

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université du Colonel El Hadj Lakhdar - Batna -

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques
Laboratoire des Techniques Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

En
Mathématiques

Thème :

Contrôlabilité exacte frontière pour un système d'équations de Schrödinger couplées

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par

Allag Ismahane

Devant le jury composé de:

Président : Mr. R. BENACER
Rapporteur : Mr. S. E. REBIAI
Examineur: Mr. K. MESSAOUDI
Examineur: Mr. N. BENSALAM

Prof. Université de Batna
Prof. Université de Batna
Prof. Université de Batna
MC. Université de Sétif

Table des matières

1	Introduction	3
2	Quelques notions de base de la géométrie riemannienne	6
2.1	Métrique riemannienne	6
2.1.1	Métrique euclidienne	6
2.2	Dérivée covariante et différentielle covariante	7
2.2.1	Connexion linéaire et dérivée covariante	7
2.2.2	Connexion de Levi-Civita	7
2.2.3	Différentielle covariante	8
2.2.4	Hessien d'une fonction	8
3	Estimations de Carleman	11
3.1	Estimations de Carleman pour une seule équation	13
3.2	Estimations de Carleman pour le système couplé	29
4	Contrôlabilité exacte	34
4.1	Définition et caractérisation de la contrôlabilité exacte	34
4.2	Contrôlabilité exacte du système couplé de type Dirichlet/ Dirichlet	36
4.3	Contrôlabilité exacte frontière du système couplé de type Neu- mann/ Neumann	43
4.4	Contrôlabilité exacte frontière du système couplé de type Dirich- let/ Neumann	54
5	Conclusion	62
6	Annexes	63
6.1	Annexe A	63
6.2	Annexe B (Contrôle optimal)	65
6.3	Annexe C	66

Résumé

Dans ce mémoire, on a établi plusieurs résultats de contrôlabilité exacte frontière pour un système couplé composé de deux équations de Schrödinger générales définies sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ de frontière lisse Γ , en adoptant l'approche développée par Triggiani et Yao [14] qui utilise les ingrédients suivants :

- . Méthodes de la géométrie riemannienne.*
- . Estimations de Carleman.*
- . Analyse micro- locale.*

Mots clés : équations de Schrödinger, contrôlabilité exacte, contrôle frontière, estimations de Carleman, variété riemannienne.

1 Introduction

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), de frontière lisse $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où Γ_0, Γ_1 sont ouverts et disjoints

Soit

$$\mathcal{A}y = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}) \quad (1.1)$$

un opérateur différentiel d'ordre deux à coefficients réels $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ de classe C^1 , satisfaisant

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq a \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

pour une constante a strictement positive et

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0 \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$$

Soient F_1, F_2, P_1 et P_2 des opérateurs linéaires différentiels de premier ordre par rapport à la variable spatiale x à coefficients de classe $L^\infty(\bar{Q})$, vérifiant les deux inégalités suivantes

$$\begin{cases} |F_1(y)|^2 \leq C_T [|\nabla y|^2 + |y|^2] \\ |F_2(z)|^2 \leq C_T [|\nabla z|^2 + |z|^2] \end{cases} ; \quad \forall y(t, x), z(t, x) \in C^1(Q) \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} |P_1(z)|^2 \leq C_T [|\nabla z|^2 + |z|^2] \\ |P_2(y)|^2 \leq C_T [|\nabla y|^2 + |y|^2] \end{cases} ; \quad \forall y(t, x), z(t, x) \in C^1(Q) \quad (1.4)$$

où $Q = [0, T] \times \Omega$

Notre objectif dans ce mémoire est l'étude du problème de la contrôlabilité exacte pour le système couplé de deux équations de Schrödinger suivant

$$\mathbf{i}y_t = \mathcal{A}y + F_1(y) + P_1(z) \quad \text{dans } Q \quad (1.5)$$

$$\mathbf{i}z_t = \mathcal{A}z + F_2(z) + P_2(y) \quad \text{dans } Q \quad (1.6)$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega \quad (1.7)$$

$$z(0, x) = z_0(x) \quad \text{sur } \Omega$$

soumis à l'une des actions frontières

Cas 1 : Dirichlet/ Dirichlet

$$\begin{array}{lll} y = 0 & z = 0 & \text{sur } \Sigma_0 = (0, T] \times \Gamma_0 \\ y = u_1 & z = u_2 & \text{sur } \Sigma_1 = (0, T] \times \Gamma_1 \end{array} \quad (1.8)$$

Cas 2 : Neumann/ Neumann

$$\begin{array}{lll} y = 0 & z = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = u_1 & \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = u_2 & \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \quad (1.9)$$

Cas 3 : Dirichlet/ Neumann

$$\begin{array}{lll} y = 0 & z = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ y = u_1 & \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = u_2 & \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \quad (1.10)$$

Dans le cas de l'équation de Schrödinger, ce problème a suscité une attention considérable dans la littérature.

Machtyngier [9] a établi un résultat de contrôlabilité exacte frontière pour l'équation de Schrödinger canonique (c'est à dire l'équation (1.5) avec $\mathcal{A} = -\Delta$, $F_1 = 0$) dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$ avec une action frontière de type Dirichlet de classe L^2 en utilisant la méthode HUM [8] et les multiplicateurs $h \cdot \nabla \bar{y}$ et $\bar{y} \operatorname{div} h$ où h est le champ de vecteurs radial.

Des résultats similaires ont été obtenus par Lasiecka et Triggiani [7] en adoptant une approche basée sur la surjectivité de l'opérateur reliant le contrôle à la solution et les multiplicateurs $h \cdot \nabla \bar{y}$ et $\bar{y} \operatorname{div} h$ où h est un champ de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ plus général que celui pris dans [9].

Dans [14], Triggiani et Yao ont montré des résultats de contrôlabilité exacte frontière pour l'équation de Schrödinger (1.5) avec $P_1 = 0$. L'approche qu'ils ont poursuivie combine les ingrédients suivants :

- (i) Méthodes de la géométrie riemannienne.
- (ii) Estimations de Carleman.
- (iii) Analyse micro-locale.

Les deux derniers ingrédients ont été utilisés précédemment par Triggiani [13] pour étudier la contrôlabilité exacte du système (1.5), (1.6), (1.7) avec l'une des conditions frontières (1.8), (1.9) et (1.10) dans le cas où $\mathcal{A} = \Delta$.

Dans ce mémoire, on adopte l'approche développée par Triggiani et Yao [14], pour établir des résultats de la contrôlabilité exacte pour le système (1.5), (1.6), (1.7) soumis à l'une des actions frontières (1.8), (1.9) et (1.10). On procède comme suit :

Dans le premier paragraphe, on rappelle quelques notions de base de la géométrie riemannienne qui seront utilisés dans la suite.

Dans le deuxième paragraphe, on présente les estimations de Carleman pour le système couplé (1.5), (1.6).

De ces estimations, on établit dans le troisième paragraphe, la contrôlabilité exacte du système couplé (1.5), (1.6), (1.7) avec les contrôles frontières (1.8) où (1.9) où (1.10).

2 Quelques notions de base de la géométrie riemannienne

Nous rappelons quelques notions de base de la géométrie riemannienne qui seront utilisées dans ce mémoire, pour plus de détails voir Hebey [4], Yao [15], Triggiani et Yao [14].

Soit $A(x)$ la matrice dont les coefficients $a_{ij}(x)$ sont définis dans (1.1) et soit $G(x)$ sa matrice inverse

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{0 \leq i, j \leq n}; \quad G(x) = [A(x)]^{-1} = (g_{ij}(x))_{0 \leq i, j \leq n} \quad (2.1)$$

2.1 Métrique riemannienne

Soit \mathbb{R}^n muni de sa topologie usuelle et x les coordonnées naturelles du système dans \mathbb{R}^n . Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ on définit le produit scalaire et la norme correspondante sur l'espace tangent $T_x\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= \langle X, Y \rangle_g \\ &= X.G(x)Y = \sum_{i, j=1}^n g_{ij}(x)\alpha_i\beta_j \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$|X|_g^2 = \langle X, X \rangle_g, \quad \forall X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_x\mathbb{R}^n$$

On peut vérifier que \mathbb{R}^n muni de la métrique riemannienne g est une variété riemannienne.

2.1.1 Métrique euclidienne

Dans le cas particulier où $A(x) = I_n$ (la matrice identité) on trouve que pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, la métrique riemannienne g n'est que la métrique euclidienne, notée par l'indice "0", définie sur \mathbb{R}^n par

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i \quad (2.3.a)$$

$$|X|_0^2 = \langle X, X \rangle_0; \quad \forall X \in T_x\mathbb{R}^n \quad (2.3.b)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a par (2.1)

$$A(x)X(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\alpha_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

2.2 Dérivée covariante et différentielle covariante

On note par $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$ l'espace des champs de vecteurs différentiables sur \mathbb{R}^n

2.2.1 Connexion linéaire et dérivée covariante

Une connexion sur \mathbb{R}^n est une application D définie de $\Gamma(T\mathbb{R}^n) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ vers $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$, qui vérifie

- (i) D est \mathbb{R} -bilinéaire
- (ii) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ et $X \in T_x\mathbb{R}^n$, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, alors

$$D(fX, H) = fD(X, H) \quad (2.5)$$

$$D(X, fH) = X(f)H + fD(X, H); \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^n) \quad (2.6)$$

On note généralement $D_X H$ au lieu de $D(X, H)$. $D_X H$ est la dérivée covariante de H par rapport à X . En utilisant (i), (ii) on l'exprime localement comme suit :

$$D_X H = \sum_{l=1}^n \left(X(h_l) + \sum_{i,k=1}^n h_k \alpha_i \Gamma_{ik}^l \right) \frac{\partial}{\partial x_l} \quad (2.7)$$

où $X(h_l) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial h_l}{\partial x_i}$ et Γ_{ik}^l sont les symboles de Christoffel de la connexion D , donnés par

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n a_{tp} \left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_p} \right), \quad g_{ij} = (a_{ij})^{-1} \quad (2.8)$$

2.2.2 Connexion de Levi-Civita

La connexion de Levi-Civita sur \mathbb{R}^n est une connexion D définie de $\Gamma(T\mathbb{R}^n) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ vers $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$\begin{aligned} g(D_X Y, Z) &= \frac{1}{2} (Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y)) \\ &\quad \forall X, Y, Z \in T_x\mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $[X, Y]$ est le crochet de Lie.

2.2.3 Différentielle covariante

Soit D la connexion de Levi-Civita dans la métrique riemannienne g . Soit H un champ de vecteur sur \mathbb{R}^n . La différentielle covariante DH de H détermine une forme bilinéaire sur $T_x \mathbb{R}^n \times T_x \mathbb{R}^n$ par

$$DH(X, Y) = \langle D_X H, Y \rangle_g \quad \text{pour chaque } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } X, Y \in T_x \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

D'après (2.4), (2.7), on a localement

$$DH(X, X) = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial h_l}{\partial x_i} g_{lj} + \sum_{k,l=1}^n h_k g_{lj} \Gamma_{ik}^l \right) \alpha_i \alpha_j \quad (2.11)$$

$$\text{où } H = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Donc dans $T_x \mathbb{R}^n \times T_x \mathbb{R}^n$, $DH(\cdot, \cdot)$ est équivalente à une matrice carrée $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, dont les coefficients sont :

$$m_{ij} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial h_l}{\partial x_i} g_{lj} + \sum_{k,l=1}^n h_k g_{lj} \Gamma_{ik}^l, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

2.2.4 Hessien d'une fonction

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Le hessien de f par rapport à la métrique riemannienne g est

$$D^2 f(X, X) = \langle D_X(\nabla_g f), X \rangle_g \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, X \in T_x \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

où $\nabla_g f$ est le gradient de f par rapport à g (voir (2.18) ci-dessous)

De (2.11) on déduit, pour tout $X \in T_x \mathbb{R}^n$

$$D^2 f(X, X) = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_i} g_{lj} + \sum_{k,l=1}^n f_k g_{lj} \Gamma_{ik}^l \right) \alpha_i \alpha_j \quad (2.14)$$

$$\text{où } H = \nabla_g f, h_l = (\nabla_g f)_l = f_l$$

Posons

$$m_{ij} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_i} g_{lj} + \sum_{k,l=1}^n f_k g_{lj} \Gamma_{ik}^l, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Alors, $D^2 f$ est positif sur $T_x \mathbb{R}^n \times T_x \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.

Le lemme suivant nous fourni quelques identités utiles pour la suite (voir Yao [15], Triggiani et Yao [14], Rebiai [12])

Lemme 2.1

Soient $f, h \in C^1(\bar{\Omega})$, X, H deux champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n . Alors

(a)

$$\langle H(x), A(x)X(x) \rangle_g = H(x).X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.16)$$

(b)

$$X(f) = X.\nabla_0 f = \langle X, \nabla_g f \rangle_g \quad (2.17)$$

où $\nabla_g f$ est le gradient de f par rapport à la métrique riemannienne g et est donné par

$$\nabla_g f = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.18)$$

(c) La dérivée co-normale $\frac{\partial y}{\partial \nu_A}$ est donnée par

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = (A(x)\nabla_0 y) . \nu = \nabla_g y . \nu \quad (2.19)$$

(d)

$$\langle \nabla_g f, \nabla_g h \rangle_g = \nabla_g f(h) = \nabla_0 f.A(x)\nabla_0 h \quad (2.20)$$

(e)

$$\mathcal{A}y = \text{div}_0(\nabla_g y) \quad (2.21)$$

où $\text{div}_0(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$ est la divergence de X dans la métrique euclidienne

(f)

$$\langle \nabla_g f, \nabla_g H(f) \rangle_g(x) = DH(\nabla_g f, \nabla_g f)(x) + \frac{1}{2} \text{div}_0 \left(|\nabla_g f|_g^2 H \right)(x)$$

$$- \frac{1}{2} |\nabla_g f|_g^2(x) \text{div}_0(H)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.22)$$

(g) **Formule de Green**

Soit $z \in C^1(\bar{\Omega})$. Alors

$$\langle \mathcal{A}y, z \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathcal{A}y \bar{z} d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{z} \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma - \int_{\Omega} \langle \nabla_g y, \nabla_g z \rangle_g d\Omega \quad (2.23)$$

Pour (a), (b), (c), (d), (e) et (g) on reprend la démonstration de Yao [15] et pour (f) on donne une démonstration différente.

Preuve

(a) On déduit de (2.2)

$$\begin{aligned} \langle H(x), A(x)X(x) \rangle_g &= H(x).G(x)A(x)X(x) \\ &= H(x).X(x); \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(b) On a

$$X(f) = X.\nabla_0 f = \langle X, \nabla_0 f \rangle_0 = \langle X, \nabla_g f \rangle_g$$

où $\nabla_g f$ est donné dans (2.18).

(c) C'est une conséquence directe de (2.18).

