



Université Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



Thèse

Préparée au sein du Laboratoire d'Innovation en Construction, Eco-Conception et
Génie Sismique (LICEGS)

Présentée pour l'obtention du diplôme de :
Doctorat en Sciences en Génie Civil
Option : Matériaux et structures

Sous le Thème :

**Contribution à l'analyse non linéaire matérielle et
géométrique des plaques et coques tant minces qu'épaisses
par éléments finis rectangulaires**

Présentée par :

BRIKI Lyamine

Devant le jury composé de :

M. ABBECHÉ Khelifa	Prof.	Université de Batna-2-	Président
M. LAHBARI Noureddine	Prof.	Université de Batna-2-	Rapporteur
M. KHELIFA Mohammed Rissel	Prof	Université de Batna-2-	Examineur
M. BEROUAL Ahmed	Prof.	Université de Constantine-3-	Examineur
M. ZEDIRA Hamma	Prof.	Université de Khenchela	Examineur
M. MERDES Abdelghani	MCA	Université de Setif -1-	Examineur
M. MAZOUZ Hammoudi	Prof.	Université de Batna-2-	Invité

Janvier 2019

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Pr. LAHBARI Noureddine, d'avoir accepté de reprendre la direction et finaliser ainsi cette thèse à une période très déterminante et du soutien qu'il m'a apporté dès lors.

Dans les mêmes expressions de remerciements, je suis très très reconnaissant envers une personne persévérante qui m'a enseigné dans le temps et qui sans son intervention et sa sagesse; la continuation sur le même sujet ainsi que la soutenance de thèse n'auront jamais eu lieu, je l'ai nommée le sauveur Professeur MAZOUZ Hammoudi.

J'aimerais remercier le professeur ABBECHÉ Khelifa pour avoir accepté de présider le jury ainsi que les membres du jury Pr ZEDIRA Hama, Pr KHELIFA Med Rissel, Pr BEROUAL Ahmed et Dr MERDES Abdelghani qui ont accepté d'évaluer mon manuscrit de thèse.

Je remercie également Mr DJEGHABA Kamel Professeur à l'Université Badji Mokhtar d'Annaba qui a initié cette recherche en alléguant les éléments finis plaques et coques dans les non linéarités matérielle et géométrique.

Je voudrais également exprimer ma sympathie à tous mes collègues enseignants, et plus particulièrement avec le professeur KHELIFA Med Rissel, avec qui j'ai tissé de véritables liens d'amitié.

Enfin, je remercie du fond du cœur ceux qui ont contribué de près ou de loin à la finalisation de ce travail ainsi qu'à certains de mes ex-étudiants qui m'ont beaucoup aidé moralement.

Résumé	01
ملخص	02
Abstract	03
Introduction générale	04

Chapitre 1 Synthèse bibliographique

I- 1 Evolution de l'analyse non linéaire	08
I- 2 Applications aux structures formées de plaques et coques.....	11
I- 3 Evolution de l'approche réseaux de neurones artificiels.....	14
I- 4 Conclusion.....	16

Chapitre 2 Les éléments finis de plaques et coques

II- 1 Plaques.....	18
II- 1.1 Hypothèse cinématique de Mindlin-Reissner.....	18
II- 1.1.1 Composantes du tenseur des déformations	18
II- 1.2 Principe des travaux virtuels.....	19
II- 1.2.1 Travail virtuel des forces intérieures	19
II- 1.2.2 Travail virtuel des forces d'inertie.....	21
II- 1.3 Loi de comportement	21
II- 1.3.1 Relations entre les composantes de flexion	22
II- 1.3.2 Comportement pour les composantes du cisaillement transversal	23
II- 1.4 Discrétisation	27
II- 1.4.1 Quadrangle à 4 nœuds (Q4).....	27
II- 1.4.2 Quadrangle à 8 nœuds (Q8).....	28
II- 1.4.3 Quadrangle à 9 nœuds (Q9).....	29
II- 1.4.4 Élément Hétérosis	29
II- 1.4.4.1 Formulation hiérarchique de l'élément Hétérosis.....	30
II- 1.4.5 Élément Mitc4	31
II- 1.4.5.1 Approximation de la géométrie et des variables cinématiques.....	31
II- 1.4.5.2 Matrice de rigidité élémentaire	31
II- 1.4.5.3 Matrice de masse élémentaire.....	34
II- 1.4.5.4 Vecteur force élémentaire.....	35
II- 1.4.6 Élément Mitc8.....	35
II- 2 Coques.....	36
II- 2.1 Cinématique des coques.....	36
II- 2.1.1 Champ de déplacement - Hypothèse de Mindlin Reissner.....	36
II- 2.2 Champ des déformations de la coque.....	37
II- 2.2.1 Composantes de déformations membrane – flexion.....	38
II- 2.2.2 Composantes du cisaillement transversal.....	39
II- 2.2.2.1 Déformation normale suivant l'épaisseur.....	39

II- 2.3 Principe des travaux virtuels.....	39
II- 2.4 Loi de comportement.....	40
II- 2.4.1 Relations contraintes déformations dans le plan.....	41
II- 2.4.2 Relation contraintes déformations de cisaillement transversal.....	42
II- 2.4.3 Calcul des coefficients correcteurs.....	43
II- 2.5 Modélisation par éléments finis.....	45
II- 2.5.1 Élément Mitc4.....	45
II- 2.5.1.1 Approximation de la géométrie et des variables cinématiques.....	45
II- 2.5.1.2 Calcul de la normale.....	46
II- 2.5.1.3 Matrice de rigidité élémentaire.....	48
II- 2.5.1.4 Matrice de masse élémentaire.....	50
II- 2.5.1.5 Travail des forces extérieures.....	51
II- 2.5.2 Élément Mitc9.....	52
II- 2.5.2.1 Interpolation des composantes ε_{rr} et ε_{rt}	53
II- 2.5.2.2 Interpolation des composantes ε_{ss} et ε_{st}	53
II- 2.5.2.3 Interpolations des composantes ε_{rs}	54
II- 3 Conclusion.....	55

Chapitre 3

Non linéarités matérielle et géométrique

III- 1 Non linéarité matérielle.....	58
III- 1.1 Critère de plasticité.....	59
III- 1.2 Règle d'écoulement.....	60
III- 1.2.1 Dissipation intrinsèque.....	61
III- 1.2.2 Loi d'écrouissage.....	61
III- 1.2.3 Restrictions thermodynamiques, énergie bloquée par écrouissage.....	64
III- 1.2.4 Formulation élastoplastique dans l'espace des déformations.....	65
III- 1.2.5 Limites de la modélisation élastoplastique du béton.....	66
III- 1.3 Modèles de détérioration.....	67
III- 1.3.1 Formalisme général.....	67
III- 1.3.2 Modèles orthotropes de fissuration.....	68
III- 1.3.3 Un potentiel de détérioration.....	70
III- 2 Modélisation élastoplastique du béton.....	71
III- 2.1 Quelques notations et définitions.....	72
III- 2.2 Faits expérimentaux.....	73
III- 2.2.1 Limites de rupture.....	73
III- 2.2.2 Comportement uniaxial du béton.....	74
III- 2.2.3 Variation de volume anélastique.....	75
III- 2.3 Porosité plastique et microfissuration.....	77
III- 2.4 Critère de Von-Mises.....	80
III- 2.4.1 Règle d'écoulement.....	81
III- 2.4.2 Extension au modèle plastique anisotrope.....	81
III- 2.4.3 Critère de Hill.....	81
III- 2.5 Critère de Willam-Warnke à trois paramètres.....	82
III- 2.5.1 Critère de plasticité parfaite.....	83
III- 2.5.2 Critère de plasticité avec écrouissage isotrope.....	84

III- 2.5.3 Règle d'écoulement.....	85
III- 2.5.4 Loi d'écrouissage.....	87
III- 3 Aspects géométriques et cinématiques.....	90
III- 3.1 Définitions géométriques.....	90
III- 3.2 Hypothèses cinématiques.....	92
III- 3.3 Mesure de déformation.....	95
III- 3.4 Variations des déformations.....	96
III- 3.4.1 Premières variations.....	96
III- 3.4.2 Secondes variations.....	98
III- 4 Conclusion.....	99

Chapitre 4

Théorie des réseaux de neurones artificiels

IV- 1 Introduction et historique.....	101
IV- 2 L'intérêt de l'utilisation des réseaux de neurones artificiels.....	102
IV- 3 Notions de base sur les réseaux de neurones artificiels.....	103
IV- 3.1 Du Neurone biologique au neurone artificiel.....	103
IV- 3.2 Les réseaux de neurones.....	104
IV- 3.2.1 Réseau de neurones non bouclé.....	105
IV- 3.2.2 Réseau de neurones bouclé (ou récurrent).....	106
IV- 4 Apprentissage des réseaux de neurones.....	106
IV- 4.1 L'apprentissage supervisé.....	107
IV- 4.2 L'apprentissage non supervisé.....	107
IV- 4.3 Calcul d'erreur.....	108
IV- 4.3.1 Notation et définitions.....	108
IV- 4.3.2 Fonctionnement d'un réseau.....	109
IV- 4.3.3 L'algorithme de rétropropagation des erreurs.....	110
IV- 4.3.4 L'algorithme du gradient total.....	113
IV- 4.3.5 L'algorithme du gradient stochastique LMS.....	114
IV- 4.4 Modélisation des réseaux de neurones artificiels (RNA).....	114
IV- 4.4.1 Fonction de base radiale (RBF).....	114
IV- 5 Principaux travaux dans le domaine de Génie Civil.....	116
IV- 6 Conclusion.....	117

Chapitre 5

Résultats et discussions

V- 1 Validation.....	118
V- 1.1 Domaine élastique.....	118
V- 1.1.1 Exemple 1.....	118
V- 1.1.2 Exemple 2.....	120
V- 1.2 Domaine élasto-plastique.....	121
V- 1.2.1 Exemple.....	121
V- 1.3 Expérimentation numérique.....	122
V- 1.3.1 Simulation de la propagation de la plasticité pour l'élément Hétérosis.....	123
V- 1.3.1.1 Exemple 1.....	123
V- 1.3.1.2 Exemple 2.....	125

V- 1.3.1.3 Discussion.....	126
V- 1.3.1.4 Exemple 3.....	126
V- 1.3.1.5 Discussion.....	128
V- 1.4 Plaques sur appuis élastiques.....	128
V- 1.4.1 Caractéristiques de la plaque épaisse.....	129
V- 1.4.2 Caractéristiques de la plaque mince.....	129
V- 1.5 Cylindre pincé avec diaphragmes.....	131
V- 1.5.1 Coque cylindrique sous poids propre.....	135
V- 1.5.1.1 Géométrie et modélisation.....	135
V- 1.5.1.2 Matériau.....	135
V- 1.5.1.2.1 Premier Cas.....	135
V- 1.5.1.2.2 Deuxième Cas.....	135
V- 1.5.1.2.3 Troisième Cas.....	135
V- 1.5.1.3 Chargement.....	136
V- 1.5.1.4 Résultats.....	136
V- 1.6 Plaque en flexion.....	142
V- 1.7 Modélisation des réseaux de neurones artificiels en non linéarité matérielle.....	144
V- 1.7.1 Application de la technique réseaux de neurones artificiels.....	146
V- 1.7.2 Résultats numériques et discussion.....	147
V- 2 Conclusion.....	150
Conclusions et perspectives.....	152
Références bibliographiques	

