

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

# Mémoire

Présenté

AU DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE  
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
UNIVERSITÉ DE BATNA

Pour obtenir le titre de

**MAGISTÈRE EN GÉNIE MÉCANIQUE**

**Option : Construction Mécanique**

Par

**Riad Abdenouri**

## **Contribution à la modélisation des structures mécaniques sous sollicitations sévères**

Soutenu publiquement le : 30/01/2007, devant le jury composé de :

Dr. A. DJEBAILI  
Dr. K. ZIDANI  
Dr. R. BENBOUTA  
Dr. M. BRIOUA

M.C. Centre Universitaire O. El Bouaghi  
M.C. Université de Batna  
M.C. Université de Batna  
M.C. Université de Batna

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur

# Remerciement

*Ce travail a été effectué dans le département de mécanique.*

*Je remercie le bon DIEU, mes parents, mes frères et toutes les personnes qui me sont proches.*

*J'exprime ma sincère reconnaissance envers mon encadreur Dr. KAMEL ZIDANI pour m'avoir encadré, soutenu et conseillé tout au long de ce travail.*

*Je remercie également tous les enseignants du DEPARTEMENT DE MECANIQUE.*

# Table des matières

<b>CHAPITRE I NOTIONS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS .....</b>	<b>7</b>
I. Référentiel et repère .....	8
I.2. Déformation .....	9
I.2.1. Etat de déformation sphérique et état de déformation déviatorique.....	9
I.3. Contraintes .....	9
I.4. Equation d'équilibre .....	10
I.5. Comportement élastique .....	10
I.6 . le comportement élasto-plastique .....	10
I.6. 1. L'expérience de traction simple ; limites d'élasticité .....	11
Remarque .....	13
I.7. Cas d'une sollicitation uniaxiale .....	15
I.7. 1. Matériau écrouissable .....	15
I.7.2. Matériau parfaitement plastique .....	17
I.7.3. Sollicitation multiaxiale en domaines d'élasticité .....	18
<b>CHAPITRE II MODELES ANALYTIQUES D'ETUDE DU COMPORTEMENT ELASTO- PLASTIQUE .....</b>	<b>20</b>
Introduction .....	21
II.1. Les critères de plasticité .....	21
II.1.1. Critère de von mises .....	22
II.1.1. Frontière d'écoulement .....	22
II.1.2. Critère de Tresca .....	23
II.1.2.1. Frontière d'écoulement .....	23
II.1.3. Le critère de hill .....	24
II.2. Hypothèse de la théorie de plasticité .....	24
II.2.1. Règle de normalité. « plasticite associée » .....	24
II.2.2. Règle d'écoulement .....	25
II.2.2.1. Sollicitation uniaxiale pour un matériau écrouissable .....	26
II.2.2.2. Sollicitation multiaxiale pour le materiau ecrouissable .....	28
II.2.3. Evolution de la surface de charge .....	30
II.2.3.1. L'écrouissage isotrope .....	30
II.2.3.2. L'écrouissage cinématique .....	30
II.2.3.3. L'écrouissage mixte .....	31
II.3. Dédution de la matrice élasto-plastique par la mécanique des milieux continus .....	31
II.3. Mesure de l'endommagement .....	33
II.3. 1. Méthodes statique .....	33
II.3. 2. Méthode dynamique par ultra-sons .....	34
<b>CHAPITRE IV RAPPEL SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE .....</b>	<b>40</b>
IV.1. Historique .....	41
IV.1.2. Hypothèses et cadre de l'étude .....	42
IV.1.2.1. Endommagement et mécanique de la rupture .....	42
IV.1.2.2. Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques .....	42
IV.1.2.3. Modes de rupture .....	43
IV.1.2.4. Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture .....	43
• Etude d'un milieu élastique fissuré .....	44
• Plasticité confinée.....	45
• Plasticité étendue .....	45
IV.1.3. Approche Locale .....	46

IV.1.3.1. Facteurs d'intensité des contraintes .....	46
IV.1.3.2. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes .....	46
• Eléments singuliers .....	47
• Méthode des fonctions de poids .....	47
• Calcul par extrapolation .....	47
IV.1.4. Approche Globale ou Energétique .....	48
IV.1.4.1. Le taux de restitution d'énergie .....	48
VI.1.4.2. Intégrales de contour .....	49
VI.1.4.3. Calcul du taux de restitution d'énergie .....	50
• Calcul par avancée réelle de fissure.....	51
• Méthode de l'intégrale J .....	51
• Calcul par avancée virtuelle de fissure .....	52
• Méthode $G\theta$ .....	53
- La variation d'énergie potentielle totale $W_p$ .....	53
- Propriétés du champ $\theta$ .....	54
- Expression du taux de restitution d'énergie .....	55
VI.1.4.4. Maillage Concentrique .....	55

## **CHAPITRE V SIMULATION NUMERIQUES PAR LE CODE CASTEM2000 ..... 57**

Introduction .....	58
V.1. Dimension de la structure .....	58
V.2. Modélisation numérique .....	59
V.3. Distribution des contraintes et des déformations .....	59
V.4. Géométrie maillée .....	60
V.5. Charge appliquée .....	60
V.6. Courbe de traction .....	61
V.7. Courbe de temps pour la manipulation de la procédure pas à pas .....	61
V.8. Résultats des contraintes de Von Mises .....	62
V.8.1. Interprétation des résultats des contraintes de Von Mises .....	74
V.9. Les résultats du calcul de l'énergies de restitution pour les différentes géométries .....	74
V.9.1. Interprétation des résultats relatifs à l'énergie de restitution .....	76
V.10. Le facteur d'intensité des contraintes .....	77
V.10.1. Interprétation des résultats des facteurs d'intensité des contraintes .....	79
V.11. Interprétation globale des résultats .....	80

## **BIBLIOGRAPHIE ..... 83**

# Introduction générale

Le travail entrepris est une contribution à l'analyse de la réponse d'une structure mécanique soumise à des sollicitations mécaniques complexes. La structure en question est une conduite utilisée dans le transport sous des pressions et des gradients de température importants de fluides. La conduite en question, présente une fissure initiée sur sa face interne. L'étude présente des intérêts aussi bien techniques qu'économique. L'intérêt technique réside dans la mise en place d'un outil fiable de prédiction du comportement et de la stabilité et permettant la modélisation et la conception de ces structures mécaniques. L'intérêt économique réside dans le fait de pouvoir éviter les conséquences désastreuses relatives à la rupture ou la ruine de ces structures. La littérature traitant de la mécanique élastique linéaire de la rupture, nous renseigne que pour ce type de problèmes mécaniques, la région critique se situe généralement en pointe de fissure. Il est par conséquent important de pouvoir disposer des outils mathématiques permettant la modélisation des divers comportements mécaniques, en particulier, ceux régissant les comportements plastiques et élasto-plastiques des matériaux utilisés dans la conception de ce type de structures.

Le cylindre présentant une fissure interne initiée est sujet à une pression de service relativement importante, il s'agit de pouvoir faire une étude paramétrique incluant les différents paramètres aussi bien géométriques que de chargement qui influent directement sur la stabilité de la fissure. La littérature nous informe qu'en pointe de fissure se localise généralement une zone plastifiée dont il convient de prendre compte lors de toute étude. En relation avec l'importance de cette zone, plusieurs modèles ont été proposés pour l'approche des champs de déplacement et de contraintes. Dans notre étude, nous nous intéressons particulièrement aux comportements élasto-plastique et plastiques des matériaux.

Notre objectif principal est d'étudier et de montrer, par une simulation numérique en élasto-plastique utilisant le code de calcul Castem2000, l'influence des paramètres : effort appliqué, facteur de plasticité, la géométrie du cylindre et la géométrie de fissure.

Un des aspects principaux de ce travail consiste à établir une étude de sensibilités des principaux paramètres qui influent directement sur stabilité de la fissure. Le plan de rédaction de la thèse est le suivant :

- Nous commençons par un premier chapitre présentant un rappel de la mécanique des milieux continus avec une description sur l'élasticité linéaire.

- Le deuxième chapitre est consacré à une bibliographie en relation avec les différentes lois de comportement en particulier, les comportements élasto-plastique et plastique.
- Le troisième chapitre est consacré aux différentes notions de la mécanique de la rupture (énergie de restitution, facteurs d'intensité de contraintes :  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ,  $K_{IC}$ ) ainsi que les méthodes de leurs calcul.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'étude par éléments finis d'un cylindre fissuré à l'aide du code de calcul Castem2000.

**CHAPITRE I**  
**NOTIONS DE LA MECANIQUE DES**  
**MILIEUX CONTINUS**

### I. Référentiel et repère

La formulation mathématique nécessite que l'on procède à la description et au repérage du système étudié tout au long de son évolution au cours du temps. Seuls le plan initial  $C^0$  et la forme 3D de la pièce finale sont considérées. En utilisant l'hypothèse de Kirchhoff, les vectrices positions initiales et finales d'un point matériel  $q$  peuvent être exprimées par rapport au point  $P$  situé sur la surface moyenne de  $C$  (v.1) :

$$\{X_q\} = \{X_p\} + z_0 \{n_0\} = \{x_p\} - \{u_p\} + z_0 \{n_0\} \quad (I.1)$$

Où  $u_0$  est le vecteur de déplacement du point  $p$ ,  $n_0$  est la normale de la surface moyenne en  $p_0$ ,  $z_0$  est la coordonnée à travers l'épaisseur initiale.

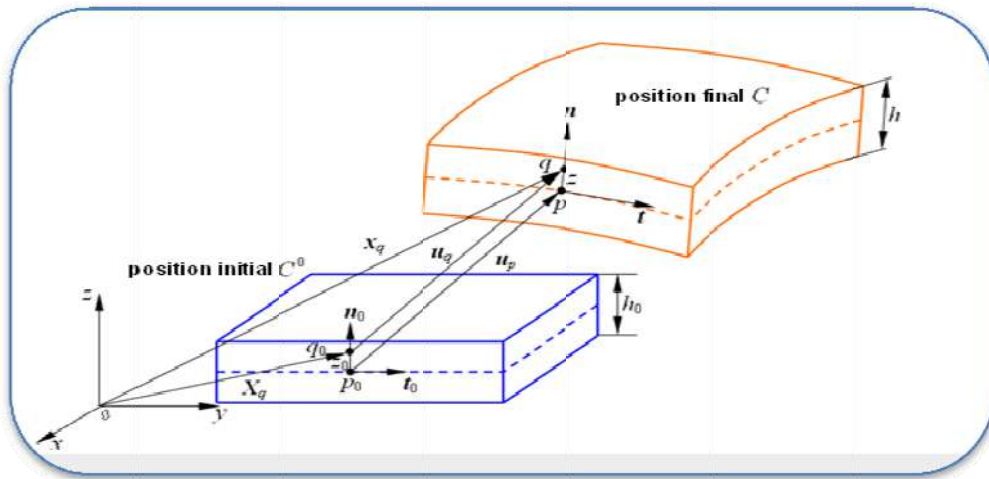


Fig I.1 : Cinématique d'un élément en déformation.

Soit  $x = \langle x, y, z \rangle$  le repère local orthogonal. Le tenseur gradient de déformation aux points  $q_0$  et  $q$  par rapport à  $P$  est donné par :

$$\{dX_q\} = [F_0]^{-1} \{dx\} \quad \text{où} \quad [F_0]^{-1} = [\mathbf{x}_{p,x} - \mathbf{u}_{p,x}, \mathbf{x}_{p,y} - \mathbf{u}_{p,y}, \mathbf{n}_0 / \lambda_3] \quad (I.1)$$

$$\{dx_q\} = [F_z] \{dx\} \quad \text{où} \quad [F_z] = [\mathbf{x}_{p,x} + z, \mathbf{n}_x, \mathbf{x}_{p,y} + z, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}] \quad (I.2)$$

Où ;  $\lambda = \frac{z}{z'} = \frac{h}{h_0}$  est l'élongation d'épaisseur (supposée constante à travers l'épaisseur). L'inverse du tenseur gradient de déformation en  $q$  est obtenu par formule (I.2) et (I.3) :

$$[F]^{-1} = [F_0]^{-1} [F_z]^{-1} \quad (I.3)$$

Ainsi le tenseur de Cauchy–Green gauche entre  $q$  et  $q_0$  peut être défini par :

$$[B]^{-1} = [F]^{-T} [F]^{-1} \quad (I.4)$$

Le calcul des valeurs propres de  $\beta^{-1}$  donne deux élongations principales dans le plan  $\lambda_1, \lambda_2$  et leur matrice de transformation  $M$ . L'élongation d'épaisseur est calculée avec l'hypothèse.

## 1.2. Déformation

Il convient de bien différencier la notion de déplacement de la notion de déformation. Il existe des champs vectoriels de déplacement qui ne créent aucune déformation. Il est d'usage de dire que, dans le cas de petites perturbations, l'état de déformation est représenté par le tenseur des déformations linéaires  $\varepsilon_{ij}$  défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

### 1.2.1. Etat de déformation sphérique et état de déformation déviatorique :

Il est toujours possible de décomposer un tenseur de deuxième ordre sous forme d'un tenseur sphérique  $s$  et tenseurs déviatorique  $D$ . Les formules sont les suivantes :  $T = S + D$ , Dans le cas du tenseur de déformation, le tenseur sphérique associé change le volume sans changer la forme alors que le tenseur déviateur  $D$  change la forme à volume constant.

## 1.3. Contraintes

Les efforts exercés sur une facette d'un milieu continu peuvent être représentés par une répartition surfacique de forces. La représentation la plus fréquente de l'état de contrainte en un point matériel est schématisée sur la figure ci-dessous.

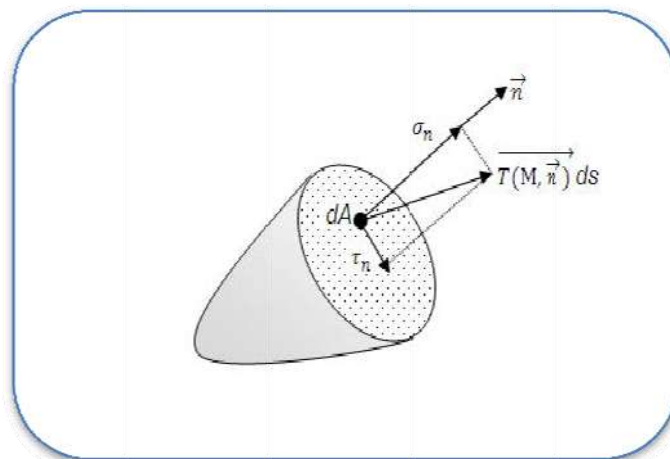


Fig I.2 : État de contrainte en un point matériel.

On a donc une représentation par un vecteur du type  $\vec{T}(M, \vec{n})$  appelé vecteur contrainte en  $M$  dans la direction  $\vec{n}$ . On peut alors définir la contrainte normale  $\sigma_n$  comme étant la projection sur la direction de la normale  $\vec{n}$  du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$ . De même on a le vecteur contrainte tangentielle  $\vec{\tau}_n$  (appelé cisaillement ou contrainte de cisaillement) qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette on a :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} \\ \vec{\tau}_n &= \vec{n} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}\end{aligned}\quad (1.7)$$

#### 1.4. Equation d'équilibre

À partir des expressions des puissances virtuelles des efforts extérieurs et des efforts intérieurs, on obtient les équations de la statique :

$$\rho \vec{\gamma}(M, t / R_g) = \text{div } \vec{\sigma} + \rho \vec{f}(M, t) \quad (1.8)$$

#### 1.5. Comportement élastique

Selon le dictionnaire du groupe français de rhéologie de 1988: L'élasticité exprime la « tendance d'un corps à reprendre la forme et les dimensions qu'il avait avant une sollicitation, lorsqu'on supprime cette sollicitation ». Un corps est idéalement élastique lorsqu'il évolue de manière totalement réversible (sans déformation permanente), et que toute transformation subie produit une dissipation nulle. Elle s'écrit par une relation inversible entre la contrainte et la déformation. Par exemple, lorsque cette relation est linéaire et isotrope, la loi de l'élasticité de Hooke (17<sup>ème</sup> siècle) est la plus simple (1.5):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (1.10)$$

Où :  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \delta_{ij}$  sont respectivement les composantes des tenseurs des contraintes, des déformations et de la tenseur unitaire.  $\text{Tr}(\sigma_{ij})$  Est la trace du tenseur des déformations. Enfin  $\lambda, \mu$  sont les coefficients de Lamé.  $E, \nu$  sont le module d'Young et le coefficient de Poisson.

#### 1.6. le comportement élasto-plastique

Le schéma **élasto-plastique** pour le comportement des matériaux, a été élaboré à partir de constatations expérimentales relatives au comportement tridimensionnel des métaux. Actuellement, on résout par voies analytiques ou numériques, des problèmes d'élastoplasticité en calcul des structures (structures réticulées, structures à barres fléchies), des plaques et coques métalliques, et l'on utilise aussi ce modèle pour l'analyse de structures en béton [01].

Le modèle de comportement élasto-plastique classique ne tient pas compte de tout effet de vieillissement et de viscosité du matériau. Du point de vue des formules mathématiques par lesquelles on représente le comportement plastique, cela implique :

1. en conséquence de l'absence de vieillissement, l'invariance par translation sur la variable temps ;
2. en conséquence de l'absence de viscosité, la réponse (déformation) du matériau à la variation élémentaire de sollicitation (contrainte) effectuée à un instant donné, se produit en totalité simultanément à cette variation et est indépendante de la vitesse avec laquelle celle-ci est effectuée.

Le modèle de comportement élasto-plastique s'appuie sur les concepts fondamentaux suivants:

1. les domaines d'élasticité, qui généralisent la notion de limites d'élasticité, mis en évidence dans les expériences en sollicitations uniaxiales (traction simple par exemple) et qui sont étroitement liés au phénomène essentiel d'érouissage ;
2. la règle d'écoulement plastique qui définit, dans le cas des sollicitations multiaxiales, la façon dont évolue la déformation plastique.

### I.6. 1. L'expérience de traction simple ; limites d'élasticité

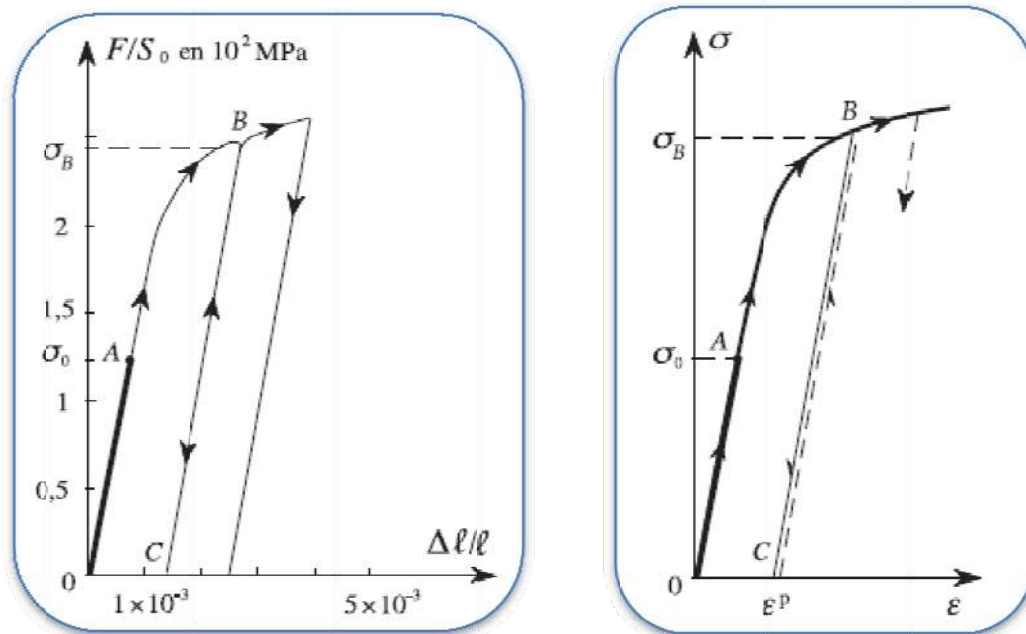


Fig I.3 : Expérience de traction simple pour un matériau érouissable (vitesse de déformation fixée).

On constate, l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit  $\sigma_0$ , à partir duquel le comportement du matériau devient irréversible Fig I.4.

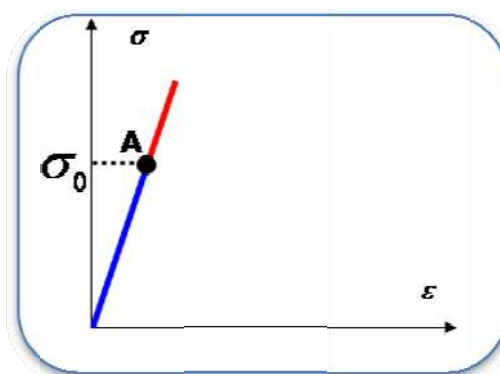


Fig I.4 : Limite d'élasticité  $\sigma_0$ .

On charge l'éprouvette au-delà du point (A) jusqu'en (B), puis, on effectue une décharge. La décharge suit sur le diagramme le chemin (BC) et non le chemin (BAO). Après décharge totale, il subsiste une déformation permanente de l'éprouvette représentée par (OC) sur la Fig I.5: cette déformation permanente est la déformation plastique ( $\varepsilon^p$ ).

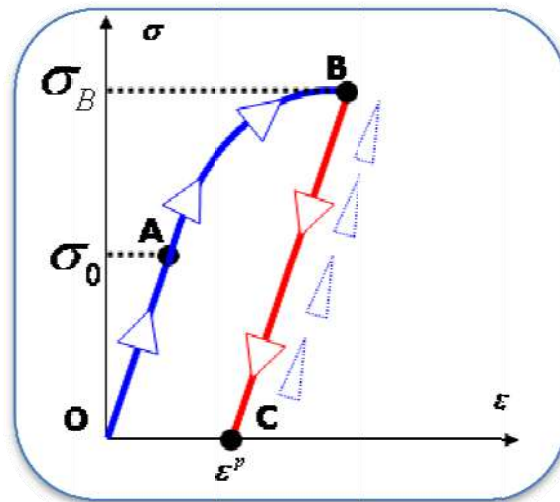


Fig I.5 : Charge et décharge "matériau écrouissable".

On procède alors à une nouvelle charge: tant que la contrainte reste inférieure à ( $\sigma_B$ ), celle-ci s'effectue en suivant le trajet (CB), identique, au sens de parcours près, à celui décrit lors de la décharge; le comportement demeure réversible tout au long de (CB). Quand la contrainte ( $\sigma$ ) dépasse ( $\sigma_B$ ), le point représentatif suit la courbe de chargement monotone.

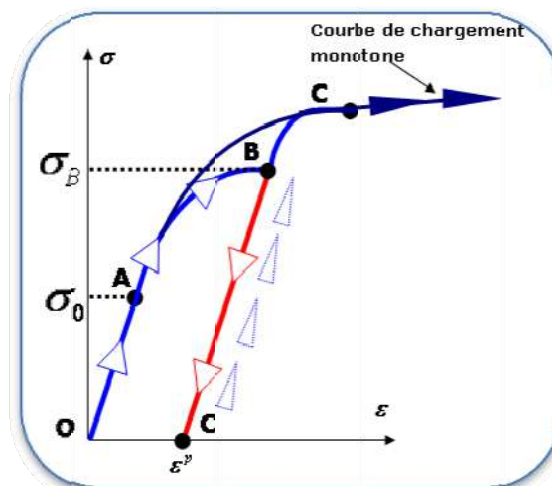


Fig I.6: Courbe de chargement monotone.

Ainsi lors de la nouvelle charge effectuée à partir du point (C), La valeur de la contrainte ( $\sigma_B$ ) apparaît comme le nouveau seuil en traction. En supposant l'homogénéité de l'état de contrainte et de la déformation dans la partie utile de l'éprouvette, la Fig I.6 donne la représentation du modèle de comportement correspondant pour le matériau sous la forme d'un diagramme reliant la contrainte  $\sigma$  à la déformation  $\varepsilon$  selon l'axe de

l'éprouvette. Sur ce diagramme,  $\sigma_0$  est la limite initiale d'élasticité ou seuil initial de plasticité. Après charge jusqu'au niveau  $\sigma_B$ , la limite actuelle d'élasticité ou seuil actuel de plasticité est égale à  $\sigma_B$ : ce résultat est parfois appelé « Principe de Coulomb ». La déformation permanente après décharge est la déformation plastique  $\varepsilon^p$ .

### Remarque

Pour certains matériaux, le diagramme contrainte-déformation, dépend, dans la partie irréversible, c'est-à-dire inélastique, de la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  adoptée; c'est le cas en particulier, pour l'aluminium comme montrée sur la Fig I.7.

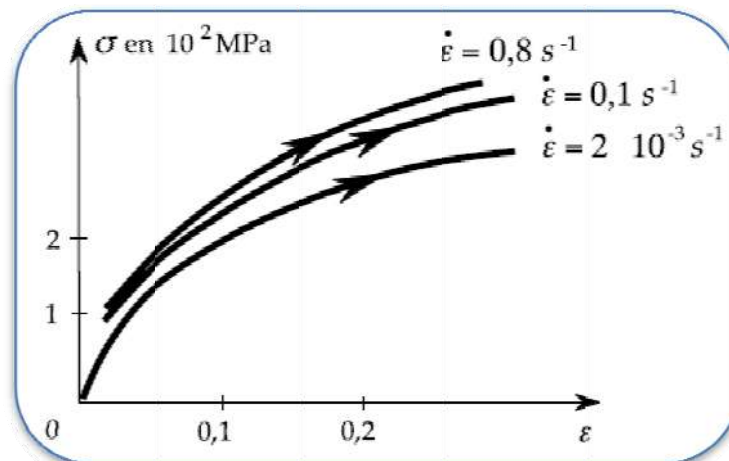


Fig I.7 : Expérience en traction simple sur une éprouvette d'aluminium : Influence de la vitesse de déformation.

Le modèle de comportement élasto-plastique classique laisse de côté tout effet de viscoplasticité et de vieillissement : le comportement du matériau en traction simple est alors schématisé par la courbe unique de la Fig I.6.

Le phénomène observé à la Fig I.6, où la limite actuelle d'élasticité ( $\sigma_B$ ) est une fonction de ( $\varepsilon^p$ ), correspond au cas du matériau dit écrouissable; on précise même dans certains cas « matériau à écrouissage positif » pour traduire le fait que le seuil de plasticité est une fonction croissante de ( $\varepsilon^p$ ).

Ce phénomène, quoique le plus répandu, n'est pas général pour le comportement plastique. Ainsi la Fig I.8 représente le diagramme relevé dans le cas de l'expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'acier doux : on constate que celui-ci présente un palier pour des déformations allant de  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$  (ordres de grandeur). Un tel comportement est modélisé selon le diagramme de la Fig I.9 avec un palier plastique illimité et l'on dit que le matériau correspondant est élastique et parfaitement plastique. Ainsi, pour le modèle élastique-parfaitement plastique, la contrainte ne peut dépasser la valeur ( $\sigma_0$ ) et, lorsqu'elle atteint cette valeur il y a possibilité d'allongement illimité.

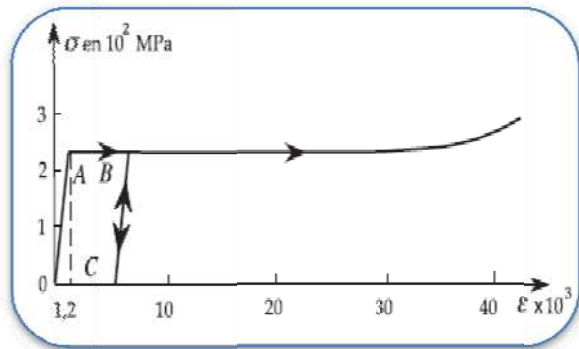


Fig I.8 : Expérience de traction simple pour un matériau

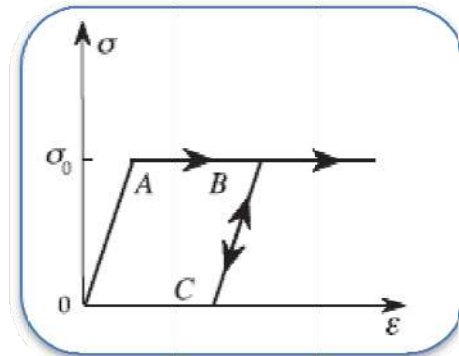


Fig I.9 : Représentation schématique. élastique parfaitement plastique.