(d) On a

$$\begin{aligned} \langle \nabla_g f, \nabla_g h \rangle_g &= \langle \nabla_g f, G(x)\nabla_g h \rangle_0 = \langle \nabla_g f, G(x)A(x)\nabla_0 h \rangle_0 \\ &= \nabla_0 f.A(x)\nabla_0 h; \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(e) On a d'après (1.1) et la définition de divergence

$$\mathcal{A}y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = \text{div}_0(\nabla_g y)$$

(f) Comme D est une connexion de Levi-Civita, elle vérifie l'identité (2.9)

$$\begin{aligned} g(D_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y)); \\ \forall X, Y, Z &\in T_x \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Prenons $X = Z = \nabla_g f$ et $Y = H$ on trouve

$$\begin{aligned} DH(\nabla_g f, \nabla_g f) &= \langle D_{\nabla_g f} H, \nabla_g f \rangle_g \\ &= \frac{1}{2} \{ \nabla_g f g(H, \nabla_g f) + Hg(\nabla_g f, \nabla_g f) - \nabla_g f g(\nabla_g f, H) \\ &\quad + g([\nabla_g f, H], \nabla_g f) - g([H, \nabla_g f], \nabla_g f) - g([\nabla_g f, \nabla_g f], H) \} \\ &= \frac{1}{2} Hg(\nabla_g f, \nabla_g f) + g([\nabla_g f, H], \nabla_g f) \quad (2.24) \end{aligned}$$

Déterminons $Hg(\nabla_g f, \nabla_g f)$, $g([\nabla_g f, H], \nabla_g f)$

$$\begin{aligned}
Hg(\nabla_g f, \nabla_g f) &= H(|\nabla_g f|_g^2) = L_H \left(|\nabla_g f|_g^2 \right) = \sum_{i=1}^n H_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla_g f|_g^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla_g f|_g^2 H_i \right) - \sum_{i=1}^n |\nabla_g f|_g^2 \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \\
&= \operatorname{div}_0 \left(|\nabla_g f|_g^2 H \right) - |\nabla_g f|_g^2 \operatorname{div}_0(H)(x) \tag{2.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g([\nabla_g f, H], \nabla_g f) &= \langle [\nabla_g f, H], \nabla_g f \rangle_g = [\nabla_g f, H] \cdot \nabla_0 f = L_{\nabla_g f} L_H f - L_H L_{\nabla_g f} f \\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla_g f)_i \frac{\partial}{\partial x_i} (L_H f) - \sum_{i=1}^n H_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla_g f \cdot \nabla_0 f) \\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla_g f)_i \frac{\partial}{\partial x_i} (H(f)) - \sum_{i=1}^n H_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla_g f|_g^2 \right) \\
&= \nabla_g f \cdot \nabla_0 (H(f)) - \operatorname{div}_0 \left(|\nabla_g f|_g^2 H \right) (x) + |\nabla_g f|_g^2 \operatorname{div}_0(H)(x) \\
&= \langle \nabla_g f, \nabla_g (H(f)) \rangle - \operatorname{div}_0 \left(|\nabla_g f|_g^2 H \right) (x) + |\nabla_g f|_g^2 \operatorname{div}_0(H)(x) \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Insérant (2.25), (2.26) dans (2.24) on obtient l'identité (2.22).

(g) Soit $z \in C^1(\bar{\Omega})$. D'après (2.21) et la formule classique de Green on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}y, z \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \mathcal{A}y \bar{z} d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}_0(\nabla_g y) \bar{z} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \bar{z} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla_g y \cdot \nabla_0 \bar{z} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \bar{z} d\Gamma - \int_{\Omega} \langle \nabla_g y, \nabla_g \bar{z} \rangle_g d\Omega \blacksquare.
\end{aligned}$$

3 Estimations de Carleman

Dans cette partie, nous-nous interessons à présenter les estimations de Carleman pour le système couplé (1.5), (1.6). Inspiré par les travaux de Triggiani [13], on commence, tout d'abord, par donner ces estimations pour une seule équation c'est à dire l'équation (1.5) avec $P_1(z) = f$.

Supposons qu'il existe une fonction non négative $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , qui est strictement convexe sur $\bar{\Omega}$ par rapport à la métrique riemannienne g . Le hessien de v par rapport à la métrique g est donc strictement positif (voir Azé [1]; Théorème 3.36) et comme $\bar{\Omega}$ est compact, il existe une constante $\rho > 0$ telle que

$$D^2v(X, X) \geq \rho |X|_g^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, X \in T_x\mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

Remarque 3.1

Dans l'annexe C, on donne un exemple d'une fonction v vérifiant l'estimation (3.1).

Soit la fonction pseudo-convexe $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(t, x) \equiv v(x) - c \left| t - \frac{T}{2} \right|^2, \quad T > 0 \quad (3.2)$$

Pour tout $T > 0$, la constante c est suffisamment large pour que

(a)

$$\Phi(0, x) < -\delta \quad \text{et} \quad \Phi(T, x) < -\delta; \quad \text{uniformement dans } x \in \Omega \quad (3.3)$$

pour une constante appropriée $\delta > 0$.

(b) Ils existent t_0 et t_1 avec $0 < t_0 < \frac{T}{2} < t_1 < T$ tels que

$$\min_{t \in [t_0, t_1], x \in \Omega} \Phi(t, x) \geq -\frac{\delta}{2} \quad (3.4)$$

La fonction Φ vérifie les propriétés suivantes

•

$$\Phi(x, \frac{T}{2}) = v(x) \geq 0, \nabla_g v(x) = h(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.5)$$

où $h(x) = \nabla_g \Phi(x)$

•

$$\Phi_t(x, t) = -2c(t - \frac{T}{2}); \quad \Phi_{tt}(x, t) = -2c \quad (3.6.a)$$

$$\Phi_t(x, 0) = cT; \quad \Phi_t(x, T) = -cT \quad (3.6.b)$$

3.1 Estimations de Carleman pour une seule équation

Dans ce paragraphe, on rappelle les estimations de Carleman, pour l'équation (1.5), données dans Triggiani et Yao [14].

Théorème 3.1 " Première version des estimations de Carleman "

Supposons que les conditions (1.2), (1.3) et (3.1) sont satisfaites. Soient $f \in L^2(Q)$ et y une solution de l'équation

$$\mathbf{i}y = \mathcal{A}y + F_1(y) + f \quad \text{dans } Q \quad (3.7)$$

de classe

$$\begin{cases} y \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \\ y_t, \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \end{cases} \quad (3.8)$$

Soit Φ la fonction pseudo-convexe définie par (3.2). Alors, pour τ suffisamment large, on a

$$\begin{aligned} & (BT)_y \Big|_{\Sigma} + \frac{\text{const}}{\tau} \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ + C_{\Phi, \tau, T} \|y\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E_y(0) + E_y(T)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \int_{t_0}^{t_1} E_y(t) dt - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E_y(0) + E_y(T)) \quad (3.10)$$

où le terme frontière $(BT)_y \Big|_{\Sigma}$ est donné par

$$\begin{aligned} (BT)_y \Big|_{\Sigma} &= \text{Re} \left(\int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \frac{\partial y}{\partial \nu_A} h(\bar{y}) d\Sigma \right) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 h \cdot \nu d\Sigma \\ &+ \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \bar{y} \text{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) d\Sigma - \mathbf{i} \int_{\Sigma} y_t \bar{y} e^{\tau\Phi} h \cdot \nu d\Sigma \right| \end{aligned} \quad (3.11)$$

En plus, on a posé

$$E_y(t) = \int_{\Omega} |\nabla_g y(t, x)|_g^2 d\Omega \quad (3.12)$$

Preuve

On procède en deux étapes

Étape 1

Multiplions l'équation (3.7) par $e^{\tau\Phi}h(\bar{y})$ et intégrons sur Q . En utilisant la formule de Green, on obtient l'identité suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{ia} &= \mathbf{i} \int_{\Omega} y_t e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \\ &= \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma - \int_Q \langle \nabla_g y, \nabla_g e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \rangle_g dQ \\ &\quad + \int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \end{aligned}$$

De (2.22), on a

$$\begin{aligned} \langle \nabla_g y, \nabla_g (e^{\tau\Phi} h(\bar{y})) \rangle_g &= D(e^{\tau\Phi} h) (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) + \frac{1}{2} \operatorname{div}_0 \left(|\nabla_g y|_g^2 e^{\tau\Phi} h \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{ia} &= \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma - \int_Q D(e^{\tau\Phi} h) (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) dQ - \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div}_0 \left(|\nabla_g y|_g^2 e^{\tau\Phi} h \right) dQ \\ &\quad + \int_Q \frac{1}{2} |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ + \int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \quad (3.13) \end{aligned}$$

Calculons le terme $D(e^{\tau\Phi} h) (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y})$

D'après (2.10), (2.20), on a

$$\begin{aligned} D(e^{\tau\Phi} h) (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) &= \langle D_{\nabla_g y} (e^{\tau\Phi} h), \nabla_g \bar{y} \rangle_g \\ &= \langle \tau e^{\tau\Phi} \nabla_g y (\Phi) h + e^{\tau\Phi} D_{\nabla_g y} h, \nabla_g \bar{y} \rangle_g \\ &= \tau e^{\tau\Phi} [h(y)]^2 + e^{\tau\Phi} D^2 \Phi (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) \quad (3.14) \end{aligned}$$

Insérant (3.14) dans (3.13), on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{ia} &= \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div}_0 \left(|\nabla_g y|_g^2 e^{\tau\Phi} h \right) dQ \\ &\quad - \int_Q e^{\tau\Phi} D^2 \Phi (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) dQ + \int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \\ &\quad + \int_Q \frac{1}{2} |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ - \tau \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ \quad (3.15) \end{aligned}$$

De l'identité de divergence $\int_{\Gamma} \Psi k \cdot \nu d\Gamma = \int_{\Omega} \Psi \operatorname{div}_0 k d\Omega + \int_{\Omega} k \cdot \nabla_0 \Psi d\Omega$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}a &= \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 h \cdot \nu d\Sigma \\
&\quad - \int_Q e^{\tau\Phi} D^2\Phi(\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) dQ + \int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \\
&\quad + \int_Q \frac{1}{2} |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ - \tau \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ
\end{aligned} \tag{3.16}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} y_t \bar{y} e^{\tau\Phi} h \cdot \nu d\Sigma &= \int_Q y_t \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ + \int_Q [y_t \nabla_0 \bar{y} + \bar{y} \nabla_0 y_t] e^{\tau\Phi} h dQ \\
&= \int_Q y_t \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ + a + \int_Q e^{\tau\Phi} \bar{y} h(y_t) dQ \\
&= a - \bar{a} + \int_Q y_t \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ \\
&\quad - \int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt}(e^{\tau\Phi}) dQ + \left[\int_{\Omega} e^{\tau\Phi} \bar{y} h(y) d\Omega \right]_0^T
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Le lemme suivant donne une expression utile au terme $\int_Q y_t \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ$

Lemme 3.1

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} \int_Q y_t \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ &= \int_{\Sigma} \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma + \int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ \\
&\quad - \int_Q |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ - \int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g(\operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g dQ
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Preuve

Multiplions l'équation (3.7) par $\bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h)$ et intégrons sur Q . En utilisant la formule de Green et la relation (2.20) on obtient le resultat désiré.

Insérant (3.18) dans (3.17), on trouve

$$\begin{aligned}
a - \bar{a} &= \int_{\Sigma} y_t \bar{y} e^{\tau\Phi} h \cdot \nu d\Sigma + \mathbf{i} \int_{\Sigma} \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma \\
&\quad - \mathbf{i} \int_Q |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ - \mathbf{i} \int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g(\operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g dQ \\
&\quad + \int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt}(e^{\tau\Phi}) dQ - \left[\int_{\Omega} e^{\tau\Phi} \bar{y} h(y) d\Omega \right]_0^T + \mathbf{i} \int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) dQ
\end{aligned}$$

Prenons maintenant la partie réelle de (3.16) et utilisons $\operatorname{Re}(\mathbf{i}a) = \frac{\mathbf{i}}{2}(a - \bar{a})$, on obtient le résultat final de cette étape

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left(\int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma \right) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 h \cdot \nu d\Sigma \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma - \frac{\mathbf{i}}{2} \int_{\Sigma} y_t \bar{y} e^{\tau\Phi} h \cdot \nu d\Sigma \\
& = \int_Q e^{\tau\Phi} D^2 \Phi (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) dQ + \tau \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ - \operatorname{Re} \left(\int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \right) \\
& + \frac{1}{2} \int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g dQ - \frac{1}{2} \int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ \\
& + \frac{\mathbf{i}}{2} \int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) dQ - \frac{\mathbf{i}}{2} \left[\int_{\Omega} e^{\tau\Phi} \bar{y} h(y) d\Omega \right]_0^T \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Étape 2

Récrivons (3.19) comme suit

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left(\int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma \right) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 h \cdot \nu d\Sigma \\
& - \int_Q e^{\tau\Phi} D^2 \Phi (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) dQ - \tau \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ + \operatorname{Re} \left(\int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \right) \\
& = \frac{1}{2} \int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g dQ - \frac{1}{2} \int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ \\
& + \frac{\mathbf{i}}{2} \int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) dQ - \frac{\mathbf{i}}{2} \left[\int_{\Omega} e^{\tau\Phi} \bar{y} h(y) d\Omega \right]_0^T \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma + \frac{\mathbf{i}}{2} \int_{\Sigma} y_t \bar{y} e^{\tau\Phi} h \cdot \nu d\Sigma
\end{aligned}$$

Prenons la partie réelle de l'identité précédente.

En utilisant $\operatorname{Re}(z) \geq -|z|$, on trouve

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left(\int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma \right) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 h \cdot \nu d\Sigma \\
& + \left| \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Sigma - \frac{\mathbf{i}}{2} \int_{\Sigma} y_t \bar{y} e^{\tau\Phi} h \cdot \nu d\Sigma \right| \\
& \geq \int_Q e^{\tau\Phi} D^2\Phi (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) dQ + \tau \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ - \operatorname{Re} \left(\int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \right) \\
& - \left| \frac{1}{2} \int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g dQ - \frac{1}{2} \int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ \right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{i}}{2} \int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) dQ \right| - \left| \frac{\mathbf{i}}{2} \left[\int_{\Omega} e^{\tau\Phi} \bar{y} h(y) d\Omega \right]_0^T \right| \tag{3.20}
\end{aligned}$$

On montre l'estimation (3.9) à partir de (3.20).

De (1.2), (2.20), on a

$$a |\nabla_0 y(t, x)|^2 \leq |\nabla_g y(t, x)|_g^2 \leq \alpha |\nabla_0 y(t, x)|^2; \quad x \in \Omega \tag{3.21}$$

où la constante $\alpha = \max_{x \in \Omega} |a_{ij}(x)|$; $i, j = 1, \dots, n$

On va estimer les termes du membre de droite de (3.20). Commençons par les trois premiers termes

Lemme 3.2

On a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
& \int_Q e^{\tau\Phi} D^2\Phi (\nabla_g y, \nabla_g \bar{y}) dQ + \tau \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ - \operatorname{Re} \left(\int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \right) \\
& \geq (\rho - \epsilon C_T^1) \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ + \left(\tau - \frac{1}{2\epsilon} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ \\
& - \epsilon C_{\Phi, \tau, T} \|y\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 - \epsilon \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Preuve

De (1.3), (3.21) et de l'inégalité $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Re} \left(\int_Q (F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y}) dQ \right) &\geq -|(F_1(y) + f) e^{\tau\Phi} h(\bar{y})| \\
&\geq -\frac{\epsilon}{2} |F_1(y) + f|^2 e^{\tau\Phi} - \frac{1}{2\epsilon} e^{\tau\Phi} |h(\bar{y})|^2 \\
&\geq -\frac{\epsilon}{a} C_T e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 - \epsilon C_T |y|^2 e^{\tau\Phi} - \epsilon |f|^2 e^{\tau\Phi} \\
&\quad - \frac{1}{2\epsilon} e^{\tau\Phi} |h(\bar{y})|^2 \tag{3.23}
\end{aligned}$$

En combinant (3.1) et (3.23) on obtient (3.22), où $C_T^1 = \frac{C_T}{a}$.