Liste des figures

Chapitre II : Les éléments finis de plaques et coques

Figure 2.1 – Champ de déplacement dans une plaque.....	20
Figure 2.2 – Description d'une plaque.....	20
Figure 2.3 – Efforts résultants.....	20
Figure 2.4 – Plaque multicouche.....	22
Figure 2.5 – Quadrangle à 4 nœuds.....	27
Figure 2.6 – Quadrangle à 8 nœuds.....	28
Figure 2.7 – Quadrangle à 9 nœuds.....	29
Figure 2.8 – Élément Mitc4, points d'interpolation des composantes de cisaillement transversal.....	30
Figure 2.9 – Élément Mitc8 :	
a) Points utilisés pour l'interpolation de ε_{rt}	35
b) Points utilisés pour l'interpolation de ε_{st}	35
Figure 2.10 – Déplacements des points de la coque.....	37
Figure 2.11a – Coque constituée de trois couches.....	41
Figure 2.11b – Repères associés à une couche.....	42
Figure 2.12 – Élément Mitc9, points d'interpolations des composantes du tenseur de déformation :	
a) Composantes ε_{rr} et ε_{rt}	55
b) Composantes ε_{ss} et ε_{st}	55
c) Composantes ε_{rs}	55

Chapitre III : Non linéarité matérielle et géométrique

Figure 3.1 – Courbe uni-axiale de compression simple sous chargement cyclique [175].....	58
Figure 3.2 – Domaines d'élasticité du béton.....	59
Figure 3.3 – Illustration de la règle d'écoulement :	
a) Associée.....	60
b) Non associée.....	60
Figure 3.4 – Modèles d'écrouissage :	
a) Ecrouissage isotrope.....	62
b) Ecrouissage cinématique.....	62
c) Ecrouissage isotrope et cinématique.....	62
Figure 3.5 – Illustration de la difficulté de déterminer de façon univoque la condition charge/décharge dans le cas d'un matériau adoucissant :	
a) Charge plastique ($d\lambda > 0$) en écrouissage négatif ($H < 0$).....	63
b) Décharge élastique ($d\lambda = 0$).....	63
Figure 3.6 – Illustration de la dissipation intrinsèque.....	64
Figure 3.7 – Illustration de la modélisation du comportement écrouissage (positif), plastique parfait et adoucissement dans la formulation élastoplastique dans l'espace de déformations.....	66
Figure 3.8 – Illustration des limites de la modélisation élastoplastique concernant l'application au cas d'un chargement cyclique :	
a) Courbe uni axiale de compression simple sous chargement cyclique [175].....	66
b) Modélisation élastoplastique correspondante,avec écrouissages positif et négatif.....	66
Figure 3.9 – Illustration de la décomposition incrémentale du tenseur des déformations et des contraintes [184].....	68
Figure 3.10 – Illustration des déformations de fissuration et liaison avec la mécanique de la rupture [190] :	
a) Fissures planes parallèles uniformément réparties.....	70
b) "Energie de rupture".....	70

Figure 3.11 – Limite de rupture du béton en sollicitations biaxiales avec directions des plans de fissuration correspondants [203].....	73
Figure 3.12 – Limite de ruine pour le béton dans les demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction avec quelques chemins de chargement [179].....	74
Figure 3.13 – Courbe $\sigma - \varepsilon$ uniaxiale du béton (Compression simple et traction simple).....	75
Figure 3.14 – Variations de volume (a) total et (b) plastique du béton en compression simple et compression biaxiale [174] :	
a) Courbe expérimentale de la variation de volume total : $\sigma/\sigma_c - tr\varepsilon$	76
b) Courbe expérimentale de la variation de volume anélastique : $\sigma/\sigma_{max} - tr\varepsilon^p$	76
Figure 3.15 – Le béton - un milieu poreux [178].....	78
Figure 3.16 – Domaine d'élasticité du critère de Von-Mises dans l'espace des contraintes principales.....	80
Figure 3.17 – Surface limite du critère de Von-Mises dans le plan déviatorique.....	80
Figure 3.18 – Comparaison des critères de plasticité de Drucker-Prager et de Willam-Warnke [199]:	
a) Dans les demi-plans (τ, σ) du méridien de compression et de traction.....	83
b) Dans une coupe déviatorique.....	83
Figure 3.19 – Domaines d'élasticité initial et actuel du modèle de Willam-Warnke avec écrouissage isotrope :	
a) Demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction.....	85
b) Coupe déviatorique.....	85
Figure 3.20 – Règles d'écoulement dans les demi-plans des méridiens de compression et de traction.....	87
Figure 3.21 – Courbes $\xi = \xi(\gamma_{\acute{e}q}^p)$ (qualitatives) en compression simple et traction simple tirées de résultats d'essais, utilisées sous forme $z = z(\gamma_{\acute{e}q}^p)$ [211].....	89
Figure 3.22 – Géométrie de la coque.....	90
Figure 3.23 – Cinématique de la coque.....	92

Chapitre IV : Théorie des réseaux de neurones artificiels

Figure 4.1 – Un neurone avec son arborisation dendritique.....	103
Figure 4.2 – Mise en correspondance neurone biologique / neurone artificiel.....	104
Figure 4.3 – a-Fonction de Heaviside, b-Fonction signe.....	105
Figure 4.4 – a-Fonction linéaire à seuil, b-Fonction sigmoïde.....	105
Figure 4.5 – Structure d'un réseau de neurones non bouclé.....	106
Figure 4.6 – Un réseau de neurones bouclé à deux entrées.....	106
Figure 4.7 – Le neurone artificiel de Mc Culloch et Pitts.....	110
Figure 4.8 – Fonction de base radiale (RBF) Structure de réseau de neurones artificielle.....	115

Chapitre V : Résultats et discussions

Figure 5.1 – Chargement déplacement.....	122
Figure 5.2 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (élément Hétérosis).....	126
Figure 5.3 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (Q9).....	127
Figure 5.4 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (Q8).....	127
Figure 5.5 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (Q4).....	128
Figure 5.6 – Plaques carrées sur appuis élastiques :	
a) Plaque épaisse soumise à une charge uniforme appliquée sur un carré centré.....	130
b) Plaque mince soumise à une force concentrée appliquée sur l'axe des x.....	130
Figure 5.7 – Validation des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque épaisse sur appuis élastiques :	
a) Evolution de la flèche le long de l'axe des x.....	130
b) Evolution de la contrainte normale le long de l'axe des x.....	131
Figure 5.8 – Cylindre pincé avec diaphragmes rigides soumis à deux forces diamétralement opposées.....	132

Figure 5.9 – Test de l'élément Mitc9 sur un cylindre pincé soumis à deux forces diamétralement opposées :

- a) Effort normal circonférentielle long de DC.....134
- b) Moment fléchissant circonférentielle long de DC.....134

Figure 5.10 – Coque cylindrique sous poids propre.....135

Figure 5.11 – Maillage déformé de la coque considérée.....137

Figure 5.12 – Courbe poids propre-déplacement du point C.....138

Figure 5.13 – Courbe poids propre-déplacement du point C – $\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ –.....138

Figure 5.14 – Courbe poids propre-déplacement du point C – $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$ –.....139

Figure 5.15 – Courbe poids propre-déplacement du point C – $\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ –.....139

Figure 5.16 – Courbe poids propre-déplacement du point C – $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$ –.....140

Figure 5.17 – Etendue des zones plastiques.....140

Figure 5.18 – Etendue des zones plastiques – $\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ –.....141

Figure 5.19 – Etendue des zones plastiques – $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$ –.....142

Figure 5.20 – Porte à faux sous chargement de flexion.....142

Figure 5.21 – Plaque en flexion.....144

Figure 5.22 – Graphique de performance des réseaux de neurones pour la compression uniaxiale.146

Figure 5.23 – Graphique de performance des réseaux de neurones pour la compression biaxiale.146

Figure 5.24 – Graphique de performance des réseaux de neurones pour la compression triaxiale...147

Figure 5.25 – Comparaison entre les résultats ANN et expérimentaux sur la compression uniaxiale [253].....148

Figure 5.26 – Comparaison entre les résultats ANN et expérimentaux sur la compression biaxiale [254].....149

Figure 5.27 – Comparaison entre l'ANN et les résultats expérimentaux sur la compression triaxiale d'un béton de résistance normale (Imran et al.) [255].....150

Liste des tableaux

Chapitre V : Résultats et discussions

Tableau 5.1 – Test de validation des éléments Q4, Q8, Q9 et Hétérosis pour différents types de plaques.....	120
Tableau 5.2 – Test de validation de l'élément Q9 pour la plaque circulaire.	121
Tableau 5.3a – Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé déplacement du point C dans la direction de la charge.	133
Tableau 5.3b – Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé déplacement du point D suivant l'axe du cylindre.	133
Tableau 5.3c – Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé effort normal circonférentiel en C.	133
Tableau 5.4 – Caractéristiques matérielles et paramètres des modèles considérés.....	136
Tableau 5.5 – Test de validation des éléments Q4 et Q8 pour quelques séquences de chargement.....	143
Tableau 5.6 – Détails des performances des modèles ANN.....	145

- RESUME -

Dans cette thèse, il est présenté une modélisation des plaques et coques se rencontrant dans l'étude de nombreuses structures en génie civil.

Ce travail a pour objectif de valider des éléments de plaques et coques minces et épaisses, isotropes et multicouches, afin de traiter une large classe de problèmes dans ce domaine. Le cadre formel s'appuie sur la théorie de Mindlin-Reissner ; avec prise en compte de cisaillement transversal.

En conséquence, un outil fondé sur une approche éléments finis, a été développé en s'inspirant d'une riche recherche bibliographique.

Cet outil permet de simuler numériquement de façon plus complète le comportement non linéaire (géométrique et matériel) des structures, compte tenu de ses imperfections (contraintes et déformations résiduelles internes), ainsi ces dernières peuvent subir de grands déplacements et de grandes rotations.

Comparés aux solutions de référence, les résultats numériques obtenus sont très satisfaisants et révèlent la robustesse des éléments développés.

Avec la technique des réseaux de neurones artificiels de plus en plus sophistiquée il est maintenant possible de faire des simulations numériques détaillées des phénomènes de la plasticité (non linéarité matérielle).

De ce fait, un nouveau modèle de plasticité utilisant la technique des réseaux de neurones a été développé pour décrire le comportement non linéaire du béton dans les différents états de contraintes de compression.

Ce travail a permis de mettre en évidence la bonne performance de ce modèle utilisant les réseaux de neurones artificiels RBF. Contrairement aux modèles de plasticité existants le modèle proposé décrit avec précision le comportement post-pic adoucissant, ainsi que les caractéristiques comportementales de béton dans divers états de contraintes.

Quelques applications d'intérêts pratiques ont été abordées et ont permis de mettre en évidence la fiabilité du modèle élaboré, car il peut prédire la plupart des résultats des tests, en utilisant les propriétés de base des matériaux tels que la résistance à la compression uniaxiale et le module d'élasticité.

MOTS CLES :

Plaques, coques, éléments finis, non linéarité matérielle, non linéarité géométrique, multicouches, béton, compression, réseaux de neurones artificiels.

- ملخص -

في هذه الرسالة، نقدم نمذجة للصفائح والأصداف التي تجتمع في دراسة العديد من الهياكل في الهندسة المدنية.

الهدف من هذا العمل هو التحقق من عناصر الصفائح والأصداف الرقيقة والسميكة من نفس الخصائص ومتعددة الطبقات لمعالجة مجموعة واسعة من المشاكل في هذا المجال.

يستند الإطار الرسمي على نظرية Mindlin-Reissner. مع الأخذ بعين الاعتبار القص العرضي. ونتيجة لذلك، تم تطوير أداة تعتمد على مقارنة العناصر المحدودة عن طريق البحث الغني في المراجع. هذه الأداة تجعل من الممكن محاكاة عددية بطريقة أكثر اكتمالاً للسلوك اللاخطي (الهندسي والمادي) للهياكل، نظراً إلى عيوبها (الإجهادات والتشوهات الداخلية المتبقية)، بحيث يمكن أن تتعرض هذه الأخيرة لعمليات تحركات كبيرة ودورات كبيرة.

بالمقارنة مع الحلول المرجعية، فإن النتائج العددية التي تم الحصول عليها مرضية للغاية وتكشف عن متانة العناصر المطورة.

مع تقنية الشبكات العصبية الاصطناعية بشكل متزايد أصبح من الممكن الآن إجراء محاكاة عددية تفصيلية لظاهرة اللدونة (اللاخطية المادية).