On revient à la Fig I.6 de la courbe de charge-décharge d'un matériau "écrouissable". Après la décharge suivant (BC) on sollicite la même éprouvette en compression Fig I.10

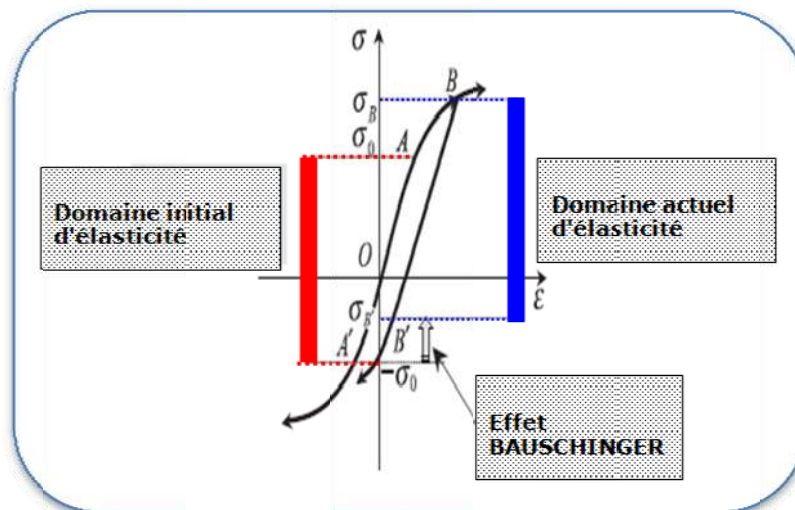


Fig I.10 : Expérience de traction-compression: effet de Bauschinger.

On constate alors que la limite d'élasticité en compression, initialement égale à  $(-\sigma_0)$ , se trouve ramenée à la valeur  $(\sigma_0)$ , supérieure (algébriquement) à  $(-\sigma_0)$ . Autrement dit, l'écrouissage en traction qui correspond à un relèvement de la limite d'élasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) de la limite d'élasticité en compression. Ce phénomène est connu sous le nom **d'effet Bauschinger** [02]. Le segment  $[-\sigma_0, \sigma_0]$  définit le domaine initial d'élasticité du matériau en traction-compression simple tandis que le segment  $[-\sigma_B, \sigma_B]$  définit le domaine actuel d'élasticité après écrouissage en traction simple jusqu'à la valeur  $\sigma_B$ .

Pour l'acier doux, si l'on effectue une première charge en traction jusqu'à obtenir une déformation plastique sous contrainte constante égale à  $\sigma_0$  on constate ensuite, après décharge de la traction et charge en compression, que la limite d'élasticité en compression est également ramenée à une valeur  $\sigma_B$ , légèrement supérieure à  $-\sigma_0$  (algébriquement) et que, si l'on poursuit la charge avec déformation plastique en compression, la contrainte rejoint rapidement un palier à la valeur  $-\sigma_0$ , Fig I.10. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans la modélisation du matériau élastique

parfaitement plastique qui pose que les valeurs limites d'élasticité en traction et en compression sont des constantes Fig I.11

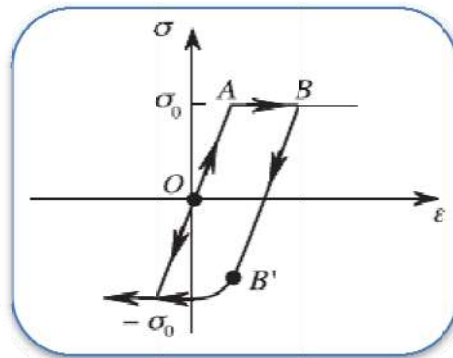


Fig I.11 : Expérience de traction-compression: acier doux.

## 1.7. Cas d'une sollicitation uniaxiale

### 1.7.1. Matériau écrouissable

Au cours de l'histoire de chargement du matériau, dès que l'on franchi la limite d'élasticité initiale, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus, comme en élasticité, correspondance biunivoque entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  : la donnée de  $\sigma$  ne suffit plus à définir  $\sigma$  et vice-versa.

Si l'on connaît à la fois la contrainte actuelle  $\sigma$  et tout le trajet de charge suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial naturel, alors la donnée d'une variation de contrainte  $d\sigma$  suffit à déterminer la variation correspondante de la déformation  $d\varepsilon$ . La loi de comportement est alors dite de type incrémental.

En se reportant au diagramme de la Fig I.7 où la courbe de première charge est unique « indépendante de la vitesse de charge » et les droites de décharge élastique toutes bien identifiées, on voit plus précisément que  $d\varepsilon$  est déterminée en fonction de  $d\sigma$  dès que l'on connaît  $\sigma$  et  $\varepsilon$  qui suffit, avec  $\varepsilon$ , à déterminer l'état d'écrouissage actuel du matériau et donc la position de  $\sigma$  par rapport à la limite d'élasticité actuelle. On a ainsi les circonstances suivantes:

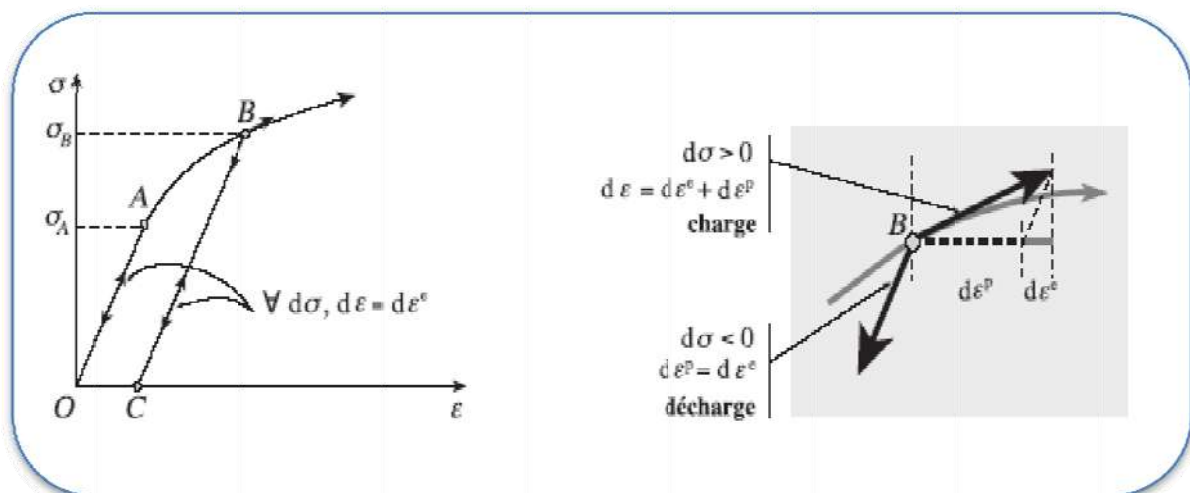


Fig I.12 : la limite d'élasticité actuelle.

1. Si  $\sigma$  est inférieure à la limite d'élasticité actuelle: la variation de déformation est alors réversible, donc purement élastique :  $d\varepsilon = d\varepsilon^e \forall$  le signe de  $d\sigma$ .

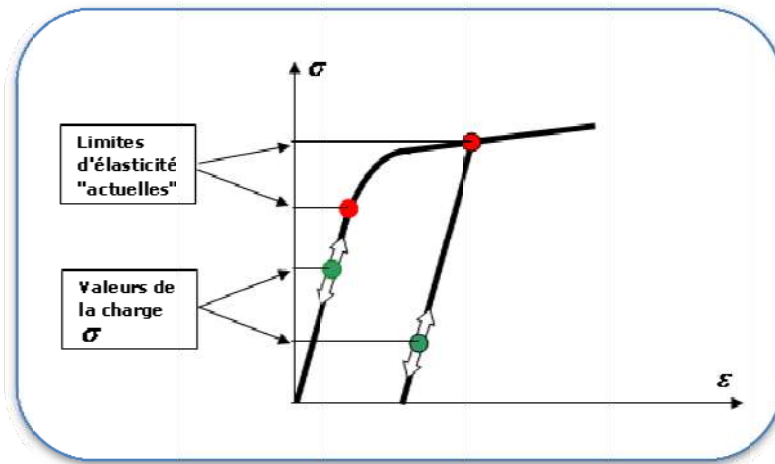


Fig I.13 : la variation de la charge

2. Si  $\sigma$  est égale à la limite d'élasticité actuelle et  $d\sigma < 0$ , correspondant à une décharge: la variation de déformation est réversible, donc purement élastique (c'est-à-dire qu'une décharge  $(-d\sigma)$  effectuée après la charge  $d\sigma$  ramène la déformation à sa valeur antérieure), alors:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e \quad \text{Si} \quad d\sigma < 0 \tag{I.11}$$

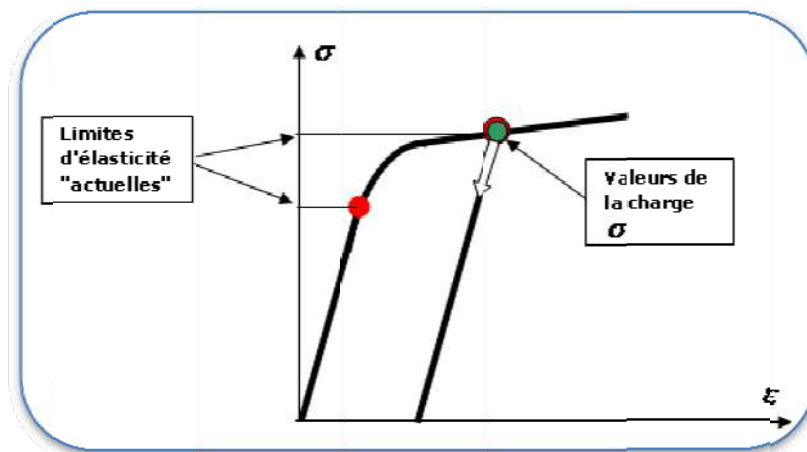


Fig I.14 : seuil d'élasticité actuelle.

3. Si  $\sigma$  est égale à la limite d'élasticité actuelle et  $d\sigma > 0$ , correspondant à une charge: la variation de déformation est décomposée, comme la somme d'une partie réversible et d'une partie irréversible. La partie réversible est la partie  $d\varepsilon^e$  que l'on récupère en effectuant, après la charge  $d\sigma$ , la décharge  $-d\sigma$ . La partie irréversible est le complément pour obtenir la variation de déformation totale:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad \text{Si} \quad d\sigma > 0 \tag{I.12}$$

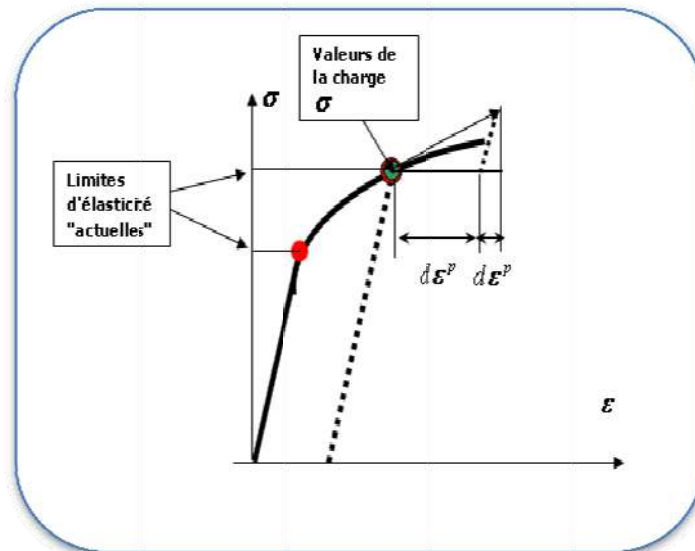


Fig I.15 : la variation de déformation totale.

Le module d'élasticité  $E$  est défini dans chaque état  $(\varepsilon, \sigma)$  par:

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e} \quad (I.13)$$

Dans le cas où le point de charge est à la limite d'élasticité actuelle on définit le "module tangent" par la relation:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad d\sigma > 0 \quad (I.14)$$

Le module d'écroissage du matériau étant:

$$M = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad d\sigma > 0 \quad (I.15)$$

D'où:

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{M} \quad (I.16)$$

Le module d'écroissage  $M$  est positif pour le matériau écroissable classique, correspondant au diagramme de la Fig I.3 le matériau à écroissage négatif correspond au cas où la courbe de charge, après avoir crû jusqu'à un maximum, décroît  $E, M$  sont alors négatifs [03].

### 1.7.2. Matériau parfaitement plastique

Pour le matériau parfaitement plastique, les résultats de l'expérience en sollicitation uniaxiale se présentent comme indiqués sur la Fig I.16

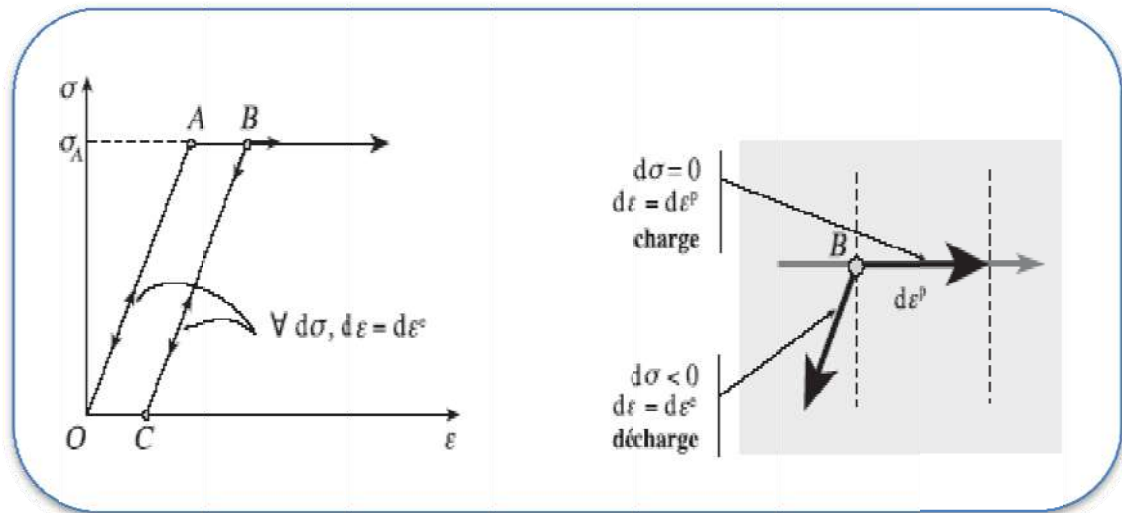


Fig I.16 : Matériau parfaitement plastique.

Si  $\sigma$  est inférieure à la limite d'élasticité  $\sigma_0$  : la variation de déformation est purement élastique

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e \quad \forall d\sigma \quad (I.17)$$

Si  $\sigma$  est égale à la limite d'élasticité  $\sigma_0$  et si  $d\sigma < 0$ , correspondant à une décharge : la variation de déformation est purement élastique

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e \quad \text{si} \quad d\sigma < 0 \quad (I.18)$$

Si  $\sigma$  est égale à la limite d'élasticité  $\sigma_0$  et si  $d\sigma = 0$  : la variation de déformation est alors entièrement irréversible

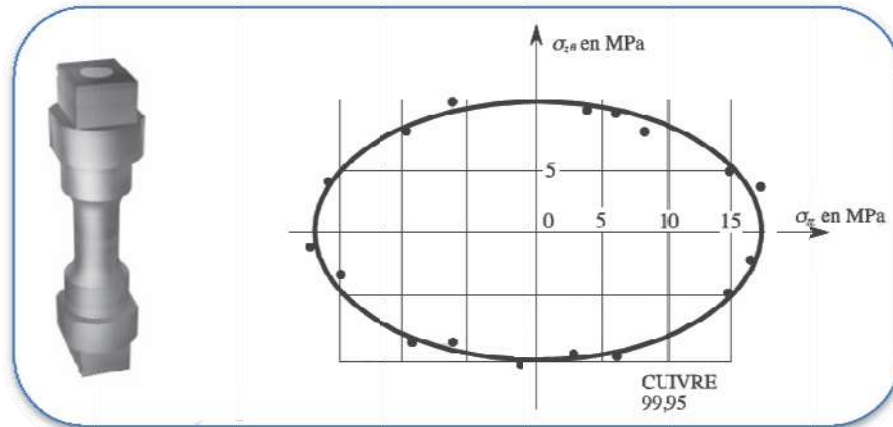
$$d\varepsilon = d\varepsilon^p \geq 0 \quad (I.19)$$

La définition du module d'élasticité est évidemment inchangée. En revanche, le module tangent comme le module d'écrouissage sont égaux à zéro.

### 1.7.3. Sollicitation multiaxiale en domaines d'élasticité

L'expérience monoaxiale évoquée ci-dessus ne représente qu'un cas particulier des sollicitations que peut subir un élément de milieu continu tridimensionnel. D'une façon générale, une sollicitation quelconque de l'élément de matière est caractérisée par le tenseur des contraintes  $\sigma$  (tenseur de Cauchy), élément de l'espace  $R^9$  (ou  $R^6$  en tenant compte des symétries  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ). Par les résultats expérimentaux on met en évidence l'existence d'un domaine d'élasticité initial contenant l'origine, et tel que pour tout trajet de charge de l'élément de matière, partant de l'état naturel et situé entièrement à l'intérieur de ce domaine, les déformations sont élastiques (c'est-à-dire réversibles). Ce domaine noté  $C$  est ainsi défini dans l'espace  $R^6$  des tenseurs  $\sigma$ . Par rapport à la sollicitation uniaxiale, il apparaît comme l'homologue du segment  $[-\sigma_0, \sigma_0]$  tracé sur l'axe des  $\sigma$  à la Fig 1.17. On peut dire aussi que le segment  $[-\sigma_0, \sigma_0]$  est l'intersection du domaine d'élasticité initial avec la droite « sollicitation en traction-

*compression* ». De même, dans le cas d'une sollicitation plus complexe telle que celle réalisée dans l'expérience de traction-compression et torsion de tubes minces (Bui, 1970), où les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  et la contrainte de cisaillement  $\sigma_{z\theta}$  variant indépendamment l'une de l'autre Fig I.17, on obtient un domaine d'élasticité qui est l'intersection du domaine défini dans l'espace  $R^6$  avec le sous-espace correspondant à la sollicitation appliquée c'est-à-dire le plan d'équations  $\sigma_{zr} = \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0$ .



**Fig I.17 : Epreuve pour l'expérience de traction-compression et torsion d'un tube mince ; exemple de domaine initial d'élasticité déterminé expérimentalement (H. D. Bui, 1970).**

**CHAPITRE II**  
**MODELES ANALYTIQUES D'ETUDE**  
**DU COMPORTEMENT ELASTO-**  
**PLASTIQUE**

### Introduction

La construction des modèles de comportement non linéaire des matériaux comporte deux volets : l'étude des propriétés rhéologiques et la définition de la forme des équations pour un chargement tridimensionnel. La rhéologie, étude des écoulements, permet de relier les contraintes, les déformations, et leurs dérivées, et caractérise la nature des comportements. On va voir dans ce chapitre que les comportements les plus complexes se bâtissent à partir de briques élémentaires.

a. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation Fig II.1.a.

b. L'amortisseur, qui schématise la viscosité, linéaire Fig II.1.b ou non linéaire Fig II.1.c. La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.

c. Patin représenté la plasticité Fig II.1.d.

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques.

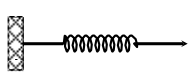
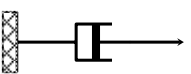
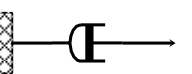
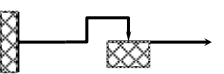
			
a) $\sigma = E \varepsilon$	b) $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$	c) $\dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon}^{1/N} \sigma$	d) $-\sigma_y \leq \sigma \leq \sigma_y$

Fig II.1 : Les « briques de base » pour la représentation des comportements.

### II.1. Les critères de plasticité

Lorsqu'un solide est soumis à un champ de contraintes  $\sigma$ , celui-ci se déforme avec un champ de déformation  $\varepsilon$ . Ce dernier peut être décomposé en la somme de deux déformations :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (\text{II.1})$$

Avec :  $\varepsilon_e$  est la déformation élastique, proportionnelle à  $\sigma$  selon la loi de Hooke:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon_e = \frac{K}{E} \sigma}}}}}}}} \quad (\text{II.2})$$

$\varepsilon_p$  : est la déformation plastique. Celle-ci n'apparaît que lorsque le champ  $\sigma$  dépasse un certain état de contrainte. La variation de cette « limite élastique », fonction de  $\varepsilon_p$ , définit l'écrouissage. Comme nous venons de le voir, le solide rentre en plasticité pour un certain champ de contrainte. Plusieurs critères ont été mis en place pour caractériser cette limite. Ils se présentent en général comme une relation de la forme :

$$f(\sigma) < 0 \text{ avec : } f(\sigma) = \sigma_{eq} - \sigma_y \quad (\text{II.3})$$

Où  $\sigma_{eq}$ , est la contrainte équivalente,  $\sigma_y$  est la limite élastique. La « zone limite de contrainte » pour laquelle cette relation est respectée s'appelle la surface de charge. Le modèle « plan orthotrope » possède quelques points remarquables qui peuvent être déterminés en trouvant la

limite élastique de divers essais. On peut notamment noter les deux points de traction simple dans les directions de contrainte principales :

- les points de cisaillement pur ;
- les points de traction biaxiale ;
- les points de tractions larges.

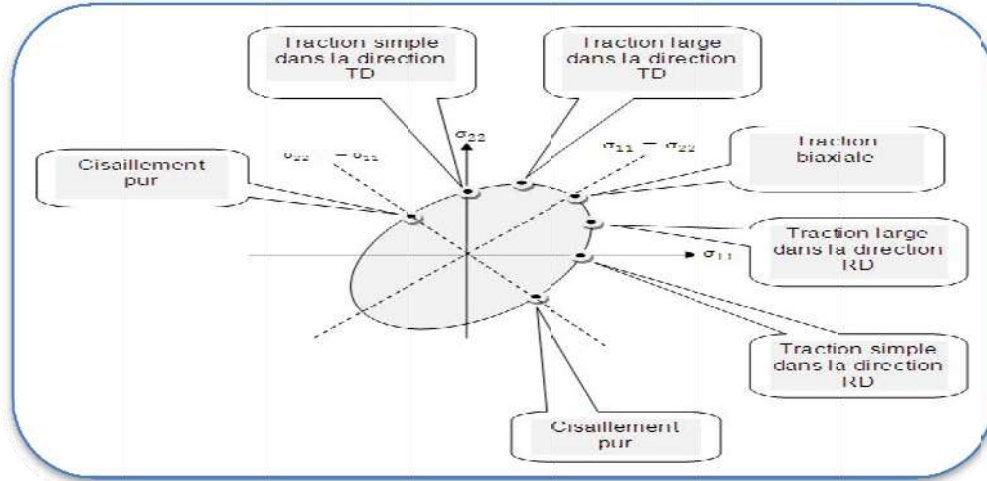


Fig II.2 : Points remarquables de la surface de charge.

Différentes lois ont été élaborées pour définir ce critère.

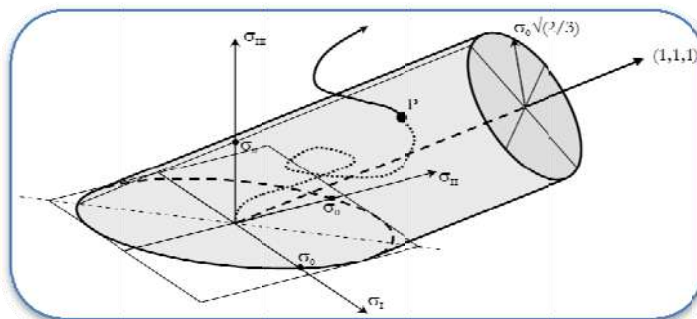
**II.1.1. Critère de von mises**

La forme la plus simple pour le critère de Von Mises  $f(J_2) = 0$ , tel que  $J_2$  atteint une valeur égale :

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \sigma_{ij} \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_k \sigma_{kk} \right)^2 \tag{II.4}$$

**II.1.1. Frontière d'écoulement**

la surface d'écoulement est représentée dans le repère principal par un cylindre de révolution de génératrice parallèle plan (1,1,1), voir la Fig II.3 La plastification étant indépendante de la pression hydrostatique, la frontière d'écoulement a donc des génératrices parallèles à l'axe (1, 1,1).



- Chemin de chargement.
- ... Déformation élastique.
- Début de la déformation plastique.

Fig II.3 : schéma représentant la Frontière d'écoulement de Von Mises.

### II.1.2. Critère de Tresca

La plasticité intervient par glissement des plans atomiques les uns sur les autres qui est provoqué par les contraintes de cisaillement le long de ces plans. La plasticité se déclenchera lorsque la cission appliquée dans un plan atteindra une valeur critique  $k$ . Dans l'hypothèse d'un matériau isotrope, les plans subissant le cisaillement maximal atteindront la valeur critique en premier, le critère de plasticité de Tresca s'écrit :

$$\sigma_s - \sigma_l = \sigma_0 \quad (II.5)$$

Où  $\sigma_s$  et  $\sigma_l$  : sont respectivement la contrainte de cisaillement et contrainte principale.

#### II.1.2.1. Frontière d'écoulement

La surface d'écoulement est un hexagone inscrit dans l'ellipse précédemment obtenue pour le critère de Von Mises comme le montre la Fig II.4.

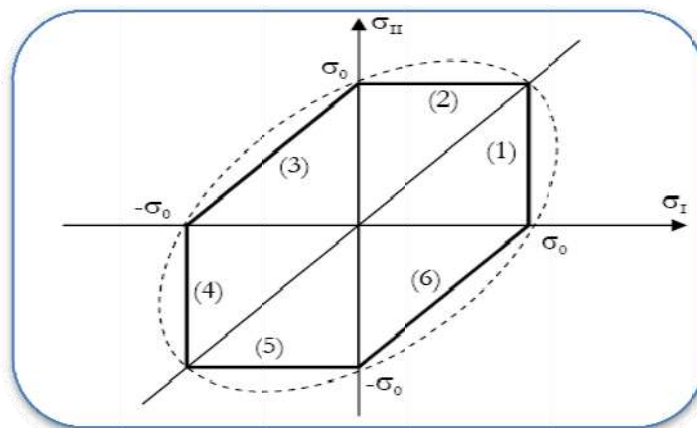


Fig II.4 : schéma représentant la Frontière d'écoulement plane de Tresca.

la surface d'écoulement est un prisme de génératrices parallèles à l'axe (1,1,1) et de section droite un hexagone régulier de côté  $\sigma_0\sqrt{2/3}$ , inscrit dans le cylindre de Von Mises. Aucun axe n'étant privilégié, on retrouve la symétrie d'ordre 3 autour de l'axe (1,1,1). Comme le critère de Von Mises, le critère de Tresca est défini à l'aide d'un seul paramètre  $\sigma_0$ . La contrainte principale intermédiaire  $\sigma_M$  n'intervient pas, car elle n'influe pas sur la valeur du cisaillement maximal.

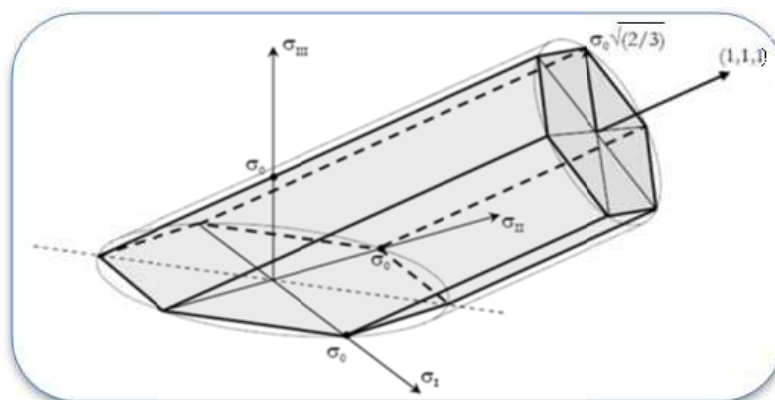


Fig II.5 : schéma représentant le critère de Tresca en trois dimensions.

### II.1.3. Le critère de Hill

On part d'un état de déformation plastique  $[\varepsilon_p]$  et on applique des contraintes  $[\sigma]$  provoquant un incrément de déformation normal à la surface d'écoulement  $[d\varepsilon_p]$  Fig II.6. Le principe du travail maximal énonce que pour un incrément de déformation plastique donné, parmi tous les champs de contrainte situés à l'intérieur ou sur la surface d'écoulement, le champ de contrainte réel est celui dont le travail est maximal. C'est à dire que si on associe à  $[d\varepsilon_p]$  tout autre tenseur des contraintes  $[\sigma^*]$  admissible que le tenseur réel  $[\sigma]$ , le travail de  $[\sigma^*]$  sera inférieur à celui de  $[\sigma]$ . Prenons  $[\sigma^*] = [\sigma] + [d\sigma]$  un tenseur sur la surface d'écoulement ( $[\sigma^*]$  ne peut être en dehors). L'expression du travail étant  $\delta W = \sum_{ij} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  le principe de Hill s'écrit :

$$\sum_{ij} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \geq \sum_{ij} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} \quad (II.6)$$

On peut donc écrire :

$$d\varepsilon_{p_{ij}} = \frac{df}{d\sigma_{ij} d\lambda} \quad (II.7)$$

Où  $d\lambda$  : est un scalaire multiplicateur.

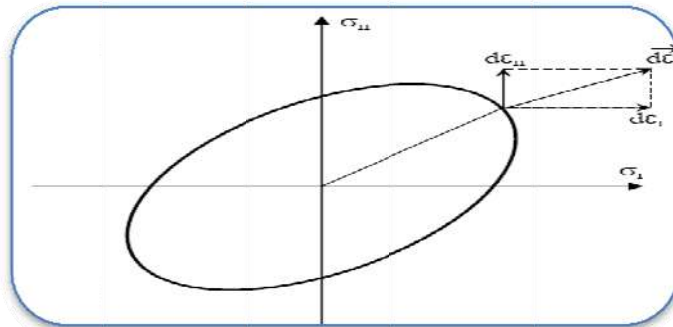


Fig II.6 : L'incrément de déformation plastique est normal à la surface d'écoulement.