La majoration des trois derniers intégrales sur Q de (3.20) est l'objectif du lemme suivant

Lemme 3.3

Pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& - \left| \frac{1}{2} \int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g dQ - \frac{1}{2} \int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ \right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{i}}{2} \int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) dQ \right| \\
& \geq -2\epsilon \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ - C_{\tau, T, \epsilon} \int_Q |y|^2 e^{\tau\Phi} dQ - \epsilon a \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Preuve

Estimation du terme $\int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g$

On a

$$\begin{aligned}
\nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) (x) &= A(x) \nabla (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) (x) \\
&= e^{\tau\Phi} A(x) L(x)
\end{aligned}$$

où

$$L(x) = \tau^2 |\nabla_g \Phi|_g^2 \nabla_0 \Phi(x) + \tau \nabla_0 (|\nabla_g \Phi|_g^2) (x) + \tau \operatorname{div}_0 (\nabla_g \Phi) \nabla_0 \Phi(x) + \nabla_0 (\operatorname{div} (\nabla_g \Phi)) (x)$$

Alors de (2.20), (3.21), on trouve que, pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\left| \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g \right| &= e^{\tau\Phi} |\bar{y} \nabla_0 y \cdot A(x) L| \\
&\leq \left(\frac{\epsilon}{2} |\nabla_g y|_g^2 + \frac{C_1^2}{2\epsilon a} |y|^2 \right) e^{\tau\Phi}
\end{aligned}$$

où $C_1 = \max_{x \in \bar{\Omega}} |L(x)|$. Donc

$$-\left| \int_Q \bar{y} \langle \nabla_g y, \nabla_g (\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)) \rangle_g dQ \right| \geq -\frac{\epsilon}{2} \int_Q |\nabla_g y|_g^2 e^{\tau\Phi} dQ - \frac{C_1^2}{2\epsilon a} \int_Q |y|^2 e^{\tau\Phi} dQ \quad (3.25)$$

Estimation du terme $\int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ$

Posons

$$\begin{aligned} C_2 &= \max_{x \in \bar{\Omega}} |\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)(x)| \\ C_3 &= \epsilon a C_T + \frac{C_2^2}{2\epsilon a} \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} -\left| \int_Q (F_1(y) + f) \bar{y} \operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h) dQ \right| &\geq -\epsilon C_T \int_Q |\nabla_g y|_g^2 e^{\tau\Phi} dQ - \epsilon a \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ \\ &\quad - C_3 \int_Q |y|^2 e^{\tau\Phi} dQ \end{aligned} \quad (3.26)$$

Estimation du terme $\int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) dQ$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) &= \tau e^{\tau\Phi} \Phi_t(x, t) = -2c\tau e^{\tau\Phi} \left(t - \frac{T}{2} \right) \\ &\leq \tau T c e^{\tau\Phi} \end{aligned}$$

où c est donnée dans (3.2), (3.3), (3.4)

Alors

$$\begin{aligned} \left| \bar{y} h(y) \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) \right| &\leq C_4 e^{\tau\Phi} |\bar{y} \nabla_0 y \cdot \nabla_g \Phi| \\ &\leq \left(\frac{\epsilon}{2} |\nabla_g y|_g^2 + \frac{C_6^2}{2\epsilon a} |y|^2 \right) e^{\tau\Phi} \end{aligned}$$

où $C_4 = \tau T c$, $C_5 = \max_{(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} |\nabla_g \Phi(t,x)|$ et $C_6 = C_4 C_5$

Donc

$$-\left| \int_Q \bar{y} h(y) \frac{d}{dt} (e^{\tau\Phi}) dQ \right| \geq -\frac{\epsilon}{2} \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ - \frac{C_6^2}{2\epsilon a} \int_Q e^{\tau\Phi} |y|^2 dQ \quad (3.27)$$

Combinant (3.25), (3.26) et (3.27), on obtient (3.24), avec $C_{\tau,T,\epsilon} = \frac{C_1^2}{2\epsilon a} + C_3 + \frac{C_6^2}{2\epsilon a}$

Reportons les majorations (3.22) et (3.24) dans (3.20), on trouve

$$\begin{aligned} (BT)_y \Big|_{\Sigma} &\geq (\rho - \epsilon (C_T^1 + 2)) \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ - \left(\tau - \frac{1}{2\epsilon} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} |h(y)|^2 dQ \\ &\quad - C_7 \|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 - \epsilon(a+1) \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ - B_{0,T} \end{aligned} \quad (3.28)$$

où $C_7 = C_{\tau,T,\epsilon} C_{\Phi}$ et $B_{0,T} = \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} e^{\tau\Phi} \bar{y} h(y) d\Omega \right]_0^T$

Estimation du terme $B_{0,T}$

$$\begin{aligned} -B_{0,T} &= - \left| \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \bar{y} e^{\tau\Phi} h(y) d\Omega \right]_0^T \right| \\ &= - \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} \bar{y}(T) e^{\tau\Phi(x,T)} h \cdot \nabla_0 y(T) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{y}(0) e^{\tau\Phi(x,0)} h \cdot \nabla_0 y(0) d\Omega \right| \\ &\geq - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{y}(T)| e^{\tau\Phi(x,T)} |h \cdot \nabla_0 y(T)| d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{y}(0)| e^{\tau\Phi(x,0)} |h \cdot \nabla_0 y(0)| d\Omega \end{aligned}$$

De (3.3), on a

$$\begin{aligned} -B_{0,T} &\geq - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{y}(T)| e^{-\delta\tau} |h \cdot \nabla_0 y(T)| d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{y}(0)| e^{-\delta\tau} |h \cdot \nabla_0 y(0)| d\Omega \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} -B_{0,T} &\geq - \frac{\epsilon}{4} e^{-\delta\tau} \left(\int_{\Omega} |\nabla_g y(T)|_g^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla_g y(0)|_g^2 d\Omega \right) \\ &\quad - \frac{C_5^2}{4\epsilon} e^{-\delta\tau} \int_{\Omega} (|y(T)|^2 + |y(0)|^2) d\Omega \\ &\geq - \frac{\epsilon}{4} e^{-\delta\tau} (E_y(T) + E_y(0)) - \frac{C_5^2}{4\epsilon} e^{-\delta\tau} \|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Prenons $\tau = \frac{1}{\epsilon}$ et insérons (3.29) dans (3.28), on obtient

$$\begin{aligned} (BT)_y \Big|_{\Sigma} &\geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ - C_{\Phi,\tau,T} \|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad - \frac{1}{\tau} e^{-\delta\tau} (E_y(T) + E_y(0)) - \frac{(a+1)}{\tau} \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ \end{aligned}$$

D'où (3.9).

Pour obtenir (3.10), on utilise la propriété (3.4) ■.

Pour établir la deuxième version des estimations de Carleman, on suppose que l'opérateur F_1 est de la forme

$$F_1(y) = R_1 \cdot \nabla y + \rho_1 y \quad (3.30)$$

où $|R_1(x)| \in L^\infty(\bar{\Omega})$ et $\rho_1 : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$; $\rho_1(t, x) \in L^\infty(\bar{Q})$

Théorème 3.2 " Deuxième version des estimations de Carleman "

Assumons (1.2), (1.3), (3.1) et (3.30). Soient $f \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, y une solution de l'équation (3.7) dans la classe (3.8). Alors, pour τ suffisamment large, il existe une constante $K_{\Phi, \tau, T} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} (BT)_{1,y} \Big|_{\Sigma} + \frac{const}{\tau} \int_Q |f|^2 e^{\tau\Phi} dQ + c \|f\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + C_{\Phi, \tau, T} \|y\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \\ \geq K_{\Phi, \tau, T} (E_y(0) + E_y(T)) \end{aligned} \quad (3.31)$$

où

$$(BT)_{1,y} \Big|_{\Sigma} = (BT)_y \Big|_{\Sigma} + const_{\Phi, \tau, \rho} \int_{\Sigma} [|y_t| + |W_1(y)| + |\rho_1| |y| + |f|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \quad (3.32)$$

$$K_{\Phi, \tau, T} = e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \left\{ \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{(t_1 - t_0)}{2} e^{-kT} - \frac{e^{-\frac{\delta\tau}{2}}}{\tau} \right\}$$

et $W_1(x)$ est la composante tangentielle sur Γ , du champ de vecteurs $R_1(x)$.

Preuve

Divisons cette démonstration en deux étapes

Étape 1

Le lemme suivant est nécessaire dans la suite

Lemme 3.4 Soit y une solution de l'équation (3.7) dans la classe (3.8). Alors, pour tout $t, s \in [0, T]$, on a

(a)

$$\begin{aligned} E_y(t) &= E_y(s) + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Gamma} \bar{y}_t \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} (F_1(y) + f) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

(b)

$$\begin{aligned} E_y(t) - E_y(s) &\leq 2 \int_{\Sigma} [|y_t| + |W_1(y)| + |\rho_1| |y| + |f|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ &\quad + k \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma + \mu \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma + \lambda \|f\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Preuve

(a) Voir Triggiani et Yao [14], page 18.

(b) Pour obtenir l'estimation (3.34), il suffit de majorer les trois derniers termes du membre de droite de (3.33)

Commençons par le terme $2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right)$

Multiplions l'équation

$$\bar{y}_t = \mathbf{i} \mathcal{A} \bar{y} + \mathbf{i} \overline{F_1(y)} + \mathbf{i} \bar{f} \quad (3.35)$$

Par $F_1(y)$ et intégrons sur Ω . La formule de Green nous donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t &= \mathbf{i} \int_{\Gamma} F_1(y) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma - \mathbf{i} \int_{\Omega} \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g (R_1(y)) \rangle_g d\Omega \\ &\quad - \mathbf{i} \int_{\Omega} \rho_1 |\nabla_g y|_g^2 d\Omega - \mathbf{i} \int_{\Omega} y \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g \rho_1 \rangle_g d\Omega \\ &\quad + \mathbf{i} \int_{\Omega} |F_1(y)|^2 d\Omega + \mathbf{i} \int_{\Omega} F_1(y) \bar{f} d\Omega \end{aligned} \quad (3.36)$$

De (2.22) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_g y, \nabla_g (R_1(y)) \rangle_g d\Omega &= \int_{\Omega} DR_1(\nabla_g \bar{y}, \nabla_g y) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}_0 \left(|\nabla_g y|_g^2 R_1 \right) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0 (R_1) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} DR_1(\nabla_g \bar{y}, \nabla_g y) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\nabla_g y|_g^2 R_1 \cdot \nu d\Gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0 (R_1) d\Omega \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t &= \mathbf{i} \int_{\Gamma} F_1(y) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma - \mathbf{i} \int_{\Omega} DR_1 (\nabla_g \bar{y}, \nabla_g y) d\Omega - \frac{\mathbf{i}}{2} \int_{\Gamma} |\nabla_g y|_g^2 R_1 \cdot \nu d\Gamma \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{2} \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g^2 \operatorname{div}_0(R_1) d\Omega + \mathbf{i} \int_{\Omega} |F_1(y)|^2 d\Omega + \mathbf{i} \int_{\Omega} F_1(y) \bar{f} d\Omega \\ &\quad - \mathbf{i} \int_{\Omega} y \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g \rho_1 \rangle_g d\Omega - \mathbf{i} \int_{\Omega} \rho_1 |\nabla_g y|_g^2 d\Omega \end{aligned}$$

Puisque R_1 est un champ de vecteurs réel on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) &= \operatorname{Re} \left(\mathbf{i} \int_s^t \int_{\Gamma} F_1(y) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\ &\quad - \operatorname{Re} \left[\mathbf{i} \int_s^t \int_{\Omega} y \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g \rho_1 \rangle_g d\Omega d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i} \int_s^t \int_{\Omega} \rho_1 |\nabla_g y|_g^2 d\Omega d\sigma - \mathbf{i} \int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{f} d\Omega d\sigma \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sur Γ , R_1 peut être décomposé sous la forme suivante

$$R_1(x) = \frac{R_1(x) \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \nu_{\mathcal{A}}(x) + W_1(x)$$

où W_1 est la composante tangentielle sur Γ du champ de vecteurs R_1 et

$$\nu_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \nu_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Alors, sur Γ , on a

$$F_1(y) = \frac{R_1 \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} A(x) \nu(x) \cdot \nabla y + W_1(y) + \rho_1 y \quad (3.39)$$

Comme la matrice $A(x)$ est symétrique pour tout $x \in \Omega$, on a

$$F_1(y) = \frac{R_1 \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} + W_1(y) + \rho_1 y; \quad x \in \Omega \quad (3.40)$$

Multiplions (3.40) par $\mathbf{i} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$, intégrons sur $[s, t] \times \Gamma$ et prenons la partie réelle, on trouve

$$\operatorname{Re} \left(\mathbf{i} \int_s^t \int_{\Gamma} F_1(y) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma \right) = \operatorname{Re} \left(\mathbf{i} \int_s^t \int_{\Gamma} (W_1(y) + \rho_1 y) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right)$$

Donc (3.38) devient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) &= \operatorname{Re} \left(\mathbf{i} \int_s^t \int_{\Gamma} (W_1(y) + \rho_1 y) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\ &\quad - \operatorname{Re} \left[\mathbf{i} \int_s^t \int_{\Omega} y \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g \rho_1 \rangle_g d\Omega d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i} \int_s^t \int_{\Omega} \rho_1 |\nabla_g y|_g^2 d\Omega d\sigma - \mathbf{i} \int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{f} d\Omega d\sigma \right] \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) \right| &\leq \int_s^t \int_{\Gamma} [|W_1(y)| + |\rho_1| |y|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma d\sigma \\ &\quad + \int_s^t \int_{\Omega} |\rho_1| |\nabla_g y|_g^2 d\Omega d\sigma + \int_s^t \int_{\Omega} |F_1(y)| |f| d\Omega d\sigma \\ &\quad + \int_s^t \int_{\Omega} |y \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g \rho_1 \rangle_g| d\Omega d\sigma \quad (3.41) \end{aligned}$$

On va majorer les deux derniers termes du membre de droite de (3.41)

• Posons

$$C_8 = \max_{(t,x) \in \bar{Q}} |\nabla_g \rho_1(t, x)|$$

Donc de (2.20), (3.21) on a , pour tout $\epsilon > 0$

$$\int_s^t \int_{\Omega} |y \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g \rho_1 \rangle_g| d\Omega d\sigma \leq \frac{\epsilon}{2} \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g^2 d\Omega d\sigma + \frac{C_8^2}{2\epsilon a} \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma \quad (3.42)$$

• De (1.3), (3.21), on a

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\Omega} |F_1(y) \bar{f}| d\Omega d\sigma &\leq \frac{\epsilon}{2a} C_T \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g^2 d\Omega d\sigma + \frac{\epsilon}{2} C_T \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega d\sigma \quad (3.43) \end{aligned}$$

Insérant (3.42), (3.43), dans (3.41), on trouve

$$\begin{aligned} 2 \left| \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) \right| &\leq 2 \int_s^t \int_{\Gamma} [|W_1(y)| + |\rho_1| |y|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma d\sigma \\ &\quad + C_9 \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma + C_{10} \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega d\sigma \quad (3.44) \end{aligned}$$

où $C_9 = \epsilon + \frac{\epsilon C_T}{a}$, $C_{10} = \epsilon C_T + \frac{C_8^2}{\epsilon a}$
 Reportons l'estimation (3.44) dans (3.33) on obtient

$$\begin{aligned}
 E_y(t) - E_y(s) &\leq 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Gamma} \bar{y}_t \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\
 &\quad 2 \int_s^t \int_{\Gamma} [|W_1(y)| + |\rho_1| |y|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma d\sigma \\
 &\quad + C_9 \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma + C_{10} \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega d\sigma + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} f \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

D'une façon similaire à la majoration du terme $\int_s^t \int_{\Omega} F_1(y) \bar{y}_t d\Omega d\sigma$ on estime le terme $\int_s^t \int_{\Omega} f \bar{y}_t d\Omega d\sigma$.

