante :



Donc, sur le rectangle $S^1 := [0, \frac{1}{2}]$ on trouve que :

- 1** Le point $(\frac{1}{2})$ est : un point minimum de f , un point maximum de L_{quad} et un point minimum de la fonction duale f^d sur le rectangle $S^1 := [0, \frac{1}{2}]$.
- 2** Le point (0) un point maximum de f et un point minimum de la fonction quadratique convexe L_{quad} tel que :

$$f(0) = L_{quad}(0) < f^d(0).$$

Conclusion et perspectives

Dans ce travail on a présenté une nouvelle approche rectangulaire de la méthode Branch and Bound pour résoudre globalement une classe des problèmes d'optimisation quadratiques non convexes sur un ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^n . On a proposé une nouvelle approximation quadratique convexe de la fonction à optimiser f où le domaine est un rectangle de \mathbb{R}^n .

On a approximé inférieurement la fonction quadratique non convexe f par une fonction quadratique convexe pour déterminer la borne inférieure de la valeur optimale globale du problème original (PQN) sur chaque sous-rectangle.

Pour accélérer la convergence de l'algorithme proposée, on a utilisé des techniques de séparation et réduction sur le rectangle $S^K = [L^K, U^K] \subseteq \mathbb{R}^n$ dans l'étape(K) pour trouver un ensemble plus petit que le domaine initial dont l'existence de la solution optimale globale est assurée (la région de confiance).

D'autre part, on a présenté une autre méthode de recherche globale t'appellé la méthode de la transformation duale canonique (TDC). Elle converge toujours vers la solution optimale globale sur le domaine réalisable de (PQN).

La nouvelle méthode de séparation et réduction où on a approximé inférieurement la fonction non convexe f par une fonction quadratique convexe sur le rectangle non vide, convexe, fermé et borné $S^K = [L^K, U^K] \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\theta \geq |\lambda_{\min}|$ est meilleur que la méthode (TDC) sur l'intérieur relative du domaine réalisable (D).

On peut aussi utiliser la méthode de Branch and Bound (Séparation et évaluation) où on écrit la fonction à optimiser f sous forme DC (différence de deux fonctions convexes) et on fait l'approximation de la partie concave par la nouvelle forme quadratique convexe sur le rectangle $S^K = [L^K, U^K] \subseteq \mathbb{R}^n$ et on résout le problème facilement où S^K ici est plus petit que le domaine initial. le rang de rectangle qui reste finalement est plus petit ; donc, on assure la convergence de la nouvelle algorithme vers la solution optimale globale du problème original (PQN).

D'autre part, d'après des études théoriques de ces cas la méthode de "Branch and Bound " trouve la solution optimale approximative de la solution optimale globale de problème original (PQN) avec une vitesse de convergence quadratique sur l'ensemble réalisable S^K , mais la méthode (TDC) trouve la solution optimale globale sur le Sphère de S^K ; immédiatement on peut dire que la méthode (TDC) est efficace pour résoudre les problèmes quadratiques non convexes sur un sphère.

Bibliographie

- [1] A. Keraghel, Elements d'analyse convexe dans \mathbb{R}^n , Théorie fondamentale et exercices, université de Sétif, avril, 2001.
- [2] B.Gasmi and R. Benacer, New Branch and Bound Method over a boxed set of \mathbb{R}^n . Advances in Mathematics scientific journal. Vol 12, (2023) pp 603-630.
- [3] B. Gasmi, contribution à l'étude des Méthodes de résolution des problèmes d'optimisations quadratiques. Thèse de magister (2007).
- [4] D. Azé, éléments d'analyse convexe et variationnelle. Ellipses, Paris, 1997.
- [5] D. Y. Gao, Canonical duality theory and solutions to constrained non convex quadratic programming. Dedicated to professor Ivar Ekelend on the occasion of his 60th birthday. Journal of global optimization, 29 , (2004) pp 377-399.
- [6] D. R. Benacer, contribution à l'étude des algorithmes de l'optimisation non convexe et non différentiable, Thèse de Doctorat, Université scientifique, Technologique et médicale de Grenoble, 1986.
- [7] F. B. Akoa, Approches de points intérieurs et de la programmation DC en optimisation non convexe. Thèse de Doctorat, Laboratoire de Mathématiques de l'institut national des sciences appliquées de Rouen, (2005).
- [8] F. B. Akoa, Approches de points intérieurs et de la programmation DC en optimisation non convexe. Thèse de Doctorat, Laboratoire de Mathématiques de l'institut national des sciences appliquées de Rouen, (2005).