## II.2. Hypothèse de la théorie de plasticité

### II.2.1. Règle de normalité. « plasticité associée »

La règle de normalité concerne la règle d'écoulement. Le principe du travail plastique maximal implique la convexité du domaine  $C(E)$ . Le taux de déformation plastique  $dp(\sigma, E, \dot{\sigma})$  est dirigé suivant la normale extérieure à  $C(E)$  au point de charge  $\sigma$ . Ainsi, dans le cas où  $\sigma$  est un point régulier de la frontière de  $C(E)$ , on a sur la figure Fig II.7:

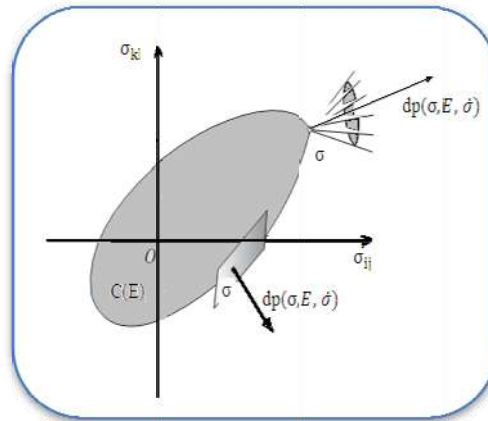


Fig II.7 : Principe du travail plastique maximal : règle de normalité.

- L'incrément de contrainte  $\dot{\sigma}$  ne fournit aucun travail sur l'incrément de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  puisqu'ils sont perpendiculaires Fig II.8.
- La surface de plastification  $\phi(\sigma_i)$  est toujours convexe.
- L'incrément de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  est perpendiculaire à la surface de plastification  $\phi(\sigma_i)$  et est donc parallèle et proportionnel à  $\partial\phi/\partial\sigma$ , ce qui détermine une loi d'écoulement de la forme:

$$\dot{\epsilon}_i^p = \lambda \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \tag{II.8}$$

On dit alors que la loi d'écoulement est associée (à la surface de rupture).

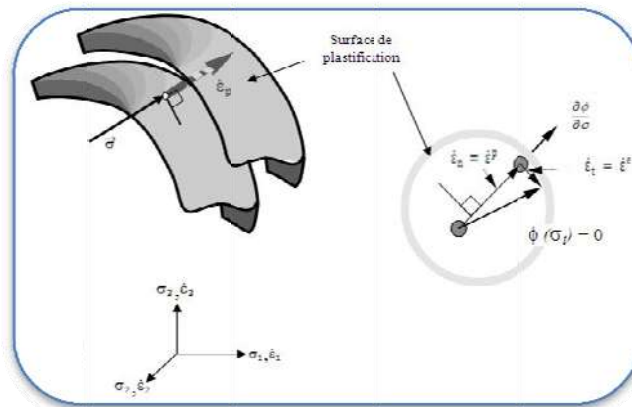


Fig II.8 : Surfaces de plastification.

### II.2.2. Règle d'écoulement

La définition du comportement plastique se compose schématiquement de la réponse à deux questions suivantes :

**QUAND ?** (y-a-t-il déformation plastique). Ce sont les notions de seuils, de domaines, de critères et de règles d'écrouissage, objet de la section précédente.

**COMMENT ?** (s'effectue la déformation plastique). C'est la règle d'écoulement plastique.

Quand on réalise un essai de traction interrompu par plusieurs décharges, on constate qu'une même contrainte correspond à plusieurs déformations et de la même manière, une même déformation peut correspondre à plusieurs contraintes.

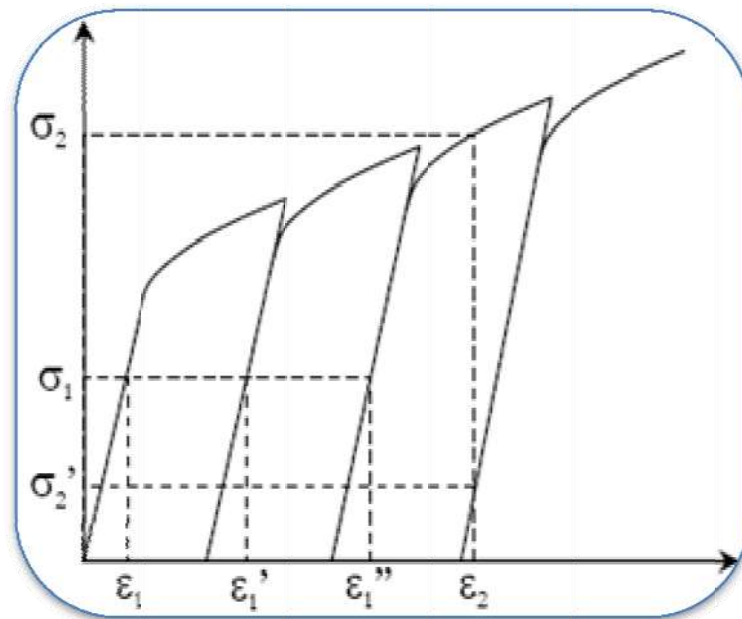


Fig II.9 : La contrainte dépend du chemin de la déformation.

En d'autres termes l'état de contrainte pour une déformation donnée dépend du chemin de déformation suivi. Pour connaître l'état de contrainte ou de déformation, il faudra donc suivre ce chemin pas à pas, c'est à dire regarder à chaque instant la variation de  $[\varepsilon_p]$  et de  $[\sigma]$ , (on ne s'occupe plus de la partie élastique que l'on connaît). La loi d'écoulement sera une loi permettant de relier  $[\sigma]$ ,  $[d\varepsilon]$  et  $[d\varepsilon_p]$ . La déformation totale étant alors la somme des déformations élémentaires.

### II.2.2.1. Sollicitation uniaxiale pour un matériau écrouissable

Il est clair que, dès que la limite d'élasticité initiale a été franchie, au cours de l'histoire de charge du matériau, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus, comme en élasticité, correspondance biunivoque entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , la donnée de  $\sigma$  ne suffit plus à définir  $\varepsilon$  et vice-versa. En revanche, si l'on connaît non seulement la contrainte actuelle  $\sigma$  mais tout le trajet de charge suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial, alors la donnée d'une variation de contrainte  $d\sigma$  suffit à déterminer la variation correspondante de la déformation  $d\varepsilon$ .

On dit que la loi de comportement est de type incrémental. En se reportant au diagramme de la fig II.9, où la courbe de première charge est unique indépendante de la vitesse de charge et les droites de décharge élastique toutes bien identifiées, on voit plus précisément que  $d\varepsilon$  est déterminée en fonction de  $d\sigma$  dès que l'on connaît  $\sigma$  et  $\varepsilon$  qui suffit avec  $\sigma$ , à déterminer l'état d'écrouissage actuel du matériau et donc la position de  $\sigma$  par rapport à la limite d'élasticité actuelle. On a ainsi les circonstances suivantes, représentées sur la Fig II.10.

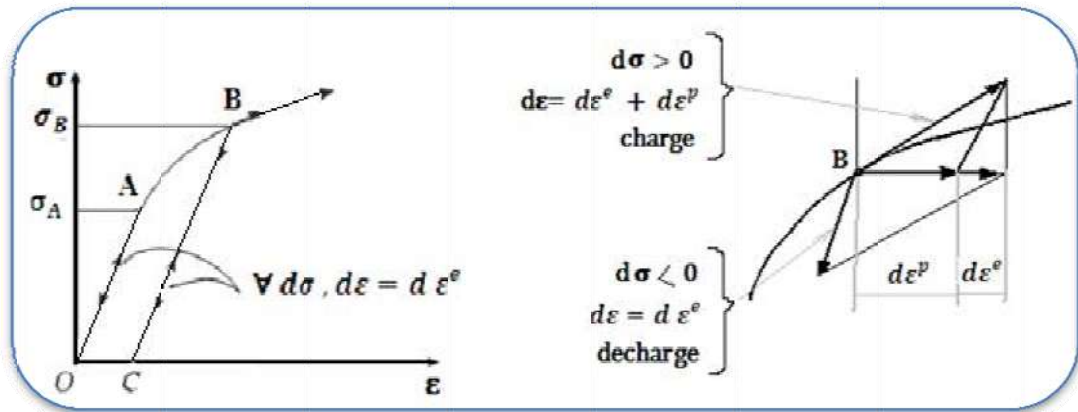


Fig II.10 : Sollicitation uniaxiale pour le matériau écrouissable, irréversibilité du comportement.

- Si  $\sigma$  est inférieure à la limite d'élasticité actuelle:

La variation de déformation est alors réversible, donc purement élastique quel que soit le signe de  $d\sigma$  :

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e \quad (II.10)$$

- Si  $\sigma$  est égale à la limite d'élasticité actuelle et  $d\sigma$  est négatif, correspondant à une décharge, la variation de déformation est réversible, donc purement élastique (c'est-à-dire qu'une charge ( $-d\sigma$ ) effectuée après la décharge  $d\sigma$  ramène la déformation à sa valeur antérieure) :

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e \quad \text{si} \quad d\sigma < 0. \quad (II.11)$$

- Si  $\sigma$  est égale à la limite d'élasticité actuelle et  $d\sigma$  est positif, correspondant à une charge, la variation de déformation est décomposée, comme la somme d'une partie réversible et d'une partie irréversible, la partie réversible est la partie élastique  $d\varepsilon_e$  que l'on récupère en effectuant, après la charge  $d\sigma$ , la décharge ( $-d\sigma$ ), la partie irréversible est le complément pour obtenir la variation de déformation totale:

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \quad \text{si} ; \quad d\sigma > 0. \quad (II.12)$$

Le module d'élasticité  $E$  est défini dans chaque état  $(\sigma, \varepsilon)$  par :

$$E = d\sigma/d\varepsilon_e \quad (II.13)$$

Dans les expériences effectuées sur les métaux il apparaît comme indépendant de  $\sigma$  et  $d\varepsilon_e$  pour un métal donné (deuxième proposition du « principe de Coulomb ». Dans le cas où le point de charge est à la limite d'élasticité actuelle on définit le « module tangent » par la relation :

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{M} \quad (II.14)$$

$E_t$ ,  $E$  et  $M$  sont des grandeurs ayant la dimension d'une contrainte. Le module d'écrouissage  $M$  est positif pour le matériau écrouissable classique, correspondant au diagramme de la Fig II.10, le matériau à écrouissage négatif correspond au cas où la courbe de charge, après avoir crû jusqu'à un maximum, décroît  $E_t$  et  $M$  sont alors négatifs.

### II.2.2.2. Sollicitation multiaxiale pour le matériau écrouissable

Dans le cas général de la sollicitation multiaxiale, le problème se pose de la même façon qu'au paragraphe précédent, mais on doit désormais raisonner sur le point de charge représentant le tenseur  $\sigma$  dans l'espace  $R^6$ , et on doit se référer au domaine d'élasticité actuel  $C(E)$  et à sa frontière Fig II.11.

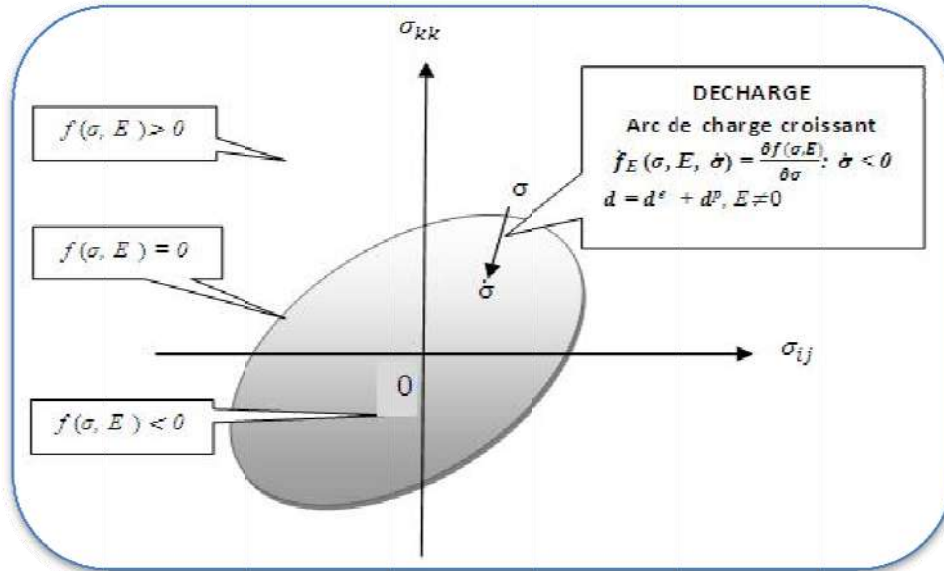


Fig II.11 : Comportement incrémental élasto-plastique écrouissable en décharge.

Connaissant  $\sigma$  et l'état d'écrouissage actuel symbolisé par  $E$  on a l'une ou l'autre des situations suivantes.

- Si  $\sigma$  est intérieur au domaine d'élasticité actuel c'est-à-dire, avec les notations du paragraphe précédente II.2.2.1.

- Si  $f(\sigma, E) < 0$ , alors la variation de déformation est purement élastique.

- Si  $\sigma$  est à la frontière du domaine d'élasticité actuel, il est nécessaire pour pouvoir décrire le comportement de définir les notions de charge et de décharge. En supposant que la frontière du domaine d'élasticité est régulière, et en définissant celui-ci par une fonction de charge selon (II.5), il y a charge si :

$$f(\sigma, E) = 0 \quad (II.15)$$

$$\dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma}) = \frac{\partial f(\sigma, E)}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} < 0 \quad (II.16)$$

Ainsi, lorsque  $\sigma$  est à la frontière de  $C(E)$ , c'est le signe du scalaire  $\dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma})$  qui permet de distinguer la charge et la décharge et de définir les arcs de trajet de charge croissants. L'arc de trajet de charge neutre correspond à  $\dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma}) = 0$ . Les caractères, pour inclure dans la formulation précédente, le cas où la frontière du domaine d'élasticité présente des singularités par exemple, critère de Tresca, on écrira:

$$\dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma}) = \sup \{ y : \sigma | y \in \partial f(\sigma, E) \} \quad (II.17)$$

il y a décharge si:

$$f(\sigma, E) = 0 \quad (II.18)$$

$$\dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma}) = \frac{\partial f(\sigma, E)}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} < 0 \quad (II.20)$$

et l'on poursuit la description du comportement élasto-plastique, comme dans le cas de la sollicitation uniaxiale.

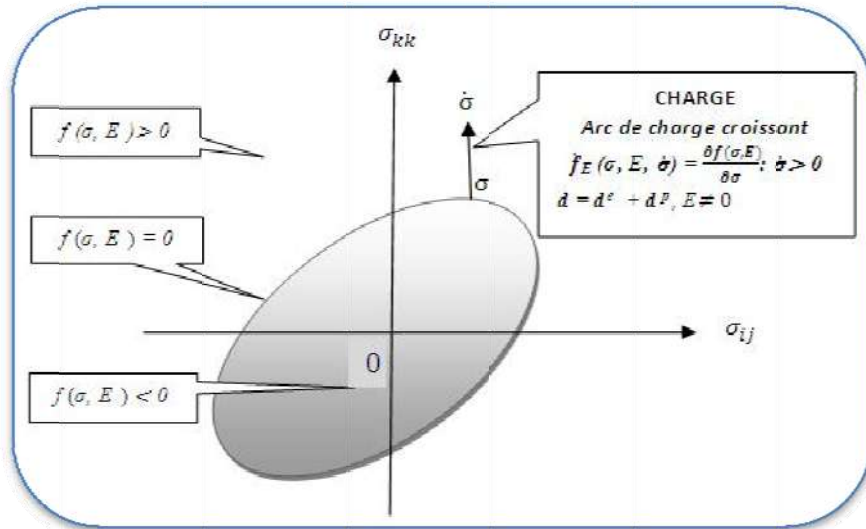


Fig II .12 : Comportement incrémental élasto-plastique écouvissable en charge.

- Si  $\sigma$  est à la frontière du domaine d'élasticité actuel, et s'il y a décharge, le taux de déformation est purement élastique Fig II.12. En désignant par  $\Lambda$  le tenseur des complaisances élastiques, la formule (II.11).s'explique sous la formule II.21:

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e = \Lambda : \dot{\sigma} \quad (II.21)$$

- Si  $\sigma$  est à la frontière du domaine d'élasticité actuel et s'il y a charge, le taux de déformation est décomposé comme la somme d'une partie réversible et d'une partie irréversible. La partie réversible est la partie élastique, récupérable par décharge de  $(-\dot{\sigma})$ , soit :  $d\varepsilon^e = \Lambda : \dot{\sigma}$ , La partie irréversible est le complément nécessaire pour obtenir le taux de déformation total, soit:

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p = \Lambda : \dot{\sigma} + d\varepsilon_p \quad (II.22)$$

D'une façon générale on peut dire que la déformation plastique à l'instant  $t$  est une fonctionnelle de l'histoire de  $\sigma$ . La fonctionnelle  $\varepsilon^p$  ne retient, de l'histoire de  $\sigma$ , que la séquence des arcs de trajet de charge croissants, qui définit aussi l'état d'écrouissage actuel, représenté par  $E$ . Le taux de déformation plastique  $d\varepsilon_p$  engendré à l'instant  $t$  par le taux de contrainte  $\dot{\sigma}$ , dans l'état de charge  $\sigma$  et l'état d'écrouissage  $E$ , correspond à la dérivation de  $\varepsilon^p$  par rapport à l'instant actuel  $t$ . La déformation plastique  $\varepsilon^p$  étant une fonctionnelle de l'histoire de  $\sigma$ , cette dérivation s'effectue à travers celle de l'histoire de  $\sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .

$$d\varepsilon_p(\sigma, E, \dot{\sigma}) = 0 \quad \text{si} \quad \dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma}) < 0 \quad (II.23)$$

$$d\varepsilon_p(\sigma, E, \dot{\sigma}) = 0 \quad \text{si} \quad \dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma}) > 0 \quad (\text{II.24})$$

De plus, comme le rappellent les termes « séquence » et « trajet de charge », si l'on modifie l'échelle du temps (facteur d'échelle positif quelconque) d'une histoire de  $\sigma$  donnée, l'histoire de  $\varepsilon^p$  sur la même période subit le même facteur d'échelle sans autre modification. Il en résulte que  $d\varepsilon_p(\sigma, E, \dot{\sigma})$  est positivement homogène de degré un en  $\dot{\sigma}$ , c'est-à-dire que :

$$\forall \alpha > 0, \quad d\varepsilon_p(\sigma, E, \alpha) = \alpha d\varepsilon_p(\sigma, E, \dot{\sigma}) \quad (\text{II.25})$$

Enfin, la relation entre  $d\varepsilon_p(\sigma, E, \dot{\sigma})$  et  $\dot{\sigma}$ , si  $\dot{f}_E(\sigma, E, \dot{\sigma}) > 0$ , est linéaire lorsque la fonctionnelle  $\varepsilon^p$  est différentiable, elle se met sous la forme :

$$d\varepsilon_p(\sigma, E, \dot{\sigma}) = P(\sigma, E) : \dot{\sigma} \quad (\text{II.26})$$

### II.2.3. Evolution de la surface de charge

L'évolution de la surface de charge est très complexe. Toutefois, il existe des modèles élémentaires.

#### II.2.3.1. L'écroûissage isotrope

Ce mode d'écroûissage est une homothétie de la surface de charge, la surface s'agrandit de manière uniforme, mais la forme et le centre restent les mêmes. Pour un test de traction-compression simple, cela se traduit par une évolution symétrique des limites élastiques.

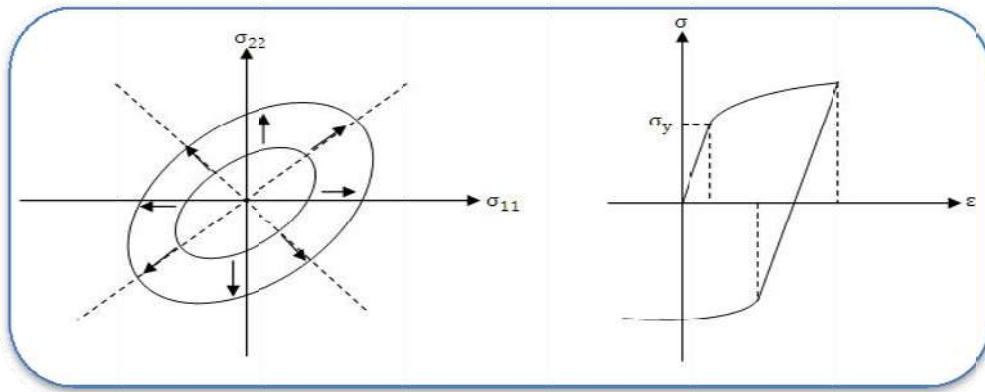


Fig II.13 : Écroûissage isotrope dans le plan.

Fig II.14 : Écroûissage isotrope avec un essai de traction-compression.

#### II.2.3.2. L'écroûissage cinématique

Dans le cas de l'écroûissage cinématique, la surface de charge garde la même forme, et la même taille. Seul son centre est déplacé. Il y a une « translation » de la surface de charge. En dimension une, l'écart entre les limites élastique de traction et de compression reste le même au cours de la déformation.

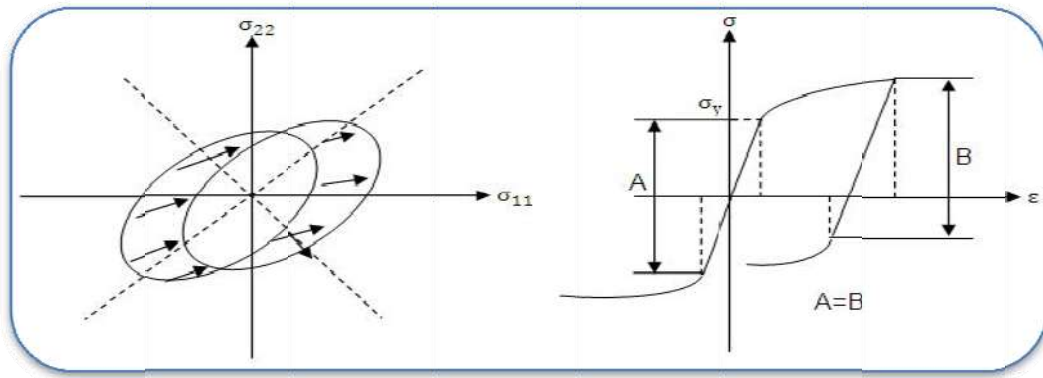


Fig II.15 : Ecroissage cinématique dans le plan

Fig II.16 : Ecroissage cinématique pour un essai de traction simple.

**II.2.3.3. L'écroissage mixte**

Comme son nom l'indique, c'est à la fois un écroissage isotrope et cinématique. Concrètement, cela veut dire que le centre de la surface de charge se déplace, et que ses rayons augmentent proportionnellement les uns par rapport aux autres.

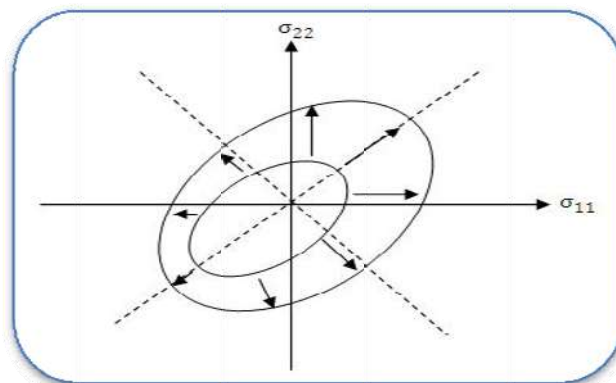


Fig II.17 : Ecroissage mixte dans le plan.

**II.3. Déduction de la matrice élasto-plastique par la mécanique des milieux continus**

L'écroissage peut être introduit, dans la loi de plastification, par une variable d'état E qui détermine la position de la surface de plastification à un certain moment et aussi, le travail dissipé par l'incrément de déformation plastique:

$$f(\sigma_{ij}, E) = 0 \tag{II.27}$$

L'incrément de déformation plastique:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{II.28}$$

On peut écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial E} \dot{E} = 0 \tag{II.29}$$

On pose:

$$q_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{et} \quad p_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{II.30})$$

Nous savons déjà que:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D^E \cdot (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (\text{II.31})$$

$D^E$  : Matrice d'élasticité.

En combinant (II.27), (II.28) et (II.29) on peut calculer:

$$\lambda = \frac{q_{ij}^T \cdot D^E \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}}{p_{ij}^T \cdot q_{ij} + q_{ij}^T \cdot D^E \cdot q_{ij}} \quad (\text{II.32})$$

En remplaçant  $\lambda$  dans (II.28) et (II.30):

$$\dot{\sigma}_{ij} = D^{Ep} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (\text{II.33})$$

$$D^{Ep} = D^E = \frac{q_{ij} \cdot D^E \cdot (q_{ij} \cdot D^E)^T}{p_{ij}^T \cdot q_{ij} + q_{ij}^T \cdot D^E \cdot q_{ij}} \quad (\text{II.34})$$

$D^{EP}$  : est la matrice élasto-plastique.

Dans le cas de la loi de plastification de Von Mises qui peut s'écrire:

$$f = \frac{1}{2} \sigma_{oct}^2 - R = 0 \quad (\text{II.35})$$

$R = 2 c_u^2$  : variable d'état,  $c_u$  : cohésion apparente

$$\dot{\sigma}_{ij} = E \dot{\varepsilon}_{ij} = E (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) = E \left( \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{H} \right) \quad (\text{II.36})$$

qui implique :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{EH}{E+H} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (\text{II.37})$$

Pour :

$$q_{ij} = \sigma_{oct} \quad \text{et} \quad p_{ij} = H \sigma_{ij} \quad \text{avec} \quad H = \frac{2}{3} \left[ \frac{E \cdot E_T}{E - E_T} \right] \quad (\text{II.38})$$

$E$  : est le module de Young,

$E_T$  : Le module d'érouissage définit graphiquement sur la Fig II.18, on peut appeler

$H$  : paramètre d'érouissage; En plasticité parfaite,  $H = 0$ .

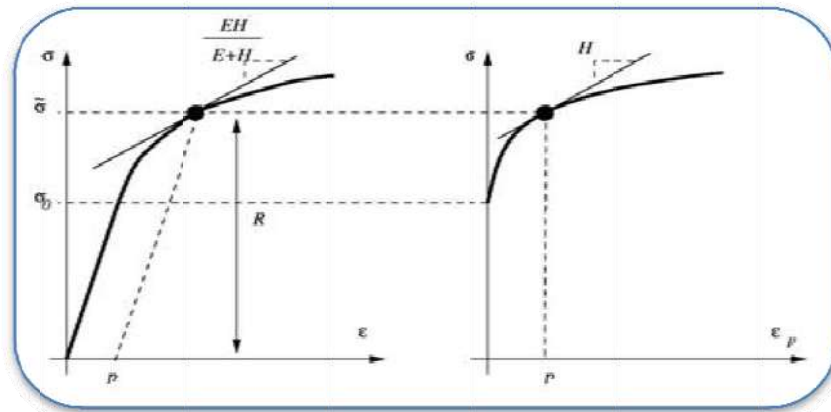


Fig II.18 : Essai de traction uniaxiale, loi de Prandtl-Reuss.

### II.3. Mesure de l'endommagement

L'endommagement n'est pas directement accessible à la mesure. Son évolution quantitative, comme celle de toute grandeur physique, est liée à la définition de la variable choisie pour représenter le phénomène [01]. Ayant choisi une définition fondée sur le concept de contrainte effective, associé au principe d'équivalence en déformation, les mesures qui en découlent sont essentiellement liées au couplage déformation-endommagement, c'est-à-dire, à la modification des caractéristiques mécanique des matériaux engendrée par l'endommagement.

#### II.3.1. Méthodes statique

Reprenons la loi d'élasticité endommagée unidimensionnelle, déjà évoquée au paragraphe précédent, qui sera justifiée par:

$$\check{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} = E \varepsilon_e \quad (\text{II.39})$$

Ou :

$$\sigma = E(1-D)\varepsilon_e \quad (\text{II.40})$$

$E$  : étant le module d'élasticité du matériau vierge de tout endommagement,  $E(1-D) = \tilde{E}$  peut être interprété comme le module d'élasticité du matériau endommagé. Si le module d'Young  $E$  est connu, toute mesure de raideur élastique permet d'atteindre l'endommagement par:

$$D = 1 - \sigma / (E \varepsilon_e), \text{ et avec } \sigma = \check{\sigma} \varepsilon_e$$

soit :

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (\text{II.41})$$

Toute mesure de module d'élasticité impose une bonne précision sur des déformations très petites. L'endommagement est le plus souvent très localisé, ce qui impose une base de mesure très faible de l'ordre de 0.5 à 5mm.