Multiplions l'équation (3.35) par f et intégrons sur Ω . La formule de Green nous donne

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f \bar{y}_t d\Omega &= \mathbf{i} \int_{\Gamma} f \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma + \mathbf{i} \int_{\Omega} (R_1 \cdot \nabla_0 \bar{y} + \overline{\rho_1 y}) f d\Omega \\
 &\quad + \mathbf{i} \int_{\Omega} \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g f \rangle_g d\Omega + \mathbf{i} \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Intégrons sur $[s, t]$, puis prenons la partie réelle, on trouve

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} f \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) &\leq 2 \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| |f| d\Sigma + 2 \int_s^t \int_{\Omega} \left| \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g f \rangle_g \right| d\Omega d\sigma \\
 &\quad + 2 \int_s^t \int_{\Omega} |R_1 \cdot \nabla_0 \bar{y} + \overline{\rho_1 y}| |f| d\Omega d\sigma \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Estimons les trois derniers termes du membres de droite de (3.47).

On a d'après (2.20), (3.21), pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_s^t \int_{\Omega} \left| \langle \nabla_g \bar{y}, \nabla_g f \rangle_g \right| d\Omega d\sigma &\leq \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g |\nabla_g f|_g d\Omega d\sigma \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g^2 d\Omega d\sigma + \frac{1}{2\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla_g f|_g^2 d\Omega d\sigma \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_s^t \int_{\Omega} E_y(\sigma) d\sigma + \frac{\alpha}{2\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega d\sigma \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\Omega} |R_1 \cdot \nabla_0 \bar{y} + \overline{\rho_1 y}| |f| d\Omega d\sigma &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |R_1(x)| \int_s^t \int_{\Omega} |\nabla_0 y| |f| d\Omega d\sigma \\ &\quad + \max_{(t,x) \in \bar{Q}} |\rho_1(t,x)| \int_s^t \int_{\Omega} |y| |f| d\Omega d\sigma \end{aligned}$$

Posons $C_{11} = \max(\max_{x \in \bar{\Omega}} |R_1(x)|, \max_{(t,x) \in \bar{Q}} |\rho_1(t,x)|)$.

Alors , pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\Omega} |R_1 \cdot \nabla_0 \bar{y} + \overline{\rho_1 y}| |f| d\Omega d\sigma &\leq \frac{\epsilon}{2a} C_{11}^2 \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} C_{11}^2 \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma + \frac{1}{2\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega d\sigma \end{aligned} \quad (3.49)$$

Donc (3.47) devient

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} f \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) &\leq 2 \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| |f| d\Sigma + \left(\frac{\epsilon}{2a} C_{11}^2 + \epsilon \right) \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma \\ &\quad + \epsilon C_{11}^2 \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma + \frac{\alpha}{\epsilon} \|f\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega d\sigma \end{aligned} \quad (3.50)$$

Insérons (3.50) dans (3.45) on trouve

$$\begin{aligned} E_y(t) - E_y(s) &\leq 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Gamma} \bar{y}_t \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\ &\quad + 2 \int_s^t \int_{\Gamma} [|W_1(y)| + |\rho_1| |y| + |f|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma d\sigma \\ &\quad + \left(C_9 + \frac{\epsilon}{2a} C_{11}^2 + \epsilon \right) \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma + (C_{10} + \epsilon C_{11}^2) \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_s^t \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega d\sigma + \frac{\alpha}{\epsilon} \|f\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

D'où (3.34) avec

$$\begin{aligned} k &= C_9 + \frac{\epsilon}{2a} C_{11}^2 + \epsilon \\ \mu &= C_{10} + \epsilon C_{11}^2 \\ \lambda &= \frac{\alpha + 1}{\epsilon} \end{aligned}$$

Étape 2

Posons dans (3.34)

$$\begin{aligned}\Lambda(T) &= 2 \int_{\Sigma} [|y_t| + |W_1(y)| + |\rho_1| |y| + |f|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ &\quad + \mu \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma + \lambda \|f\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2\end{aligned}$$

Donc

$$E_y(t) \leq E_y(s) + \Lambda(T) + k \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma \quad (3.51)$$

Pour continuer on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.5

Pour $0 \leq s \leq t \leq T$

(i)

$$E_y(s) \leq E_y(t) + \Lambda(T) + k \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma \quad (3.52)$$

(ii)

$$E_y(t) \leq (E_y(s) + \Lambda(T)) e^{k(t-s)} \quad (3.53.a)$$

$$E_y(s) \leq (E_y(t) + \Lambda(T)) e^{k(t-s)} \quad (3.53.b)$$

(iii)

$$E_y(t) \geq \frac{E_y(0) + E_y(T)}{2} e^{-kT} - \Lambda(T) \quad (3.54)$$

Preuve

(i) (3.52) s'obtient de la même façon que (3.34).

(ii) De (3.51), (3.52) et de l'inégalité de Gronwall (voir par exemple Curtain et Zwart [3] page 639) on obtient (3.53.a), (3.53.b).

(iii) Prenons $t = T$, $s = t$ dans (3.53.a) et dans (3.53.b) $s = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}E_y(0) &\leq (E_y(t) + \Lambda(T)) e^{kt} \\ &\leq (E_y(t) + \Lambda(T)) e^{kT}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y(T) &\leq (E_y(t) + \Lambda(T)) e^{k(T-t)} \\
&\leq (E_y(t) + \Lambda(T)) e^{kT}
\end{aligned}$$

Donc

$$E_y(t) \geq \frac{E_y(0) + E_y(T)}{2} e^{-kT} - \Lambda(T)$$

Insérant (3.54) dans (3.10), on trouve

$$\begin{aligned}
&(BT)_y \Big|_{\Sigma} + \frac{\text{const}}{\tau} \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ + C_{\Phi,\tau,T} \|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\
&\geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{E_y(0) + E_y(T)}{2} e^{-kT} - \Lambda(T) \right] dt \\
&\quad - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E_y(0) + E_y(T))
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&(BT)_y \Big|_{\Sigma} + \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) (t_1 - t_0) e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \Lambda(T) \\
&\quad + \frac{\text{const}}{\tau} \int_Q e^{\tau\Phi} |f|^2 dQ + C_{\Phi,\tau,T} \|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\
&\geq \left[\left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{(t_1 - t_0)}{2} e^{-\frac{(\delta\tau+2kT)}{2}} - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} \right] (E_y(0) + E_y(T))
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&(BT)_y \Big|_{\Sigma} + (\mu \text{const}_{\Phi,\tau,T} + C_{\Phi,\tau,T}) \|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\
&\quad + 2 \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) (t_1 - t_0) e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \left[\int_{\Sigma} [|y_t| + |W_1(y)| + |\rho_1| |y| + |f|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \right] \\
&\quad + \lambda \text{const}_{\Phi,\tau,T} \|f\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 + \frac{\text{const}}{\tau} \int_Q |f|^2 e^{\tau\Phi} dQ \\
&\geq \left[\left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{(t_1 - t_0)}{2} e^{-\frac{(\delta\tau+2kT)}{2}} - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} \right] (E_y(0) + E_y(T))
\end{aligned}$$

et donc le résultat désiré, où $\text{const}_{\Phi,\tau,T} = \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) (t_1 - t_0) e^{-\frac{\delta\tau}{2}}$. ■

3.2 Estimations de Carleman pour le système couplé

Dans cette partie, on présente les estimations de Carleman pour le système couplé (1.5), (1.6) et nous compterons fortement sur les résultats de la partie précédente.

Théorème 3.3 " Première version des estimations de Carleman "

En plus des hypothèses du théorème 3.1, supposons (1.4). Soient y, z solutions du système (1.5), (1.6) de classe

$$\begin{cases} y, z \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \\ y_t, z_t, \frac{\partial y}{\partial \nu_A}, \frac{\partial z}{\partial \nu_A} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \end{cases} \quad (3.55)$$

Soit Φ la fonction pseudo-convexe donnée dans (3.2). Alors les estimations suivantes sont vérifiées pour τ suffisamment large

$$\begin{aligned} & (BT)_y \Big|_{\Sigma} + (BT)_z \Big|_{\Sigma} + \theta_{\Phi, \tau, T} \left(\|y\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right) \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau \Phi} \left(|\nabla_g y|_g^2 + |\nabla_g z|_g^2 \right) dQ - \frac{e^{-\delta \tau}}{\tau} (E_y(0) + E_y(T)) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\geq \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{\delta \tau}{2}} \int_{t_0}^{t_1} E(t) dt - \frac{e^{-\delta \tau}}{\tau} (E(0) + E(T)) \quad (3.57)$$

où le terme frontière $(BT)_y \Big|_{\Sigma}$ est donné par (3.11), $(BT)_z \Big|_{\Sigma}$ n'est que $(BT)_y \Big|_{\Sigma}$ en remplaçant y par z
En plus, on a posé

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{\Omega} |\nabla_g y|_g^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla_g z|_g^2 d\Omega \\ &= E_y(t) + E_z(t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Preuve

L'estimation de Carleman correspondante à l'équation (1.5), s'obtient de (3.9), en posant $f = P_1(z)$

$$\begin{aligned} & (BT)_y \Big|_{\Sigma} + \frac{const}{\tau} \int_Q e^{\tau \Phi} |P_1(z)|^2 dQ + C_{\Phi, \tau, T} \|y\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau \Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ - \frac{e^{-\delta \tau}}{\tau} (E_y(0) + E_y(T)) \end{aligned} \quad (3.59)$$

En posant dans (3.9), $z = y$ et $f = P_2(y)$, on obtient

$$\begin{aligned} & (BT)_z|_{\Sigma} + \frac{\text{const}}{\tau} \int_Q e^{\tau\Phi} |P_2(y)|^2 dQ + C_{\Phi,\tau,T} \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g z|_g^2 dQ - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E_z(0) + E_z(T)) \end{aligned} \quad (3.60)$$

De (1.4) et (3.21), on a

$$\int_Q e^{\tau\Phi} |P_1(z)|^2 dQ \leq \frac{C_T}{a} \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g z|_g^2 dQ + C_T \int_Q e^{\tau\Phi} |z|^2 dQ \quad (3.61.a)$$

$$\int_Q e^{\tau\Phi} |P_2(y)|^2 dQ \leq \frac{C_T}{a} \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ + C_T \int_Q e^{\tau\Phi} |y|^2 dQ \quad (3.61.b)$$

Donc

$$\begin{aligned} & (BT)_y|_{\Sigma} + \theta_{\Phi,\tau,T} \left(\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right) \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ - \frac{\text{const} C_T}{\tau a} \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g z|_g^2 dQ \\ & \quad - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E_y(0) + E_y(T)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & (BT)_z|_{\Sigma} + \theta_{\Phi,\tau,T} \left(\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right) \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T^1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g z|_g^2 dQ - \frac{\text{const} C_T}{\tau a} \int_Q e^{\tau\Phi} |\nabla_g y|_g^2 dQ \\ & \quad - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E_z(0) + E_z(T)) \end{aligned}$$

où $\theta_{\Phi,\tau,T} = \max(C_{\Phi,\tau,T}, \frac{\text{const}}{\tau} C_T C_{\Phi})$

Additionnant ces deux dernières estimations, on trouve

$$\begin{aligned} & (BT)_z|_{\Sigma} + (BT)_y|_{\Sigma} + 2\theta_{\Phi,\tau,T} \left(\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right) \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \int_Q e^{\tau\Phi} \left(|\nabla_g y|_g^2 + |\nabla_g z|_g^2 \right) dQ - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E(0) + E(T)) \\ & \geq \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \int_{t_0}^{t_1} E(t) dt - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} (E(0) + E(T)) \end{aligned}$$

où la contante $C_T'' = C_T' + \text{const} \frac{C_T}{a} C_\Phi$

Pour présenter la deuxième version des estimations de Carleman pour le système couplé (1.5), (1.6), on suppose que les opérateurs P_1 et P_2 aient la forme suivante

$$P_1(z) = \zeta_1(t, x)z; \quad P_2(y) = \zeta_2(t, x)y \quad (3.62)$$

où $\zeta_1(t, x), \zeta_2(t, x) \in L^\infty(\bar{Q})$, $|\nabla \zeta_1(t, x)|, |\nabla \zeta_2(t, x)| \in L^\infty(\bar{Q})$, et donc

$$|P_1(z)| \leq C_T |z|, \quad |P_2(y)| \leq C_T |y| \quad \forall (t, x) \in \bar{Q} \quad (3.63)$$

$$\|P_1(z)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_T \|z\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \|P_2(y)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_T \|y\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.64)$$

Théorème 3.4 "Deuxième version des estimations de Carleman"

En plus des hypothèses du théorème 3.3, Supposons que (3.62)-(3.64) sont vérifiées. Soient y, z solutions du système (1.5), (1.6) dans la classe (3.8). Alors pour τ suffisamment large il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & (BT)_{1,y,z} \Big|_\Sigma + \theta \left[\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right] \\ & \geq \gamma (E(0) + E(T)) \end{aligned} \quad (3.65)$$

où

$$\begin{aligned} (BT)_{1,y,z} \Big|_\Sigma &= (BT)_{1,y} \Big|_\Sigma + (BT)_{1,z} \Big|_\Sigma \\ &= (BT)_y \Big|_\Sigma + (BT)_z \Big|_\Sigma \\ &+ \text{const}_{\Phi,\tau,T} \int_\Sigma [|y_t| + |W_1(y)| + |\rho_1| |y| + C_T |z|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ &+ \text{const}_{\Phi,\tau,T} \int_\Sigma [|z_t| + |W_2(z)| + |\rho_2| |z| + C_T |y|] \left| \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \end{aligned} \quad (3.66)$$

et

$$\gamma = \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{(t_1 - t_0)}{2} e^{-\frac{(\delta\tau + 2kT)}{2}} - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} \quad (3.67)$$