ونتيجة لذلك، تم تطوير نموذج جديد لللدونة باستخدام تقنية الشبكة العصبية لوصف السلوك اللاخطي للخرسانة في حالات الضغط والإجهادات المختلفة.

هذا العمل جعل من الممكن تسليط الضوء على الأداء الجيد لهذا النموذج باستخدام الشبكات العصبية الاصطناعية RBF. وعلى النقيض من نماذج اللدونة الموجودة، يصف النموذج المقترح بدقة سلوك التخفيف بعد الذروة، بالإضافة إلى الخصائص السلوكية للخرسانة في حالات الإجهاد المختلفة.

وقد تم تناول بعض التطبيقات ذات الأهمية العملية وأبرزت موثوقية النموذج المطور، لأنه يمكن أن يتنبأ بمعظم نتائج الاختبار، وذلك باستخدام الخصائص الأساسية للمواد مثل مقاومة ضغط أحادي المحور ومعامل المرونة.

المفاتيح:

صفائح، أصداف، العناصر المحدودة، السلوك اللاخطي المادي، السلوك اللاخطي الهندسي، متعدد الطبقات، الخرسانة، الضغط، الشبكات العصبية الاصطناعية.

- ABSTRACT -

In this thesis, we present a modeling of plates and shells meeting in the study of many structures in civil engineering.

The goal of this work is to validate thin, thick, isotropic and multilayer plate and shell elements to address a wide range of problems in this field.

The formal framework is based on the Mindlin-Reissner theory; with consideration of transverse shear.

As a result, a tool based on a finite element approach has been developed based on a rich literature search.

This tool makes it possible to numerically simulate in a more complete way the nonlinear behavior (geometrical and material) of the structures, given its imperfections (stresses and internal residual deformations), so that these can undergo large displacements and large rotations.

Compared to the reference solutions, the numerical results obtained are very satisfactory and reveal the robustness of the elements developed.

With the technique of artificial neural networks increasingly sophisticated it is now possible to make detailed numerical simulations of the phenomena of plasticity (material nonlinearity).

As a result, a new plasticity model using the neural network technique has been developed to describe the nonlinear behavior of concrete in different states of compressive stress.

This work made it possible to highlight the good performance of this model using artificial neural networks RBF. In contrast to existing plasticity models the proposed model accurately describes the post-peak softening behavior, as well as the behavioral characteristics of concrete in various stress states.

Some applications of practical interest have been addressed and have highlighted the reliability of the model developed, because it can predict most test results, using the basic properties of materials such as uniaxial compression resistance and the modulus of elasticity.

KEYWORDS :

Plates, shells, finite elements, material nonlinearity, geometric nonlinearity, multilayers, concrete, compression, artificial neural networks.

Introduction générale

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, les techniques de calcul des structures ont connu un essor considérable, suscité par les besoins industriels et soutenu par les progrès effectués dans le domaine informatique. Ainsi, la méthode des éléments finis est aujourd'hui couramment utilisée pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, etc. En Génie Civil, la majorité des structures de bâtiment ou d'ouvrages d'art est calculée suivant le formalisme linéaire de la théorie de l'élasticité établi au XIXème siècle. Cette dernière fait appel aux deux hypothèses suivantes :

- Les matériaux composant le solide ont un comportement élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant des faibles déplacements.
- Les déplacements et déformations subis par le solide considéré sont très faibles et permettent de confondre les états déformé et non déformé de la structure.

Si l'une au moins de ces hypothèses n'est pas vérifiée, il convient d'entreprendre une analyse non-linéaire du solide étudié. Or, il n'existe aucune structure, aucun matériau dont le comportement soit strictement élastique linéaire dans son domaine de sollicitation courant, et a fortiori lors d'une étude aux états limites ultimes. En outre, la volonté d'utiliser au mieux la matière pour des raisons économiques, ainsi que la tendance actuelle à concevoir des structures de plus en plus élancées (comme le pont Oued Rhumel de Constantine et le viaduc Bouzegza de Bouira) et le besoin d'optimiser les quantités de matériau, conduisent les projecteurs à mener des calculs prenant en compte les non-linéarités du système. Ceci est d'autant plus vrai pour les structures que la tentation de franchir des brèches de plus en plus grandes est forte, et que d'autre part on cherche à diminuer au maximum le poids de l'ouvrage. Pour certaines de ces structures, il apparaît que les résultats d'une analyse linéaire ne sont plus approximatifs, mais sont complètement erronés, d'où la nécessité d'utiliser la technique des réseaux de neurones artificiels pour mieux représenter la résistance de charge et la capacité de déformation. L'objet de ce rapport s'inscrit dans ce cadre.

On distingue ainsi :

L'analyse non-linéaire matérielle en petits déplacements et petites déformations, où la relation contraintes-déformations est non linéaire.

L'analyse non-linéaire géométrique en grands déplacements et petites déformations, où la relation déplacements-déformations peut être non-linéaire.

L'analyse non-linéaire géométrique en grands déplacements et grandes déformations, où les relations contraintes-déformations et déplacements-déformations est généralement non-linéaire. C'est le cas le plus complexe de l'analyse non-linéaire des structures.

Des solutions approchées peuvent être obtenues à l'aide de résolutions simplement linéaires, la raison principale de cette approximation étant la diminution du coût de calcul. Toutefois, cette approche n'est pas toujours acceptable et l'utilisation de méthodes purement non-linéaires devient alors nécessaire.

Avant le développement des programmes informatiques, c'est-à-dire avant 1960, la modélisation des plaques et coques était basée sur des théories de membrane et de flexion en considérant un matériau à comportement linéaire, homogène et intègre. Depuis quelques années, le développement accéléré des méthodes d'analyse numérique, notamment la méthode des éléments finis, ainsi que le progrès dans le domaine de l'informatique, ont permis d'élaborer des approches plus réalistes pour la simulation du comportement de structures, particulièrement celui des plaques et coques. Toutefois l'utilisation sans cesse grandissante des structures plaques et coques dans les domaines exigeant un degré de sécurité élevé souligne l'insuffisance d'une analyse linéaire. En effet, la simulation plus réaliste de la réponse de ce type de structures exige une modélisation exacte de sa géométrie, des lois constitutives réalistes et une stratégie de résolution efficace. C'est pourquoi l'intérêt s'est concentré ces dernières années sur les problèmes non-linéaires matériels et géométriques. L'élaboration des éléments finis plaques et coques multicouches permettant de rendre compte des phénomènes non-linéaires matériels et géométriques pour l'analyse des structures, sous divers chargements, avec un temps de calcul raisonnable.

Pour ce faire, on fait appel à la théorie non-linéaire de la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles ; rappelons que celle-ci requiert, en cas de grands déplacements, une description du mouvement du corps.

Deux approches sont très répandues parmi les formulations lagrangiennes (descriptions lagrangiennes) : la Formulation Lagrangienne Totale (FLT) où l'état initial est considéré comme référence permanente et la Formulation Lagrangienne Actualisée (FLA) où un état intermédiaire sert de référence actualisée. Lorsque l'actualisation de la référence est effectuée à chaque pas de chargement, la FLA peut être classée en FLAP (Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas) et lorsque l'actualisation de la référence est effectuée à chaque itération d'équilibre, la FLA peut être classée en FLAI (Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération). Les équations aux dérivées partielles obtenues sont dans ces cas fortement non linéaires, et leur résolution n'est concevable que d'une manière approchée. Il faut alors, d'une part une technique d'approximation qui soit en mesure de

transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques et d'autre part un algorithme de résolution qui permet de résoudre les équations algébriques non-linéaires et obtenir les courbes retraçant l'évolution des déplacements au cours du temps.

Cependant, même si l'analyse non linéaire des structures par élément finis est de nos jours bien acceptée des ingénieurs, il demeure qu'un bon nombre d'entre eux éprouvent toujours un certain malaise vis-à-vis de ce type d'analyse, qui les plonge continuellement dans l'embarras. Ces faits ont orienté les travaux de recherche présentés dans cette thèse. Nous nous sommes fixés comme objectif d'introduire la technique des réseaux de neurones artificiels qui permet l'analyse statique non linéaire des structures de façon à les rendre beaucoup plus efficaces et flexibles ; ceci dans le but de faciliter la tâche de l'utilisateur, sans toutefois atténuer son rôle et sa responsabilité. Les réseaux de neurones sont un modèle de calcul inspiré par la structure et le fonctionnement du cerveau. Ce sont des systèmes parallèles constitués d'un nombre important d'unités interconnectées les unes aux autres. Les modèles d'interconnexion et d'activation donnent aux réseaux de neurones la capacité d'apprendre à partir d'exemples. L'information ainsi acquise est stockée dans le poids des interconnexions. Les réseaux de neurones ont aussi des capacités de classification, de reconnaissance, de simulation et de prise de décision qui leur ont conféré un vaste champ d'application en ingénierie et même dans d'autres domaines.

Pour clarifier cette approche, nous avons utilisé, sous des charges statiques, un béton qui est soumis à divers états de contraintes qui sont associés à des déformations appréciables. Dans le cadre de ce travail, nous étudions la faisabilité de l'utilisation des réseaux de neurones artificiels pour la modélisation du comportement mécanique du béton ordinaire en compression sous chargement statique utilisant la théorie de plasticité. La base de données utilisée pour le développement est obtenue d'une sélection des résultats des tests publiés antérieurement, et elle comprend une série des essais de compression uniaxiale, biaxiale. Cette base est utilisée pour la formation et le test des modèles de prévision. Les résultats du modèle RNA peuvent prédire précisément la résistance de charge et la capacité de déformation en divers états de contrainte de compression.

Pour atteindre les buts visés par ce travail, on a jugé nécessaire de consacrer le premier chapitre, à un rappel dans un premier temps, à des étapes principales de l'évolution de l'analyse non-linéaire par éléments finis, pour ensuite faire la revue des publications reflétant certains aspects essentiels de l'application de la méthode des éléments finis, dans le domaine non-linéaire, aux structures de types plaques et coques.

Un petit exposé simplifié a été donnée sur la cellule et son modèle de fonctionnement ainsi que quelques schémas d'interconnexion parmi les plus utilisés. A cet effet, on a présenté des travaux faits dans le domaine des matériaux en génie civil et notamment dans la modélisation et la rhéologie des bétons, sachant que ce ne sont pas les seules applications possibles. Ce travail se veut une synthèse bibliographique des travaux de chercheurs dans le domaine de

génie civil en utilisant les réseaux de neurones, une base de données de beaucoup de références internationales depuis 1990 a été utilisée pour effectuer cette synthèse.

Le deuxième chapitre comporte des éléments sur la formulation du problème de flexion de plaque en utilisant la théorie de Mindlin-Reissner. La discrétisation est effectuée à l'aide de deux éléments basés sur la technique des champs de substitution. Il s'agit ; en plus des élément Q4, élément de Serendip Q8, élément de Lagrange Q9 et l'élément Hétérosis ; de l'élément Mitc4 proposé par Bathe et Dvorkin (1985) et de l'élément Mitc8 qui a été déduit de l'élément coque Mitc8 des mêmes auteurs (Bathe et Dvorkin 1986). De même ce chapitre comporte des éléments pour la modélisation par éléments finis des coques de forme générale. Après une analyse bibliographique des approches théoriques utilisées dans la modélisation des coques, on décrit la méthodologie adoptée dans ce travail et les éléments de discrétisation retenus.

Le troisième chapitre concerne les principales théories de la non linéarité matérielle et géométrique. On abordera en premier lieu la non linéarité matérielle en décrivant le comportement non linéaire du béton et les hypothèses qui en découlent. A cet effet on présentera les principes généraux utilisés par les modèles existants basés sur la mécanique des milieux continus, et un aperçu sur quelques modèles de plasticité. Parmi ceux-ci figurent les modèles élastoplastiques appliqués à la modélisation du comportement du béton sous chargements monotones croissants. En deuxième lieu, on avancera la non linéarité géométrique se basant sur l'hypothèse cinématique des sections droites et de non variation de l'épaisseur. Selon cette hypothèse, souvent associée aux noms de Reissner, Mindlin et Naghdi, connue sous le nom de cinématique de la surface de Cosserat. Une telle cinématique permet donc de décrire le mouvement de la coque en entier.