Pour toutes ces raisons nous préconisons la procédure suivante :

1. Utilisation des éprouvettes à section centrale affaiblie pour bien localiser l'endommagement, un exemple est donné sur la Fig II.19 à droite.

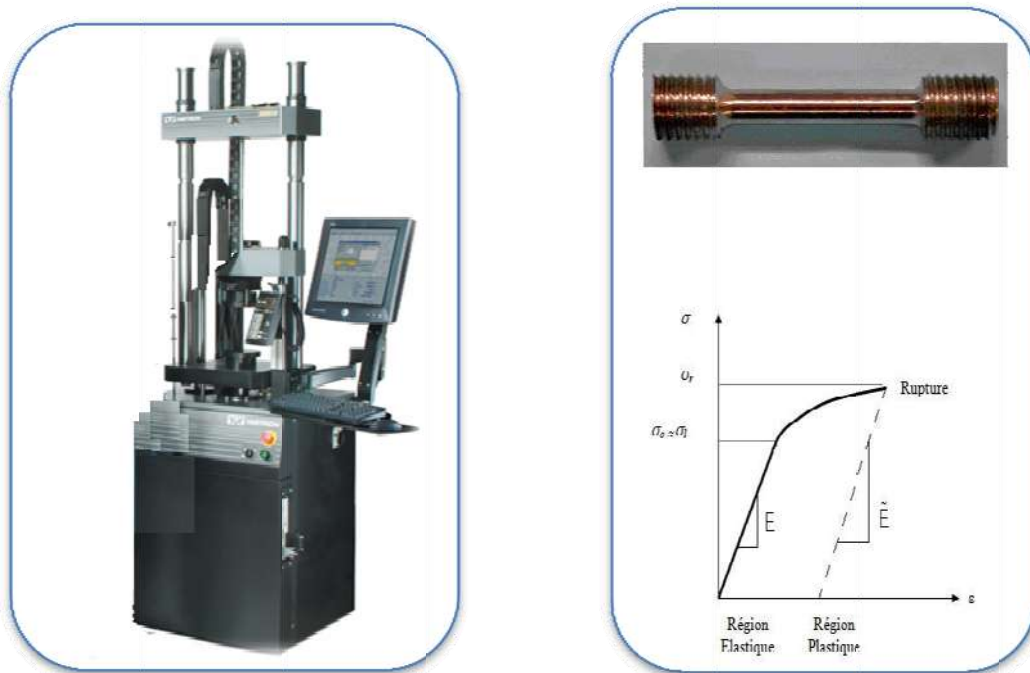


Fig II.19 : Procédure de mesure de l'endommagement.

2. Mesure de déformation par jauges de faibles dimensions : 0.5×0.5mm lorsque la température le permet, ou par capteur de déplacement associé à une base de mesure aussi petite que possible, lorsque la température dépasse 200°C.
3. Evaluation du module d'élasticité lors des décharges élastiques en éliminant les zones de plus fortes non linéarités par définition d'une plage de mesure en contrainte Fig II.19.

### II.3.2. Méthode dynamique par ultra-sons

Le même principe peut être utilisé en dynamique par la propagation d'ondes ultra-sonore. Une mesure de vitesse ou de temps de propagation des ondes planes dans une éprouvette ou cylindre d'un matériau endommagé conduit au module d'élasticité endommagée  $\tilde{E}$  et à l'endommagement par  $D=1-\tilde{E}/E$  s'exprimant en fonction des vitesses des ondes longitudinales  $\tilde{v}_L$  et transversales.

$$\tilde{E} = \rho \tilde{v}_T^2 \frac{3\tilde{v}_L^2 - 4\tilde{v}_T^2}{\tilde{v}_L^2 - \tilde{v}_T^2} \quad (II.42)$$

Dans le cadre de l'hypothèse d'isotropie de l'endommagement (coefficient de Poisson constant) et en négligeant la variation de  $\rho$  (ce qui n'entraîne pas d'erreur relative sur  $D$  supérieure à 5%), des expressions :

$$\tilde{v}_L^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_T^2 = \frac{\tilde{E}}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \quad (II.43)$$

On tire

$$D = 1 - \frac{\tilde{v}_L^2}{v_L^2} \quad (II.44)$$

## II.4. Résolution numérique d'un problème élasto-plastique

Les méthodes de résolution numérique d'un problème élasto-plastique sont des méthodes itératives basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. D'abord, on considère un algorithme utilisant la matrice raideur élastique à chaque itération.

### II.4.1. Algorithmes de calcul

Soit un incrément de charge  $\{\Delta F\}$  appliqué à la structure, la solution élastique correspondante est donnée par :

$$\{\Delta U\} = [K_e]^{-1}\{\Delta F\} \quad (II.45)$$

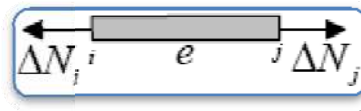
Avec  $[K_e]$  Matrice raideur de la structure élastique A cette solution correspond pour chaque élément fini un incrément de déformation :

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B]\{\Delta u\} \quad (II.46)$$

Avec  $[B]$  : matrice des relations déformations – déplacements de l'élément considéré.

C'est l'algorithme de projection sur le critère de plasticité qui nous permet de déterminer l'état de contrainte correspondant (Cet algorithme est présenté un peu plus loin).

Ayant calculé  $\{\Delta \sigma\}$  nous calculons pour chaque élément le vecteur des forces nodales élémentaires qui équilibrent cet incrément de contrainte.



$$\{\Delta \phi\}_e = \begin{Bmatrix} -\Delta N_i \\ \Delta N_j \end{Bmatrix} \quad (II.47)$$

L'assemblage des vecteurs élémentaires permet de définir un vecteur force nodale équivalent à l'état de contrainte calculé à partir des lois de comportement. Le résidu est donc défini par :

$$\{R\} = [\Delta F]\{\Delta \phi\} \quad (II.48)$$

Si le résidu est nul (à la précision près) c'est que la solution obtenue est bonne (cela correspond à un incrément de charge élastique de la structure), si le résidu est non nul (supérieur à la précision voulue) il faut itérer en cherchant la nouvelle solution de  $\{\Delta U\} = \{R\}$  En résumé l'algorithme du calcul est de la forme :

Maillage éléments finis de la structure

Calcul de  $[K_e]$  et  $[K_e]^{-1}$ .

Définition des lois de comportement ( $\sigma_0$ ,  $E$ ,  $E_T$ ).

Définition de l'historique de chargement (incrément de charge) :

**Pour** chaque incrément  $\{\Delta F\}$

Initialisation du résidu :  $\{R\} = \{\Delta F\}$

**Tant que**  $\|\{R\}\| > \varepsilon$

Calcul de  $\{\Delta U\} = [K_e]^{-1}\{R\}$  et  $\{\Delta \varepsilon\}$

Projection sur le critère et calcul de  $\{\Delta \phi\}$

Nouveau résidu  $\{R\} = \{R\} - \{\Delta F\}$

**Fin tant que**

Impression des résultats pour l'incrément de charge

**Fin pour**

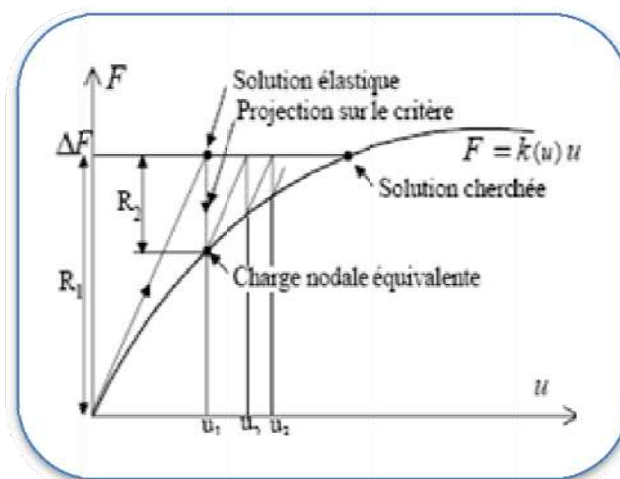


Fig II.20 : Méthode de la matrice raideur.

La Fig II.20 schématise le processus considéré dans l'algorithme précédent. La courbe  $F=k(u).u$  solution du problème non linéaire est représenté dans le cas monodimensionnel. Une amélioration évidente consiste à utiliser la matrice raideur « tangente » de la structure dans l'état actuel. Cette matrice tient compte des éléments plastifiés. Dans ce cas, le calcul de la matrice tangente et la résolution (calcul de  $[K]^{-1}$ ) à chaque itération doivent être faits, d'autre part dans le cas de la décharge élastique, l'utilisation de la matrice raideur initiale donne de meilleurs résultats.

En pratique, dans un algorithme de résolution on peut utiliser une combinaison des deux processus. On considère l'algorithme et le schéma correspondant utilisant la matrice tangente : la méthode de Newton-Raphson.

- Maillage éléments finis de la structure.
- Définition des lois de comportement ( $\sigma_0, E, E_T$ ).
- Définition de l'historique de chargement (incrément de charge).

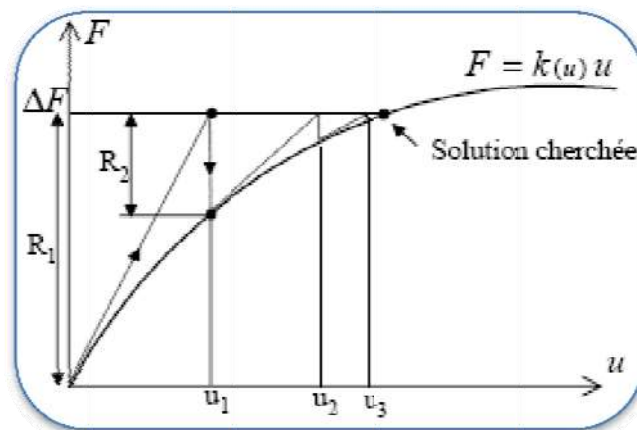
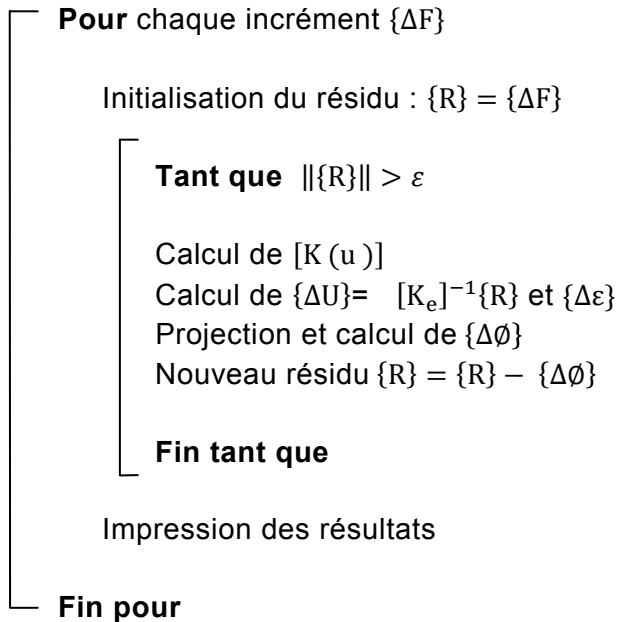


Fig II.21 : la méthode de Newton-Raphson.

Remarque :

Dans ces deux algorithmes la seule nouveauté par rapport à un calcul d'élasticité linéaire est la projection sur le critère de plasticité et le calcul de la force nodale équivalente. Nous détaillons ces calculs dans le paragraphe suivant. Pour le test de convergence sur le résidu, différentes normes peuvent être utilisées, les 2 plus courantes sont :

De type valeur maximale :  $\|\{R\}\| = \max(|R_i|)$

De type moindre carré :  $\|\{R\}\| = \sqrt{\{R\}^2}$

Pour travailler avec des nombres sans dimension nous testons  $\|\{R\}\|/\|\{\Delta F\}\|$

Il existe deux façons de définir le résidu :

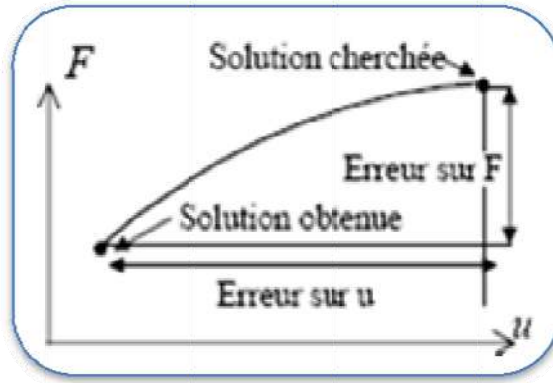


Fig II.22 : calcul de l'erreur.

Pour les degrés de liberté de la structure (ne tient pas compte des CL) Sur tous les degrés de liberté (on tient compte des réactions aux appuis). Si le résidu prend en compte les efforts de liaison, il tient compte implicitement de l'erreur commise sur le champ des déplacements. Comme l'indique la Fig II.21 pour une précision donnée l'erreur sur la solution sera plus petite.

**Projection sur le critère de plasticité**

soit un état actuel  $(\sigma, E)$ , le problème posé consiste à calculer pour chaque élément le nouvel état correspondant à un accroissement de déformation  $\{\Delta\varepsilon\}$ . La Fig II.22 présente le principe de projection sur la frontière du domaine d'élasticité pour un accroissement de déformation  $d\varepsilon$  donné. Nous avons représenté le cas le plus général d'un élément en cours de plastification. L'accroissement de contrainte élastique  $d\sigma_e = E d\varepsilon$ .

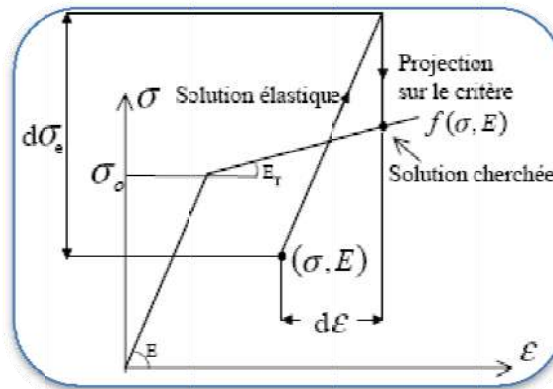


Fig II.23 : Projection sur le critère.

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma + d\sigma - \sigma'_0}{d\sigma_e} = 1 + \frac{\sigma - \sigma'_0}{d\sigma_e} \tag{II.49}$$

$$X = R d\varepsilon \rightarrow \begin{cases} BC = (1 - R)d\sigma_e \\ B\sigma = R E_T d\varepsilon \end{cases} \tag{II.50}$$

D'où :

$$\sigma' = \sigma + (1 + R)E d\varepsilon + R E_T d\varepsilon \tag{II.51}$$

Soit:

$$\begin{aligned} d\sigma &= (1 + R)E d\varepsilon + R E_T d\varepsilon \rightarrow d\sigma_e = \frac{1}{E} d\sigma \rightarrow d\varepsilon_e = (1 - R + R \frac{E_T}{E}) d\varepsilon \\ d\varepsilon_e &= d\varepsilon - d\varepsilon_p \rightarrow d\varepsilon_e = R(1 - \frac{E_T}{E}) d\varepsilon \end{aligned} \tag{II.52}$$

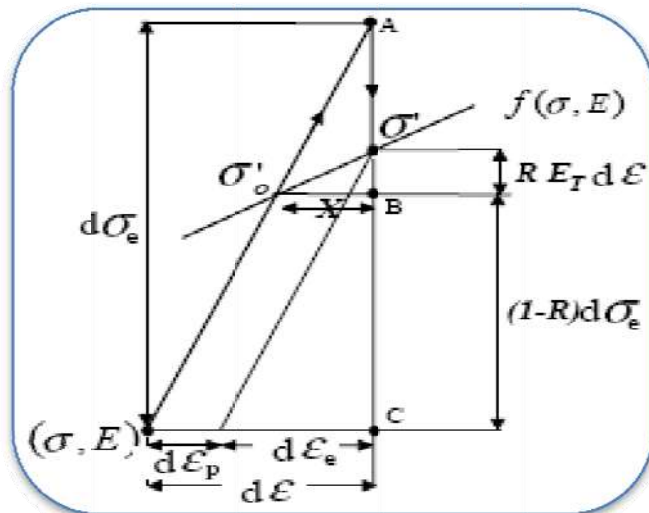


Fig II.24 : Détermination les incréments de contrainte, de déformations plastique et élastique.

Le modèle d'écroissage (cinématique ou isotrope) nous permet de déterminer la valeur de  $\sigma_0$ . Dès lors les expressions ci-dessus permettent de déterminer les incréments de contrainte, de déformations plastique et élastique. Il nous reste à ajouter la condition de charge pour obtenir l'algorithme de projection sur le critère de plasticité.

Algorithme de projection :

```

Pour chaque élément
    Calcul de l'incrément de déformation :  $\Delta \epsilon = (u_j - u_i)/L$ 
    Incrément de contrainte élastique :  $d\sigma_e = E d\epsilon$ 
    Si  $|\sigma| \geq |\sigma'_0|$  (L'élément plastique)
        Si  $(\sigma \geq 0 \text{ et } d\sigma_e < 0) \text{ ou } (\sigma < 0 \text{ et } d\sigma_e < 0)$ 
            Décharge élastique :  $R = 0$ 
        Si non
            Poursuite de plastification :  $R = 1$ 
        Fin si
    Si non (élément élastique)
        Si  $(\sigma + d\sigma_e < \sigma'_0)$  l'élément reste élastique :  $R = 0$ 
        Si non l'élément en cours de plastification :  $R = 1 + \frac{\sigma - \sigma'_0}{d\sigma_0}$ 
        Fin si
    Fin si
     $d\epsilon_p = R (1 - \frac{E_T}{E}) d\epsilon$  et  $d\epsilon_e = d\epsilon - d\epsilon_p$ 
     $d\sigma = (1 - R)E d\epsilon + R E_T d\epsilon$  et  $\sigma = \sigma + d\sigma$   $\{d\Phi\}_e = \begin{Bmatrix} -sd\sigma \\ sd\sigma \end{Bmatrix}$ 
    Calcul de  $\sigma'_0$  en fonction de l'écroissage et  $d\epsilon_p$ 
Fin pour
    
```

**CHAPITRE III**  
**RAPPEL SUR LA MECANIQUE**  
**DE LA RUPTURE**

### III.1. Historique

Grâce aux progrès réalisés dans le domaine de la mise en forme des métaux durant les trois derniers siècles, le fer et l'acier ont progressivement remplacé le bois et le ciment comme matériaux structuraux de base. Malgré leurs hautes caractéristiques, les structures réalisées à partir de ces matériaux ont connu des accidents importants dès le milieu du 19<sup>ème</sup> siècle. L'origine de ces accidents était la rupture inattendue de composants critiques de ces structures.

L'un des premiers incidents enregistré sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en Mars 1830 en Grande Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (1962) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents intervinrent également sur des pipelines, des pétroliers, ou encore sur des avions. En 1950, 2 avions Comet se sont brisés à haute altitude à cause d'un problème de rupture par fatigue sur les trous des rivets près des hublots, lesquels étaient de forme carrée ! Ces risques d'accidents étaient d'autant plus grand que l'utilisation d'alliages à hautes caractéristiques mécaniques (ténacité, rigidité...), permettant la réalisation de structures de plus en plus complexes et sollicitées, a énormément augmenté. En fait, les estimations de tenue des structures, fondées sur les caractéristiques mécaniques classiques, ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service, et les chercheurs étaient alors incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celles de la limite d'élasticité. Si Griffith est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science), ces travaux restent basés sur des études antérieures. On peut notamment citer l'article de Wieghardt, paru en 1907 et récemment traduit en anglais [Wieghardt 1995], dans lequel l'existence de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dans un matériau élastique linéaire fut reconnue. A partir de ces résultats, Griffith [Griffith 1920] s'est intéressé en 1920 au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard taux de restitution d'énergie) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau. Vinrent ensuite les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité. Ces études, menées notamment par Sneddon en 1946 [Sneddon 1946], puis Irwin [Irwin 1957] en 1957, ont permis de définir les facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut

citer par exemple Rice [Rice 1968] et Bui [Bui 1973] qui introduisent la notion d'**intégrales indépendantes du contour** telles que l'intégrale J, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. C'est également à cette période que les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture dans les matériaux multicouches sont réalisés (Sih(1964), Erdogan (1965) et Comninou (1977)).

Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques en pointe de fissure nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution

précise à de nombreux problèmes de géométries simples, et peuvent donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.

L'apparition de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la mécanique de la rupture d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions plus précises à des problèmes plus complexes. Apparurent alors une multitude de méthodes permettant de calculer les facteurs d'intensité de contraintes, le taux de restitution d'énergie, ou encore de découpler les différents modes de rupture. Parmi ces nombreuses méthodes, les plus facilement implémentables donnent bien souvent des résultats approchés, ou dépendants du maillage, alors que les autres nécessitent des techniques éléments finis avancées.

### *III. 1. Hypothèses et cadre de l'étude*

Le domaine couvert par la mécanique de la rupture est si vaste qu'il serait présomptueux de vouloir en présenter tous les aspects. Il apparaît donc nécessaire de bien préciser les limites de cette étude bibliographique.

#### *III. 1.1. Endommagement et mécanique de la rupture*

Lorsqu'une pièce est soumise à des efforts d'origines variées, il existe des limites, en contraintes ou en déformations, qu'elle ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer sa rupture. Suivant que l'on s'intéresse à la dégradation du matériau d'un point de vue micro-mécanique ou macro-mécanique, deux approches peuvent être utilisées :

- La **mécanique de l'endommagement** propose de décrire continûment la dégradation progressive du matériau due à l'apparition, à la croissance, puis à la coalescence de microfissures ou de micro-cavités présentes dans le matériau. Cette approche, initialement introduite par Kachanov, a été reprise et développée par de nombreux auteurs tels que Chaboche, Lemaitre [Lemaitre 1988], Bui [Bui et al. 1981], Ehrlacher [Ehrlacher 1985], Gurson [Gurson 1977], Tvergaard, Needleman [Needleman et al. 1987], Rousselier [Rousselier 1987], etc... Lorsque les microfissures, les microcavités créées par croissance ou par coalescence des défauts sont de taille assez grande, cette façon d'aborder le problème n'est plus valable, et il faut alors utiliser la mécanique de la rupture.

- La **mécanique de la rupture** a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré.

#### *III. 1.2. Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques*

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture visaient à établir, de façon précise, les champs mécaniques au voisinage d'une **fissure statique**. La difficulté d'une telle étude réside dans la prise en compte de la singularité introduite par la pointe d'une fissure. Le calcul précis de paramètres mécaniques tels que les facteurs d'intensité des contraintes, ou le taux de restitution d'énergie réside en grande partie dans la bonne prise en compte de cette singularité. L'étude des champs mécaniques entourant une pointe de fissure statique est considérée dans l'étude bibliographique qui va suivre.

Les paramètres mécaniques calculés, il est possible de prévoir la propagation ou non de la fissure. Suivant le type de matériau étudié, et le chargement appliqué, la propagation pourra être qualifiée de stable (la fissure a besoin de plus d'énergie pour reprendre sa progression) ou d'instable (la fissure poursuit sa progression jusqu'à la ruine de la structure, sans nécessiter d'énergie supplémentaire).

On est alors amené à étudier la **propagation quasi-statique de fissures**, à l'aide de critères d'amorçage et de stabilité. Enfin dans les problèmes de chargement rapide, ou lorsque les vitesses de propagation de fissures sont importantes, il devient nécessaire de prendre en compte les termes d'inertie dans la formulation et dans la résolution du problème. On parle alors de **propagation dynamique des fissures** [Attigui 1997] ; ce domaine ne sera pas abordé considéré lors de notre simulation.

### III. 1.3. Modes de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

- Mode I : ouverture (ou clivage) ;
- Mode II : cisaillement plan ;
- Mode III : cisaillement anti-plan.

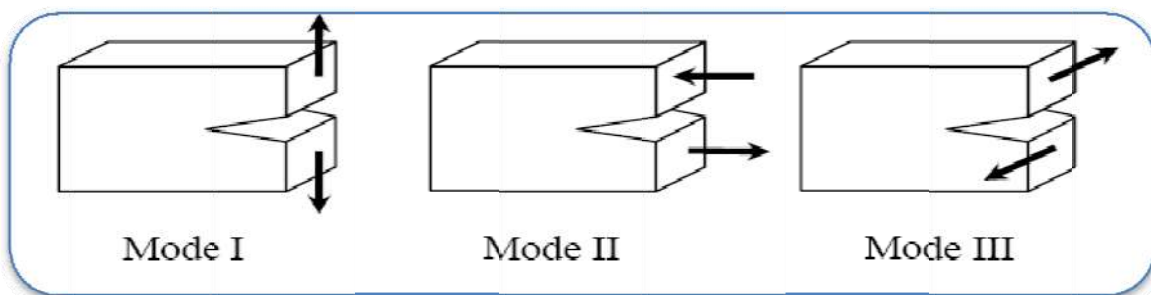


Fig IV.1 : Modes de rupture

Le mode I est le plus dangereux pour l'extension d'une fissure ; cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne (2D) ou plane (3D).

### III. 1.4. Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de rupture :

- Rupture fragile, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture) ;
- Rupture ductile, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). Dans ce cas, suivant l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on différencie le cas de la plasticité confinée, de celui de la plasticité étendue.

• *Etude d'un milieu élastique fissuré*

Dans un **milieu élastique** fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones [Zhang 1992] :

1. La **zone d'élaboration** : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) à la pointe de fissure ;

2. La **zone singulière** : dans cette zone, le champs de contrainte présente une singularité en  $r^{-1/2}$  ;

3. La **zone des champs lointains** : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

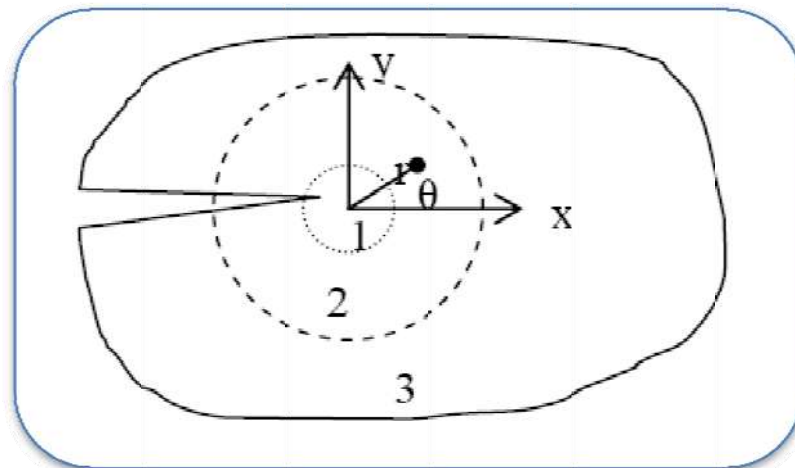


Fig IV.2 : Les zones de champs mécaniques

C'est la singularité d'ordre  $-1/2$  dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure. Cette solution n'est malheureusement pas physiquement réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure sont « écrêtées » par la plasticité (Figure IV.3) [François et al. 1993]. De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

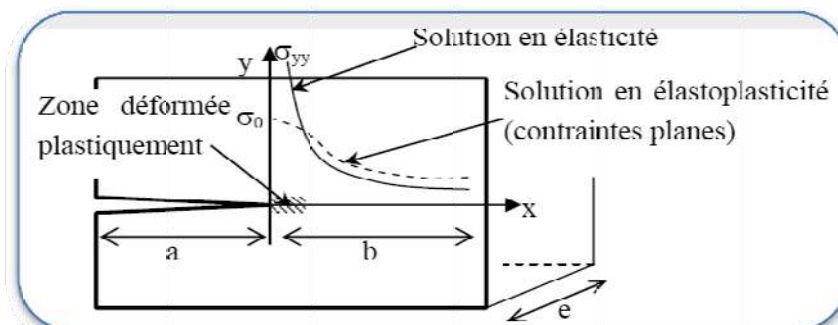


Fig IV.3 : Plasticité en pointe de fissure

### • *Plasticité confinée*

La concentration de contraintes en pointe de fissure créant une plastification locale, il est nécessaire que la taille de cette zone reste petite par rapport à la longueur de la fissure, et aux dimensions de la structure, de façon à ne pas trop perturber la distribution élastique des contraintes. A titre d'exemple, la norme ASTM impose aux éprouvettes utilisées pour le calcul de la ténacité la condition suivante :

$$\text{Min}(e,a,b) \geq \frac{5}{2} \left( \frac{k_{IC}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (\text{III.1})$$

$\sigma_0$  et  $k_{IC}$  représentent respectivement la limite élastique et la ténacité du matériau.

Lorsque c'est le cas, on peut continuer à utiliser les concepts de la mécanique linéaire de la rupture. Plusieurs modèles proposent de déterminer la taille de la zone plastique en pointe de fissure : modèles d'Irwin, et de Dugdale-Barenblatt qui sont détaillés dans [François et al. 1993] et [Baouch 1998].

### • *Plasticité étendue*

La plasticité étendue est le domaine pour lequel la taille de la zone plastique n'est plus négligeable devant la longueur de la fissure ou la dimension du ligament. Elle s'inscrit dans le cadre de la mécanique de la rupture à comportement non linéaire, et son étude n'est que très récente.