Preuve

En posant $f = P_1(z)$, dans (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} E_y(t) &= E_y(s) + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Gamma} \bar{y}_t \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} (F_1(y) + P_1(z)) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

L'identité de ci-dessous est obtenue de la même façon que (3.68)

$$\begin{aligned} E_z(t) &= E_z(s) + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Gamma} \bar{z}_t \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} (F_2(y) + P_2(y)) \bar{z}_t d\Omega d\sigma \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Additionnons (3.68), (3.69) pour avoir

$$\begin{aligned} E(t) &= E(s) + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Gamma} \bar{y}_t \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Gamma} \bar{z}_t \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} d\Gamma d\sigma \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} (F_1(y) + P_1(z)) \bar{y}_t d\Omega d\sigma \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left(\int_s^t \int_{\Omega} (F_2(y) + P_2(y)) \bar{z}_t d\Omega d\sigma \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

L'analogie de l'estimation (3.34) pour z est

$$\begin{aligned} E_z(t) - E_z(s) &\leq 2 \int_{\Sigma} [|z_t| + |W_2(z)| + |\rho_1| |z| + |P_2(y)|] \left| \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ &\quad + k' \int_s^t E_z(\sigma) d\sigma + \mu' \int_s^t \int_{\Omega} |z|^2 d\Omega d\sigma + \lambda' \|P_2(y)\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Additionnant (3.34), (3.71) on a

$$\begin{aligned} E(t) - E(s) &\leq 2 \int_{\Sigma} [|y_t| + |W_1(z)| + |\rho_1| |z| + |P_1(z)|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ &\quad + 2 \int_{\Sigma} [|z_t| + |W_2(z)| + |\rho_2| |z| + |P_2(y)|] \left| \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ &\quad + k \int_s^t E_y(\sigma) d\sigma + \mu \int_s^t \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega d\sigma + \lambda \|P_1(z)\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 \\ &\quad + k' \int_s^t E_z(\sigma) d\sigma + \mu' \int_s^t \int_{\Omega} |z|^2 d\Omega d\sigma + \lambda' \|P_2(y)\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

De (3.64) on a

$$\begin{aligned} & \|P_1(z)\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 + \|P_2(y)\|_{L^2(s,t;H^1(\Omega))}^2 \\ & \leq \frac{C_T}{a} \int_s^t E(\sigma) d\sigma + C_T \left(\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Insérant (3.63), (3.73) dans (3.72), on obtient

$$\begin{aligned} E(t) - E(s) & \leq 2 \int_{\Sigma} [|y_t| + |W_1(y)| + |\rho_1| |y| + C_T |y|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ & \quad + 2 \int_{\Sigma} [|z_t| + |W_2(z)| + |\rho_2| |z| + C_T |y|] \left| \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ & \quad + \tilde{k} \int_s^t E(\sigma) d\sigma + \tilde{\theta}_{\Phi,\tau,T} \left(\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

où $\tilde{k} = \max(k, k', \max(\lambda, \lambda') \frac{C_T}{a})$, $\tilde{\theta}_{\Phi,\tau,T} = \max(\mu, \mu', \max(\lambda, \lambda') C_T)$

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(T) & = 2 \int_{\Sigma} [|y_t| + |W_1(y)| + |\rho_1| |y| + C_T |z|] \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ & \quad + 2 \int_{\Sigma} [|z_t| + |W_2(z)| + |\rho_2| |z| + C_T |y|] \left| \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\ & \quad + \tilde{\theta}_{\Phi,\tau,T} \left(\|y\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

L'inégalité (3.74), devient

$$E(t) \leq E(s) + \tilde{\Lambda}(T) + \tilde{k} \int_s^t E(\sigma) d\sigma$$

Pour obtenir le résultat de ce théorème, on utilise le lemme suivant dont la démonstration est similaire à celle du lemme 3.4.

Lemme 3.6

Pour $0 \leq s \leq t \leq T$

(i)

$$E(s) \leq E(t) + \tilde{\Lambda}(T) + \tilde{k} \int_s^t E(\sigma) d\sigma$$

(ii)

$$E(t) \leq \left(E(s) + \tilde{\Lambda}(T) \right) e^{\tilde{k}(t-s)} \quad (3.75.a)$$

$$E(s) \leq \left(E(t) + \tilde{\Lambda}(T) \right) e^{\tilde{k}(t-s)} \quad (3.75.b)$$

(iii)

$$E(t) \geq \frac{E(0) + E(T)}{2} e^{-\tilde{k}T} - \tilde{\Lambda}(T) \quad (3.76)$$

Insérons maintenant (3.76) dans (3.57), on trouve

$$\begin{aligned} & (BT)_y \Big|_{\Sigma} + (BT)_z \Big|_{\Sigma} + \theta_{\Phi, \tau, T} \left(\|y\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|z\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right) \\ & \geq \left[\left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{(t_1 - t_0)}{2} e^{-\frac{(\delta\tau + 2\tilde{k}T)}{2}} - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau} \right] (E(0) + E(T)) \\ & \quad - \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) (t_1 - t_0) e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \tilde{\Lambda}(T) \end{aligned}$$

Et donc le résultat (3.65), où les constantes

$$\begin{aligned} const_{\Phi, \tau, T} &= \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) (t_1 - t_0) e^{-\frac{\delta\tau}{2}} \\ \theta &= \max(\theta_{\Phi, \tau, T}, const_{\Phi, \tau, T} \tilde{\theta}_{\Phi, \tau, T}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4 Contrôlabilité exacte

Ce paragraphe contient l'objectif principal de ce mémoire qui est l'étude du problème de la contrôlabilité exacte pour le système couplé (1.5), (1.6), (1.7) avec l'une des conditions frontières (1.8), (1.9) et (1.10).

On commence tout d'abord par définir et caractériser la notion de la contrôlabilité exacte pour une équation différentielle abstraite dans un espace de Hilbert.

4.1 Définition et caractérisation de la contrôlabilité exacte

Soient \mathcal{X} et \mathcal{U} deux espace de Hilbert. Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathbb{A}(t)y(t) + \mathbb{B}u(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où $y(t) \in \mathcal{X}$, $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t) &: D(\mathbb{A}(t)) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \\ \mathbb{B} &: D(\mathbb{B}) \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}. \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathbb{A}(t)$ a les propriétés suivantes

- (i) $D(\mathbb{A}(t))$ est dense dans \mathcal{X} pour $0 \leq t < +\infty$
- (ii) $\mathbb{A}(\cdot)y$ est une fonction continue et bornée sur $[t_0, +\infty)$

$\mathbb{A}(t)$ engendre un opérateur d'évolution

$$\Phi : \{(t, \tau); t \geq \tau \geq t_0\} \rightarrow L(\mathcal{X})$$

Formellement, la solution de (4.1) est donnée par

$$y(t) = \Phi(T, 0)y_0 + L_t u \quad (4.2)$$

où

$$L_t u = \int_0^T \Phi(t, s) \mathbb{B} u(s) ds \quad (4.3)$$

Puisque \mathbb{B} n'est pas généralement borné, $L_t u$ n'appartient pas en général à \mathcal{X} . Introduisons alors l'espace

$$D(L_t) = \{u \in L^2(0, T; \mathcal{U}), L_t u \in \mathcal{X}\}$$

Il y a plusieurs concepts de contrôlabilité, mais on s'intéresse au suivant

Définition

On dit que (4.1) est exactement contrôlable dans \mathcal{X} sur $[0, T]$, si pour tout $y_0, y_1 \in \mathcal{X}$, il existe un contrôle $u \in D(L_t)$, tel que la solution du système (4.1) vérifie $y(T) = y_1$

La contrôlabilité exacte peut être exprimé en terme des propriétés de l'opérateur L_T [3].

Proposition 4.1

Le système (4.1) est exactement contrôlable dans \mathcal{X} sur $[0, T]$ si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif. C'est à dire $Im L_T = \mathcal{X}$.

Donc on peut déduire une caractérisation de la contrôlabilité exacte du système (4.1).

Théorème 4.1

Le système (4.1) est exactement contrôlable dans \mathcal{X} sur $[0, T]$, si et seulement si, pour tout $z \in D(L_T^*)$, il existe une constante $\gamma > 0$ (dépendante du temps T), telle que

$$\|L_T^* z\|_{\mathcal{Y}}^2 = \|\mathbb{B}^* \Phi^*(T, s) z\|_{\mathcal{Y}}^2 \geq \gamma \|z\|_{\mathcal{X}}^2 \quad (4.4)$$

où L_T^* , B^* , Φ^* sont, respectivement, les adjoints des opérateurs L_T , \mathbb{B} et Φ .

Ce théorème est équivalent au

Théorème 4.2

Le système (4.1) est exactement contrôlable dans \mathcal{X} sur $[0, T]$, si et seulement s'il existe une constante $\gamma > 0$ (dépendante du temps T), telle que

$$\|L_T' \xi\|_{\mathcal{Y}'}^2 = \|\mathbb{B}' \Phi'(T, s) \xi\|_{\mathcal{Y}'}^2 \geq \gamma \|\xi\|_{\mathcal{X}'}^2 ; \forall \xi \in D(L_T') \quad (4.5)$$

où L_T' , \mathbb{B}' , Φ' sont, respectivement, les opérateurs duaux des opérateurs L_T , \mathbb{B} , Φ

$\Psi(s) = \Phi'(T, s) \xi$ est la solution du système dual

$$\begin{cases} \dot{\Psi}(s) = -\mathbb{A}'(s) \Psi(s) \\ \Psi(T) = \xi \end{cases}$$

Remarque 4.1

Le théorème 4.2 implique que le système

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -\mathbb{A}' \Psi \\ z = \mathbb{B}' \Psi \end{cases}$$

est exactement observable (Voir Curtain et Zwart [3]). Pour cette raison, l'estimation (4.5) est appelée estimation d'observabilité.

4.2 Contrôlabilité exacte du système couplé de type Dirichlet/ Dirichlet

Dans le reste de ce mémoire, on suppose que

(A₁) La partition $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ de la frontière régulière Γ vérifie

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \nabla_g \Phi(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} \quad (4.6)$$

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : \nabla_g \Phi(x) \cdot \nu(x) > 0\} \quad (4.7)$$

(A₂) Le système (1.5), (1.6), avec les conditions aux limites homogènes

$$\begin{cases} y|_{\Sigma} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}|_{\Sigma_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z|_{\Sigma} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}|_{\Sigma_1} = 0 \end{cases}$$

satisfait la propriété de la continuité de l'unicité

Remarque 4.2

L'hypothèse (A₂) est utilisée pour absorber les deux derniers termes paraissant dans (4.30), (4.59) (4.79).

On réécrit le système (1.5)-(1.7) et (1.8) ci-dessous

$$\begin{cases} \mathbf{i}y_t = \mathcal{A}y + R_1 \cdot \nabla y + \rho_1 y + \zeta_1 z & \text{dans } Q \\ \mathbf{i}z_t = \mathcal{A}z + R_2 \cdot \nabla z + \rho_2 z + \zeta_2 y & \text{dans } Q \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \\ z(0, x) = z_0(x) & \text{sur } \Omega \\ y = z = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ y = u_1 \quad z = u_2 & \text{sur } \Sigma_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

où $\rho_i, \zeta_i : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, $\zeta_i(t, x), \rho_i(t, x) \in L^\infty(\bar{Q})$ et $|\nabla \zeta_i(t, x)| \in L^\infty(\bar{Q})$, $|R_i(x)| \in L^\infty(\bar{\Omega})$ pour $i = 1, 2$

Théorème 4.3

Soit $T > 0$. Pour toutes données initiales $\{y_0, z_0\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et pour toutes données finales $\{y_1, z_1\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, ils existent $\{u_1, u_2\} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ tels que la solution $\{y(\cdot), z(\cdot)\}$ du système (1.5)-(1.7), (1.8) vérifie

$$y(T) = y_1 \text{ et } z(T) = z_1$$

Preuve

Pour établir ce théorème, il suffit d'après le théorème 4.2, de trouver une constante $\gamma > 0$ (dépendante du temps T) telle que l'inegalité suivante ait lieu

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right) d\Gamma_1 dt \geq \gamma \| \{\varphi_0, \psi_0\} \|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}^2 \quad (4.9)$$

où $\{\varphi, \psi\}$ est la solution du système dual correspondant à (4.8)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{i}\varphi_t = \mathcal{A}\varphi + \bar{\rho}_1\varphi - \operatorname{div}_0(R_1\varphi) + \bar{\zeta}_2\psi & \text{dans } Q \\ \mathbf{i}\psi_t = \mathcal{A}\psi + \bar{\rho}_2\psi - \operatorname{div}_0(R_2\psi) + \bar{\zeta}_1\varphi & \text{dans } Q \\ \varphi(T, x) = \varphi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \psi(T, x) = \psi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \varphi|_{\Sigma} = 0 \\ \psi|_{\Sigma} = 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

(Voir Annexe A)

Pour établir l'estimation (4.9), on compte fortement sur les estimations de Carleman pour le système couplé données dans la partie précédente.