On abordera dans le quatrième chapitre la théorie des réseaux de neurones artificiels et les techniques d'apprentissage des systèmes non linéaires. Après avoir exposé un aperçu historique sur les RNA, nous détaillons les différents éléments de base de cet outil mathématique. Nous limitons notre présentation à des aspects qui seront utiles pour la suite de ce travail. Une synthèse sur les principaux travaux utilisant les réseaux de neurones artificiels dans le domaine de Génie Civil sera présentée à la fin de ce chapitre.

Ceci étant, si on peut le dire, la partie théorique, elle sera complétée en cinquième chapitre par une présentation des tests de validation des éléments plaques et coques. Il se termine par une application de la théorie des réseaux de neurones artificiels sur des résultats expérimentaux des modèles de matériaux qui ont été mis au point tels que les modèles de plasticité pour décrire avec précision le comportement non linéaire du béton. Une authentification clôturera ce travail et les résultats qui en découlent seront discutés.

On aboutit enfin à une conclusion générale et des recommandations concernant l'orientation des recherches futures.



Chapitre I

Synthèse bibliographique

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

I- 1 Evolution de l'analyse non linéaire :

En 1960, Turner propose pour la première fois l'application de la méthode des éléments finis à l'analyse non linéaire des structures. L'auteur présente une approche "incrémentale" [1] permettant d'analyser les problèmes géométriquement non linéaires par éléments finis. La réponse non linéaire de la structure est obtenue "incrémentalement", c'est à dire pas à pas, par augmentation progressive de la sollicitation. Pour chaque état déformé, on calcule une matrice de rigidité incrémentale comprenant un terme supplémentaire, dit "matrice géométrique", qui résulte de la prise en compte des termes quadratiques du champ de déplacements.

À partir de cette date, l'analyse non linéaire par éléments finis va connaître un développement intense sous l'impulsion des industries aéronautique et aérospatiale et grâce à la disponibilité d'ordinateurs de plus en plus puissants. D'innombrables publications sont apparues depuis ; nous référons le lecteur aux excellentes revues bibliographiques qui ont été faites par Oden [2], Batoz [3], Frey [4], Gadala [5] et Crisfield [6], pour ne citer que ceux-là. Il en ressort certaines remarques importantes que voici.

Même si la méthode incrémentale est appliquée avec des succès et perfectionnements divers par Turner [7], Argyris [8,9], Fellipa [10], Martin [11], Wissmann [12], Oden [13,14], essentiellement pour l'analyse de l'instabilité élastique des structures, il faudra attendre jusqu'en 1968 pour assister à une vulgarisation de cette méthode sous l'impulsion de Marcal [15], Oden [16] et de Yagmai [17] qui ont établi les équations d'une formulation générale de l'analyse non-linéaire géométrique, respectivement pour la description lagrangienne "totale", qui prend constamment comme référence l'état initial non chargé de la structure, et pour la description lagrangienne "actualisée", qui prend comme référence le dernier état calculé de la structure. Dès lors, de nombreuses publications sont apparues dont celles de Brebbia et Connor [18] qui introduisent le principe de prédiction-correction et résolvent des problèmes de plaques et coques quasi planes en utilisant la méthode de Newton-Raphson; Hibbit et al. [15] emploient le principe des travaux virtuels et obtiennent la forme incrémentale de la description lagrangienne totale après avoir discrétisé le champ de déplacements en fonction des inconnues nodaux ; Hofmeister et al. [19] présentent la formulation lagrangienne actualisée, en faisant ressortir la notion du résidu d'équilibre qui permet de vérifier l'équilibre à chaque pas de chargement ; Sharifi et Popov [20] étendent la formulation lagrangienne actualisée établie par Yagmai à l'analyse élastoplastique en petites déformations des coques de révolution. Suivant plusieurs autres publications dont on peut consulter la longue liste chez Gadala [5] ou Crisfield [6,21].

La méthode "directe" utilisée dès 1965 par Schmit, Bognor, Fox et Mallet [22,23] entre autres, comme alternative à la méthode incrémentale, a toutefois été rapidement abandonnée en faveur de cette dernière. Basée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale, elle ne fournit aisément que les configurations stables de la structure.

Aussi, elle ne s'applique pas aux matériaux dont la loi constitutive dépend du chemin parcouru (plasticité par exemple), alors que la méthode incrémentale s'adapte bien à la théorie différentielle de la plasticité qui nécessite une solution pas à pas. De plus, elle permet de déterminer la réponse du système pendant l'application des charges, à partir d'une position initiale connue. Il en résulte une série de courbes retraçant l'évolution des déplacements, permettant ainsi l'étude de la stabilité de la structure à tous les niveaux de charge.

Il faut noter que seule la formulation lagrangienne totale aura connu beaucoup de succès jusqu'aux années 1970. Les résultats encourageants obtenus par les équipes dynamiques de Marcal et Oden ont lancé toute la recherche non linéaire sur la formulation lagrangienne totale pendant dix bonnes années. Par la suite, grâce au leadership de Wilson et de ses collaborateurs [24,25], la formulation lagrangienne actualisée a refait surface pour détrôner la formulation lagrangienne totale dans bien des applications, au moment où cette dernière a commencé à éprouver des difficultés de mise en œuvre dans le cas des grandes rotations tridimensionnelles, spécialement pour les corps orientés, puisqu'elle exige un champ cinématique "exact" et une bonne représentation des rotations. Or, il était très difficile jusqu'alors, notamment pour les coques de formes quelconques et les poutres tridimensionnelles, de mettre en œuvre les formules "exactes" pour élaborer un élément en formulation lagrangienne totale. Son utilisation s'est limitée alors à des cas dits de rotations modérées entre la configuration initiale et la configuration finale ou avec des éléments finis basés sur la théorie intrinsèque [2,26,27,28,16,29,30,31,32,3,33,34,35,36]. La formulation lagrangienne totale valable pour les grandes rotations mais à petites déformations a cependant été utilisée avec succès pour les structures planes de type poutres, arcs et anneaux [37,38,39].

Dans la formulation lagrangienne actualisée, l'utilisation de la configuration déformée actualisée à chaque pas de chargement [19,40,41] ou à chaque itération d'équilibre [42,4,43] comme configuration de référence permet de découper le mouvement entre les configurations initiale et finale en un certain nombre de pas de déplacements et rotations modérés et dégager des expressions approximatives du champ cinématique et des déformations, faciles à mettre en œuvre. Cette façon de faire permet de traiter les grands déplacements et les grandes rotations d'une manière simple en admettant l'hypothèse des petits déplacements et petites rotations entre la configuration déformée et la configuration intermédiaire et en utilisant la théorie linéaire classique pour le calcul des déformations ce qui est important en théorie assujettie car les expressions pour le calcul des déformations sont complexes si l'on doit utiliser la cinématique complète sans hypothèses simplificatrices.

La formulation lagrangienne actualisée s'avère simple et efficace mais contient des approximations qui peuvent introduire des erreurs jouant un rôle considérable sur les résultats et la convergence, surtout dans le cas des structures très flexibles où quelques complications apparaissent à cause de la nature non vectorielle des grandes rotations. Un maillage assez fin et de petits pas de chargement doivent être adoptés pour respecter l'hypothèse des déplacements et rotations modérés sur un pas. La formulation lagrangienne actualisée restera cependant jusqu'aux années 1980 une des seules possibilités pour traiter les problèmes de grandes rotations des structures avec des éléments simples ; elle a été utilisée essentiellement pour les éléments basés sur la théorie assujettie [4,44].

Il faudra attendre les travaux de Simo et ses collaborateurs [45,46,47] pour assister à l'extension du champ d'application de la formulation lagrangienne totale à l'analyse des corps orientés subissant des grandes rotations tridimensionnelles. Simo a appliqué la cinématique des grandes rotations, défrichée par Argyris [48], pour établir sur une base rigoureuse un modèle géométriquement "exact" de poutre [45,46,49] et de coque [47]. Ainsi, sous l'impulsion de Simo et ses collègues la recherche est relancée dans ce domaine [50,51,52,53,54,55,56,57,58,21].

La méthode d'Euler explicite fut la première technique utilisée avec la méthode incrémentale pour la résolution des équations d'équilibre non linéaires [1]. Malheureusement, cette technique peut conduire à une accumulation d'erreurs inquantifiables. Pour contrer ce problème Brebbia et Connor [18], Murray et Wilson [59], entre autres, ont combiné la méthode incrémentale avec les itérations de Newton-Raphson de façon à permettre aux équations d'équilibre d'être satisfaites avec une certaine tolérance. Oden [2] et Zienkiewicz [60] signalent le désavantage de la méthode de Newton-Raphson reliée au coût de calcul et de triangularisation de la matrice tangente, spécialement pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté, et recommandent pour minimiser le temps de calcul de factoriser la matrice tangente au début de chaque pas et de la garder fixe d'itération en itération. Il est cependant apparu que cette variante, dite de Newton-Raphson modifiée, n'est pas aussi robuste que la méthode originale dans les zones de forte non-linéarité et dans les zones d'instabilité où la direction corrective doit être mieux approchée pour garantir la convergence. Plusieurs techniques ont été alors suggérées pour déterminer la longueur optimale du vecteur direction et accélérer la convergence. La technique d'accélération dite de "line search" en est une ; elle consiste à trouver un facteur scalaire optimal qui multiplie le vecteur correction pour accélérer la convergence. Crisfield [61] a proposé une méthode de calcul approximative de ce facteur et Fafard [44] une méthode exacte basée sur la fonctionnelle d'énergie.

Le contrôle du processus incrémental par l'accroissement du paramètre de charge a vite été mis à défaut au "passage des extrema". Pour pouvoir passer ces extrema, Sharifi et Popov [20] ont utilisé un artifice qui consiste à introduire des ressorts fictifs afin d'éliminer la

singularité de la matrice tangente. Il s'est avéré toutefois que cette technique est très limitative, ce qui a mené au développement de la méthode de pilotage en déplacement imposé. Plusieurs approches adoptant cette technique ont conduit à la destruction de la symétrie de la matrice tangente. Quoique cette lacune fût surmontée par Pian et Tang [62], il resta que leur approche exige la modification de la matrice tangente incrémentale. Il faudra attendre les travaux de Heisler et al. [63], Batoz et Dhatt [56], qui ont proposé d'autres schémas permettant de conserver et la symétrie et la structure de la matrice tangente, pour assister à l'exploitation massive de la méthode de déplacement imposé. Reste que l'obstacle majeur de cette méthode réside dans le bon choix du degré de liberté à imposer. Des chercheurs tels que Wempner, Riks, Crisfield et Ramm [64,65,61,66] ont réussi par la suite à venir à bout des difficultés du pilotage en déplacement imposé, en proposant des méthodes beaucoup plus générales basées sur l'équation de la longueur d'arc.

Signalons, pour clore cette sous-section, que parallèlement aux méthodes et techniques de résolution citées ci-dessus, il en existe plusieurs. Pour une synthèse très concise dans ce domaine, nous référons le lecteur aux excellents travaux de Fafard [44], de Murray [67] et de Dhatt et Fafard [68].

I- 2 Applications aux structures formées de plaques et coques :

Le lecteur averti comprendra qu'il est illusoire de prétendre présenter ici une synthèse complète sur l'analyse non linéaire des plaques et des coques par éléments finis. Ce sont des sujets qui reçoivent une attention internationale considérable depuis plusieurs années, étant donné qu'ils sont préalablement nécessaires au développement du calcul non linéaire d'un grand nombre de structures. Nous allons donc nous contenter, dans les sous-sections suivantes, de faire allusion aux travaux importants de quelques auteurs parmi tant d'autres qu'inévitablement nous ne pourrions citer ; nous essaierons cependant de combler les lacunes en mentionnant dans la mesure de nos connaissances les bibliographies ou les ouvrages de base contenant de nombreuses références.