Si en élasticité linéaire, la singularité est d'ordre  $-1/2$ , elle est plus faible en plasticité, et vaut  $-n/(n+1)$ , où  $n$ , le coefficient d'écroûissage du matériau, est compris entre 0 et 0,2. La zone d'élaboration définie en élasticité linéaire est remplacée par un champ de déformation qui ne dépend que de la limite d'élasticité en cisaillement et de l'orientation par rapport à l'axe de la fissure (champ de Prandtl).

A la pointe de la fissure, l'éroussement et le champ de Prandtl conduisent à des contraintes finies. Plus loin de l'extrémité de la fissure (zone de champs semi-lointains), la distribution des contraintes et des déformations peut être approchée par la solution asymptotique proposée entre autre par Hutchinson [Hutchinson 1968], Rice et Rosengren [Rice et al. 1968].

Même si l'étude de la mécanique non linéaire de la rupture est en plein essor actuellement, la majorité des résultats obtenus d'un point de vue numérique concernent la mécanique linéaire de la rupture. Il est souvent difficile de différencier les méthodes applicables à tout type de matériau, ou uniquement aux matériaux élastiques. Lors de notre simulation, on considérera une analyse élastique du champ des contraintes, en admettant les hypothèses générales de l'élasticité linéaire classique, mais en tolérant néanmoins l'existence d'une zone de plasticité sous la condition suivante : cette zone doit à la fois être confinée et de dimension constante.

De plus, notre étude est volontairement restreinte aux fissures planes, et supposées rectilignes par morceaux. Enfin, nous nous placerons dans le cas de matériaux homogènes et isotropes.

On peut alors distinguer deux approches concernant l'étude de la zone singulière :

- Une **approche locale**, caractérisée par une étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage du front de fissure ;
- Une **approche globale** (ou énergétique), caractérisée par l'étude du comportement global de la structure fissurée sur le plan énergétique.

### III.1.5. Approche Locale

Certains auteurs définissent l'approche locale comme l'approche liée aux modèles d'endommagement. Dans notre cas, cette on détermine les paramètres de mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déformations locaux en pointe de fissure. Pour définir ces champs en pointe de fissure, nous introduirons la notion de facteurs d'intensité des contraintes. Ces champs étant fortement perturbés par la singularité créée par la pointe de fissure, il est alors nécessaire d'utiliser des outils spécifiques afin de calculer ces facteurs d'intensité des contraintes de façon précise.

#### III.1.5.1. Facteurs d'intensité des contraintes

Introduits par G.R. Irwin [Irwin 1957] en 1957, les facteurs d'intensité de contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f^{\alpha}_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} = K_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g^{\alpha}_{ij}(\theta) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

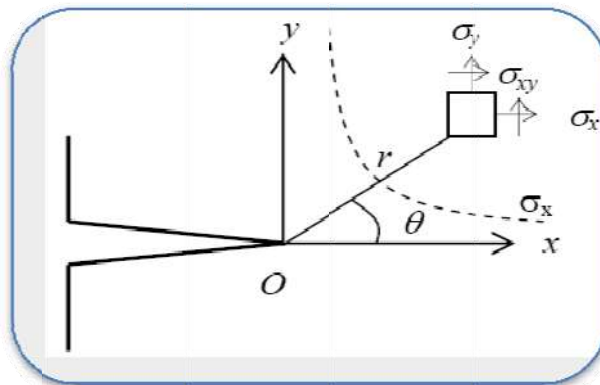


Fig IV.4 : Champ des contraintes au voisinage de la fissure

$K_{\alpha}$  est le Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC) en mode  $\alpha$ , avec  $\alpha=I, II$  ou  $III$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  donnent la répartition angulaire ; leurs expressions en contraintes et déformations planes sont données dans plusieurs ouvrages de mécanique de la rupture [François et al. 1993], [Miannay 1995]. Lorsque l'on se trouve en mode I pur, l'état local de contraintes et de déformations peut être caractérisé à l'aide du seul paramètre  $KI$ . Nous verrons dans la chapitre suivant que l'on définit une valeur critique de ce paramètre  $KI_c$  comme critère de rupture.

#### III.1.5.2. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes s'expriment en fonction du champ des contraintes au voisinage de la fissure, et ce champ de contraintes étant parfaitement accessible numériquement.

### • *Eléments singuliers*

L'utilisation standard de la méthode des éléments finis ne permettant pas de rendre compte des singularités des champs de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure, il a été nécessaire d'effectuer quelques modifications.

Plusieurs idées ont été proposées : du raffinement de la zone singulière à l'introduction brutale de la singularité dans les fonctions de forme. Ce sont Henshell et Shaw [Henshell et al. 1975] d'une part, et Barsoum [Barsoum 1976] d'autre part, qui finirent par trouver une solution préservant à la fois les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation.

Le fait de déplacer les noeuds milieux des côtés correspondant à la pointe de la fissure (arêtes 1-2 et 1-4) au quart de la longueur (Figure IV.5.a) permet de forcer la singularité, tout en représentant correctement un champ constant de déformation. Toutefois, si la singularité existe le long des côtés en contact avec la pointe de la fissure, elle disparaît sur les autres rayons émanant du noeud 1. Hibbitt [Hibbitt 1977] a de plus montré en 1977 que l'énergie de déformation (et donc la raideur) n'était plus bornée lorsque l'on tendait vers la pointe de fissure. Il a alors fallu introduire le triangle à 8 noeuds avec noeuds au quart (Figure IV.5.b), la pointe de fissure se trouvant aux trois noeuds confondus 1-8-4. Cet élément garantit alors la singularité pour toutes les arêtes émanant du noeud 1, ainsi qu'une énergie de déformation bornée lorsqu'on tend vers la pointe de fissure.

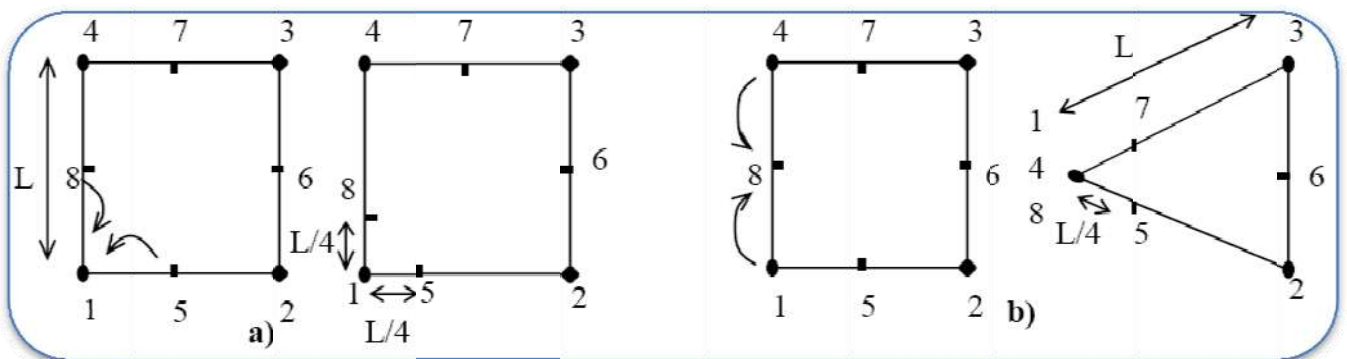


Fig IV.5.a : Élément quadrangle singulier – b) Élément triangulaire singulier

### • *Méthode des fonctions de poids*

On recherche la valeur de  $K_I$  produite par une force unité, placée à une distance  $x$  de l'extrémité de la fissure. Pour une distribution  $F(x)$ , on peut alors écrire :

$$K_I = \int_{fissure} F(x)K(x)dx \quad (III.3)$$

La fonction  $K(x)$  s'appelle fonction de poids. Elle est bien établie pour certains cas particuliers, et répertoriée dans plusieurs ouvrages. L'avantage d'une telle méthode est qu'elle ne nécessite qu'un seul calcul de structure. Malheureusement, on reste limité à certaines géométries bien définies.

### • *Calcul par extrapolation*

Cette méthode, également utilisée en élastoplasticité, consiste à effectuer une extrapolation du champ des contraintes ou des déplacements lorsque  $r$  tend vers 0. Par exemple, en

déformations planes, le déplacement est une fonction linéaire de  $\sqrt{r}$ , et pour  $\theta = \pi$ ,  $K_I$  et  $K_{II}$  peuvent s'exprimer en fonction du déplacement :

$$\begin{cases} K_{Iu}(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{u_y}{\sqrt{r}} \\ K_{IIu}(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{u_x}{\sqrt{r}} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Puis, par passage à la limite :

$$\begin{cases} k_I = \lim_{r \rightarrow 0} K_{Iu}(r) \\ k_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} K_{IIu}(r) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

La même extrapolation peut être faite en exprimant  $K_I$  en fonction du champ des contraintes. La solution obtenue sera cependant moins précise dans la mesure où les contraintes sont calculées aux points d'intégration et non aux noeuds.

### III.1.6. Approche Globale ou Energétique

La propagation de fissure est un phénomène dissipateur d'énergie. Dans la théorie de Griffith, l'énergie consommée est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Cette énergie peut s'assimiler à une énergie de surface, et Griffith a postulé que c'était une caractéristique intrinsèque du matériau.

#### III.1.6.1. Le taux de restitution d'énergie

Noté  $G$ , le taux de restitution d'énergie représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale  $W_p$  pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure  $a$ , à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur  $da$  :

$$\begin{cases} G = - \frac{\partial W_p}{\partial A} \\ W_p = W_e + W_{ext} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$\begin{cases} W_e = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \\ W_{ext} = \int_{\Omega} f \cdot u \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Où  $W_e$  représente l'énergie de déformation élastique,  $W_{ext}$  l'énergie potentielle des forces extérieures  $f$ , et  $\partial A$  l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes par :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{(K_{III}^2)}{2\mu} \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$\begin{cases} E' = E & \text{en contraintes plane} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \\ \mu = \frac{E}{2(1-\nu)} & \text{est le module de cisaillement} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

$E$  est le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de poisson.

**Remarque :** Il est également possible de relier  $G$  à la complaisance  $C$  de la structure par :

$$G = \frac{p^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A} \quad (\text{III.10})$$

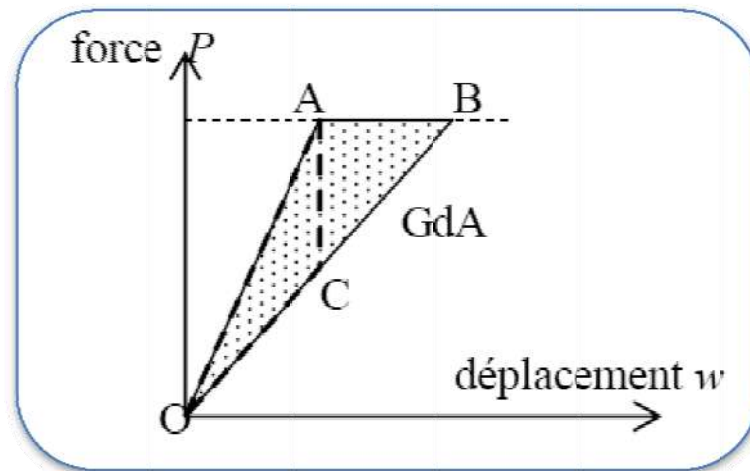


Fig IV.6 : Relation entre  $G$  et la complaisance de la structure.

Sur la courbe Force/Déplacement Fig IV.6, OA correspond à une fissure de longueur  $a$ , et OB à une fissure de longueur  $a + \delta a$ .  $G$  représente l'aire située dans le triangle OAB pour un essai effectué à charge imposée ou dans le triangle OAC pour un pilotage en déplacement imposé.

### III.1.6.2. Intégrales de contour

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie [Eshelby 1968]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connues, on peut citer l'intégrale  $J$  de Rice [Rice 1968], l'intégrale duale  $I$  de Bui [Bui 1973], l'intégrale hybride s'appuyant sur le superélément de Tong et Pian [Zhang 1992] ou encore les intégrales  $T$  et  $A$  proposées par Bui et Proix [Bui et al. 1985] et mises en oeuvre et étudiées par Zhang [Zhang 1992].

Pour l'**intégrale de Rice**, on considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne. Le contour  $C$  est un contour ouvert, orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

$$J = \int_C (W_e(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_t}{\partial x}) ds \quad (\text{III.11})$$

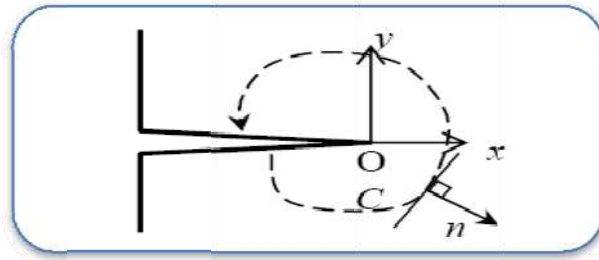


Fig IV.7 : Contour d'intégration

$W_e$  est la densité d'énergie de déformation élastique telle que  $\sigma_{ij} = \frac{\partial W_e}{\partial \epsilon_{ij}}$ ,  $u$  est le vecteur

déplacement en un point  $M$  du contour  $C$  avec la normale  $n$  tournée vers l'extérieur et  $\sigma$  représente le champ de contraintes.

Dans les cas où la plasticité est importante, on effectue une analogie avec un matériau élastique non linéaire. Cette hypothèse est valable à condition qu'il n'y ait pas de brusques variations dans la direction du chargement appliqué, et donc, **pas de déchargement**. En effet, le déchargement en élasticité non linéaire s'effectue suivant la même courbe qu'à la montée, ce qui n'est pas le cas en élastoplasticité [04]. Dans ce cadre, l'intégrale  $J$  est étendue au cas des matériaux élastiques non linéaires, et permet ainsi d'intégrer le champ des contraintes et des déplacements à la pointe de la fissure. Ayant ainsi fait l'analogie entre l'élastoplasticité et l'élasticité non linéaire, l'intégrale  $J$  peut être obtenue, comme précédemment, par la méthode de la complaisance :

$$J = - \int_0^w \left( \frac{\partial p}{\partial a} \right)_w dw = - \int_0^p \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)_p dp \quad (\text{III.12})$$

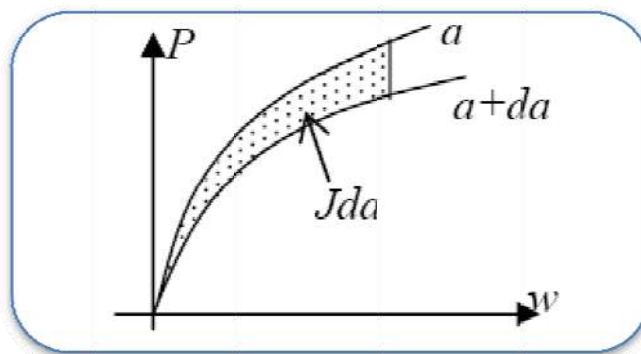


Fig IV.8 : Détermination de J par la méthode de la complaisance

### III.1.6.3. Calcul du taux de restitution d'énergie

Ces méthodes sont particulièrement bien adaptées aux calculs éléments finis car on se place relativement loin de la pointe de fissure, de façon à ne pas faire intervenir les singularités. Par contre, elles présentent souvent le désavantage de ne pas permettre le découplage des différents modes. Ces méthodes étant très nombreuses, nous nous restreindrons à celles qui sont les plus utilisées.

### • Calcul par avancée réelle de fissure

En travaillant à force imposée, on peut calculer  $G$  en calculant l'évolution de l'énergie élastique lors d'un petit incrément de longueur de la fissure.  $G$  s'obtient alors par lissage de la quantité :  $\frac{\Delta W_{el}}{\Delta a}$ .

Dans la pratique, la méthode consiste donc à effectuer deux ou trois calculs élastiques successifs à partir d'un maillage identique, mais sur lequel on relâche un ou plusieurs noeuds en fond de fissure entre les différents calculs. On peut travailler avec des éléments quadratiques courant, mais il ne faut surtout pas positionner la pointe de fissure sur un noeud milieu. Il est préférable de réaliser au moins deux déterminations (3 calculs) puis d'évaluer  $G$  par extrapolation quand  $r \rightarrow 0$ .

Cette méthode, basée sur un raisonnement physique, a l'avantage de bien s'adapter aux codes, tout en n'utilisant pas d'éléments spéciaux. Elle nécessite cependant un maillage fin en pointe de fissure et est très coûteuse en temps de calcul, puisqu'elle requiert au moins deux calculs pour une longueur de fissure donnée.

### • Méthode de l'intégrale $J$

Cette méthode permet de calculer l'intégrale de Rice à partir des résultats du code éléments finis. Reprenons la définition de l'intégrale  $J$  :

$$J = - \int_C (dw_e(\varepsilon)n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x}) ds \quad (\text{III.13})$$

Cette intégrale représente l'énergie disponible en fond de fissure. Elle peut cependant être calculée assez loin de cette zone. D'ailleurs, son indépendance par rapport au contour d'intégration permet de prendre ce dernier assez grand, afin d'éviter la zone de singularité.

En pratique, le contour d'intégration  $C$  est défini par un ensemble de noeuds du maillage. Le code de calcul nous permet d'obtenir les valeurs des contraintes et du gradient des déplacements dans chaque élément aux points d'intégration, puis par lissage à ses sommets. Pour un contour donné  $C$ , on peut donc calculer la valeur de  $J$  basée sur les éléments intérieurs au contour ( $J_{int}$ ), celle basée sur les éléments extérieurs ( $J_{ext}$ ), et enfin celle obtenue par moyenne arithmétique en chaque noeud du contour ( $J_m$ ). Afin de justifier le choix du contour, il est nécessaire que ces trois quantités soient très voisines [05].

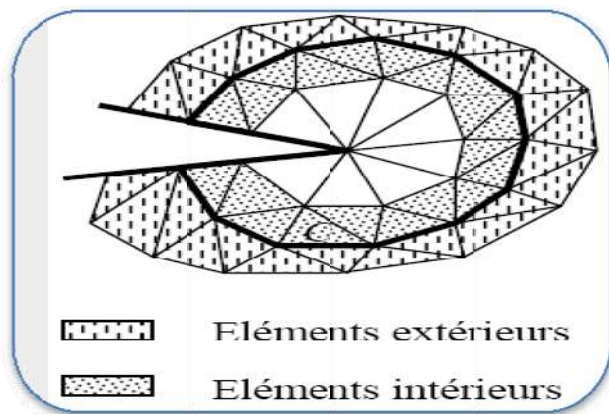


Fig IV.9 : Contour d'intégration

Contrairement à la théorie, la précision des résultats numériques obtenus par cette méthode est très dépendante du choix du contour. Elle est d'autant meilleure que le contour est éloigné de la pointe de fissure. Pour les maillages constitués d'éléments quadrilatères, disposés "circulairement" autour de la pointe de la fissure, il peut être intéressant de choisir comme contour d'intégration, le contour passant directement aux points d'intégration de l'élément. Cela permet en effet d'avoir la valeur exacte de la contrainte ou de la déformation qui sont des valeurs calculées aux points d'intégration. Pour des éléments triangulaires, cette technique est peu utilisée, car elle fournit alors des contours très irréguliers.

#### • Calcul par avancée virtuelle de fissure

Cette technique, introduite par Hellen [Hellen 1975] et Parks [Parks 1974] au milieu des années 1970, permet de calculer la variation d'énergie potentielle totale en introduisant une extension virtuelle de fissure  $\delta a$ . Le processus d'extension de la fissure est obtenu en déplaçant les points nodaux du réseau, plutôt qu'en ôtant les composantes de traction nodale à la pointe de la fissure et en procédant à une seconde analyse comme cela est fait dans la méthode d'extension réelle.

Si l'on note  $[K]$  la matrice de rigidité du système,  $\{u\}$  le vecteur déplacement, et  $\{f\}$  le vecteur chargement aux noeuds du maillage, le système à résoudre s'écrit :  $[K]\{u\}=\{f\}$ .

On réalise une petite perturbation  $\delta a$  de la pointe de fissure (de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$  fois la dimension de la première maille en pointe). Cette extension implique une variation  $\{\delta u\}$  du champ des déplacements, induisant ainsi une variation d'énergie potentielle  $dW_p$ . Le taux de restitution d'énergie s'obtient alors par :

$$G = - \frac{dW_p}{da} = - \frac{1}{2} \{u\}^t \left\{ \frac{\delta K}{\delta a} \right\} \{u\} + \{u\}^t \left\{ \frac{\delta K}{\delta a} \right\} \quad (\text{III.14})$$

La zone affectée par la transformation joue un rôle important, aussi bien au point de vue de la précision que du temps de calcul, pour la détermination de  $G$ . Pour y remédier, on introduit un contour  $\Gamma_0$  à l'intérieur duquel les éléments sont translatés avec l'avancée de la fissure, et un contour  $\Gamma_1$  à l'extérieur duquel la structure n'est pas perturbée. Dans ce cas, la perturbation de la matrice de raideur est due exclusivement aux éléments situés entre ces deux contours.

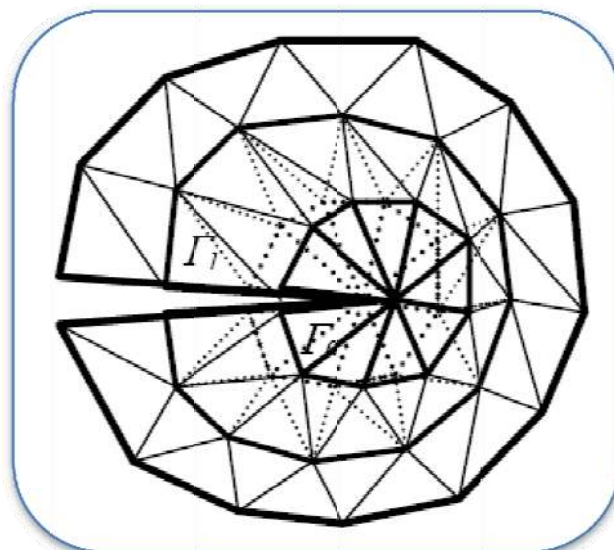


Fig IV.10 : Extension virtuelle

De Lorenzi [De Lorenzi 1985] a transformé l'intégrale de contour en une intégrale de surface, donnant ainsi plus de précision et d'indépendance vis-à-vis du maillage. Il montre alors que le taux de restitution d'énergie peut s'écrire :

$$G=J=\frac{1}{\delta a} \iint_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial u_x} - W \delta_{i1} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA \quad (\text{III.15})$$

A étant la surface comprise entre les contours  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ , et  $\Delta x_1$  représentant l'extension virtuelle.

#### • Méthode $G\theta$

En remplaçant  $\Delta x_1$  par une fonction vectorielle  $\theta$  de composantes nulles à l'intérieur du contour  $\Gamma_0$ , de norme unité à l'extérieur du contour  $\Gamma_1$ , et de composantes variant continûment entre ces valeurs sur la couronne comprise entre  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  et les lèvres de la fissure, on retrouve le principe de la méthode  $G\theta$ .

Cette méthode introduite par Destuynder et Djaoua au début des années 1980 [Destuynder et al. 1981], [Destuynder et al. 1983], [Gilles et al. 1993] consiste à calculer le taux de restitution d'énergie  $G$  par dérivation de l'énergie potentielle d'une structure fissurée par rapport à un domaine. Elle revient à effectuer une intégration non pas sur un contour, mais sur une couronne  $C_{cour}$  entourant la pointe de fissure. Cette couronne dont les frontières coïncident avec les côtés des éléments doit être prise assez loin du fond de fissure pour bénéficier d'une bonne approximation de la solution. De plus, l'intégration numérique est effectuée aux points de Gauss des éléments appartenant à la couronne, ce qui lui donne plus de précision. Les grandes lignes de la méthode sont les suivantes :

#### - La variation d'énergie potentielle totale $W_p$

On considère un solide fissuré occupant le domaine  $\Omega$  :

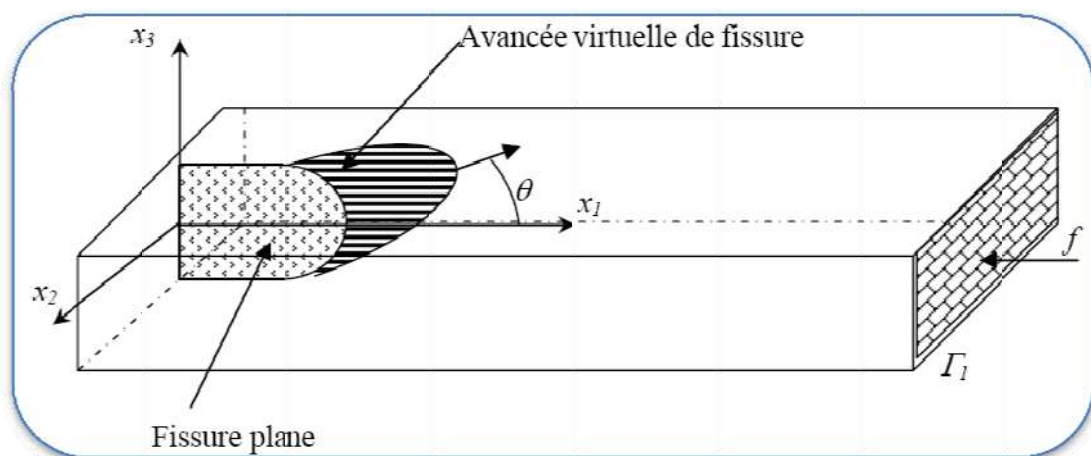


Fig IV.11 : Solide fissuré occupant le domaine  $\Omega$

Pour déterminer la variation d'énergie potentielle totale, on définit une application  $F^\varepsilon$  représentant une perturbation géométrique infinitésimale  $\varepsilon$ , au voisinage du fond de fissure :

$$\forall M \in \Omega, F^\varepsilon(M) = M^\varepsilon = M + \varepsilon \theta(M) \quad (\text{III.16})$$

où le champ  $\theta$  permet de représenter la position de chaque point du corps perturbé en fonction de sa position initiale, avant la perturbation infinitésimale  $\varepsilon$ .

Si la perturbation  $\varepsilon$  est suffisamment petite, les champs de contraintes  $\sigma$  et de déplacements  $u$  correspondant à la configuration perturbée pouvaient se décomposer de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sigma^\varepsilon = \sigma + \varepsilon \sigma^1 \\ u^\varepsilon = u + \varepsilon u^1 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

où  $\sigma_1$  et  $u_1$  représentent les premières variations correspondant aux champs des contraintes et des déplacements lors de la perturbation infinitésimale  $\varepsilon$  de  $\Omega$ .

La variation d'énergie potentielle totale par rapport à l'allongement de la fissure peut alors être obtenue par passage à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\frac{dW_p}{da} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W_p^\varepsilon - W_p}{\varepsilon} \quad (\text{III.18})$$

#### - Propriétés du champ $\theta$

Le champ de déplacement  $\theta$ , introduit pour représenter la cinématique virtuelle du mouvement, doit vérifier les propriétés suivantes :

- $\theta$  est parallèle au plan de la fissure (automatique en 2D) ;
- $\theta$  est normal au front de la fissure ;
- le support de  $\theta$  est limité à un voisinage de la fissure ;
- $\theta$  est constant dans une zone entourant la pointe de fissure.

Pratiquement, on définit deux contours  $C_1$  et  $C_2$  entourant la pointe de fissure. Ces deux contours divisent la pièce en trois parties (Fig IV.13) :

- dans  $C_{int}$ , le champ  $\theta$  est constant de norme unitaire (1,0) ;
- dans  $C_{ext}$  le champ  $\theta$  est nul (0,0) ;
- dans la couronne  $C_{cour}$  le champ  $\theta$  varie continûment de (1,0) à (0,0).

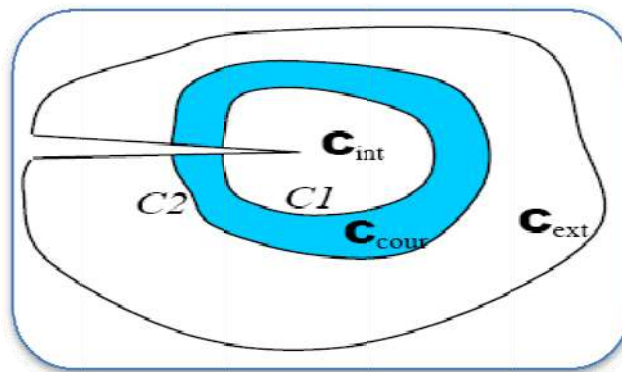


Fig IV.12 : Contours d'intégration pour la méthode Gθ

### - Expression du taux de restitution d'énergie

L'énergie potentielle totale du système est définie par :

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u \cdot d\Omega \quad (\text{III.19})$$

où  $f$  représente les forces extérieures appliquées à  $\Omega$  (Γ1 sur la Figure IV.10.).