Dans (3.65), remplaçons y par φ et z par ψ on trouve

$$\begin{aligned} & (BT)_{1,\varphi,\psi}|_{\Sigma} + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right] \\ & \geq \gamma (E(0) + E(T)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

où

$$\gamma = \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{(t_1 - t_0)}{2} e^{-\frac{(\delta\tau+2kT)}{2}} - \frac{e^{-\delta\tau}}{\tau}$$

et

$$(BT)_{1,\varphi,\psi}|_{\Sigma} = (BT)_{1,\varphi}|_{\Sigma} + (BT)_{1,\psi}|_{\Sigma} \quad (4.12)$$

avec

$$(BT)_{1,\varphi}|_{\Sigma} = (BT)_{\varphi}|_{\Sigma} + \quad (4.13)$$

$$+ \operatorname{const}_{\Phi,\tau,T} \int_{\Sigma} [|\varphi_t| + |W_1(\varphi)| + |\rho_1| |\varphi| + C_T |\psi|] \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma$$

$$(BT)_{1,\psi}|_{\Sigma} = (BT)_{\psi}|_{\Sigma} \quad (4.14)$$

$$+ \operatorname{const}_{\Phi,\tau,T} \int_{\Sigma} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi| + C_T |\varphi|] \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma$$

et

$$\begin{aligned} (BT)_{\varphi}|_{\Sigma} &= \operatorname{Re} \left(\int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} h(\bar{\varphi}) d\Sigma \right) - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} |\nabla_g \varphi|_g^2 h \cdot \nu d\Sigma \\ &+ \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \bar{\varphi} \operatorname{div}_0(e^{\tau\Phi} h) d\Sigma - \mathbf{i} \int_{\Sigma} \varphi_t \bar{\varphi} e^{\tau\Phi} h \cdot \nu d\Sigma \right| \end{aligned} \quad (4.15)$$

et $(BT)_\psi|_\Sigma$ n'est que $(BT)_\varphi|_\Sigma$ en remplaçant φ par ψ

Le lemme suivant nous permet d'établir une identité, utile pour la suite

Lemme 4.1

$$(BT)_{1,\varphi}|_\Sigma = (BT)_\varphi|_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma \quad (4.16)$$

$$(BT)_{1,\psi}|_\Sigma = (BT)_\psi|_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma \quad (4.17)$$

et donc

$$(BT)_{1,\varphi,\psi}|_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma \quad (4.18)$$

Preuve

Sur $T_x\mathbb{R}^n$, la décomposition du champ de vecteurs $\nabla_g\varphi$ est la suivante

$$\nabla_g\varphi = \left\langle \nabla_g\varphi, \frac{\nu_{\mathcal{A}}}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} \right\rangle_g \frac{\nu_{\mathcal{A}}}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} + \langle \nabla_g\varphi, s \rangle_g s$$

où s est le champ de vecteurs unité tangentiel

Donc, de (2.19), (2.20), on a

$$\begin{aligned} \nabla_g\varphi &= \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \langle \nabla_g\varphi, \nu_{\mathcal{A}} \rangle_g \nu_{\mathcal{A}} + \langle \nabla_g\varphi, s \rangle_g s \\ &= \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right) \nu_{\mathcal{A}} + \frac{\partial\varphi}{\partial s} s \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |\nabla_g\varphi|_g^2 &= \langle \nabla_g\varphi, \nabla_g\varphi \rangle_g = \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right) \langle \nu_{\mathcal{A}}, \nabla_g\varphi \rangle_g + \frac{\partial\varphi}{\partial s} \langle s, \nabla_g\varphi \rangle_g \\ &= \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

D'une façon similaire, on a

$$|\nabla_g\psi|_g^2 = \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial\psi}{\partial s} \right|^2 \quad (4.20)$$

Comme $\varphi = \psi = 0$ sur Σ on a

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \psi_t = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \nabla\varphi &\perp s, \nabla\psi \perp s\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial s} = 0 \quad (4.21)$$

$$W_1(\varphi) = W_2(\psi) = 0 \quad (4.22)$$

$$|\nabla_g\varphi|_g^2 = \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \text{ et } |\nabla_g\psi|_g^2 = \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \quad (4.23)$$

De la même manière, on décompose le champ de vecteurs $h(x)$

$$h(x) = \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \langle h(x), \nu_{\mathcal{A}} \rangle_g \nu_{\mathcal{A}} + \langle h(x), s \rangle_g s \quad (4.24)$$

D'où

$$\begin{aligned}h(\varphi) &= \langle \nabla_g\varphi, h \rangle_g \\ &= \left\langle \nabla_g\varphi, \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \langle h(x), \nu_{\mathcal{A}} \rangle_g \nu_{\mathcal{A}} + \langle h(x), s \rangle_g s \right\rangle_g \\ &= \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \langle \nabla_g\varphi, \nu_{\mathcal{A}} \rangle_g + \langle h(x), s \rangle_g \nabla\varphi \cdot s \\ &= \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right)\end{aligned} \quad (4.25)$$

Insérant (4.21)-(4.25) dans (4.13), (4.14), on obtient finalement

$$\begin{aligned}(BT)_{1,\varphi,\psi} \Big|_{\Sigma} &= (BT)_{1,\varphi} \Big|_{\Sigma} + (BT)_{1,\psi} \Big|_{\Sigma} = (BT)_{\varphi} \Big|_{\Sigma} + (BT)_{\psi} \Big|_{\Sigma} \\ &= \text{Re} \left(\int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\Sigma \right) + \text{Re} \left(\int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\Sigma \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\Sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \frac{h \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\Sigma\end{aligned} \quad (4.26)$$

et donc le résultat (4.18).

D'autre part, de (4.6), on a

$$(BT)_{1,\varphi,\psi}\Big|_{\Sigma_0} = (BT)_{1,\varphi}\Big|_{\Sigma_0} + (BT)_{1,\psi}\Big|_{\Sigma_0} \leq 0 \quad (4.27)$$

Alors

$$(BT)_{1,\varphi,\psi}\Big|_{\Sigma} \leq \frac{1}{2} \max_{x \in \Gamma_1, 0 < t < T} \left(e^{\tau\Phi(t,x)} \frac{h(x) \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \right) \left[\int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \right]$$

Posons $\kappa = \frac{1}{2} \max_{x \in \Gamma_1, 0 < t < T} \left(e^{\tau\Phi(t,x)} \frac{h(x) \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \right)$, donc l'estimation (4.11) devient

$$\begin{aligned} \gamma(E(0) + E(T)) &\leq \kappa \left[\int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \right] \\ &\quad + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{\Omega} |\nabla_g \varphi(T)|_g^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla_g \psi(T)|_g^2 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} |\nabla_g \varphi_0|_g^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla_g \psi_0|_g^2 d\Omega \\ &= E_{\varphi}(T) + E_{\psi}(T) \end{aligned}$$

De (3.21) on a

$$\begin{aligned} a \|\{\varphi_0, \psi_0\}\|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} |\nabla_g \varphi(T)|_g^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla_g \psi(T)|_g^2 d\Omega \\ &\leq \alpha \|\{\varphi_0, \psi_0\}\|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Donc $E(T)$ est équivalente à $\|\{\varphi_0, \psi_0\}\|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}^2$

Insérant le membre de gauche de (4.29) dans (4.28), on trouve

$$\begin{aligned} \gamma \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) &\leq \kappa \left[\int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \right] \\ &\quad + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Finalement, pour obtenir l'inégalité (4.9), on élimine les deux derniers termes du membre de droite de (4.30) en utilisant un argument de compacité/unicité [10], [14]

On montre l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \|\varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq \text{const} \left[\int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Supposons le contraire, donc il existe une suite $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ des solutions du système (4.10) correspondante à une donnée initiale $\begin{pmatrix} \varphi_n^o \\ \psi_n^o \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \\ & \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (4.32)$$

et

$$\|\varphi_n\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \|\psi_n\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.33)$$

De (4.30) on déduit que la suite $\begin{pmatrix} \varphi_n^o \\ \psi_n^o \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

Alors $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $[L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega))]^2$

Donc, on peut extraire une sous suite, encore notée $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faiblement étoilé} \\ & \begin{pmatrix} (\varphi_n)_t \\ (\psi_n)_t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \psi_t \end{pmatrix} \text{ dans } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ faiblement étoilé} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ est la solution du système (4.10)

Par la compacité de l'injection

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; L^2(\Omega))$$

(voir Machtyngier [10]), on a

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \text{ dans } C([0, T]; L^2(\Omega)) \times C([0, T]; L^2(\Omega))$$

Donc de (4.32), (4.33), on déduit que

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{C([0, T]; L^2(\Omega)) \times C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 = 2 \quad (4.34)$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

Donc, d'après l'hypothèse d'unicité (A_2) , le système (4.10) plus les deux dernières conditions admet une solution unique $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et ceci contredit (4.33)

Alors de (4.30), il existe une constante, qu'on note aussi par γ , telle que

$$\int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right) d\Sigma_1 \geq \gamma \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 4.3. ■

4.3 Contrôlabilité exacte frontière du système couplé de type Neumann/ Neumann

Dans ce cas, en plus des hypothèses (A_1) , (A_2) , on suppose

(A_3) La partition $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ vérifie $\Gamma_0 \neq \emptyset$, $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$

Récrivons le système (1.5)-(1.7), (1.9) ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{i}y_t = \mathcal{A}y + R_1 \cdot \nabla y + \rho_1 y + \zeta_1 z & \text{dans } Q \\ \mathbf{i}z_t = \mathcal{A}z + R_2 \cdot \nabla z + \rho_2 z + \zeta_2 y & \text{dans } Q \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \\ z(0, x) = z_0(x) & \text{sur } \Omega \\ y = z = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = u_1 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = u_2 & \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Théorème 4.4

Soit $T > 0$. Pour toutes données initiales $\{y_0, z_0\} \in [H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)]$ et pour toutes données finales $\{y_1, z_1\} \in [H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)]$, ils existent

$\{u_1, u_2\} \in [H^1(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))]$ tels que la solution $\{y(\cdot), z(\cdot)\}$ du système (1.5)-(1.7), (1.9) vérifie

$$y(T) = y_1 \text{ et } z(T) = z_1$$

$$\text{où } H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{\Psi \in H^1(\Omega) : \Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

Preuve

L'inégalité d'observabilité qui correspond à la propriété de contrôlabilité exacte du système (4.35) est

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}^2 \geq \gamma \left\| \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \right\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \quad (4.36)$$

où $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ est la solution du système homogène

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{i}\varphi_t = \mathcal{A}\varphi + \bar{\rho}_1\varphi - \text{div}_0(R_1\varphi) + \bar{\zeta}_2\psi & \text{dans } Q \\ \mathbf{i}\psi_t = \mathcal{A}\psi + \bar{\rho}_2\psi - \text{div}_0(R_2\psi) + \bar{\zeta}_1\varphi & \text{dans } Q \\ \varphi(T, x) = \varphi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \psi(T, x) = \psi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \varphi|_{\Sigma_0} = 0 & \psi|_{\Sigma_0} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = R_1 \cdot \nu_{\mathcal{A}}\varphi & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = R_2 \cdot \nu_{\mathcal{A}}\psi & \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Pour établir (4.36), on procède en trois étapes

Étape 1

On montre dans cette étape la proposition suivante

Proposition 4.2

Pour $\epsilon > 0$, fixé et petit et pour tout $\varepsilon_o > 0$, il existe une constante $\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) &\leq \mathcal{C} \left[\int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right) d\Gamma_1 dt \right. \\
&\quad \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|^2 \right) d\Gamma_1 dt \\
&\quad + \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} (|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2) d\Gamma_1 dt \\
&\quad \left. + \|\varphi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_o}(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_o}(\Omega))}^2 \right] \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Preuve

L'estimation (4.11) reste vraie, si on remplace l'intervall $(0, T]$ par l'intervall $[\epsilon, T - \epsilon]$, pour $\epsilon > 0$ fixé

$$\begin{aligned}
&(BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma} + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right] \\
&\geq \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} (E(\epsilon) + E(T - \epsilon)) \tag{4.39}
\end{aligned}$$

où $(BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma}$ est dans (3.66), en remplaçant Σ par $[\epsilon, T - \epsilon] \times \Gamma$, y par φ et z par ψ

D'autre part

$$(BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma} = (BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_0} + (BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \tag{4.40}$$

et comme $\varphi = \psi = 0$ sur $[\epsilon, T - \epsilon] \times \Gamma_0$, on a (4.27)

Alors

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} (E(\epsilon) + E(T - \epsilon)) \\
&\leq (BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right] \\
&\leq \left| (BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right] \tag{4.41}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\left| (BT)_{1,\varphi,\psi} \Big|_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| &\leq \left| (BT)_\varphi \Big|_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| + \left| (BT)_\psi \Big|_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| \\
&+ \text{const}_{\Phi,\tau,T} \int_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t| + |W_1(\varphi)| + |\rho_1| |\varphi| + C_T |\psi|] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\
&+ \text{const}_{\Phi,\tau,T} \int_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi| + C_T |\varphi|] \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma
\end{aligned} \tag{4.42}$$

avec

$$\text{const}_{\Phi,\tau,T} = \left(\rho - \frac{C_T''}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) (t_1 - t_0) e^{-\frac{\delta \tau}{2}} \tag{4.43}$$

Prenons dans (3.75.a) $t = \epsilon$, $s = 0$ et dans (3.75.b) $t = T$, $s = T - \epsilon$, on obtient

$$E(\epsilon) + E(T - \epsilon) \geq e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) - 2\tilde{\Lambda}(T) \tag{4.44}$$

Insérant (4.44) dans (4.41), on trouve

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\Phi,\tau,\epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \leq \\
&\leq \left| (BT)_{1,\varphi,\psi} \Big|_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \right] \\
&+ 2\gamma_{\Phi,\tau,\epsilon} \tilde{\Lambda}(T)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}(T) &= 2 \int_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t| + |W_1(\varphi)| + |\rho_1| |\varphi| + C_T |\psi|] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\
&+ 2 \int_{[\epsilon,T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi| + C_T |\varphi|] \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\
&+ \tilde{\theta}_{\Phi,\tau,T} \left(\|\varphi\|_{C([\epsilon,T-\epsilon];L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([\epsilon,T-\epsilon];L^2(\Omega))}^2 \right)
\end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}
\omega &= \text{const}_{\Phi,\tau,T} + 2\gamma_{\Phi,\tau,\epsilon} \\
\lambda &= 2\gamma_{\Phi,\tau,\epsilon} \tilde{\theta}_{\Phi,\tau,T} + \theta
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \\
& \leq \left| (BT)_\varphi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| + \left| (BT)_\psi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| \\
& + \omega \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t| + |W_1(\varphi)| + |\rho_1| |\varphi| + C_T |\psi|] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\
& + \omega \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi| + C_T |\varphi|] \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\
& + \lambda \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right] \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Majorons maintenant tout les termes du membre de droite de (4.46)

Estimons $\left| (BT)_\varphi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| + \left| (BT)_\psi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right|$

On a

$$\begin{aligned}
\left| (BT)_\varphi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| & \leq \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} e^{\tau\Phi} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| |h(\varphi)| d\Gamma_1 dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} e^{\tau\Phi} |\nabla_g \varphi|_g^2 |h \cdot \nu| d\Gamma_1 dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| |\bar{\varphi}| |\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi} h)| d\Gamma_1 dt \\
& + \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\varphi_t| |\bar{\varphi}| e^{\tau\Phi} |h \cdot \nu| d\Gamma_1 dt
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
C_{12} & = \max_{(t, x) \in [\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |e^{\tau\Phi(t, x)} h(x)|, \\
C_{13} & = \frac{1}{2} \max_{(t, x) \in [\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |h(x) \nu(x) e^{\tau\Phi(t, x)}|, \\
C_{14} & = \frac{1}{2} \max_{(t, x) \in [\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\operatorname{div}_0 (e^{\tau\Phi(t, x)} h)(x)|
\end{aligned}$$

Alors, pour $\epsilon > 0$, en utilisons (3.21) on trouve

$$\begin{aligned}
\left| (BT)_\varphi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| + \left| (BT)_\psi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| &\leq (C_{12} + C_{14}) \frac{\epsilon}{2} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right] d\Gamma_1 dt \\
&+ \left(\frac{C_{12}}{2\epsilon a} + C_{13} \right) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left[|\nabla_g \varphi|_g^2 + |\nabla_g \psi|_g^2 \right] d\Gamma_1 dt \\
&+ \frac{C_{13}}{2\epsilon} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2] d\Gamma_1 dt \\
&+ \left(\frac{C_{13} + C_{14}}{2\epsilon} \right) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi|^2 + |\psi|^2] d\Gamma_1 dt
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Estimons le terme $\int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t| + |W_1(\varphi)| + |\rho_1| |\varphi| + C_T |\psi|] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma_1 dt$ et

le terme $\int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi| + C_T |\varphi|] \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma_1 dt$

Posons $C_{15} = \max \left(\max_{x \in \Gamma_1} |W_i(x)|, \max_{(t,x) \in [\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\rho_i(t, x)| \right)$ $i = 1, 2$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t| + |W_1(\varphi)| + |\rho_1| |\varphi| + C_T |\psi|] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma_1 dt \\
&+ \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi| + C_T |\varphi|] \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma_1 dt \\
&\leq (1 + 4C_{15} + C_T) \frac{\epsilon}{2} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right) d\Gamma_1 dt \\
&+ \frac{C_{15}}{2\epsilon a} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left(|\nabla_g \varphi|_g^2 + |\nabla_g \psi|_g^2 \right) d\Gamma_1 dt \\
&+ \frac{1}{2\epsilon} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} (|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2) d\Gamma_1 dt \\
&+ \left(\frac{C_{15} + C_T}{\epsilon} \right) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) d\Gamma_1 dt
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Appliquons le théorème de trace pour les derniers termes du membre de droite de (4.47), (4.48), on trouve

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \\
& \leq \mu_1 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right) d\Gamma_1 dt \\
& + \mu_2 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left[|\nabla_g \varphi|_g^2 + |\nabla_g \psi|_g^2 \right] d\Gamma_1 dt \\
& + \mu_3 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2] d\Gamma_1 dt \\
& \mu_4 \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_o}(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_o}(\Omega))}^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Pour $\epsilon_o > 0$,

$$\begin{aligned}
\mu_1 & = ((C_{12} + C_{14}) + \omega(1 + 4C_{15} + C_T)) \frac{\epsilon}{2} \\
\mu_2 & = \left(\left(\frac{C_{12}}{2\epsilon a} + c_{13} \right) + \omega \frac{C_{15}}{2\epsilon a} \right) \\
\mu_3 & = \frac{C_{13} + \omega}{2\epsilon} \\
\mu_4 & = \left(\lambda + \left(\frac{C_{13} + C_{14}}{2} + C_{15} + C_T \right) \frac{\beta}{\epsilon} \right)
\end{aligned}$$

où la contante β est issue du théorème de trace.