Il est évident que l'introduction du concept d'éléments finis a grandement contribué dans l'évolution de l'analyse non linéaire des coques. Dès la fin des années 60, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application de cette méthode pour analyser le comportement non linéaire des coques. Parmi ces auteurs citons : Stricklin et al. [69,33], Marcal [70], Prost [71] qui ont étudié des coques de révolution; Brebbia et Connor [18], Roberts et Aswell [29], Tahiani [72], Bergan et Clough [73] analysent le comportement des coques surbaissées; Gallagher et al. [74,75], Zienkiewicz et Nayak [60], Bathe et al. [27,76] traitent des coques de formes arbitraires. Tous ces auteurs ont établi leurs formulations en utilisant l'une ou l'autre des théories classiques établies jusqu'alors, soit la théorie non linéaire des coques surbaissées de type Marguerre ou de type Donnell-Mushtari-Vlassov ou la théorie non linéaire des coques non surbaissées de type Koiter-Sanders. Dans ces théories, considérant la coque comme un milieu bidimensionnel caractérisé par une surface de référence et une épaisseur, on cherche

essentiellement à exprimer le champ de déplacements en fonction de celui de la surface de référence en retenant comme base l'hypothèse des rotations modérées et de Love-Kirchhoff gouvernant le déplacement des normales, complété ou non de l'hypothèse de géométrie surbaissée. En fait, jusqu'à la fin des années 70, peu d'auteurs ont contribué à la modification de ces théories pour tenir compte des déformations de cisaillement transversal dans l'analyse non linéaire des coques. Parmi les travaux touchant à ce domaine mentionnons celui de Dhatt [77] qui admet l'hypothèse des sections droites et de non variation de l'épaisseur (Reissner/Mindlin/Naghdi) pour construire un élément triangulaire courbé basé sur la théorie non linéaire des coques de type Marguerre. Les déformations transversales sont alors admises et la rotation de la normale n'est plus la rotation de la surface moyenne. Cependant, pour relier la rotation de la normale aux déformations de la surface moyenne, l'auteur impose les conditions de type Kirchhoff le long de contour de l'élément. Théoriquement, l'énergie due aux déformations de cisaillement n'est pas identiquement nulle sur l'élément, mais tend cependant vers zéro lorsque le nombre d'éléments augmente. Cette approche, dite de type Kirchhoff discret, a été adoptée et améliorée par la suite par plusieurs auteurs, notamment Key [78], Batoz et al. [79,80,32,3], Matsui et Matsuoka [81], Bathe et Ho [82], Fafard [44], Pol [83].

En dépit de cela, une autre approche, tenant compte de l'hypothèse de Reissner/Mindlin/Naghdi, va dominer les travaux de recherche relatifs aux coques pendant deux décennies. Il s'agit de l'approche tridimensionnelle dégénérée (ou isoparamétrique dégénérée) introduite en 1968 par Ahmad et al. [84,85] et dans laquelle la formulation éléments finis est obtenue directement à partir des équations tridimensionnelles en considérant la coque comme un domaine tridimensionnel limité par une surface supérieure et une surface inférieure, généralement courbées. Cette approche, limitée au début à l'analyse linéaire des coques s'est progressivement étendue à l'étude non linéaire des coques sous l'impulsion notamment de Parisch [86], Bathe et Bolourchi [87], Hughes et al. [88,89,90], Surana [91], Milford [92], Kanok [93], Parks et Stanley [94], Liu et al. [95], Rothert et Dehmel [96], Mahe et Sourisseau [97], Boisse et al. [98] avec l'hypothèse des rotations modérées et plus récemment en incorporant les grandes rotations sous l'impulsion de Stander et al. [99], Saleeb et al. [100], Parisch [101], Buchter et al. [55,102], Kebari et Cassell [103] et Gruttmann et al. [104].

Outre les articles mentionnés ci-dessus, nous référons le lecteur aux livres [42,105,6] qui offre une revue plus ou moins détaillée de l'approche dégénérée et les méthodologies qui lui sont reliées et à l'excellent article de Buchter et Ramm [55] examinant les relations existantes entre les théories classiques des coques et la théorie tridimensionnelle dégénérée.

Malgré la domination de l'approche isoparamétrique dégénérée, dû principalement à l'absence de complexité mathématique et à sa simple extension au régime non linéaire, les dernières années ont été marquées par le développement d'une nouvelle approche, dite

directe ou géométriquement exacte, qui considère la coque comme une surface de type Cosserat muni d'un seul vecteur directeur. Cette approche initiée par Ericksen et Truesdell [106] et exploitée récemment par Simo et ses collaborateurs [47,107,108,109,110,111,112] est en train de relancer toute la recherche non linéaire sur les coques.

Outre les articles de Simo, nous ont servi de référence les contributions importantes de Sansour et Buffler [54], Wriggers et Gruttmann [113], Chroscielewski et al. [114], Ibrahimbegovic et al. [115,116,117,118], Dammak [58], Brank et Damjanic [56].

Sur le plan numérique, on a observé que les résultats obtenus avec des éléments de coque en flexion-cisaillement basés sur l'hypothèse de Reissner/ Mindlin/ Naghdi, avec un modèle déplacement et une intégration exacte suivant les directions de la surface de référence, se détériorent lorsque l'épaisseur de la coque diminue. C'est la manifestation du "blocage en cisaillement" dû essentiellement à une domination numérique de l'énergie de cisaillement transversal sur l'énergie de flexion. Pour éviter ce phénomène, un certain nombre d'éléments de coque basés sur une formulation mixte de type Hellinger-Reissner ou Hu- Washizu ont été développés [119,72,120,121]. Si ces éléments ont l'avantage d'être précis dans l'évaluation des contraintes de cisaillement transversal, reste qu'ils sont plus coûteux en temps calcul que les éléments basés sur l'approche déplacement et que leur formulation est compliquée [122]. Avec le modèle déplacement, différentes techniques ont été proposées pour améliorer le comportement des éléments pour l'analyse des coques minces. Une première façon de procéder consiste à utiliser une intégration numérique "réduite" (uniforme ou sélective) pour évaluer l'énergie interne de déformation [123,103,124,125,126,120]. Un autre artifice utilisé consiste à introduire des facteurs de correction au niveau de la rigidité de cisaillement transversal lui permettant, au cas où la coque devient mince : d'agir comme une fonction de "pénalité", contraignant la normale à rester perpendiculaire à la surface moyenne (approximativement) [127,128]. Enfin, une alternative intéressante est celle de Simo et Hughes [129] connue sous le nom de méthode de déformation de substitution (assumed strain method) et qui propose d'introduire une représentation indépendante des déformations de cisaillement transversal. Parmi les travaux recourant à cette technique pour formuler des éléments de coque et de plaque, nous trouvons : [130,131,132,133,102].

Concernant l'analyse élastoplastique, deux approches sont généralement suivies dans la formulation des éléments de coque : l'approche "locale" et l'approche "résultante". La première, appliquée par plusieurs auteurs : [4,44,134,135,103,58] entre autres, est caractérisée par une loi d'écoulement exprimée en terme du tenseur des contraintes. En plus d'être précise et générale (applicable à tout matériau et toute structure qu'elle soit mince où épaisse), l'approche locale permet la prise en compte de l'écrouissage et des contraintes résiduelles dans l'épaisseur, donc de suivre la progression de la plasticité à travers l'épaisseur. Néanmoins, elle est pénalisée par un stockage et un coût plus important, puisque l'intégration numérique doit être effectuée non seulement sur la surface de référence, mais aussi dans la

direction de l'épaisseur. Dans la deuxième approche, on fait l'hypothèse que la coque est soit élastique soit plastique dans toute son épaisseur, la loi d'écoulement dépend par conséquent uniquement des efforts résultants. Ce modèle permet de calculer la matrice élastoplastique et les efforts internes plastiquement admissibles sans intégration dans l'épaisseur de manière simple et efficace, vu qu'il nécessite moins de stockage de variables et réduit énormément le temps de calcul. Toutefois, dans la réalité, la plastification est progressive, ce qui confère à la structure une rigidité un peu plus importante pendant la plastification réelle. Par conséquent, dans le cas d'instabilité plastique les charges ultimes calculées par cette méthode peuvent être sous évaluées. D'autre part, la formulation des critères d'écoulement en efforts généralisés est délicate. Un des critères globaux le plus connue est celui d'Ilyushin basé sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love [246,247] et qui a été retenue par plusieurs auteurs [136,137,83,43] pour analyser le comportement élastoplastique des coques mines.

I- 3 Evolution de l'approche réseaux de neurones artificiels :

Une première vague d'intérêt aux réseaux de neurones a vu le jour après l'introduction par Mc Culloch et Pitts en 1943 la notion des neurones simplifiés (perceptron) [138]. Ces neurones ont été présentés comme un modèle du neurone biologique et comme un élément de base pour des circuits (réseaux) capables de réaliser des fonctions logiques, arithmétiques et symboliques complexes. En 1949 Hebb, physiologiste américain, propose une loi de modification des propriétés des connexions entre les neurones, qui explique en partie le conditionnement pavlovien chez l'animal.

Les premiers succès de cette méthode furent présentés par Rosenblatt en 1957 qui a construit le premier neuro-ordinateur basé sur le modèle du perceptron et il l'a appliqué au domaine de la reconnaissance des formes. En 1960 Widrow un automaticien, a développé le modèle Adaline qui a amélioré la loi d'apprentissage.

Quand Minsky et Papert publièrent en 1969 leur ouvrage qui met en exergue les limitations théoriques du perceptron, il y a abandon financier des recherches dans le domaine, les chercheurs se tournèrent principalement vers l'intelligence artificielle. Seuls quelques chercheurs ont continué leurs efforts parmi lesquels on note Teuvo Kohonen, Stephen Grossberg, James Anderson et Kunihiko Fukushima.

En général, les réseaux de neurones artificiels (RNA) est un domaine de la science visant à imiter "l'apprentissage" naturel utilisant le rapprochement basé sur les mathématiques.

Ce sont des modèles de calcul parallèle pour la représentation et le traitement de l'information. Du fait de leur grande similitude avec le cerveau, les réseaux de neurones ont des capacités semblables à celle de l'être humain et notamment ; l'apprentissage, la classification et la simulation ou prédiction [139]

Les réseaux de neurones offrent une approche très différente de la méthode analytique du fait de leur capacité d'apprentissage et de la disponibilité de données. En effet, le point de départ dans la modélisation des matériaux est toujours un ensemble de résultats

expérimentaux. Dans la technique de modélisation analytique traditionnelle, le comportement du matériau est observé dans le but d'identifier ses caractéristiques, une fois fait, un modèle mathématique est développé pour simuler ce comportement. Ce processus consiste à coder la connaissance du comportement dans un ensemble de règles mathématiques.

La technique de modélisation par les réseaux de neurones introduite par J. Ghaboussi [140,141,142,143,144] et son équipe Wu et Garrett en 1991, utilise la capacité d'apprentissage de ces derniers pour simuler le comportement du matériau. A partir des tests de laboratoire, le réseau de neurones subit la première phase d'apprentissage, qui fait que l'information est codée et stockée dans le poids des interconnexions. La deuxième phase est celle de la simulation (validation), dans cette phase les données de quelques tests non-utilisés dans la phase d'apprentissage sont pris et comparés aux résultats obtenus par le réseau de neurones. Les auteurs ont trouvé que cette technique donnait de très bons résultats sans avoir recours à développer des règles ou utiliser des approximations analytiques.