Le principe des travaux virtuels, à l'équilibre, nous donne la relation suivante pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles  $u^*$  :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \nabla u^*) d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot u^* \cdot d\Omega \quad (\text{III.20})$$

Donc en prenant  $u$  comme champ de déplacement virtuel, on obtient l'expression de l'énergie potentielle totale à l'équilibre :

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \nabla u) d\Omega \quad (\text{III.21})$$

La perturbation étant infinitésimale, les opérations de dérivation et d'intégration sur le corps perturbé peuvent s'exprimer à l'aide d'un développement limité au premier ordre en fonction des mêmes opérations sur le corps non perturbé. Destuynder montre alors que sous les hypothèses suivantes :

- pas d'efforts appliqués au voisinage de la fissure ;
- pas de déformations d'origine thermique ;

et en se servant des expressions de  $\sigma^e$  et  $u^e$  définies précédemment, le taux de restitution d'énergie peut s'exprimer en élasticité pure :

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \nabla u \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} w_e \cdot \text{div}(\theta) \cdot d\Omega \quad (\text{III.22})$$

Où :

$$W_p = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \nabla u) \quad (\text{III.23})$$

Cette expression peut être généralisée en élasticité non linéaire (ou élastoplasticité en conditions de chargement monotone) en remplaçant l'énergie élastique  $w_e$  par une énergie totale  $w_{tot}$ , somme de l'énergie élastique  $w_e$  et de l'énergie plastique  $w_p$ . De même, il est possible d'ajouter plusieurs termes supplémentaires pour prendre en compte des forces extérieures près de la fissure, le cas d'un chargement thermique, ou encore le cas d'une fissure au voisinage d'une interface bimatériaux.

#### III.1.6.4. Maillage Concentrique

Afin d'utiliser certaines techniques de calcul propres à la mécanique de la rupture, la gestion du maillage à la pointe d'une fissure est primordiale.

Ainsi, pour pouvoir utiliser les éléments singuliers proposés par Barsoum [Barsoum 1976], il est important d'avoir un maillage triangulaire concentrique autour de la pointe de la fissure. De même, pour pouvoir implémenter la méthode  $G\theta$ , il est nécessaire de créer une couronne d'éléments qui servira de surface d'intégration pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

Pour la création de ces contours circulaires, l'utilisateur définit les rayons relatifs au contour concentrique  $C_{con}$ , au contour interne de la couronne  $C_{int}$ , et au contour externe de la couronne  $C_{ext}$ . Ces trois contours sont des contours ouverts (puisque'ils s'appuient sur les lèvres de la fissure), et non orientés (puisque la matière se situe à l'intérieur et à l'extérieur des contours). Puis, le mailleur détermine automatiquement les points d'intersection des différents contours, et il génère un maillage triangulaire s'appuyant sur les contours ainsi définis. La finesse du maillage étant alors déterminée par les paramètres de maillage définis par l'utilisateur ainsi que par la taille des contours en pointe de fissure :

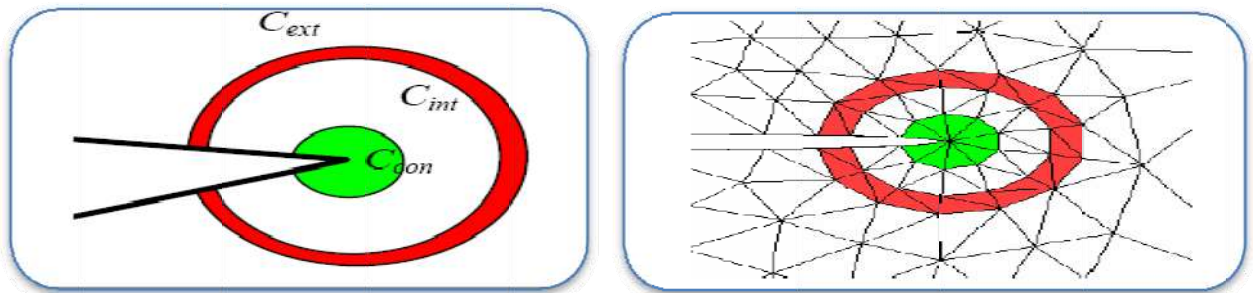


Fig IV.13 : Contours circulaires pour le maillage en pointe de fissure

Cette technique nous permet de maîtriser parfaitement la structure du maillage en pointe de fissure, que ce soit pour le calcul de paramètres mécaniques, ou pour la propagation d'une fissure.

**CHAPITRE IV**  
**SIMULATION NUMERIQUE PAR**  
**LE CODE CASTEM2000**

### Introduction

Une simulation numérique consacrée aux problèmes de fissuration des conduites présente différents objectifs :

1/ l'amélioration de la compréhension des différents phénomènes intervenants lors de la mise en charge de ce type de structures (étude des plastifications autour de la pointe de fissure).

2/ Pouvoir disposer d'outils de prédiction et aussi de dimensionnement fiables de ce type de structures.

3/ Minimiser les risques liés à la ruine de ce type de structures.

Dès que les codes de simulations numériques ont montré la qualité de leurs résultats sur des pièces complexes, différentes équipes de recherche ont alors proposé d'étudier un problème d'optimisation mathématique pour rechercher automatiquement les valeurs de certains paramètres du procédé pour éviter la propagation des fissures sur les pièces.

#### V.1. Dimension de la structure

Les caractéristiques géométriques sont présentées dans la Fig IV.1 cylindre d'épaisseur initiale de 5mm, dont l'ensemble des paramètres matériels introduits dans le code de simulation [06] sont répertoriés dans le tableau (V.1).

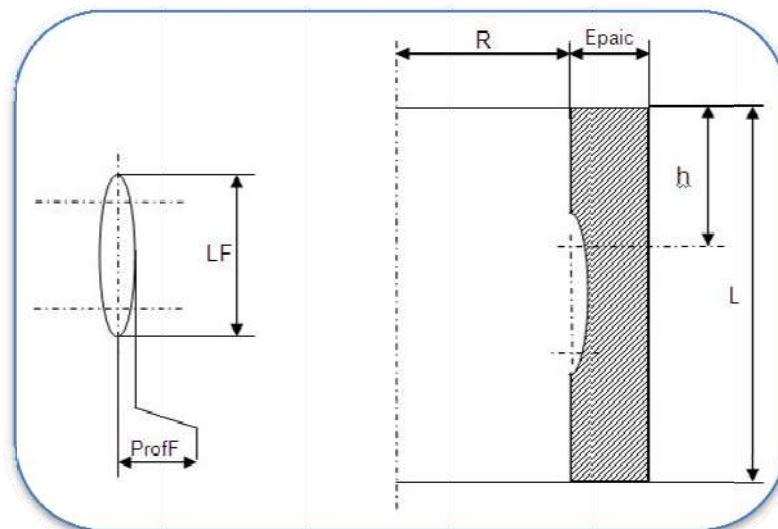


Fig IV.1 : Dimensions de la structure.

Donnée	Valeur
Masse Volumique	7800 Kg/m <sup>3</sup>
Module de Young	54.E9 MPa
Coefficient de poisson	0.3
Limite élastique	14.E7 MPa
Désignation	Matériau de construction

Tableau (IV.1) Caractéristiques du matériau.

## V.2. Modélisation numérique

Nous allons étudier et montrer tout au long de la section les effets de la plasticité sur le front de la fissure et les effets de la fissure sur les résultats de la simulation (géométrie, épaisseur, les couches de la fissure, etc...).

Les hypothèses utilisées pour la simulation sont :

- Matériau élasto-plastique à écrouissage isotrope ;
- Anisotropie plastique ;
- Algorithme Explicite.

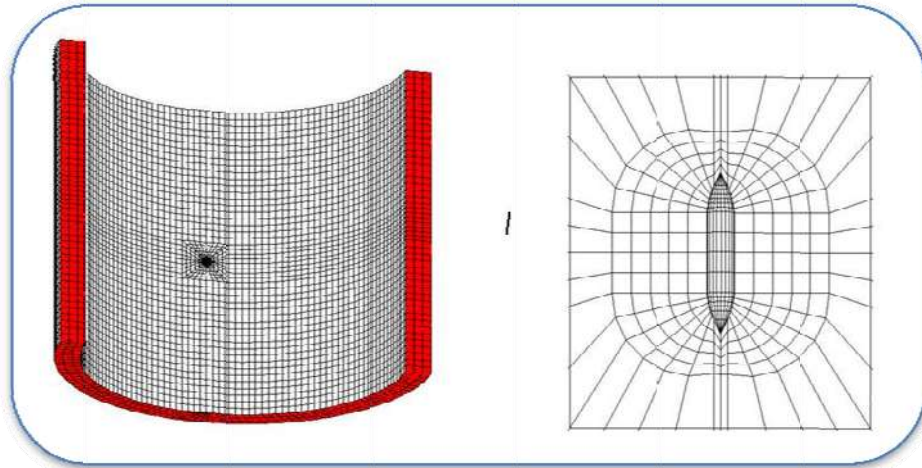
Le cylindre est maillé avec des éléments tridimensionnelles « CUB8 » et « CUB20 » (éléments parallélépipédiques respectivement à huit et vingt points d'intégration) de façon à assurer la conformité de notre problème. Par souci de clarté et d'organisation du maillage, nous préférons les éléments parallélépipédiques (la forme globale de l'éprouvette étant initialement un parallélépipède, la subdivision se fait de manière ordonnée). D'autre part, les déformations sont finalement assez simples. Par conséquent, afin de limiter le temps de calcul, nous prendrons des éléments à huit points d'intégration, c'est-à-dire des éléments de type « CUB8 ». L'emploi de la méthode explicite pour résoudre les problèmes d'élasto-plastique implique certaines précautions. En effet, cette méthode fondamentalement adaptée aux phénomènes statiques très rapides (Newton Raphson par exemple). Il s'agit donc de trouver un compromis entre la rapidité du calcul et la précision du modèle.

## V.3. Distribution des contraintes et des déformations

On ne possède de valeurs analytiques du facteur d'intensité des contraintes ( dans la littérature, il est disponible uniquement pour des géométries très simples avec des chargements particuliers). Pour des géométries plus complexes un calcul par éléments finis est nécessaire. L'un des problèmes est le maillage qui doit rendre compte des champs singuliers des contraintes au voisinage de la pointe de fissure et qui doit permettre un calcul économique du taux de restitution d'énergie réduit ou des facteurs d'intensité des contraintes, en fonction de la contrainte et du temps. Dans ce qui suit. Le cylindre d'épaisseur (EPAIS), le rayon du cylindre (R), la profondeur de fissure (PF), la longueur de fissure (LF) est décrite par la condition de liaisons imposées aux nœuds du maillage par éléments finis. Dans le cas symétrique. Par exemple pour le maillage de la Fig IV.2.a, les sections en couleurs rouge sont considérées comme conditions aux limites (bloqués en rotation et en déplacement). Un maillage très fin convergeant à la pointe de fissure : éléments finis classiques iso-paramétriques à 8 nœuds (Fig IV.2.b), un nombre suffisant de secteurs doivent converger vers la pointe (au moins 6) et les dimensions radiales doivent s'affiner à la pointe en progression géométrique, la taille du premier rectangle doit être comprise entre  $1/1000$  et  $1/100$  de la longueur de fissure dépendant de la précision recherchée.

#### V.4. Géométrie maillée

Nous avons présenté les outils numériques nécessaires à une modélisation précise d'une fissure dans un maillage. Nous avons montré les singularités que pouvait engendrer une telle fissure. La bonne maîtrise de la structure du maillage est indispensable, si l'on veut obtenir un calcul précis des champs mécaniques. Pour cela, nous avons montré l'intérêt des éléments concentriques et des éléments singuliers à la pointe de fissure.



(a)

(b)

Fig IV.2 : (a) Maillage du cylindre fissuré en son milieu pour la méthode énergétique. (b) Agrandissement de la fissure. (c) La couleur rouge représente les faces a bloquées en déplacement et en rotation.

#### V.5. Charge appliquée

On applique une pression statique sur le cylindre perpendiculairement à la surface interne du cylindre. La Fig IV.3 montre les vecteurs forces dans chaque nœud de la surface interne.

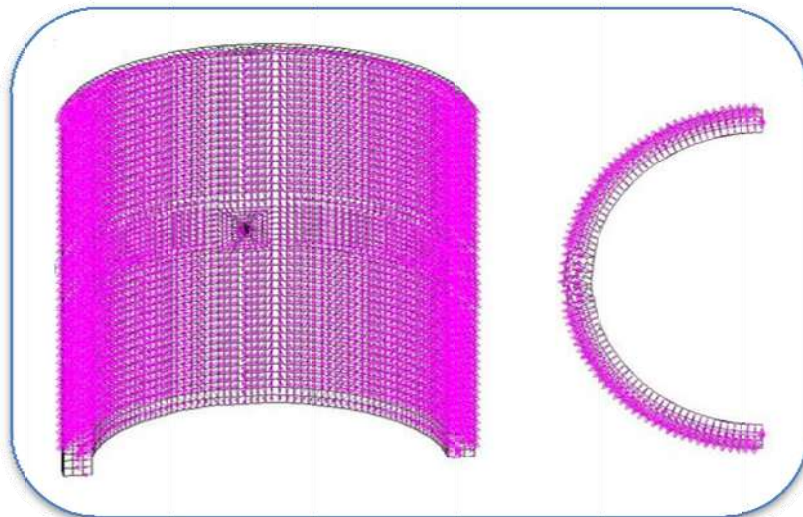


Fig IV.3 : Champ de pression interne appliquée à la Géométrie.

#### IV.6. Courbe de traction

Nous savons bien que en plasticité que la raideur n'est pas constante, il est nécessaire d'utiliser une courbe de traction obtenue expérimentalement fig IV.4.

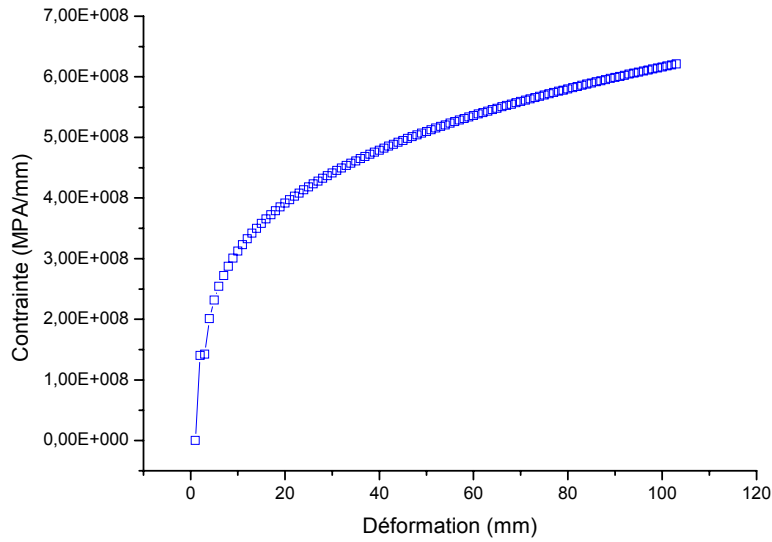


Fig IV.4 : Courbe de traction du matériau PVC Ecoulement F/F.

#### IV.7. Courbe de temps pour la manipulation de la procédure pas à pas

L'avantage de la procédure pas à pas est de pouvoir faire un pilotage en choisissant un paramètre particulier (ici il s'agit d'un pilotage en force).

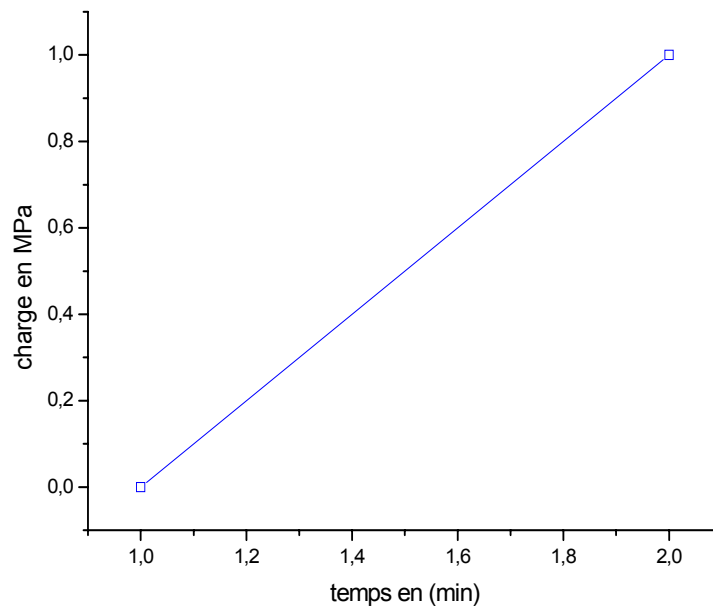
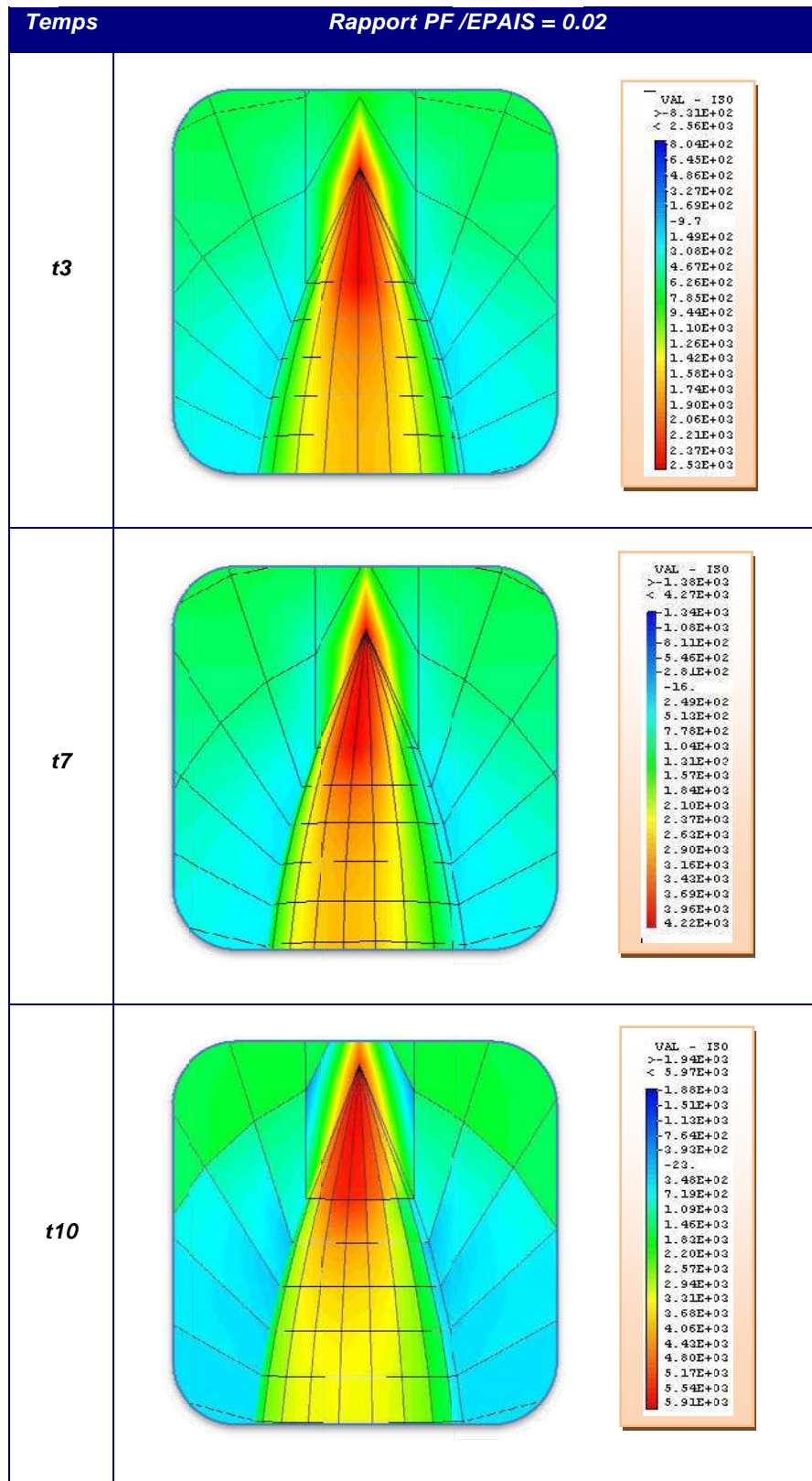


Fig IV.5 : Courbe du chargement / temps.

#### ***IV.8. Résultats des contraintes de Von Mises***

Les simulations sont faites avec différentes dimensions géométriques du cylindre. Pour rendre notre étude plus générale, on utilise une étude paramétrique avec les rapports ( $PF/EPAIS$ ,  $PF/LF$ ,  $R/EPAIS$ ). On applique une pression progressive de manière qu'on peut avoir toutes les valeurs des contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$  et puisque, l'objectif final est la détermination de la contrainte de Von Mises, qui permet d'identifier le début de la zone de plastification. Comme on l'a constaté avec les différentes simulations effectuées Fig IV.2 jusqu'à IV.12, la tête de fissure se plastifie en premier temps.



**Fig IV.6 : Contraintes de Von Mises en fonction du paramètre (profondeur de fissure / l'épaisseur du cylindre) égal à 0.02.**

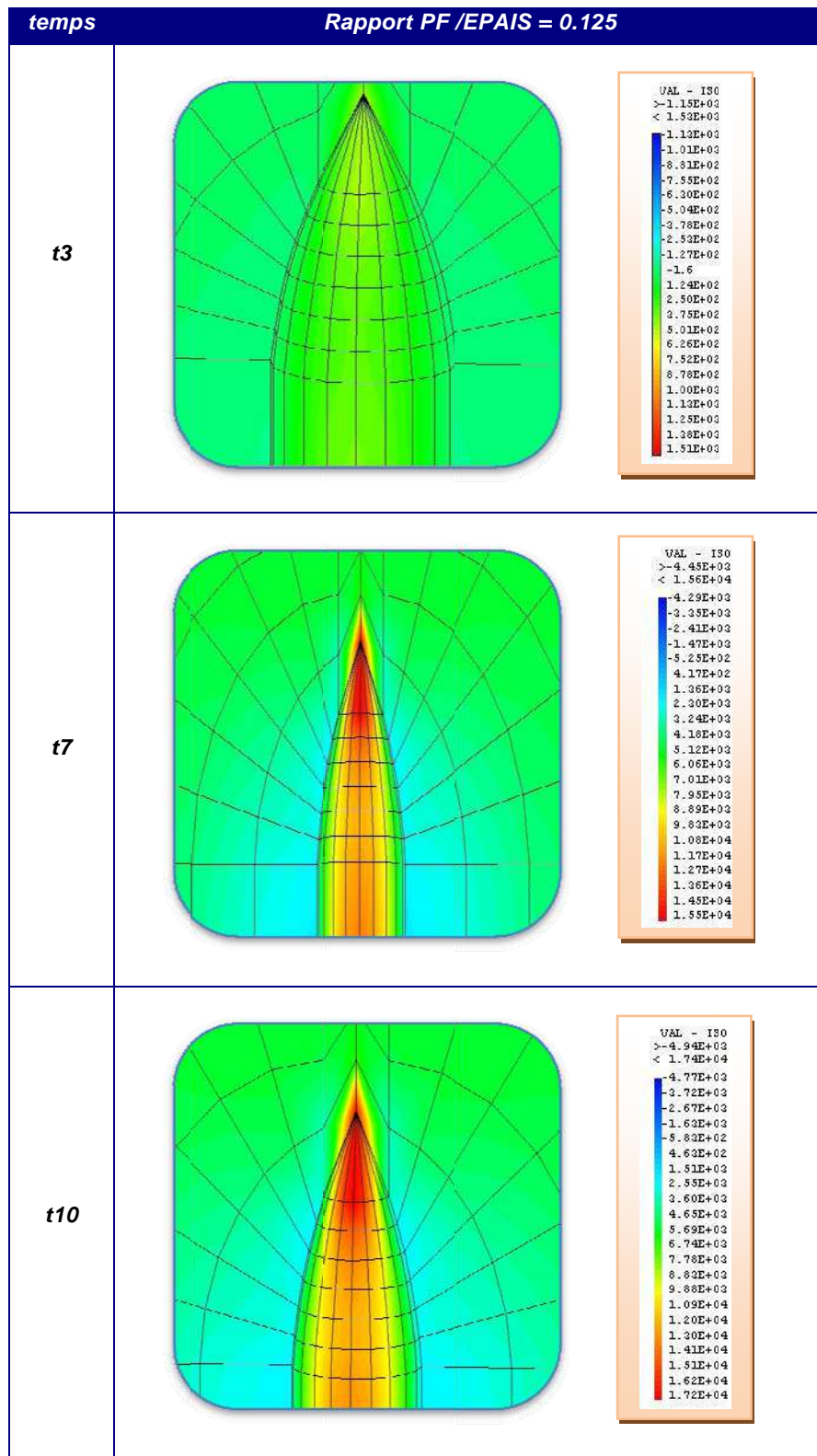
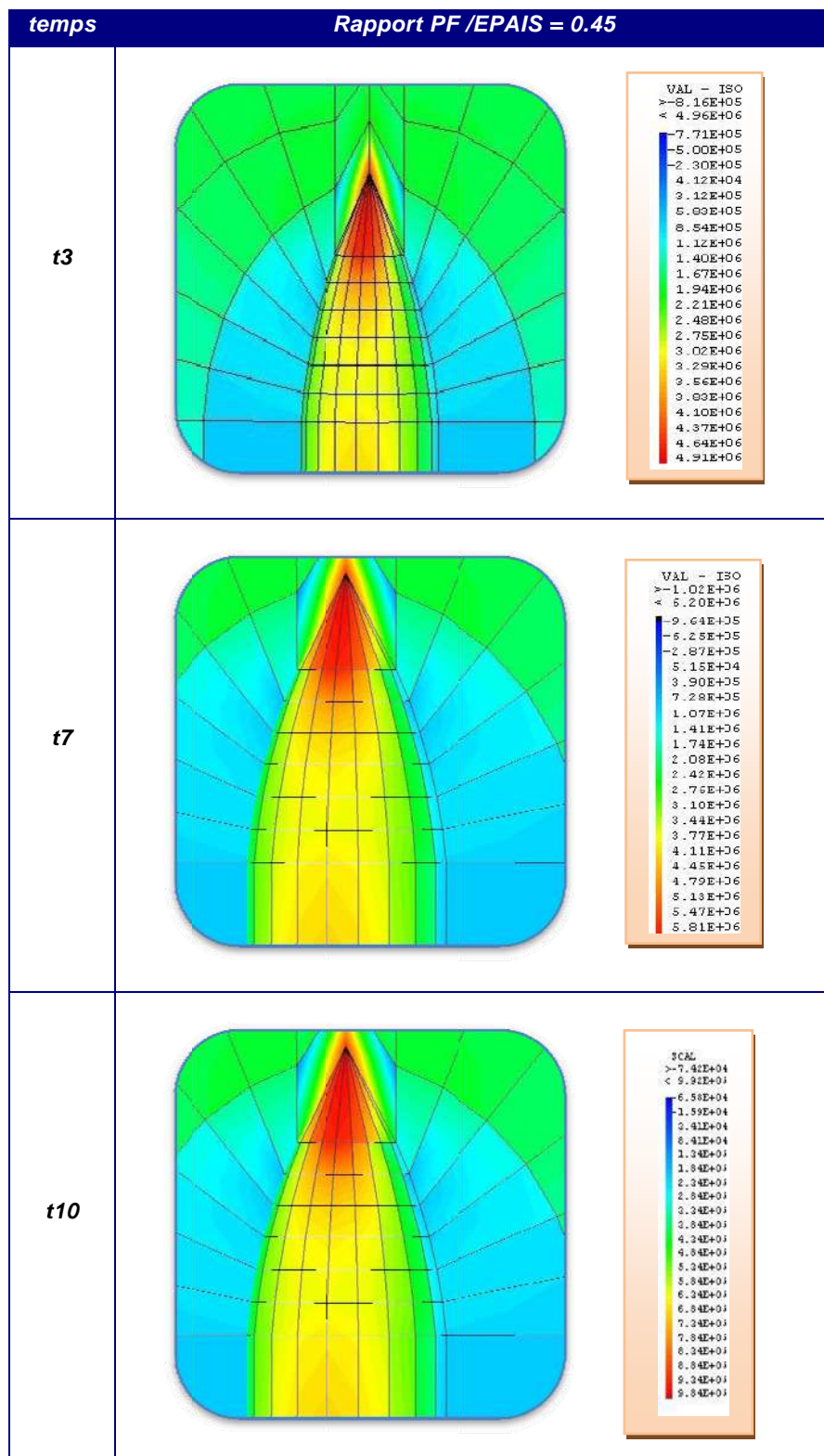


Fig IV.7 : Contraintes de Von Mises en fonction du paramètre (profondeur de fissure / l'épaisseur du cylindre) égal à 0.125.