Insérant (4.19), (4.20) dans (4.49), on trouve

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \\
& \leq \left(\mu_1 + \max_{x \in \Gamma_1} \left(\frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \right) \mu_2 \right) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right) d\Gamma_1 dt \\
& + \mu_2 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|^2 \right] d\Gamma_1 dt \\
& + \mu_3 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2] d\Gamma_1 dt \\
& \mu_4 \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_o}(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_o}(\Omega))}^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

D'où (4.38) avec \mathcal{C} est le maximum des coefficients des termes du membre de droite de (4.50).

Étape 2

Le but de cette étape est d'éliminer la dérivée tangentielle paraissant dans (4.38)=(4.50). Pour cela on utilise le résultat suivant (voir Triggiani [13], théorème 2.1.4, Lasiecka et Triggiani [5], Lemme 7.2)

Théorème 4.5

Soient $f \in L^2(Q)$, y une solution de (3.7), dans la classe (3.8). Alors, pour $\epsilon > 0$, $\epsilon_0 > 0$ (arbitrairement petits), $T > 0$, il existe une constante $C_{\epsilon, \epsilon_0, T} > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial y}{\partial s} \right|^2 d\Gamma dt &\leq C_{\epsilon, \epsilon_0, T} \int_0^T \int_{\Gamma} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |y_t|^2 \right) d\Gamma dt \\ &\quad + C_{\epsilon, \epsilon_0, T} \left(\|y\|_{L^2([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 + \|f\|_{H^{-\frac{1}{2} + \epsilon_0}(Q)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Comme $\varphi = 0$ et $h \cdot \nu \leq 0$ sur Γ_0 , l'estimation (4.51) reste vraie si on remplace Γ par Γ_1 .

Remplaçant y par φ et f par $\bar{\zeta}_2 \psi$ dans l'estimation précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2 d\Gamma_1 dt &\leq C_{\epsilon, \epsilon_0, T} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\varphi_t|^2 \right) d\Gamma_1 dt \\ &\quad + C_{\epsilon, \epsilon_0, T} \left(\|\varphi\|_{L^2([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 + \|\bar{\zeta}_2 \psi\|_{H^{-\frac{1}{2} + \epsilon_0}(Q)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

L'analogue de (4.52) pour ψ est

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|^2 d\Gamma_1 dt &\leq C_{\epsilon, \epsilon_0, T} \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Gamma_1 dt \right. \\ &\quad \left. + \|\psi\|_{L^2([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 + \|\bar{\zeta}_1 \varphi\|_{H^{-\frac{1}{2} + \epsilon_0}(Q)}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

De (3.62)-(3.64), on a

$$\|\bar{\zeta}_2 \psi\|_{H^{-\frac{1}{2} + \epsilon_0}(Q)}^2 \leq C_T \|\psi\|_{L^2([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \quad (4.54.a)$$

$$\|\bar{\zeta}_1 \varphi\|_{H^{-\frac{1}{2} + \epsilon_0}(Q)}^2 \leq C_T \|\varphi\|_{L^2([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \quad (4.54.b)$$

Insérant (4.54.a) dans (4.52) et (4.54.b) dans (4.53), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2 d\Gamma_1 dt &\leq C_{\epsilon, \epsilon_0, T} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\varphi_t|^2 \right) d\Gamma_1 dt \\ &\quad + C_{\epsilon, \epsilon_0, T} (1 + C_T) \|\varphi\|_{L^2([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|^2 d\Gamma_1 dt &\leq C_{\epsilon, \epsilon_0, T} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Gamma_1 dt \\
&+ C_{\epsilon, \epsilon_0, T} (1 + C_T) \|\psi\|_{L^2([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Additionnant (4.55), (4.56) et insérant le résultat dans (4.38), on déduit l'existence d'une constante strictement positive, qu'on note aussi par \mathcal{C} telle que

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} E(T) &\leq \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \\
&\leq \mathcal{C} \left[\int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\varphi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \right. \\
&\quad + \int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \\
&\quad \left. + \|\varphi\|_{C(0, T; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C(0, T; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \right] \quad (4.57)
\end{aligned}$$

Rappelons que

$$\begin{aligned}
E(T) &= \int_{\Omega} |\nabla_g \varphi(T)|_g^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla_g \psi(T)|_g^2 d\Omega \\
&= \int_{\Omega} |\nabla_g \varphi_0|_g^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla_g \psi_0|_g^2 d\Omega
\end{aligned}$$

et comme $\varphi = \psi = 0$ sur Σ_0 , on trouve, d'après l'inégalité de Poincaré (voir par exemple Brézis [2], p174) et (3.21)

$$\begin{aligned}
aC_T \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right) &\leq \int_{\Omega} \left(|\nabla_g \varphi_0|_g^2 + |\nabla_g \psi_0|_g^2 \right) d\Omega \\
&\leq \alpha \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right)
\end{aligned}$$

où C_T est issue de l'inégalité de Poincaré

Donc

$$\begin{aligned}
aC_T \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right) &\leq E(T) \quad (4.58) \\
&\leq \alpha \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right)
\end{aligned}$$

Remplaçons donc $E(T)$ par $\left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2\right)$ dans (4.57) on trouve

$$\begin{aligned} \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2\right) &\leq \mathcal{C} \left[\int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\varphi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \right. \\ &\quad + \int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \\ &\quad \left. + \|\varphi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Étape 3

L'objectif de cette étape est d'éliminer les deux derniers termes du membre de droite de (4.59), en utilisant l'argument de compacité et d'unicité, on montre l'existence d'une *Const* strictement positive telle que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 &\leq Const \left[\int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\varphi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

On raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe une suite des solutions $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ du système (4.37) correspondantes à une donnée initiale $\begin{pmatrix} \varphi_n^o \\ \psi_n^o \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \|\psi_n\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.61)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 &\rightarrow 0, \quad \|\varphi_n\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \\ \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 &\rightarrow 0, \quad \|\psi_n\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (4.62)$$

De (4.59), on trouve que la suite $\left(\begin{array}{c} \varphi_n^o \\ \psi_n^o \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ et puis $\left(\begin{array}{c} \varphi_n \\ \psi_n \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\left[L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))') \right]^2$. Ainsi, en extrayant une sous suite, encore notée $\left(\begin{array}{c} \varphi_n \\ \psi_n \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, nous aurons

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \varphi_n \\ \psi_n \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array} \right) \text{ dans } \left[L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \right]^2 \text{ faiblement étoilé} \\ \left(\begin{array}{c} (\varphi_n)_t \\ (\psi_n)_t \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{c} \varphi_t \\ \psi_t \end{array} \right) \text{ dans } \left[L^\infty(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))') \right]^2 \text{ faiblement étoilé,} \end{aligned}$$

La fonction $\left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array} \right) \in \left[L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))') \right]^2$ est la solution du système (4.37) et de la compacité de l'injection

$$L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))') \rightarrow C(0, T; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))$$

et de (4.61), nous déduisons

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))}^2 &= 1 \\ \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{4.63}$$

D'autre part (4.62) implique que, sur Σ_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} &= 0, \quad \varphi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} &= 0, \quad \psi = 0 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Ce qui, combinée avec (4.37), implique que $\left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$ (de l'hypothèse d'unicité (A_2)). C'est en contradiction avec (4.63) et ceci achève la preuve de (4.60).

Combinant (4.60) et (4.59), on trouve une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \gamma \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right) &\leq \int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\varphi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \\ &+ \int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \end{aligned} \quad (4.65)$$

En insérant les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} &= R_1 \cdot \nu_{\mathcal{A}} \varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} &= R_2 \cdot \nu_{\mathcal{A}} \psi \end{aligned}$$

dans (4.65), on déduit l'existence d'une constante encore notée $\gamma > 0$ (dépendante du temps T) telle que

$$\int_{\Sigma_1} (|\varphi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\psi|^2 + |\psi_t|^2) d\Sigma_1 \geq \gamma \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right) \quad (4.66)$$

et donc

$$\|\varphi\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + \|\psi\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 \geq \gamma \left(\|\varphi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right) \quad (4.67)$$

Le théorème 4.4 est prouvé. ■

4.4 Contrôlabilité exacte frontière du système couplé de type Dirichlet/ Neumann

Dans ce paragraphe, on étudie le problème de la contrôlabilité exacte frontière pour le système couplé (1.5)-(1.7) et (1.10) qu'on réécrit ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{i}y_t = \mathcal{A}y + R_1 \cdot \nabla y + \rho_1 y + \zeta_1 z & \text{dans } Q \\ \mathbf{i}z_t = \mathcal{A}z + R_2 \cdot \nabla z + \rho_2 z + \zeta_2 y & \text{dans } Q \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \\ z(0, x) = z_0(x) & \text{sur } \Omega \\ y = z = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ y = u_1 \quad \frac{\partial z}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = u_2 & \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Théorème 4.6

Soit $T > 0$. Pour toutes données initiales $\{y_0, z_0\} \in H^{-1}(\Omega) \times [H_{\Gamma_0}^1(\Omega)]'$ et pour toutes données finales $\{y_1, z_1\} \in H^{-1}(\Omega) \times [H_{\Gamma_0}^1(\Omega)]'$, ils existent $\{u_1, u_2\} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times [H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))]'$ tels que la solution $\{y(\cdot), z(\cdot)\}$ du système (1.5)-(1.7), (1.10) vérifie

$$y(T) = y_1 \text{ et } z(T) = z_1$$

Preuve

L'inégalité d'observabilité associée à ce théorème est

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}^2 \geq \gamma \left\| \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \quad (4.69)$$

où $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ est la solution du système homogène

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{i}\varphi_t = \mathcal{A}\varphi + \bar{\rho}_1\varphi - \operatorname{div}_0(R_1\varphi) + \bar{\zeta}_2\psi & \text{dans } Q \\ \mathbf{i}\psi_t = \mathcal{A}\psi + \bar{\rho}_2\psi - \operatorname{div}_0(R_2\psi) + \bar{\zeta}_1\varphi & \text{dans } Q \\ \varphi(T, x) = \varphi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \psi(T, x) = \psi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \varphi|_{\Sigma} = 0 \\ \psi|_{\Sigma_0} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}\Big|_{\Sigma_1} = R_1 \cdot \nu_{\mathcal{A}}\psi \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Pour établir l'estimation (4.69), on compte fortement sur les résultats des paragraphes 4.2, 4.3.

Divisons donc cette preuve en trois étapes

Étape 1

Lemme 4.2

Pour $\epsilon > 0$, $\epsilon_o > 0$, il existe une constante $\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} > 0$, telle que

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) &\leq \mathcal{C} \left[\int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \right. \\
&\quad + \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\
&\quad + \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} |\psi_t|^2 d\Gamma_1 dt \\
&\quad \left. + \|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_o}(\Omega))}^2 \right] \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Preuve

L'estimation (3.65) reste vraie, si on remplace l'intervall $[0, T]$ par l'intervall $[\epsilon, T - \epsilon]$, pour $\epsilon > 0$ fixé

$$\begin{aligned}
&(BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma} + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right] \\
&\geq \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} (E(\epsilon) + E(T - \epsilon)) \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Où $(BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma}$ est obtenu de (3.66), en remplaçant $(0, T] \times \Gamma$ par $[\epsilon, T - \epsilon] \times \Gamma$

Insérant (4.44) dans (4.72), on trouve

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) &\leq \\
&\leq \left| (BT)_{1, \varphi, \psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| + \theta \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right] \\
&\quad + 2\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} \tilde{\Lambda}(T) \tag{4.73}
\end{aligned}$$

Des conditions frontières $\varphi = 0$ sur $[\epsilon, T - \epsilon] \times \Gamma$ et $\psi = 0$ sur $[\epsilon, T - \epsilon] \times \Gamma_1$, on a grâce à (4.27) (4.18), (4.20), (4.22) et (4.23)

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \\
&\leq \left| (BT)_{\varphi} \Big|_{\Sigma_1} \right| + \left| (BT)_{\psi} \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| \\
&\quad + \omega C_T \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\
&\quad + \omega \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi|] \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Sigma \\
&\quad + \lambda \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \right] \tag{4.74}
\end{aligned}$$

avec ω et λ sont données dans (4.46)

Estimons maintenant tous les termes du membre de droite de (4.74)

De (4.16), (4.27) et de la même façon qu'on obtient (4.47) et (4.48), on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \left| (BT)_\varphi \Big|_{\Sigma_1} \right| &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in \Gamma_1, 0 < t < T} \left(e^{\tau \Phi(t,x)} \frac{h(x) \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \right) \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \\ &\leq \kappa \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \left| (BT)_\psi \Big|_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \right| &\leq (C_{12} + C_{14}) \frac{\epsilon}{2} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\ &\quad + \left(\frac{C_{12}}{2\epsilon a} + C_{13} \right) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\nabla_g \psi|_g^2 d\Gamma_1 dt \\ &\quad + \frac{C_{13}}{2\epsilon} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi_t|^2 d\Gamma_1 dt \\ &\quad + \left(\frac{C_{13} + C_{14}}{2\epsilon} \right) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi|^2 d\Gamma_1 dt \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} &C_T \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma_1 dt \\ &+ \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} [|\psi_t| + |W_2(\psi)| + |\rho_2| |\psi|] \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right| d\Gamma_1 dt \\ &\leq C_T \frac{\epsilon}{2} \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\ &+ (1 + 2C_{15}) \frac{\epsilon}{2} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\ &+ \frac{C_{15}}{2\epsilon a} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\nabla_g \psi|_g^2 d\Gamma_1 dt \\ &+ \frac{1}{2\epsilon} \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi_t|^2 d\Gamma_1 dt \\ &+ \left(\frac{C_{15} + C_T}{\epsilon} \right) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi|^2 d\Gamma_1 dt \end{aligned} \quad (4.77)$$