Souvent les tests sont conçus pour que l'état de contrainte en un point soit constant. Sidarta et Ghaboussi [145,146] ont publié des travaux sur la modélisation des matériaux en géotechniques en introduisant de nouveaux tests faisant inclure un état de contrainte non-uniforme, en plus les RNA ont été appliqués à de nombreux problèmes d'ingénierie géotechnique et ont montré un certain degré de succès. En utilisant la philosophie de modélisation similaire à celle utilisée dans le développement de la plupart des modèles statistiques classiques, un modèle RNA a été développé pour déterminer les pressions de pré consolidation dans les sols argileux [147], ainsi que la densité sèche maximale et la teneur en eau optimale de sol stabilisé aux propriétés du sol naturel tels que la distribution granulométrique, la plasticité, linéaire le retrait, ainsi que le type et la quantité des additifs stabilisants [148].

Les réseaux de neurones artificiels sont des techniques de calcul prometteuses, capables de cadrer et capturer toutes les fonctions et sous-fonctionnalités intégrées dans un grand ensemble de données qui donne une certaine sortie.

Un réseau qui a été capturé avec succès régissant les relations entre les données d'entrée et de sortie peut être utilisé comme un outil de prédiction pour les cas où la solution de sortie n'est pas disponible. Rappelons le cas des sols au-dessus d'une nappe phréatique, les pressions négatives de l'eau interstitielle se développant dans les sols non saturés et provoquant une augmentation de la résistance au cisaillement non quantifiée [149].

Dans la mise en œuvre des RNA, les données sont classées comme des échantillons d'entrée et des échantillons de cibles pour simuler les boucles déchargement-rechargement des caractéristiques contrainte-déformation du sol [150], le comportement observé en termes de contrainte non linéaire, changement de volume de compression [151,152].

Au cours du processus d'apprentissage, la sortie du réseau de neurones est comparée à la valeur cible et une correction de poids de réseau par l'intermédiaire d'un algorithme d'apprentissage est exécutée de telle manière à minimiser une fonction d'erreur entre les deux valeurs comme par exemple le cas pour vérifier et classer les signatures : exactes ou fausses [153].

I- 4 Conclusion :

La formulation lagrangienne totale soumise à des réserves, voire des critiques, restait pendant des années dévalorisée en faveur de la formulation lagrangienne actualisée, devenue populaire malgré son "défaut caché", à savoir que la géométrie de la configuration de référence change constamment. La formulation lagrangienne actualisée s'est alors imposée tranquillement là où la première a échoué, à savoir pour les éléments formulés en théorie assujettie et subissant des grands déplacements et des grandes rotations tridimensionnelles. En effet, les formules établies jusqu'alors pour permettre le traitement des grandes rotations compliquaient davantage les expressions du champ cinématique des déformations et conduisaient souvent à des difficultés considérables de mise en œuvre. Ceci conduit à définir des éléments très complexes, peu utilisables en pratique.

En raison de nouveaux besoins industriels, notamment dans les domaines aéronautique, aérospatial et automobile (par exemple, besoin de structures encore plus flexibles et plus légères), les chercheurs ont orienté leurs efforts vers la formulation de nouveaux éléments non linéaires plus robustes (précision et coût) en grandes rotations et grands déplacements, qui suivent une théorie tenant compte de "l'effort tranchant", où les rotations peuvent s'exprimer indépendamment des translations (théorie de Reissner-Mindlin ou théories raffinées d'ordre supérieur). Ceci a permis le retour sur la scène actuelle de la formulation lagrangienne totale et motivé certains chercheurs à investir dans la description de la cinématique des grandes rotations.

On sait, d'autant plus, par la théorie de la plasticité appliquée aux matériaux sans écrouissage et aux structures ne considérant pas les effets dus au changement de la géométrie, que la "charge limite" n'est ordinairement pas sensible à la pénétration plastique progressive, mais ne dépend que du stade final entièrement plastifié [4]. Cependant, nous estimons que cette approche est insuffisante. Elle risque d'être dangereusement optimiste pour les phénomènes d'instabilité (une extension même très locale de la plasticité peut suffire à déclencher une instabilité), et ne permet guère de prendre en compte les contraintes résiduelles, souvent si importantes. Il convient donc de discrétiser l'épaisseur ou la section droite. La division en tranches, avec une variation constante ou linéaire des contraintes dans les tranches, pouvant s'avérer insuffisante ou rudimentaire, il est meilleur d'adopter un schéma d'intégration numérique classique de type Gauss ou Lobatto (choisi dans ce travail : offrant des points d'intégration sur les peaux extérieures où la plastification commence).

En 1982 Hopfield fixe préalablement le comportement à atteindre pour son modèle et construit à partir de là, la structure et la loi d'apprentissage correspondant au résultat escompté. Ce modèle est aujourd'hui encore très utilisé pour des problèmes d'optimisation. Notons qu'à cette date, l'intelligence artificielle est l'objet d'une certaine désillusion, elle n'a pas répondu à toutes les attentes et s'est même heurtée à de sérieuses limitations. Aussi, bien que les limitations du perceptron mises en avant par Minsky ne soient pas levées par le modèle d'Hopfield, les recherches sont relancées.

En 1985 la rétropropagation de gradient apparaît. C'est un algorithme d'apprentissage adapté aux réseaux de neurones multicouches. Dès cette découverte, nous avons la possibilité de réaliser une fonction non linéaire d'entrée/sortie sur un réseau en décomposant cette fonction en une suite d'étapes linéairement séparables. De nos jours, les réseaux multicouches et la rétropropagation de gradient reste le modèle le plus étudié et le plus productif au niveau des applications.

Chapitre II
Les éléments finis de plaques
et coques

Chapitre 2

Les éléments finis de plaques et coques

II- 1 Plaques :

II- 1.1 Hypothèse cinématique de Mindlin-Reissner :

L'hypothèse de Mindlin et Reissner suppose que tout élément normal au plan moyen de la plaque se comporte comme un solide rigide (figure 2.1). En se plaçant dans les cas de petits déplacements et d'une plaque sous sollicitations de flexion, on peut écrire :

$$\{u_M\} = \{u_m\} + z\{\theta\} \wedge \{k\} \dots\dots\dots(2-1a)$$

$$\{u_m\} = w(x, y)\{k\} \dots\dots\dots(2-1b)$$

m et M sont situés respectivement sur la surface moyenne et dans l'épaisseur, $\{u_m\}$ et $\{u_M\}$ sont les vecteurs déplacements des points m et M; $\{\theta\}$ et $\{k\}$ représentent respectivement le vecteur rotation et le vecteur normal unitaire au plan moyen. En projetant la relation (1-1a) sur les axes du système des coordonnées et en tenant compte de la relation (2-1b) nous avons :

$$\begin{Bmatrix} U(x, y, z) \\ V(x, y, z) \\ W(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_Y(x, y) \\ -z\theta_X(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2-2)$$

U, V, W sont les composantes du vecteur déplacement au point M. La relation (2-2) fait apparaître trois inconnues cinématiques : une translation et deux rotations, qui représentent respectivement la flèche de la plaque et les rotations de la normale autour des axes x et y du plan moyen.

II- 1.1.1 Composantes du tenseur des déformations :

A partir du champ de déplacements (2-2), on peut calculer le tenseur de déformations. Pour les composantes de flexion ε_f on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_Y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_X}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_Y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_X}{\partial x} \end{Bmatrix} = z\{\chi\} \dots\dots\dots(2-3)$$

Où $\{\chi\}$ représente le vecteur des courbures.

Les composantes du cisaillement transversal s'écrivent sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2-4)$$

Pour les plaques très minces, les déformations de cisaillement ($\gamma_{xz}\gamma_{yz}$) deviennent négligeables et on retrouve l'hypothèse de Love Kirchhoff : tout segment normal au plan moyen avant déformation demeure normal à la déformée de ce plan après déformation. La relation (2-4) implique que ces composantes sont constantes dans l'épaisseur. Dans ce cas les contraintes σ_{xz} et σ_{yz} ne respectent pas les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure.

Pour corriger cette situation, on introduit des facteurs de correction afin de mieux prendre en compte la variation réelle de ces contraintes.

II- 1.2 Principe des travaux virtuels :

Considérons une plaque occupant un domaine volumique V de frontière $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_c$ (figure 2.2) où Γ_a est la surface qui réunit les faces supérieure et inférieure, $\Gamma_c = C \cup [-h/2, h/2]$ représente la surface latérale de la plaque. On suppose que la courbe C est la réunion de deux courbes C_f et C_u sur lesquelles sont imposées respectivement les forces et les variables cinématiques.

Considérons un champ de déplacement virtuel δu cinématiquement admissible ($\delta u = 0$ sur C_u); le principe des travaux virtuels donne:

$$\delta w_i = \delta w_j + \delta w_e \dots\dots\dots(2-5)$$

Le premier membre représente le travail virtuel des forces intérieures ; les termes du second membre représentent respectivement les travaux virtuels des forces d'inerties et des forces extérieures.

II- 1.2.1 Travail virtuel des forces intérieures :

Le travail virtuel des forces intérieures est donné par l'expression :

$$\delta w_i = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv \dots\dots\dots(2-6)$$

En remplaçant les relations (2-3) et (2-4) dans la relation (2-6) et en intégrant dans l'épaisseur on obtient :

$$\delta w_i = \iint_A \langle \delta_\chi \rangle \{M_f\} dA + \iint_A \langle \delta_\gamma \rangle \{T\} dA \dots\dots\dots(2-7)$$

Où $\{M_f\}$ et $\{T\}$ sont les vecteurs qui regroupent respectivement les efforts flexionnels et de cisaillement transversal par unité de longueur. Ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\{M_f\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \dots\dots\dots(2-8)$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \dots\dots\dots(2-9)$$

Ces efforts sont visualisés sur la figure (2.3).

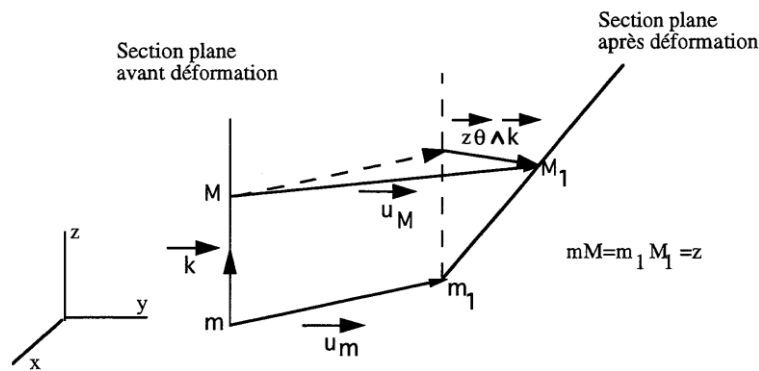


Figure 2.1 – Champ de déplacement dans une plaque.

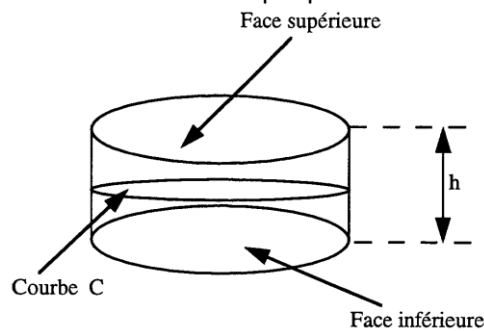


Figure 2.2- Description d'une plaque.

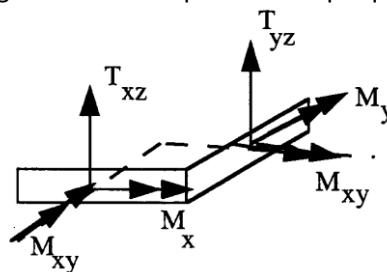


Figure 2.3 – Efforts résultants.

Les équations d'équilibre donnent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= T_{xz} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= T_{yz} \end{aligned} \dots\dots\dots(2-10)$$

II- 1.2.2 Travail virtuel des forces d'inertie :

D'après le principe de d'Alembert, le travail virtuel des forces d'inertie s'écrit sous la forme :

$$\delta w_j = - \iiint_V \rho (\ddot{u}_M \delta u_M + \ddot{v}_M \delta v_M + \ddot{w}_M \delta w_M) dV \dots\dots\dots(2-11)$$

En remplaçant les relations (2-2) dans la relation (2-11) et après intégration dans l'épaisseur, on obtient :

$$\delta w_j = - \iint_A [\rho_M \ddot{w} \delta w + \rho_F (\ddot{\theta}_x \delta \theta_x + \ddot{\theta}_y \delta \theta_y)] dA \dots\dots\dots(2-12)$$

Où $\rho_M = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$, $\rho_F = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz$.