**Fig IV.8 : Contraintes de Von Mises en fonction du paramètre (profondeur de fissure / l'épaisseur du cylindre) égal à 0.45.**

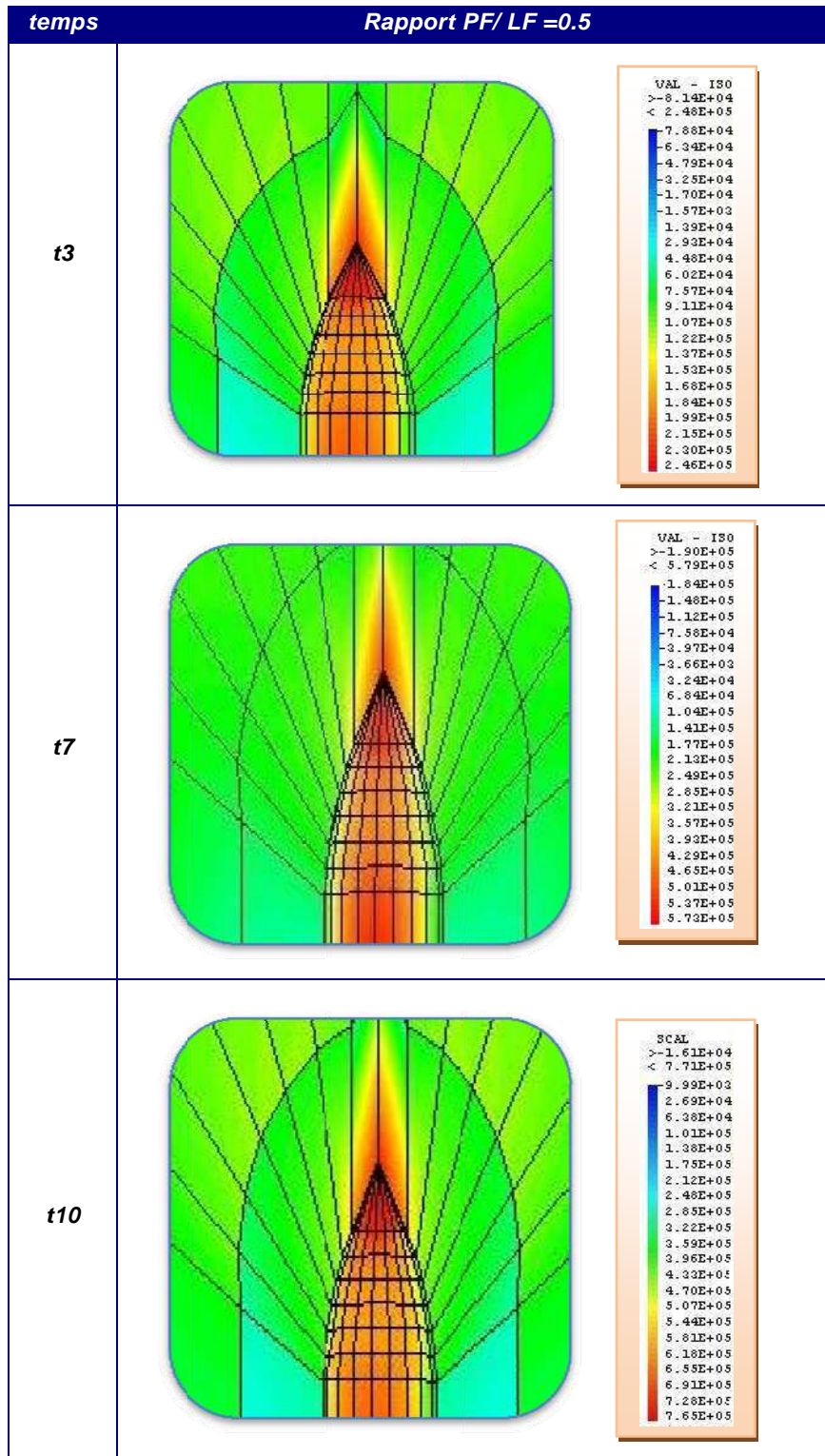
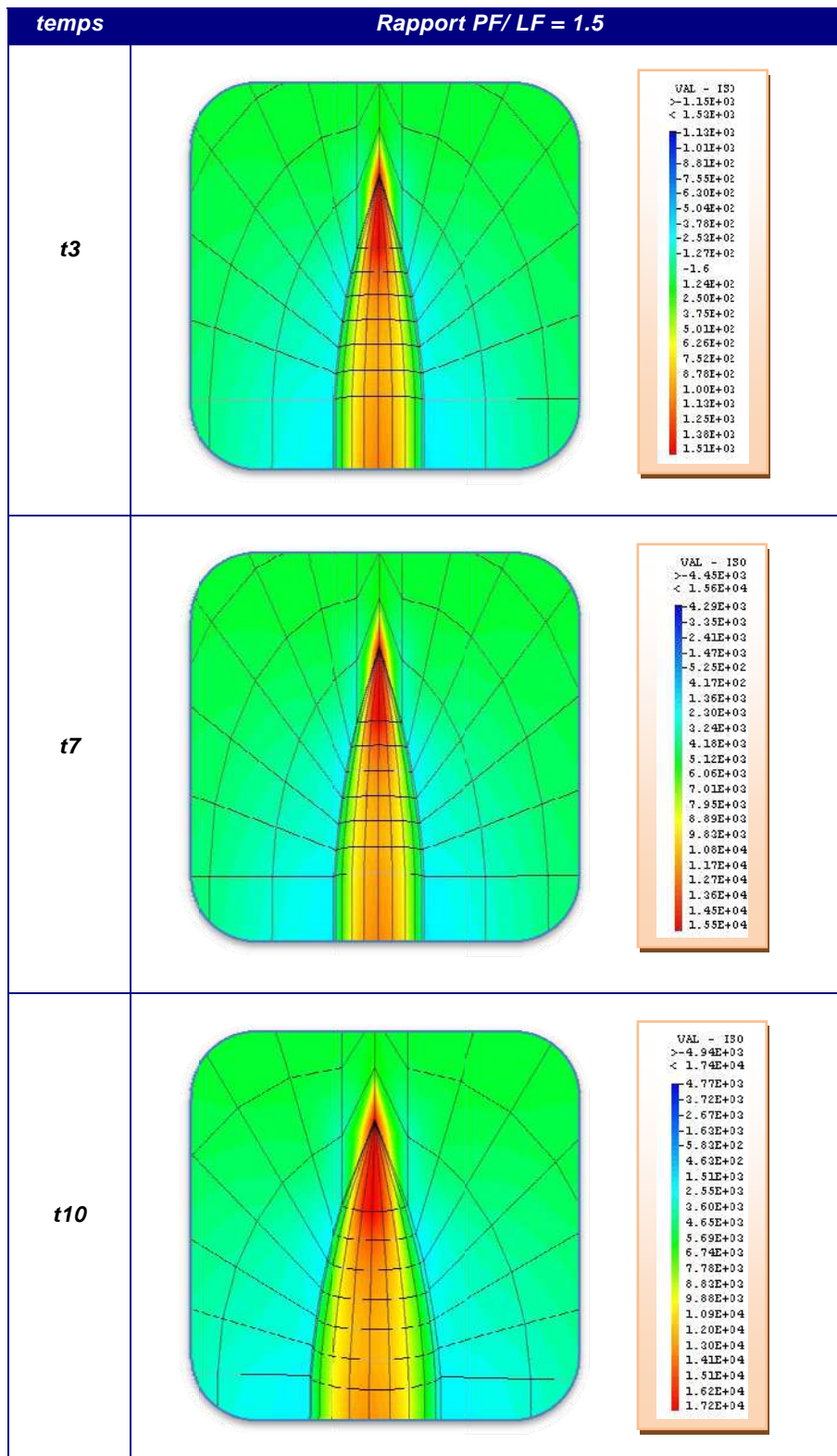


Fig IV.9 : Contraintes de Von Mises en fonction du paramètre (profondeur de fissure / longueur de fissure) égal à 0.5.



**Fig IV.10 : Contraintes de Von Mises en fonction du paramètre (profondeur de fissure / longueur de fissure) égal à 1.5.**

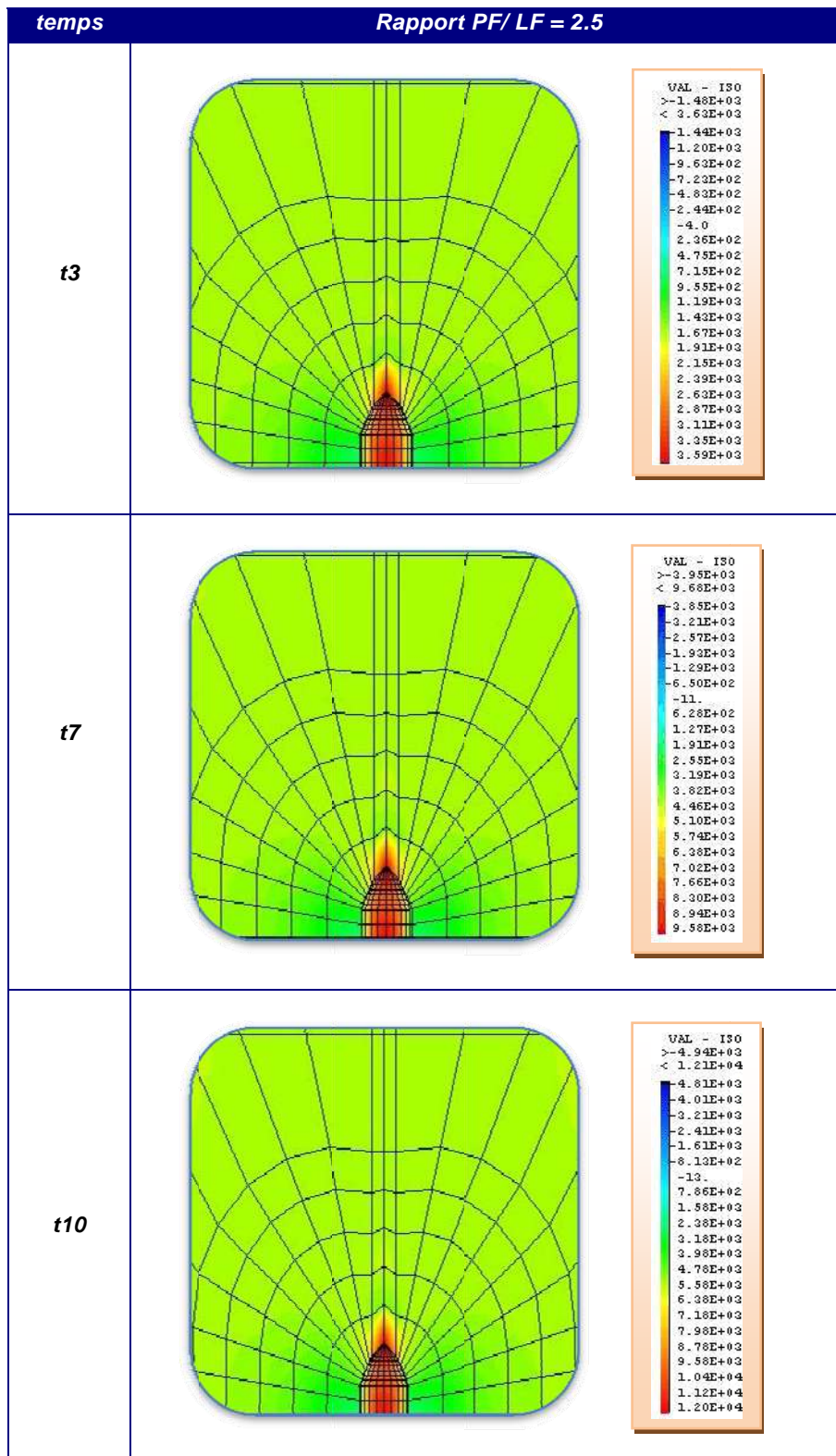


Fig IV.11 : Contraintes de Von Mises en fonction du paramètre (profondeur de fissure / longueur de fissure) égal à 2.5.

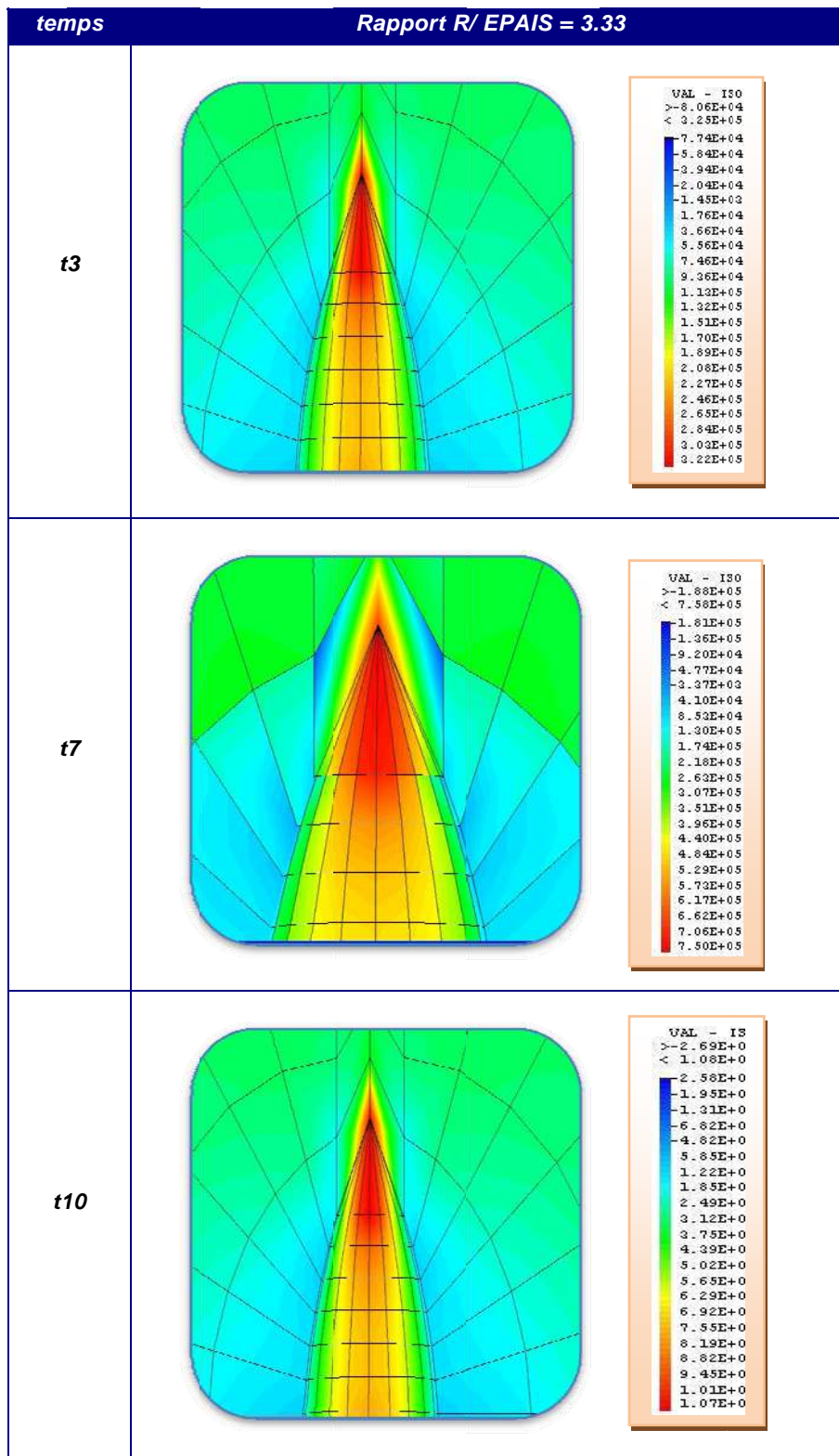
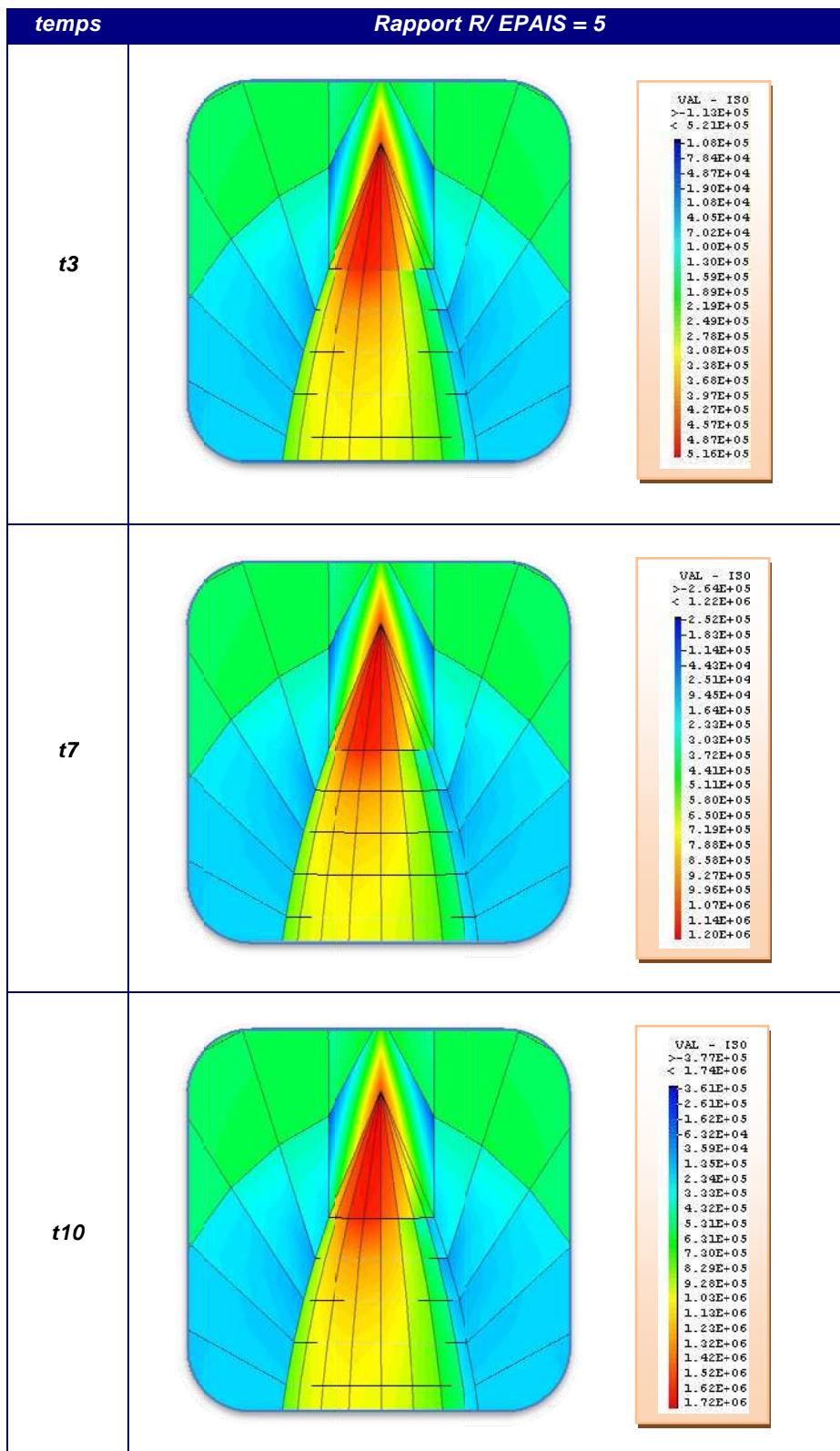


fig IV.12 : Contraintes de Von Mises en fonction du paramètre (rayon du cylindre de fissure / épaisseur du cylindre) égal à 3.33.



**fig IV.13 : Contraintes de Von Mises en fonction du rapport (rayon du cylindre / épaisseur du cylindre) égal à 5.**

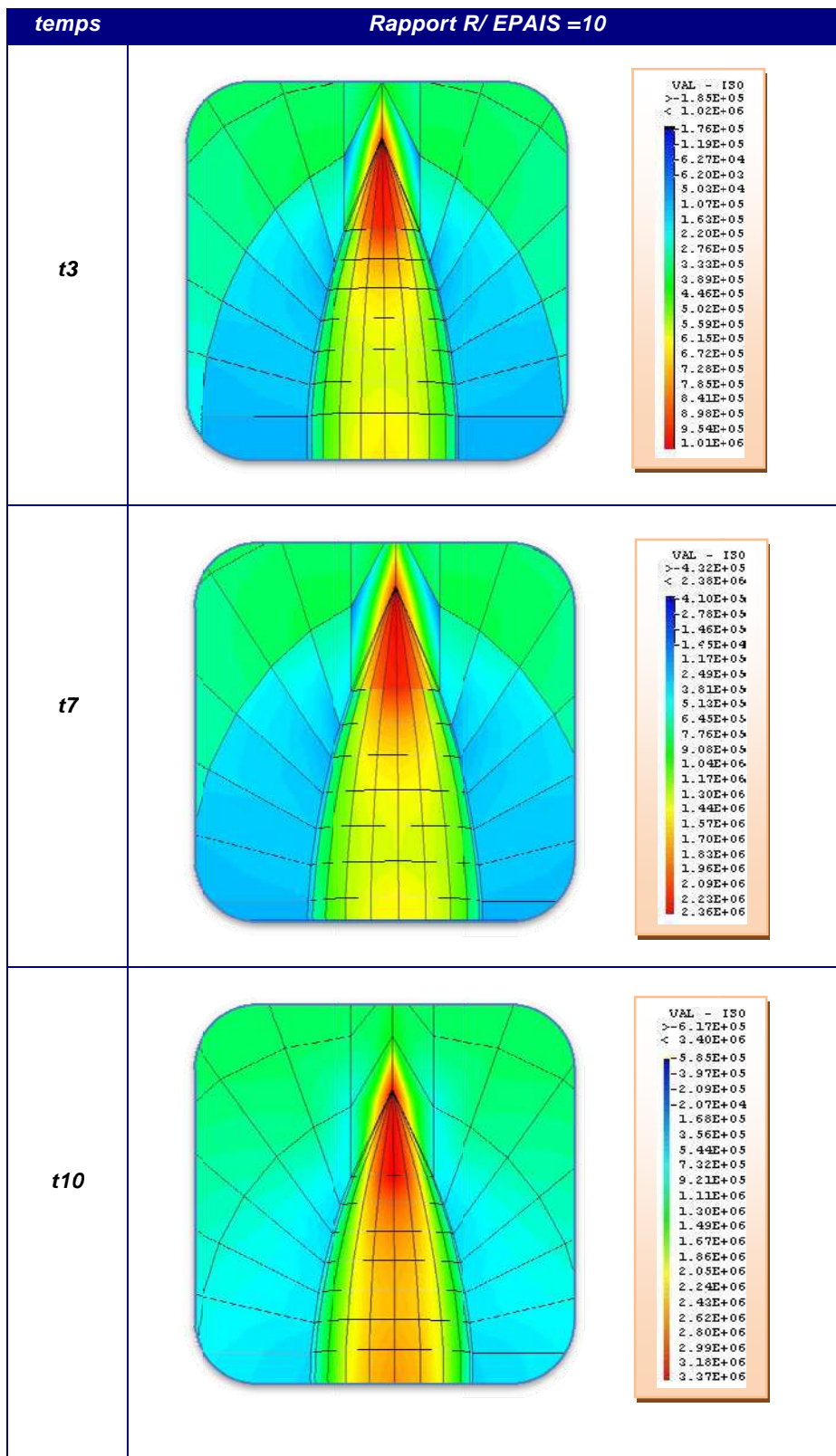


Fig IV.14 : Contraintes de Von Mises en fonction du rapport (rayon du cylindre / épaisseur du cylindre) égal à 10.

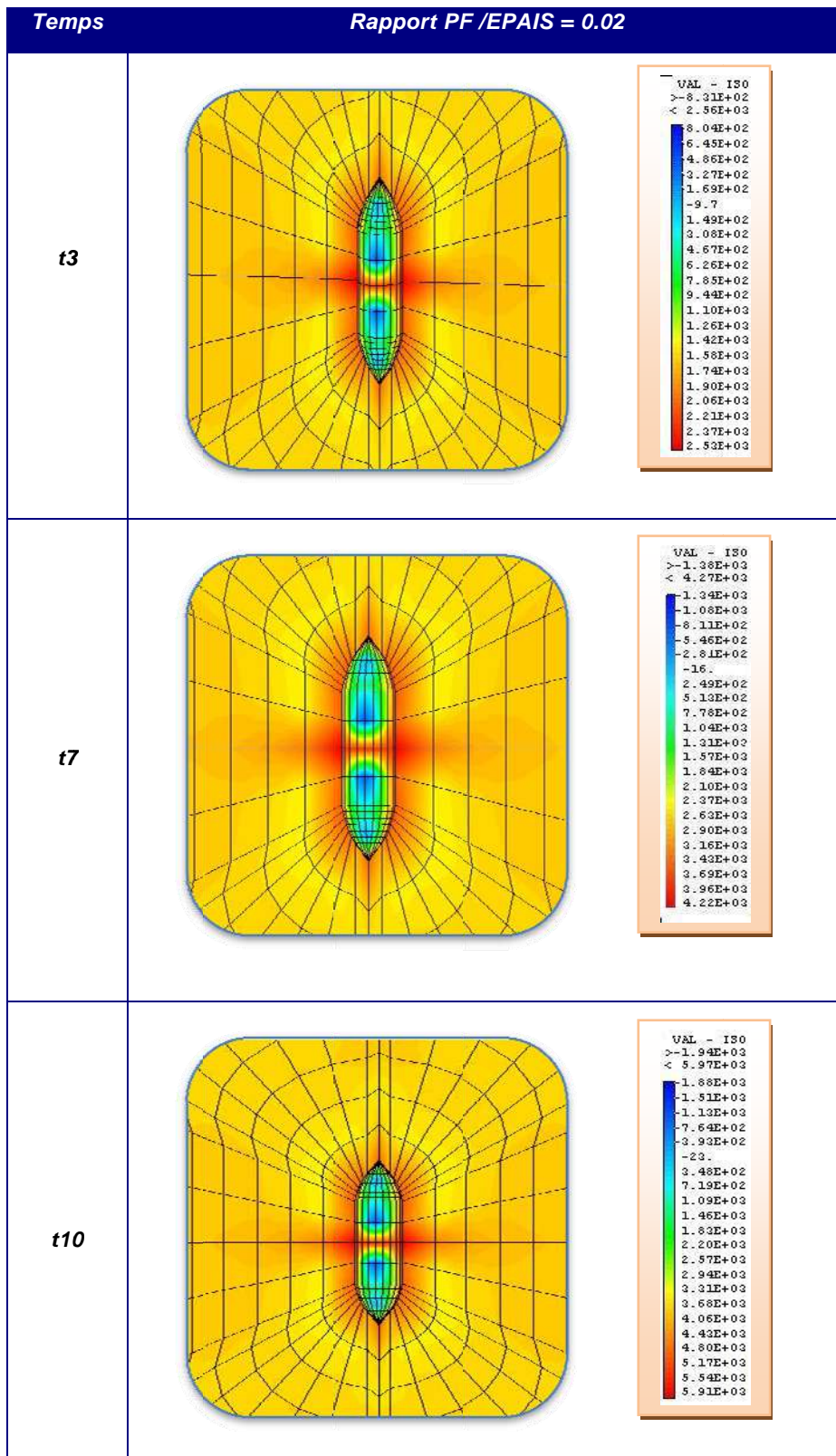
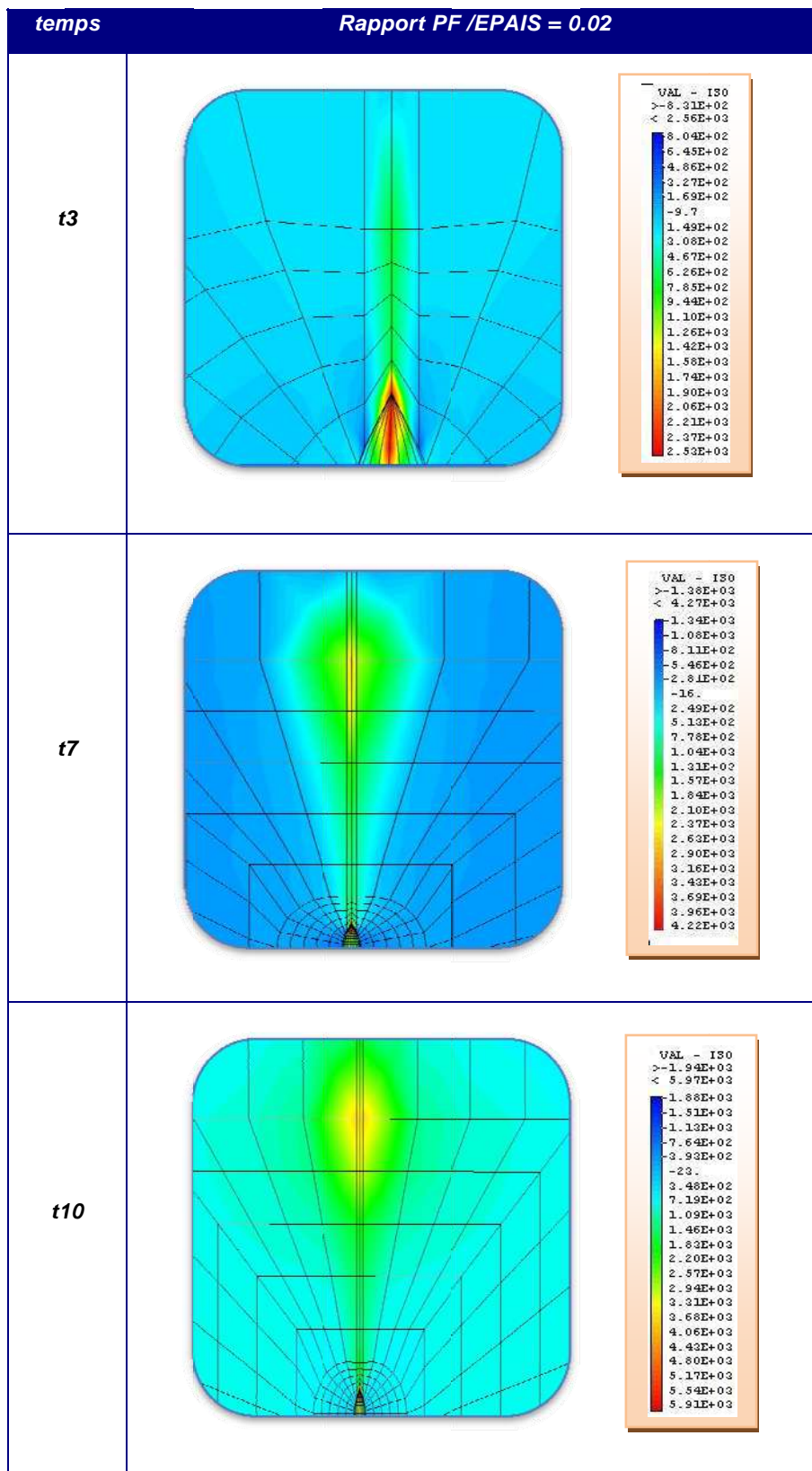


Fig IV.15 : Contraintes de Von Mises en fonction du rapport (profondeur de fissure / épaisseur du cylindre) égal à 0.02, avec la condition de blocage dans le plan horizontal au milieu de fissure.