- [9] G.A. Anastassiou and O. Duman, Intelligent mathematics II, Applied mathematics and approximation theory. Vol 441, (2016) pp 105-117 .
- [10] H. Jiao, a Branch and Bound algorithm for globally solving a class of non convex programming problems, Non linear analysis 70 (2009) pp 1113-1123 .
- [11] H. Xue, Xu Chengxian, A Branch and Bound algorithm for solving a class of DC-Programming. Applied mathematics and computation 165 ,(2005) pp 291-302 .
- [12] J. B. Hiriart Urruty, Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with differences of convex functions, Lecture notes in Economics en Math systems, 256 , (1985), pp 37-70.
- [13] L. Eklend, R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris, 1974.
- [14] M. Panos Pardalos, Global optimization algorithms for linearly constrained indefinite quadratic problems, Computers math app lic. Vol. 21, NO 6/7, (1991) pp 87-97 .
- [15] M. Panos Pardalos, H. Edivin Romejin, H. Tuy, Recent developments and trends in global optimization. Journal of computational and applied mathematics, 124, (2000), pp 209-228.
- [16] M. Selmani, Méthodes de résolution de problèmes avec contraintes. Thèse de Doctorat, Institut de mathématiques appliquées de Grenoble, Sept, (1985).
- [17] P .D .Tao, T .Hoai, The DC programming and DCA revisited with the models of real world non convex optimizatio problems. Annals of operations research 133, (2005), pp 23-46.
- [18] P. Hansen, B. Jaumard, G. Savard, New branch and bound rules for linear bilevel programming. SIAM J. Sci. stat. comp. 13, (1992), pp 1194-1217.
- [19] R. Horst. M. Panous. Pardalos and Ngugen V. Thoai, Introduction to global optimization. Kluwer academic publishers. Dord Echt/ Boston/ London. Volume 3.(1995).
- [20] R. T. Rockafilar, convex analysis, Princeton Mathematic Ser. 28. Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1993.

- [21] T .H . An, Analyse numérique des algorithmes DC, Approches locale et globale, Thèse de Doctorat, université de Rouen, Decembre 1994.
- [22] Y Gao, H Xue, P Shen, A new rectangle Branch and Bound reduce approach for solving non convex quadratique programming problems, Applied mathemetics and computation 168 (2005), pp 1409-1418.

Résumé:

Dans cette thèse, nous avons présenté une étude théorique et algorithmique de la méthode de Séparation et Réduction pour résoudre les problèmes d'optimisation quadratiques non convexes sur un rectangle de R^n . Tout d'abord, nous avons présenté l'algorithme de Séparation et Réduction, qui utilise une approximation linéaire de la partie non convexe de la fonction objective. Ensuite, nous avons expliqué les nouvelles techniques de cette méthode appliquées sur un rectangle de R^n . Enfin, nous avons introduit une nouvelle approche de la méthode, dans laquelle nous avons appliqué une nouvelle approximation quadratique convexe de la partie non convexe de la fonction objective.

Mots clés: Programmation quadratique non convexe, Méthode de Branch et Bound, Optimisation globale, Programmation belinéaire 0-1.

Abstract:

In this thesis, we presented a theoretical and algorithmic study of the Separation and Reduction method for solving non-convex quadratic optimization problems on a rectangle in R^n . First, we introduced the Separation and Reduction algorithm, which uses a linear approximation of the non-convex part of the objective function. Next, we explained the new techniques of this method applied to a rectangle in R^n . Finally, we introduced a new approach to the method, in which we applied a new convex quadratic approximation of the non-convex part of the objective function.

Key words: Non convex quadratic programming, Branch and Bound method, Global optimization, Bilinear 0-1 programming

ملخص:

قدمنا في هذه الأطروحة دراسة نظرية وخوارزمية لطريقة الفصل والاختزال لحل المسائل التجويدية التربيعية الغير محدبة على مستطيل R^n . أولاً، قدمنا خوارزمية الفصل والاختزال، التي تستخدم تقريباً خطياً للجزء الغير محدب من الدالة المستهدفة. ثم شرحنا التقنيات الجديدة لهذه الطريقة المطبقة على مستطيل R^n . وأخيراً، قدمنا نهجاً جديداً للطريقة، حيث طبقنا تقريباً تربيعياً محدباً جديداً للجزء غير المحدب من الدالة المستهدفة.

الكلمات المفتاحية: البرمجة التربيعية الغير محدبة، طريقة الفصل والاختزال، التجويد الشامل، البرمجة البيلينيرية 0-1