II- 1.3 Loi de comportement :

On considère une plaque présentant une symétrie matérielle par rapport à son plan moyen. On suppose qu'elle est constituée par un empilement de couches orthotropes ayant l'axe z comme axe d'orthotropie. Chaque couche est définie par l'angle θ entre l'axe L et l'axe des x et par les cotes Z_i et Z_{i+1} de ses faces supérieure et inférieure par rapport au plan moyen (figure 2.4).

Étant donné la symétrie matérielle par rapport au plan moyen, ce dernier est le plan neutre (un effort de flexion ne produit pas de déformation de membrane dans ce plan, et réciproquement, un effort de membrane n'y produit pas de courbure).

Dans la suite de ce travail, on suppose que le comportement de chaque couche est basé sur l'hypothèse des contraintes planes et d'anisotropie plane, et que les couches sont en parfaite adhérence.

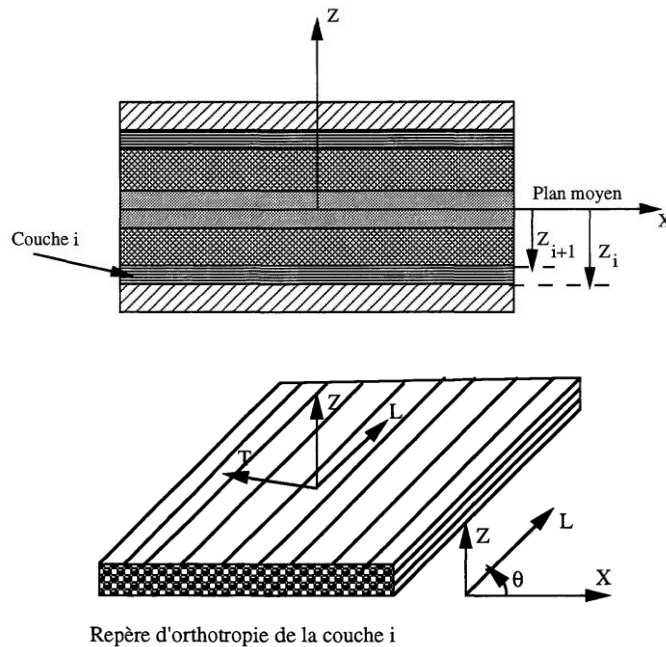


Figure 2.4 – Plaque multicouche.

II- 1.3.1 Relations entre les composantes de flexion :

La relation contraintes - déformations entre les composantes de flexion d'une couche s'écrit sous la forme :

$$\{\sigma_f\} = [H]\{\varepsilon_f\} = z[H]\{\chi\}.....(2-13)$$

$$[H] = [Q]^t[H_L][Q].....(2-14)$$

$[H_L]$ est la matrice de comportement de la couche dans le repère d'orthotropie. Elle est donnée par :

$$[H_L] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$

La symétrie de la matrice de souplesse implique la relation $\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}$.

$[Q]$ est la matrice de passage entre le repère d'orthotropie de la couche et le repère cartésien.

$$[Q] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad c = \cos\theta \quad s = \sin\theta$$

En remplaçant la relation (2-13) dans la relation (2-8), on obtient :

$$\{M\} = \left(\int_{-h/2}^{h/2} z^2 [H] dz \right) \{\chi\} = [H_f] \{\chi\} \dots \dots \dots (2-15)$$

Comme les caractéristiques sont constantes par couche, l'expression de $[H_f]$ est donnée par :

$$[H_f] = \sum_{i=1}^{nc} \int_{z_i}^{z_{i+1}} z^2 [H^i] dz = \sum_{i=1}^{nc} 1/3 (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H^i]$$

Où nc est le nombre des couches de la plaque. Pour un matériau isotrope on a :

$$[H^i] = \begin{bmatrix} E/1 - \nu^2 & E\nu/1 - \nu^2 & 0 \\ E\nu/1 - \nu^2 & E/1 - \nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & E/2(1 + \nu) \end{bmatrix}$$

Ce qui donne la forme classique de $[H_f]$:

$$[H_f] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}$$

Où $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ est la rigidité à la flexion de la plaque.

II- 1.3.2 Comportement pour les composantes du cisaillement transversal :

La relation de comportement entre les composantes de cisaillement transversales est donnée par :

$$\{\tau\} = [H_\tau] \{\gamma\} \dots \dots \dots (2-16)$$

$\{\gamma\}$ est donné par la relation (2-4)

$$[H_\tau] = [Q_1]^t [H_{LT}] [Q_1] \dots \dots \dots (2-17)$$

$$[H_{LT}] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad [Q_1] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

La relation (2-16) indique que les contraintes du cisaillement transversales sont discontinues à l'interface entre couches. Cette discontinuité est physiquement inacceptable et elle sera évitée par la recherche d'une distribution des contraintes de cisaillement basée sur les équations de l'équilibre locale [137] ; Batoz et Dhatt [154], Noor et Peters [155]). En remplaçant la relation (2-16) dans la relation (2-9) on obtient :

$$\{T\} = \left(\int_{-h/2}^{h/2} [H_\tau] dz \right) \{\gamma\} = [H_c] \{\gamma\} \dots \dots \dots (2-18)$$

$$[H_c] = \sum_{i=1}^{nc} \int_{z_i}^{z_{i+1}} [H_\tau^i] dz = \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1} - z_i) [H_\tau^i]$$

Pour un matériau isotrope on a :

$$[H_\tau^i] = \begin{bmatrix} E/2(1 + \nu) & 0 \\ 0 & E/2(1 + \nu) \end{bmatrix} \quad \forall i$$

Ce qui implique la forme classique de $[H_c]$:

$$[H_c] = Gh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme nous venons de le signaler au paragraphe (II-1.1) l'hypothèse de Mindlin-Reissner nécessite l'introduction de coefficients de correction permettant de tenir compte de la distribution réelle des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. Dans le cas des plaques isotropes, le facteur couramment employé est 5/6. Ce facteur est obtenu par comparaison de la densité d'énergie de déformation de cisaillement obtenue, d'une part, par la théorie d'élasticité, et, d'autre part, à partir des contraintes de cisaillement induites par la théorie de Mindlin-Reissner [156]; Reissner [157].

Certains auteurs (Mindlin [158]; Mindlin et al [159]) ont préféré le calcul du facteur correcteur à partir des considérations dynamiques (équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en cisaillement transversal ou vitesse de propagation d'ondes de flexion). Le facteur employé dans ce cas est égal à $\pi^2/12$.

Pour les plaques composites, deux facteurs de correction sont généralement introduits : Owen et Figueiras [137] ont fixé ces facteurs en partant des équations de l'équilibre locale et en adoptant l'hypothèse de la flexion cylindrique suivant deux directions orthogonales. Batoz et Dhatt [154] ont eu une démarche similaire. En abandonnant l'hypothèse précédente, ils aboutissent à une matrice de comportement faisant apparaître ces facteurs de correction de manière implicite. Notre démarche s'inscrit dans le même cadre. Elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- Équivalence de la densité d'énergie de cisaillement déduite, d'une part, de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, et, d'autre part de la théorie des plaques de Mindlin-Reissner ;
- Utilisation des équations de l'équilibre locale.

Soit U_1 la densité surfacique d'énergie de déformation en cisaillement transversal obtenue par la théorie de l'élasticité :

$$U_1 = 1/2 \int_{-h/2}^{h/2} \langle \tau \rangle [H_\tau]^{-1} \{ \tau \} dz \dots \dots \dots (2-19)$$

Soit U_2 la même quantité déduite de la théorie des plaques :

$$U_2 = 1/2 \langle \gamma \rangle \{ T \} = 1/2 \langle T \rangle [H_c]^{-1} \{ T \} \dots \dots \dots (2-20)$$

Les équations de l'équilibre locale donnent :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

En intégrant ces équations dans l'épaisseur et en utilisant les conditions aux limites $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ pour $z = -h/2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) dz \\ \sigma_{yz} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz \end{aligned} \dots \dots \dots (2-21)$$

Les relations (2-13) et (2-15) donnent :

$$\{\sigma_f\} = z[H(z)]\{\chi\} = z[A(z)]\{M\}.....(2-22)$$

$$[A(z)] = [H(z)][H_f]^{-1}(2-23)$$

En remplaçant la relation (2-22) dans les relations (2-21), on obtient :

$$\{\tau(z)\} = [D_1(z)]\{T\} + [D_2(z)]\{\lambda\}.....(2-24)$$

Où :

$$\langle \lambda \rangle = \left\langle \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} \quad \frac{\partial M_x}{\partial y} \right\rangle$$

$$[D_1(z)] = \int_{-h/2}^z -z/2 \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz$$

$$[D_2(z)] = - \int_{-h/2}^{h/2} z/2 \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz$$

A_{ij} sont les éléments de la matrice $A(z)$ définie par (2-23). En remplaçant la relation (2-24) dans (2-19), on obtient :

$$U_1 = \frac{1}{2} \langle \langle T \rangle \quad \langle \lambda \rangle \rangle \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{12}]^t & [C_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix}(2-25)$$

$$[C_{11}] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_1(z)]^t [H_\tau]^{-1} [D_1(z)] dz$$

$$[C_{12}] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_1(z)]^t [H_\tau]^{-1} [D_2(z)] dz$$

$$[C_{22}] = \int_{-h/2}^{h/2} [D_2(z)]^t [H_\tau]^{-1} [D_2(z)] dz$$

En posant que U_1 est égale à U_2 , on obtient :

$$\langle\langle T \rangle \rangle \langle\langle \lambda \rangle \rangle \begin{bmatrix} [C_{11}] - [H_c]^{-1} & [C_{12}] \\ [C_{12}]^t & [C_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = 0$$

Pour la vérification de cette condition, Batoz et Dhatt ont proposé :

$$[C_{11}] = [H_c]^{-1} \iff [H_c] = [C_{11}]^{-1} \dots\dots\dots(2-26)$$

Cette hypothèse consiste à négliger les composantes du vecteur λ devant celles du vecteur T. Finalement la relation de comportement en cisaillement transversal est donnée par la matrice $[H_c]$ définie par la relation (2-26).

II- 1.4 Discrétisation :

Dans le présent travail, on s'intéresse à des plaques de Mindlin qui tiennent compte de l'influence des efforts tranchants et qui donnent une précision comparable aux meilleurs éléments de Kirchhoff. L'étude se fera pour des éléments plaques à quatre, huit et neuf nœuds et en plus pour l'élément hétérosis.

Nous présentons de plus une discrétisation basée sur l'élément Mitc4 [160]. Cet élément est un quadrilatère à quatre nœuds ; identique à l'élément Q4 classique pour le comportement en flexion. Le comportement en cisaillement transversal est introduit en utilisant un champ de substitution (Hinton et Huang [161]).

II- 1.4.1 Quadrangle à 4 nœuds (Q4) :

Les fonctions de forme :

$$N_i^e = \frac{1}{4(1+rr_i)(1+ss_i)} \dots\dots\dots(2-27) \text{ avec } i = 1, 2, 3, 4.$$

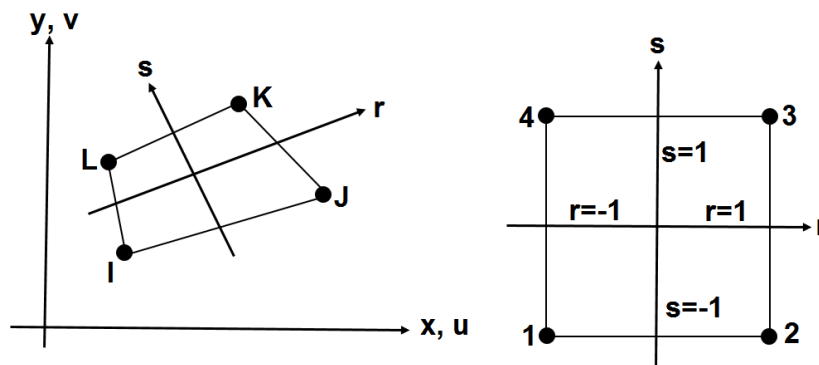


Figure 2.5 – Quadrangle à 4 nœuds.