**Fig IV.16** : Contraintes de Von Mises en fonction du rapport (profondeur de fissure / épaisseur du cylindre) égal à 0.02, avec la condition de blocage dans le plan verticale au milieu de fissure.

#### IV.8.1. Interprétation des résultats des contraintes de Von Mises

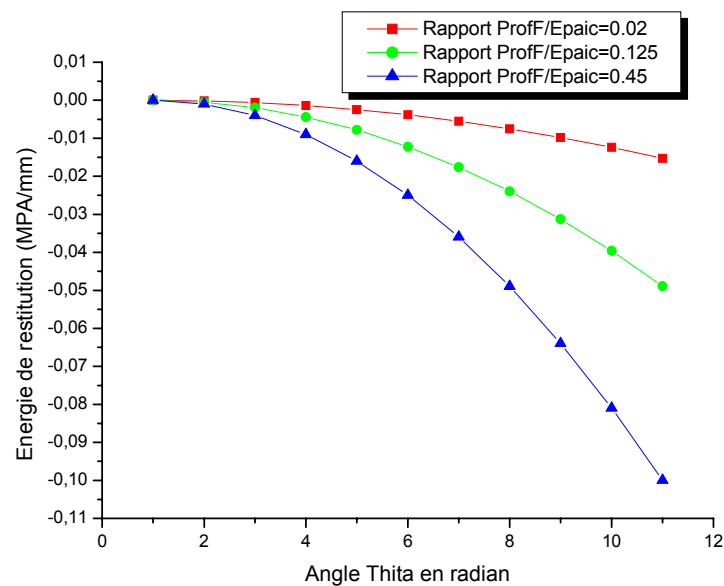
L'avantage de cette simulation est qu'elle permet de classer les neuf cylindres en connaissant la répartition des contraintes de Von Mises aux niveaux de tous les cylindres et pour chaque temps de calcul. Les douze Figures montrent que la contrainte maximale se trouve toujours à la pointe de fissure et aussi pour le temps final de la simulation. La fissure qui subit la plus grande valeur de contraintes de Von Mises est celle correspondant au rapport (rayon du cylindre / l'épaisseur du cylindre) égal à 10. En d'autre terme l'épaisseur la plus petite.

Par ailleurs, la fissure correspondant à la plus petite valeur de contraintes de Von Mises est celle qui correspond au rapport (profondeur de fissure / l'épaisseur du cylindre) égal à 0.02, c'est à dire l'épaisseur la plus grande dans tous les cylindres.

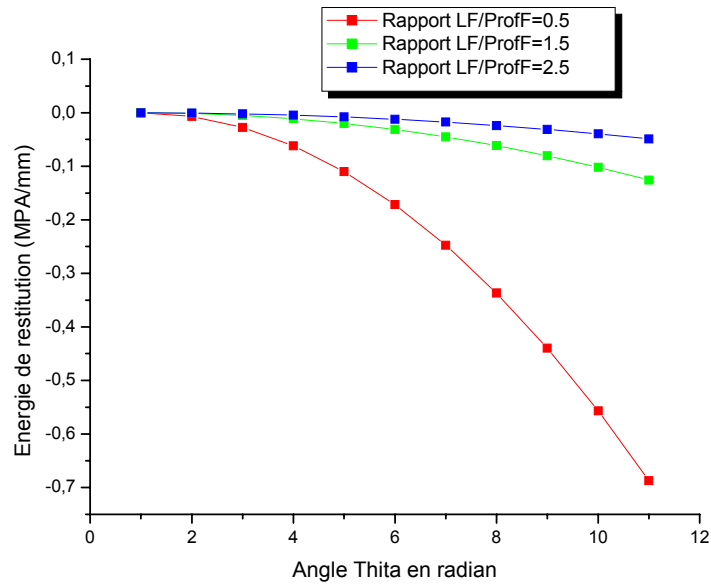
#### IV.9. Les résultats du calcul de l'énergies de restitution pour les différentes géométries

L'étude énergétique d'une pièce fissurée s'effectue à l'aide du taux de restitution d'énergie. Il existe de nombreuses façons de calculer ce paramètre. Parmi ces méthodes, la méthode  $G_{THETA}$  (exposée dans le chapitre précédent) est à la fois rapide, précise et facile à utiliser. Cependant, son utilisation nécessite la présence d'une couronne d'éléments entourant la pointe de fissure. Encore une fois, la technique de maillage que nous avons mis en place permet de générer facilement cette structure particulière en pointe de fissure. A l'aide de ce type de maillage (en couronne), nous avons montré la bonne précision et la stabilité des calculs.

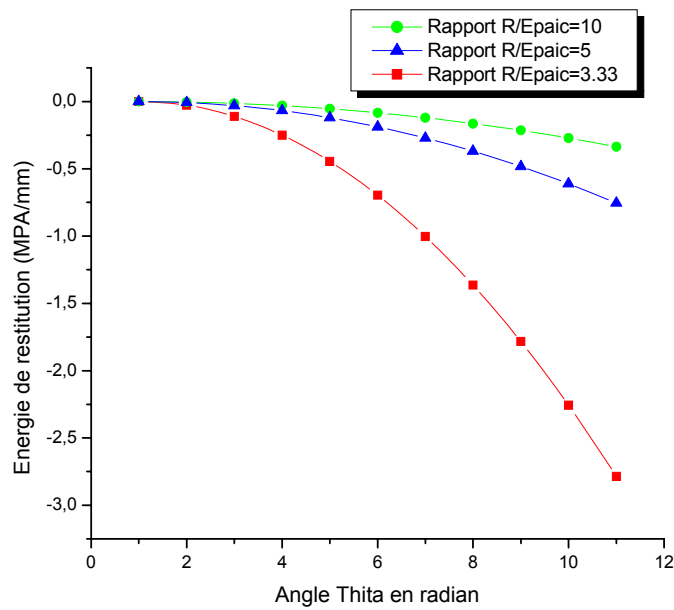
De plus, il est possible de rajouter plusieurs termes dans l'expression de calcul de  $G_{THETA}$ , afin de traiter des cas plus compliqués : matériau élasto-plastique, forces extérieures près de la fissure, propriétés du matériau constant et les paramètres géométriques variables (dans notre cas, on a neuf cylindres).



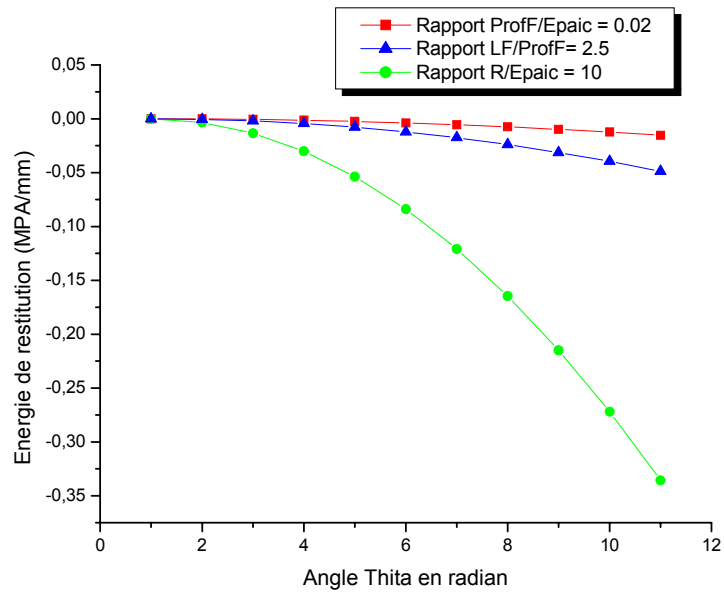
**Fig IV.17 : Courbes des énergies de restitution pour les trois rapports (profondeur de fissure / l'épaisseur du cylindre).**



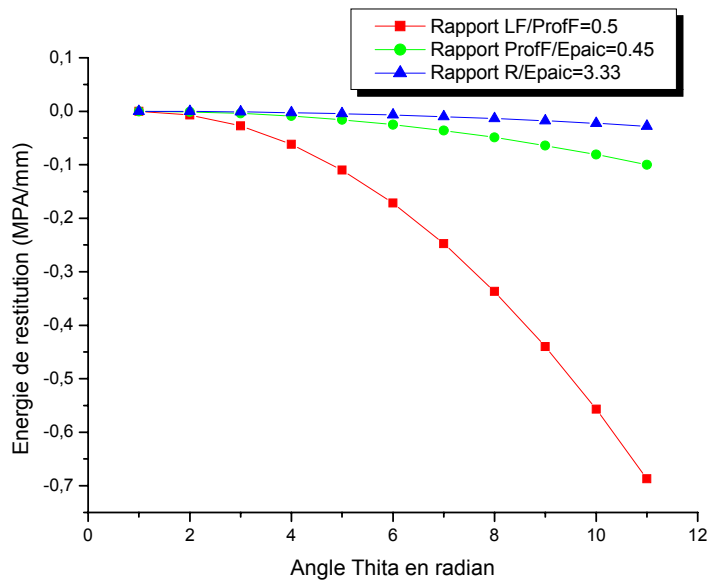
**Fig IV.18 : Courbes des énergies de restitution pour les trois rapports (longueur de fissure / profondeur de fissure).**



**Fig IV.20 : Courbes des énergies de restitution pour les trois rapports : (rayon du cylindre / l'épaisseur du cylindre).**



**Fig IV.21 : Courbes des énergies de restitution pour les trois rapports les moins critiques.**



**Fig IV.22 : Courbes des énergies de restitution pour les trois rapports les plus critiques.**

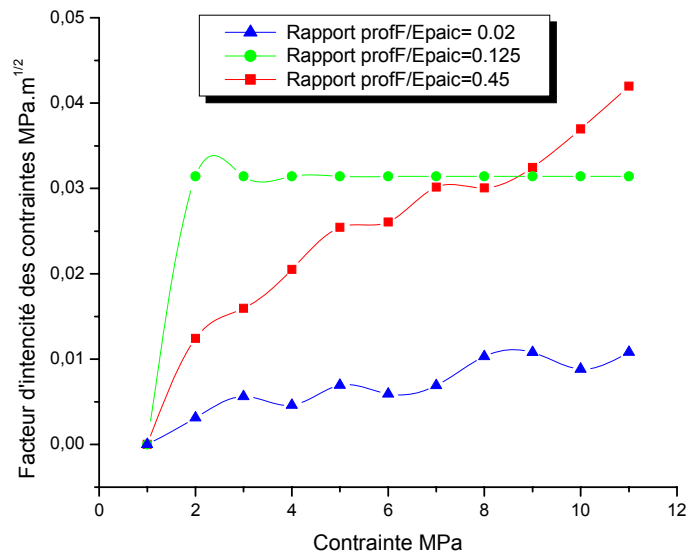
**IV.9.1. Interprétation des résultats relatifs à l'énergie de restitution**

- Pour les trois rapports (profondeur de fissure sur l'épaisseur du cylindre), on remarque que l'énergie de restitution est inversement proportionnelle à ce rapport Fig IV.17.
- Pour les trois rapports (longueur de fissure sur la profondeur de fissure), on remarque que l'énergie de restitution est proportionnelle à ce rapport Fig IV.18.

- Pour les trois rapports (rayon du cylindre sur l'épaisseur du cylindre), on remarque que l'énergie de restitution est toujours proportionnelle à ce rapport Fig IV.19.
- Pour choisir le cylindre le plus performant, on se base sur la courbe de petite énergie de restitution. On constate que le cylindre qui reçoit l'énergie minimale, est le cylindre de plus grand rapport (rayon / épaisseur) égal à 3.33, « ce qui nous donne la plus grande épaisseur ».

#### IV.10. Le facteur d'intensité des contraintes

Le facteur d'intensité des contraintes est déterminé à partir des résultats des contraintes calculées dans le voisinage de la pointe de fissure. Pour cela, on doit avoir une grande précision des calculs, ce qui à cause de la singularité impose des maillages adaptés. Les méthodes préconisées sont basées sur le calcul du taux d'énergie élastique libérée pour un accroissement unitaire de fissure. Connaissant  $G$ , il est facile de passer à une valeur équivalente du facteur d'intensité des contraintes par la relation :



**Fig IV.23 :** Courbes des facteurs d'intensité des contraintes pour les trois rapports (profondeur de fissure / l'épaisseur du cylindre).

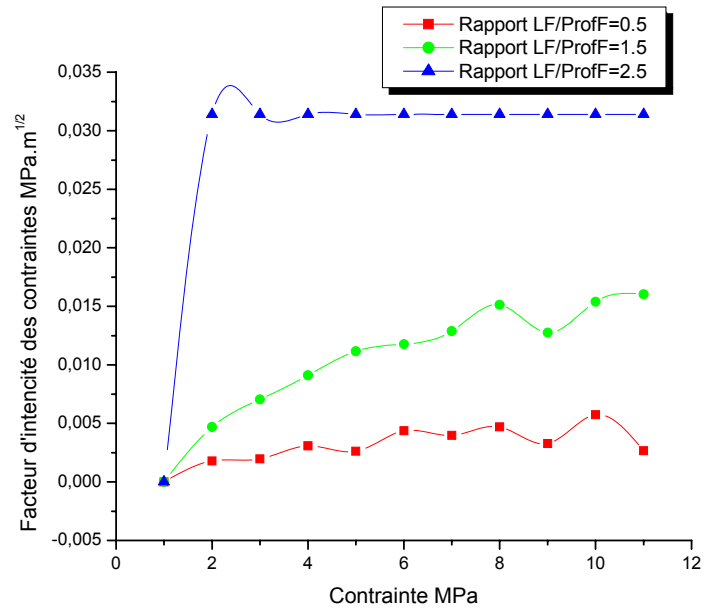


Fig IV.24 : Courbes des facteurs d'intensité des contraintes pour les trois rapports (longueur de fissure / profondeur de fissure).

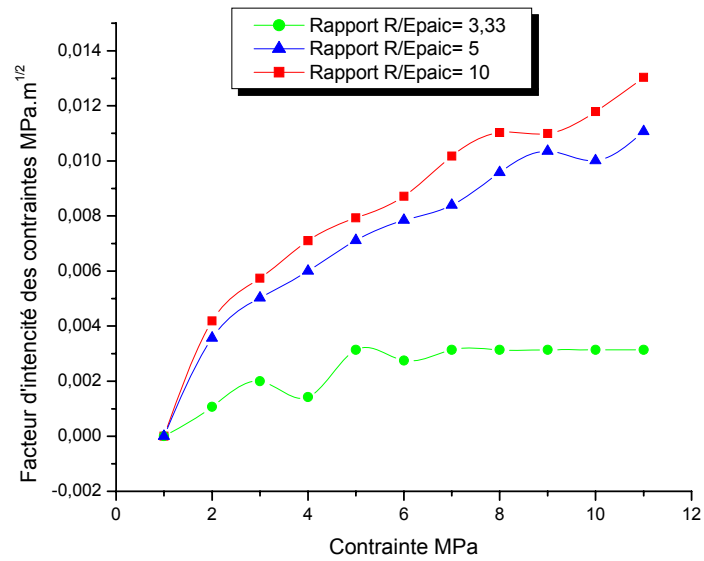
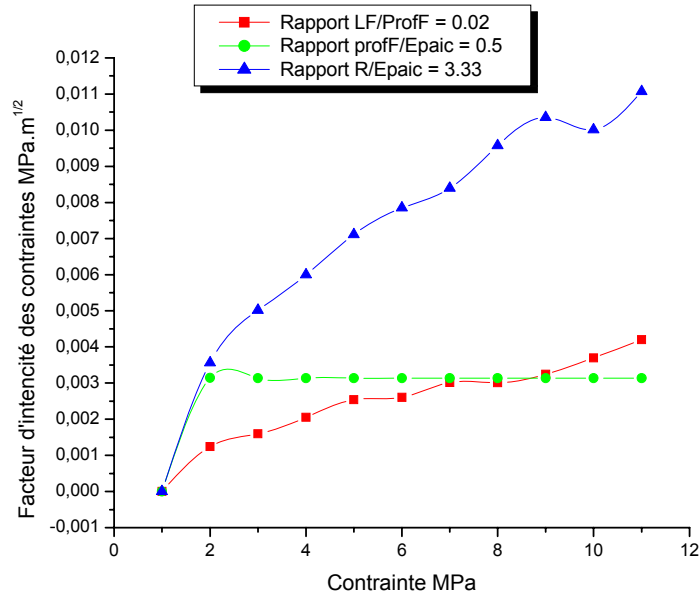
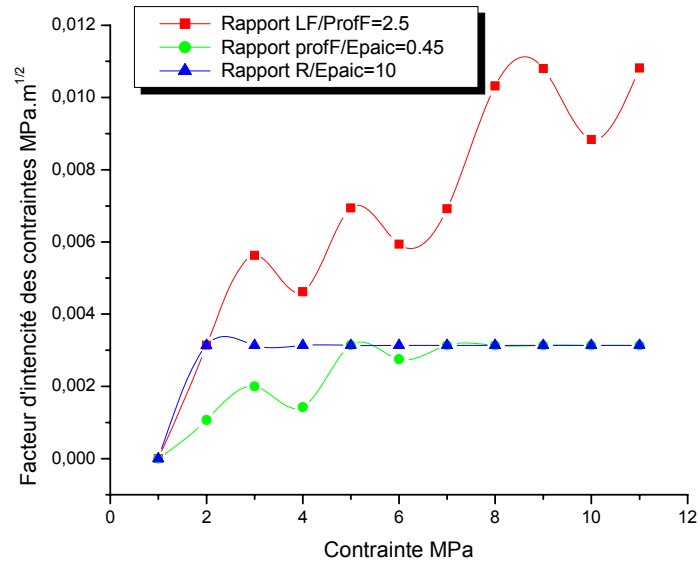


Fig IV.25 : Courbes des facteurs d'intensité des contraintes pour les trois Rapports (rayon du cylindre //l'épaisseur du cylindre).



**Fig IV.26 : Courbes des facteurs d'intensité des contraintes pour les trois Rapports les moins critiques.**



**Fig IV.27 : Courbes des facteurs d'intensité des contraintes pour les trois rapports les plus critiques.**

**IV.10.1. Interprétation des résultats des facteurs d'intensité des contraintes**

- Pour les trois rapports (profondeur de fissure / épaisseur du cylindre), le facteur d'intensité des contraintes est inversement proportionnel au rapport considéré Fig IV.23.
- Pour les trois rapports (profondeur de fissure / longueur de fissure), on remarque que le facteur d'intensité des contraintes est proportionnel au rapport considéré Fig IV.24.

- Pour les trois rapports (rayon du cylindre / épaisseur du cylindre), le facteur d'intensité des contraintes est proportionnel au rapport considéré Fig IV.25.

- Pour choisir le cylindre le plus tenace, on se base sur la courbe de petit facteur d'intensité des contraintes. On constate que le cylindre qui a un facteur d'intensité des contraintes minimal, est le cylindre ayant le plus grand rapport (rayon du cylindre / épaisseur du cylindre) égal à 3.33.

#### IV.11. Interprétation globale des résultats

Après une simulation très longue de neuf cylindres fissurés avec des dimensions variables, on utilise la technique d'élimination pour avoir le cylindre le plus tenace et le moins reçoit de l'énergie de restitution et qui plastifier le dernier.

- Le cylindre qui a les bonnes caractéristiques c'est le cylindre de rapport (rayon du cylindre/ épaisseur du cylindre) égale à 3.33, « avec une grande épaisseur ».

- Le cylindre qui a les mauvaises caractéristiques c'est le cylindre de rapport (rayon du cylindre/ épaisseur du cylindre) égale à 10, « avec une petite épaisseur ».

Résumé des courbes des énergies de restitution pour différents cylindres et les facteurs d'intensité des contraintes sont représenté par les tableaux suivants :

Variation du Rapport profondeur de fissure/l'épaisseur du cylindre	Energie de restitution élastique	Facteur d'intensité des contraintes
0.02	***	***
0.125	**	**
0.45	*	*

Tableau (IV.2) Influence du rapport (profondeur de fissure / l'épaisseur du cylindre).

- \* : moins influence.
- \*\* : moyenne influence.
- \*\*\* : plus grande influence.

Variation de Rapport longueur de fissure/profondeur de fissure	Energie de restitution élastique	Facteur d'intensité des contraintes
0.5	*	*
1.5	**	**
2.5	***	***

Tableau (IV.3) Influence du rapport (longueur de fissure / profondeur de fissure).

Variation de Rapport rayon du cylindre/l'épaisseur du cylindre	Energie de restitution élastique	Facteur d'intensité des contraintes
3.33	*	*
5	**	**
10	***	***

Tableau (IV.4) Influence du rapport (rayon du cylindre / épaisseur du cylindre).

En conclusion, le tableau suivant représente les différentes variations de  $G$  et de  $K_I$  par rapport aux paramètres de la géométrie du cylindre:

Paramètres géométriques	Energie de restitution élastique	Facteur d'intensité des contraintes
Profondeur de fissure ↗	↗	↗
Longueur de fissure ↗	↗	↗
Epaisseur du cylindre ↗	↘	↘
Rayon du cylindre ↗	↗	↗
Longueur du cylindre ↗	↗	↗

**Tableau (IV.5)** L'influence des différents paramètres sur l'énergie de restitution et le facteur d'intensité des contraintes.

## Conclusion et Perspectives

Nous avons présenté une étude bibliographique dans laquelle nous avons décrit le comportement élasto-plastique pour montrer ses spécificités par rapport aux autres lois de comportement en mécanique. Une présentation du comportement élasto-plastique incrémental a été faite sur un exemple simple constitué par l'assemblage de 3 barres. Cet exemple simple, nous a permis de bien comprendre les différentes étapes d'un calcul élasto-plastique et de pouvoir l'adapter à des géométries et structures plus complexes.

Nous avons aussi à travers une recherche bibliographique relativement importante, essayer de présenter les concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. Nous avons aussi présenté les différentes méthodes de calcul des grandeurs associées à la caractérisation des défauts dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (facteurs de concentration de contraintes et taux de restitution de l'énergie,..). Implémentée dans la méthode des éléments finis, on a vu que des maillages spécifiques doivent être introduits.

Pour la simulation et la mise en œuvre de toutes ces approches théoriques, nous avons considéré le cas d'un cylindre présentant une fissure sur sa paroi intérieure. Un calcul par éléments finis avec un pilotage en force nous a permis de faire ressortir l'influence de différents paramètres géométrique sur le comportement du cylindre une fois en exploitation.

L'étude initiée n'a pas été menée à bout en raison principalement du manque de travaux spécifiques ce qui nous a pas permis de faire des comparaisons pour la validation des résultats obtenus. En plus, la sollicitation thermique a été omise.

Ce travail peut être valorisé en prenant en compte :

- 1- Un calcul mécanique ;
- 2- Une fissure initiée dans un coude d'une conduite en PVC par exemple ;
- 3- Une étude de la propagation de fissure.

# BIBLIOGRAPHIE

## Référence bibliographique

- [01] J. Mandel, (1966) – Cours de Mécanique des Milieu Continus. Gauthier - Villars, Paris.
- [02] D. François. A. Pineau – A. Zaoui, (1991) - Comportement Mécanique des Matériaux, Hermès, Réf ECN 539.37.
- [03] J. Mandel, (1966) - Cours de Mécanique des Milieux Continus, tome 2 : Mécanique des Solides. Gauthier -Villars. Paris.
- [04] J. Salençon, (1983) – Calcul à la Rupture et Analyse Limite. Presses de l'ENPC Paris.
- [05] J. Salençon, (1983) – Calcul à la Rupture et Analyse Limite. Presses de l'ENPC, Paris.
- [06] Castem Manuel Version, Edition HKS, France, Castem, 2000, Département Mécanique et Technologie (DMT) du Commissariat français à l'Energie Atomique (CEA).
- [07] Jean, Lemaître. Jean, Louis, Chaboche (1985) - Mécanique des Matériaux Solides. Dunod, Paris.
- [08] J. Le Lubliner, (1990) – Plasticity Theory. Macmillan, New York.
- [09] S. Timoshenko, (1947) – Théorie de la Stabilité Elastique. Béranger, Paris.
- [10] B. Halphen. J. Salençon, (1987) -Elasto-Plasticité, Presses des Ponts et Chaussées, Réf ECN 539.38 HAL.
- [11] D.R.J. Owen. E. Hinton, (1980)- Finite Elements in Plasticity, Pine ridge Press. Ref ECN 539.38 OWES.
- [12] J-Claude Charmet, ESPCI, (28–29 Octobre, 2003) - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique, Mécanique du Solide et des Matériaux.
- [13] O. Thual, (1997) – Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables. Cépaduès éditions, Toulouse.
- [14] J. Batoz. L.G. Dhatt, (1992) - Modélisation des Structures par Eléments Finis, Volume 3 : Coques. Hermites, Paris.
- [15] B. Halphen, (1978) - Periodic Solutions in Plasticity and Visco-plasticity. In Proceedings of IUTAM Symposium on Variation Methods in Mechanics of Solids, (ed. Nemat-Nasser), Pergamon Press, Oxford.
- [16] H. Oudin, (1990) - Lois de comportement, calculs, exemples.
- [17] D. Combesure, - Modélisation des Structures de Génie Civil sous Chargement Sismique à L'aide de CASTEM 2000, rapport dm2s.

## ملخص

تم في هذه المذكرة دراسة تأثير عامل *élasto-plastique* في اسطوانة ذات شق داخلي تحت تأثير ضغط. في الجزء الأول نجد دراسة بيبلوغرافية حول مبادئ وتقنيات عوامل تأثير *élasto-plastique* للمعادن متبوعة بعرض لمختلف الطرق النموذجية العددية لهذه التقنية بواسطة العناصر المنتهية والمعتمدة على طرق التحليل بواسطة المقاربة المتزايدة. في الجزء الثاني تم تقديم دراسة حول الانقطاع الميكانيكي للمعادن حيث تم إيجاد معامل تكثيف الاجهادات وكذلك الطاقة المتبقية داخل المعادن متبوعة بتطبيقات عددية باستعمال برنامج: Castem.

**كلمات مفتاحية :** عوامل *élasto-plastique*, الانقطاع الميكانيكي, عناصر متناهية, برنامج: Castem.

## Abstract

*In this work, we have studied the influence of the behavior of elasto-plastic parts on a cylindrical internal crack. The first part is devoted to the literature review on the elast-plastic behavior and techniques, and also to the presentation of different models of digital behavior by using the finite element method, based on the methods of analysis using incremental approaches. In the second part, we introduced the study of sensitivity parameters of rupture intensity factor constraints and energy refund, followed by a numerical simulation, using the software Castem.*

**Key words:** Elasto-plastic, Fracture mechanics, Finite elements, Software: Castem.

## Résumé

*Dans ce travail, on a étudié l'influence des paramètres du comportement élasto-plastique sur des pièces cylindriques à une fissure interne. La première partie est consacrée à l'étude bibliographique sur le principe du comportement élasto-plastique et ses techniques, aussi à la présentation des différentes modélisations numériques de ce comportement en utilisant la méthode des éléments finis, en ce basant sur les méthodes d'analyse utilisant des approches incrémentales. Dans la deuxième partie, on a présenté l'étude de sensibilités des paramètres de rupture facteur d'intensité des contraintes et d'énergie de restitution, suivi d'une simulation numérique, en utilisant le logiciel Castem.*

**Mots clés :** Elasto-plastique, mécanique de la rupture, Éléments finis, logiciel : Castem.