En reportant (4.75)-(4.77) dans (4.74), on obtient après avoir appliqué le théorème de trace

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \\
& \leq \eta_1 \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + \eta_2 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + \eta_3 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + \eta_4 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi_t|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + \eta_5 \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Dans (4.78), on a posé

$$\begin{aligned}
\eta_1 & = \kappa + \omega C_T \frac{\epsilon}{2} \\
\eta_2 & = ((C_1 + C_3) + \omega(1 + 2C_4)) \frac{\epsilon}{2} \\
\eta_3 & = \left(\left(\frac{C_1}{2\epsilon a} + C_2 \right) + \omega \frac{C_4}{2\epsilon a} \right) \\
\eta_4 & = \frac{C_2 + \omega}{2\epsilon} \\
\eta_5 & = \left(\lambda + \left(\frac{C_2 + C_3}{2} + C_4 + C_T \right) \frac{\beta}{\epsilon} \right)
\end{aligned}$$

Insérant (4.20) dans (4.78), on obtient

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} (E(0) + E(T)) \\
& \leq \eta_1 \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + (\eta_2 + \kappa \eta_3) \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + \eta_3 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + \eta_4 \int_{[\epsilon, T-\epsilon] \times \Gamma_1} |\psi_t|^2 d\Gamma_1 dt \\
& + \eta_5 \left[\|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \epsilon_0}(\Omega))}^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.79}$$

d'où (4.71), avec $\mathcal{C} = \max(\eta_1, (\eta_2 + \kappa\eta_3), \eta_3, \eta_4, \eta_5)$

Étape 2

Grâce à (4.56), (4.29) et (4.58) l'inégalité (4.79)=(4.71) devient

$$\begin{aligned} & \gamma_{\Phi, \tau, \epsilon} e^{-\tilde{k}\epsilon} \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq \mathcal{C} \left[\int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \right. \\ & \quad \left. + \|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.79)$$

Étape 3

L'objectif de cette étape est d'éliminer les deux derniers termes du membre de droite de (4.79), en utilisant l'argument de compacité et d'unicité, on montre l'existence d'une *Const* strictement positive telle que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))}^2 & \leq \text{Const} \left[\int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 \right) d\Sigma_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

On raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe une suite des solutions $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ du système (4.70) correspondantes à une donnée initiale $\begin{pmatrix} \varphi_n^o \\ \psi_n^o \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 & = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \|\psi_n\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))}^2 & = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.81)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 & \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \\ \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 d\Sigma_1 & \rightarrow 0, \quad \|\psi_n\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}^2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (4.82)$$

De (4.79), on trouve que la suite $\left(\begin{array}{c} \varphi_n^o \\ \psi_n^o \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ et puis $\left(\begin{array}{c} \varphi_n \\ \psi_n \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $[L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega))] \times [L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))')]$. Ainsi, en extrayant une sous suite, encore notée $\left(\begin{array}{c} \varphi_n \\ \psi_n \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, nous aurons

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \varphi_n \\ \psi_n \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array} \right) \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \text{ faiblement étoilé} \\ \left(\begin{array}{c} (\varphi_n)_t \\ (\psi_n)_t \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{c} \varphi_t \\ \psi_t \end{array} \right) \text{ dans } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times L^\infty(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))') \text{ faiblement étoilé} \end{aligned}$$

La fonction $\left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array} \right)$ est appartienne à $[L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega))] \times [L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))')]$ est la solution du système (4.70) et de la compacité des injections

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; L^2(\Omega))$$

et

$$L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))') \rightarrow C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))$$

et de (4.81), nous déduisons

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 &= 1 \\ \|\psi\|_{C([0, T]; H^{\frac{1}{2} + \varepsilon_0}(\Omega))}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{4.83}$$

D'autre part (4.82) implique que, sur Σ_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} &= 0, \quad \psi = 0 \end{aligned}$$

Ce qui, combinée avec (4.70), implique que $\left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$ (de l'hypothèse d'unicité (A_2)). C'est en contradiction avec (4.83) et ceci achève la preuve de (4.80).

Combinant (4.80) et (4.79), on trouve une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \geq \gamma \|\{\varphi_0, \psi_0\}\|_{H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \quad (4.84)$$

En insérant la condition frontière

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = R_2 \cdot \nu_{\mathcal{A}} \psi$$

dans (4.84), on déduit l'existence d'une constante encore notée $\gamma > 0$ (dépendante du temps T) telle que

$$\int_{\Sigma_1} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |\psi|^2 + |\psi_t|^2 \right) d\Sigma_1 \geq \gamma \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right)$$

et donc

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + \|\psi\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 \geq \gamma \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\psi_0\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \right)$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 4.6 ■.

5 Conclusion

Dans ce mémoire, on a établi plusieurs résultats de contrôlabilité exacte frontière pour un système couplé composé de deux équations de Schrödinger générales définies sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ de frontière lisse Γ , en adoptant l'approche développée par Triggiani et Yao [14] qui utilisent les ingrédients suivants :

- . Méthodes de géométrie riemannienne.
- . Estimations de Carleman
- . Analyse micro-locale.

Cette étude ouvre la voix à de nombreuses questions, notamment

- 1/ Etude de la contrôlabilité exacte du système couplé (1.5)-(1.7) et (1.9) dans $\mathcal{X} = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ avec des contrôles frontières $\{u_1, u_2\} \in H^1(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times H^1(0, T; L^2(\Gamma_1))$.
- 2/ Peut on contrôler le système couplé (1.5)-(1.7) avec une seule action frontière.
- 3/ Une autre question est l'étude de la contrôlabilité exacte du système (1.5), (1.6), dans le cas où $R_i(x)$, ($i = 1, 2$) est un champ de vecteurs complexe.
- 4/ Les résultats obtenus ont exigé certaines hypothèses géométriques sur le domaine Ω . Il est intéressant d'affaiblir ces hypothèses.

6 Annexes

6.1 Annexe A

Le système (4.8) peut prendre la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + F_1 & P_1 \\ P_2 & \mathcal{A} + F_2 \end{pmatrix}$$

Cherchons le système dual de (4.8) où l'espace d'état $\mathcal{X} = H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et un contrôle $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Comme l'espace $L^2(\Omega)$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$, on établit ce système dans $L^2(\Omega)$ et pour passer à l'espace $H^{-1}(\Omega)$, il suffit d'utiliser un argument de densité

Pour tout $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}^*) = \{\Psi \in \mathcal{X} : \Psi = 0 \text{ sur } \Sigma \times \Sigma\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \frac{d}{dt} \left\langle \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \Psi \right\rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} &= \left\langle \mathbb{A} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \Psi \right\rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{A}y + F_1(y) + P_1(z) \\ \mathcal{A}z + F_2(z) + P_2(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &= \langle \mathcal{A}y, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle F_1(y), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle P_1(z), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \langle \mathcal{A}z, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle F_2(z), \psi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle P_2(y), \psi \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Calculons les trois premiers termes du membre de droite de (A.1)

Le terme $\langle \mathcal{A}y, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}y, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \mathcal{A}y \bar{\varphi} d\Omega = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \bar{\varphi} d\Omega \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \nu_i \bar{\varphi} d\Gamma - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} d\Omega \\
&= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij}(x) y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \nu_j d\Gamma + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right) y d\Omega \\
&= - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} u_1 d\Gamma_1 + \int_{\Omega} y \mathcal{A} \bar{\varphi} d\Omega \\
&= \left\langle u_{1,-} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right\rangle_{L^2(\Gamma_1)} + \langle y, \mathcal{A} \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Le terme $\langle F_1(y), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
\langle F_1(y), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (R_1 \cdot \nabla_0 y + \rho_1 y) \bar{\varphi} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} y \bar{\varphi} R_1 \cdot \nu d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div}_0 (R_1 \bar{\varphi}) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \rho_1 y \bar{\varphi} d\Omega
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{F}_1(\varphi) = \bar{\rho}_1 \varphi - \operatorname{div}_0 (R_1 \varphi)$

Donc

$$\langle F_1(y), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle y, \tilde{F}_1(\varphi) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \tag{A.3}$$

Le terme $\langle P_1(z), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$

L'opérateur $P_1(z)$ est d'ordre zéro, il prend la forme suivante $P_1(z) = \zeta_1 z$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle P_1(z), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \zeta_1 z \bar{\varphi} d\Omega \\
&= \left\langle z, \tilde{P}_1(\varphi) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

telle que $\tilde{P}_1(\varphi) = \bar{\zeta}_1 \varphi$

Les trois identités de ci-dessous est obtenue de la même façon que (A.2), (A.3), (A.4)

$$\langle \mathcal{A}z, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle u_{2,-} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right\rangle_{L^2(\Gamma_1)} + \langle z, \mathcal{A}\psi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\text{A.5})$$

$$\langle F_2(z), \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle z, \tilde{F}_2(\psi) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\text{A.6})$$

où $F_2(z) = R_2 \cdot \nabla_0 z + \rho_2 y$ et $\tilde{F}_2(\psi) = \bar{\rho}_2 \psi - \text{div}_0(R_2 \psi)$

$$\langle P_2(y), \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle y, \tilde{P}_2(\psi) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\text{A.7})$$

où $P_2(y) = \zeta_2 y$ et $\tilde{P}_2(\psi) = \bar{\zeta}_2 \psi$

Insérant (A.2)-(A.7) dans (A.1), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \frac{d}{dt} \left\langle \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \Psi \right\rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} &= \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)} \\ &+ \left\langle \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \tilde{F}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_1 & \mathcal{A} + \tilde{F}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Alors, le système homogène du système précédent est

$$\begin{cases} \mathbf{i} \varphi_t = \mathcal{A}\varphi + \tilde{F}_1(\varphi) + \tilde{P}_2(\psi) & \text{dans } Q \\ \mathbf{i} \psi_t = \mathcal{A}\psi + \tilde{F}_2(\psi) + \tilde{P}_1(\varphi) & \text{dans } Q \\ \varphi(T, x) = \varphi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \psi(T, x) = \psi_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \varphi|_{\Sigma} = 0 \\ \psi|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

et, sur Γ_1 , l'opérateur $\mathbb{B}' = - \left(\frac{\partial \cdot}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}, \frac{\partial \cdot}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)$

6.2 Annexe B (Contrôle optimal)

En procédant comme dans Lasiecka et Triggiani [6], on peut montrer que les contrôles u_1 et u_2 ramenant le système d'un état donné $\{y_0, z_0\}$ vers un état désiré $\{y_1, z_1\}$ et minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \times L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2$$

sont donnés par

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \\ u_2 &= -\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \end{aligned}$$

où (φ, ψ) est solution du système (4.10).

6.3 Annexe C

Ci-dessous, on donne un exemple, repris de [15], [14], où les hypothèses (1.1), (1.2) sont satisfaites

Exemple

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , supposons que l'opérateur \mathcal{A} est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\omega &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+y^6}{1+x^2+y^6} \frac{\partial\omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy^3}{1+x^2+y^6} \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy^3}{1+x^2+y^6} \frac{\partial\omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+x^2}{1+x^2+y^6} \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

La matrice $A(x, y)$ associée à l'opérateur \mathcal{A} est

$$A(x, y) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1+y^6}{1+x^2+y^6} & \frac{xy^3}{1+x^2+y^6} \\ \frac{xy^3}{1+x^2+y^6} & \frac{1+x^2}{1+x^2+y^6} \end{pmatrix}.$$

Alors, $\det A(x, y) = 1/(1+x^2+y^6) > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $A(x, y)$ est strictement positive définie sur le domaine borné Ω et donc (1.1), (1.2) sont vérifiées.

L'inverse de $A(x, y)$ est

$$G(x, y) = (g_{ij}) = (a_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -xy^3 \\ -xy^3 & 1+y^6 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Considérons alors la variété riemannienne (\mathbb{R}^2, g) dont la métrique g est définie, de (A.10), par

$$g = (1+x^2) dx dx - xy^3 dx dy - xy^3 dy dx + (1+y^6) dy dy \quad (\text{A.11})$$

Soit M la surface dans \mathbb{R}^3 donnée par

$$M = \left\{ (x, y, z) / z = f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \right\},$$

avec la métrique riemannienne induite g_M ,

Alors, la projection $\Phi(x, y, z) = (x, y)$, pour tout $(x, y, z) \in M$, détermine une isométrie de M vers (\mathbb{R}^2, g) . La courbure de Gaussian de (\mathbb{R}^2, g) en (x, y) est donc

$$\begin{aligned}
 k(x, y) &= \text{la courbure de Gaussian de } M \text{ en } (x, y, z) \\
 &= \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]} = \frac{-3y^2}{(1 + x^2 + y^6)^2} \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.
 \end{aligned}
 \tag{A.12}$$

Comme cette courbure est non positive, la fonction définie par

$$v(x) = d_g^2(x, x_0), \quad x_0 \text{ fixé dans } \mathbb{R}^2$$

est strictement convexe sur (\mathbb{R}^2, g) , ainsi l'estimation (3.1) est vérifiée.

Références

- [1] D. AZÉ, *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*, ellipses, Paris, 1997.
- [2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Math. Appl, Masson, Paris, 1983.
- [3] R. F. CURTAIN et H. J. ZWART, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, New York. 1995.
- [4] E. HEBEY, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variété*, Diderot Editeur, Paris. 1997.
- [5] I. LASIECKA et R. TRIGGIANI, *Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions*, Appl. Math. Optim. **25** (1992), pp. 189-224.
- [6] I. LASIECKA et R. TRIGGIANI, *Exact Controllability of the Wave Equation with Neumann Boundary Control*, Appl. Math. Optim. **19** (1989), pp. 243-290.
- [7] I. LASIECKA et R. TRIGGIANI, *Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equations with Dirichlet control*, Diff. and Int. Equis., **5** (1992), pp. 521-535.
- [8] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes distribués*, Tome 1, Masson, Paris, 1988.
- [9] E. MACHTYNGIER, *Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de l'équation de Schrödinger*. C. R. Acad. Sci. (1990), pp. 801-806.
- [10] E. MACHTYNGIER, *Exact controllability for the Schrödinger equation*. SIAM J. Control Optim., **32** (1994), pp. 24-34.
- [11] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York. 1983.

- [12] S. E. REBIAI, *Uniform energy decay of Schrödinger equations with variable coefficients*, IMA J. Math. Control and Info., **20** (2003), pp. 335-345.
- [13] R. TRIGGIANI, *Carleman estimates and Exact Boundary Controllability for a System of Coupled Non- Conservative Schrödinger Equations*, Rend. Instit.Math. Univ. Trieste. Suppl, **XXVIII** (1997), pp. 453-504.
- [14] R. TRIGGIANI et P. F. Yao, *Inverse/ Observability estimates for Schrödinger equations with variable coefficients*. Control Cybernetics, **28** (1999), pp. 627-654.
- [15] P. F. Yao, *On the observability inequalities for exact controllability of wave equations with variable coefficients*, SIAM J., **37** (1999), pp. 1568-1599.