Avec $r_p, s_p = \pm 1$ coordonnées des nœuds 1, 2, 3, 4 dans l'espace parent.

Les coordonnées et déplacements sont :

$$\begin{aligned} x(\text{ou } y) &= N_1 x_i(\text{ou } y_i) + N_2 x_j + N_3 x_k + N_4 x_l \\ u(\text{ou } v) &= N_1 u_i(\text{ou } v_i) + N_2 u_j + N_3 u_k + N_4 u_l \end{aligned} \dots\dots\dots(2-28)$$

La base étant : $u \text{ ou } x = a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 rs$

II- 1.4.2 Quadrangle à 8 nœuds (Q8) :

Cet élément peut être enrichi de deux façons : hiérarchique ou naturelle. Les fonctions ajoutées sont :

$$\begin{aligned} N_5 &= \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 - s) \\ N_6 &= \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 + r) \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 + s) \\ N_8 &= \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 - r) \end{aligned}$$

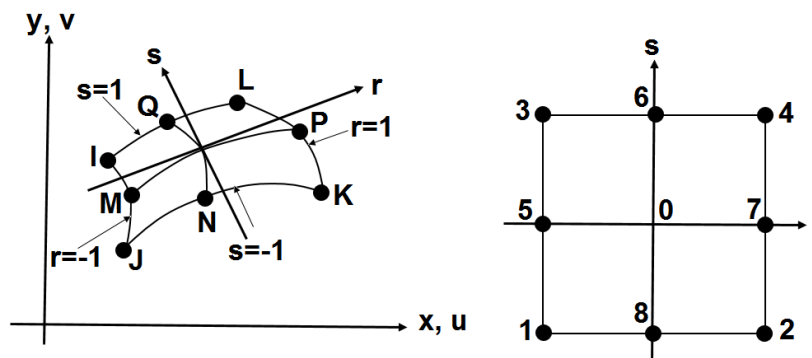


Figure 2.6 – Quadrangle à 8 nœuds.

En liaison avec (2-27), les fonctions de forme pour l'élément quadrilatère de Serendip à huit nœuds aux côtés courbes et avec une variation quadratique du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément sont les suivantes :

Nœuds aux sommets :

$$N_i^e = \frac{1}{4}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(rr_i + ss_i - 1) \dots\dots\dots(2-29a) \quad i = 1, 3, 5, 7$$

Nœuds médians :

$$N_i^e = \frac{r_i^2}{2}(1 + rr_i)(1 - s^2) + \frac{s_i^2}{2}(1 + ss_i)(1 - r^2) \dots\dots\dots(2-29b) \quad i = 2, 4, 6, 8$$

II- 1.4.3 Quadrangle à 9 nœuds (Q9) :

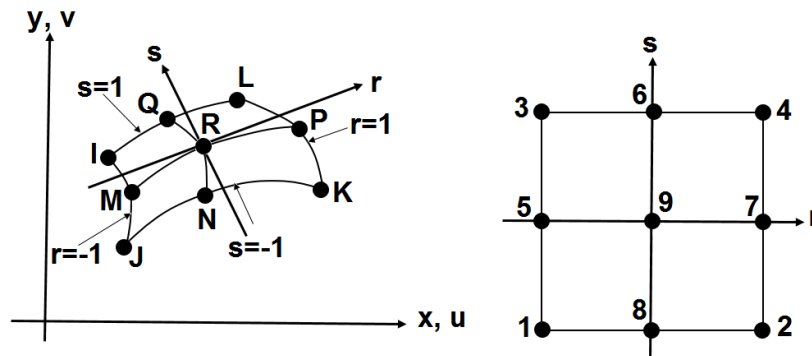


Figure 2.7 – Quadrangle à 9 nœuds.

Il est toujours possible de raffiner une approximation nodale ; il suffit pour cela d’augmenter le nombre des points d’approximation, ce qui permet d’augmenter le nombre des termes de la base polynomiale associée, les fonctions de forme gardant évidemment toutes leurs propriétés.

Pour tous ces éléments il existe deux familles polynomiales, dites de Lagrange (L) ou de Serendip (S). La famille de Lagrange utilise le polynôme en r et s le plus complet possible en respectant la symétrie (en r, s) obligée des termes et en utilisant des nœuds intérieurs, tandis que celle de Serendip n’obéit pas à des règles strictes, sinon celles de minimiser le degré de l’approximation et de n’utiliser, si possible, que les nœuds de contour.

Alors les fonctions de forme sont :

Nœuds aux sommets :

$$N_i^e = \frac{1}{4(r^2 + rr_i)(s^2 + ss_i)} \dots \dots \dots (2-30a) \quad i = 1, 3, 5, 7$$

Nœuds médians :

$$N_i^e = \frac{r_i^2}{2}(r^2 - rr_i)(1 - s^2) + \frac{s_i^2}{2}(s^2 - ss_i)(1 - r^2) \dots \dots \dots (2-30b) \quad i = 2, 4, 6, 8$$

L’élément de Lagrange Q9, utilise la fonction bulle ou interne au nœud central :

$$N_i^e = (1 - r^2)(1 - s^2) \dots \dots \dots (2-30c)$$

II- 1.4.4 Élément Hétérosis :

L’élément Hétérosis à 9 nœuds a été développé par Hughes. L’idée de base qui a mené à son développement c’est que le faux mode énergie nulle est éliminé si les fonctions de forme de Serendip pour 8 nœuds sont utilisées pour le déplacement transversal w . L’élément Hétérosis

est donc formulé en utilisant les fonctions de forme de Lagrange à 9 nœuds pour les rotations (θ_x et θ_y) et les fonctions de forme de Serendip pour le déplacement latéral w . L'élément Hétérosis, qui a de bonnes caractéristiques, a donné constamment de bonnes performances que l'élément « parent » dans une large gamme de problèmes. Quand il est utilisé avec une intégration sélective, le problème de verrouillage est écarté pour toutes les plaques minces. Il est de rang correct.

II- 1.4.4.1 Formulation hiérarchique de l'élément Hétérosis :

Dès lors il est utile de faire des recherches dans le but de rendre effectifs les éléments de Serendip à 8 nœuds et les éléments de Lagrange à 9 nœuds comme l'élément Hétérosis de Mindlin. Il est plus convenant d'adopter une formulation hiérarchique pour représenter tous les degrés de liberté. Donc, pour des éléments type e les fonctions d'interpolation de Serendip suivantes sont adoptées pour les nœuds de 1 à 8 :

Pour les nœuds des sommets $i = 1, 3, 5, 7$

$$N_i^e = \frac{1}{4}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(rr_i + ss_i - 1).....(2-31)$$

Pour les nœuds du milieu $i = 2, 4, 6, 8$

$$N_i^e = \frac{r_i^2}{2}(1 + rr_i)(1 - s^2) + \frac{s_i^2}{2}(1 + ss_i)(1 - s^2).....(2-32)$$

Et pour le 9ème nœud on utilise la fonction suivante :

$$N_9^e = (1 - r^2)(1 - s^2)..... (2-33)$$

Alors, les degrés de liberté hiérarchiques pour 9 nœuds sont perturbés par l'association de l'interpolation de Serendip. La formulation hiérarchique peut être utilisée pour une représentation géométrique comme pour l'interpolation du champ de déplacement.

Pour Mindlin, ni l'élément à 8 nœuds ni l'élément à 9 nœuds ou l'élément Hétérosis peut être choisi où :

- Pour obtenir la représentation de l'élément de Serendip à 8 nœuds, tous les degrés de liberté pour le nœud 9 sont considérés nuls.
- Pour obtenir un élément équivalent à la représentation de l'élément de Lagrange à 9 nœuds, tous les degrés de liberté pour le nœud 9 sont libres à gauche. Le total des déplacements au nœud 9 est calculé en utilisant l'expression :

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i^e(0,0)a_i^e + a_9^e..... (2-34)$$

Pour obtenir la représentation de l'élément Hétérosis, seulement l'hiérarchique déplacement latéral au nœud 9 (w_9^e) est restreint à zéro et la formule (2-34) sera utilisée pour interpréter le déplacement au nœud 9.

II- 1.4.5 Élément Mitc4 :

II- 1.4.5.1 Approximation de la géométrie et des variables cinématiques :

La géométrie et les variables cinématiques peuvent être approximées par :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2-35)$$

$$\begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \begin{Bmatrix} W_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2-36)$$

La relation (2-36) peut s'écrire encore sous la forme :

$$W = \langle N_w \rangle \{ \hat{u} \}$$

$$\langle N_w \rangle = \langle h_k \quad 0 \quad 0 \rangle \quad k = 1 \text{ à } 4$$

$\{ \hat{u} \} = \langle w_k \quad \theta_{xk} \quad \theta_{yk} \rangle$ représente le vecteur de déplacement et de rotation aux nœuds de l'élément.

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N_\theta] \{ \hat{u} \}$$

$$[N_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & h_k & 0 \\ 0 & 0 & h_k \end{bmatrix}$$

Les fonctions (h_k), $k = 1$ à 4 , sont les fonctions d'interpolation de l'élément Q4.

II- 1.4.5.2 Matrice de rigidité élémentaire :

La matrice de rigidité élémentaire est obtenue à partir de l'expression du travail virtuel des forces intérieures à l'échelle élémentaire. D'après (2-7) on peut écrire :

$$\delta w_i^e = \iint_{A^e} \langle \delta_\chi \rangle \{ M_f \} dA + \iint_{A^e} \langle \delta_\gamma \rangle \{ T \} dA \dots\dots\dots(2-37)$$

Le premier terme représente la contribution de la flexion, le second représente la contribution du cisaillement transversal. En utilisant les relations (2-3) et (2-36), on peut écrire:

$$\{ \chi \} = [B_f] \{ \hat{u} \} \dots\dots\dots(2-38)$$

La matrice $[B_f]$ est donnée par :

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial h_k}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial h_k}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial h_k}{\partial x} & \frac{\partial h_k}{\partial y} \end{bmatrix} \quad k = 1, 4$$

En remplaçant la relation (2-38) dans la relation (2-37), on obtient la matrice de rigidité $[K_f]$ qui représente la contribution des termes de flexion. Cette matrice est donnée par l'expression :

$$[K_f] = \iint_{Ae} [B_f]^t [H_f] [B_f] dA \dots \dots \dots (2-39)$$

Le remplacement direct de la relation (2-36) dans (2-4) conduit quand la plaque devient très mince à un blocage en cisaillement [162]. Pour traiter ce phénomène, plusieurs techniques sont utilisées : la technique de l'intégration réduite et sélective, la formulation mixte, l'utilisation de l'hypothèse de Kirchhoff sous forme discrète, l'utilisation d'un champ de substitution [161]. La technique de l'intégration réduite et sélective améliore le comportement mais introduit des modes parasites. La formulation mixte exige une certaine cohérence dans l'approximation des variables. L'utilisation de l'hypothèse de Kirchhoff limite le champ d'application de l'élément aux plaques minces. Afin de surmonter ce phénomène de blocage, nous avons utilisé la méthode proposée par Bathe et Dvorkin qui consiste à utiliser le champ de substitution suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_{rt} &= \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{rt}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{rt}^C \\ \gamma_{st} &= \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{st}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{st}^B \end{aligned} \dots \dots \dots (2-40)$$

Les points A , B , C , D sont représentés dans la figure (2.8)

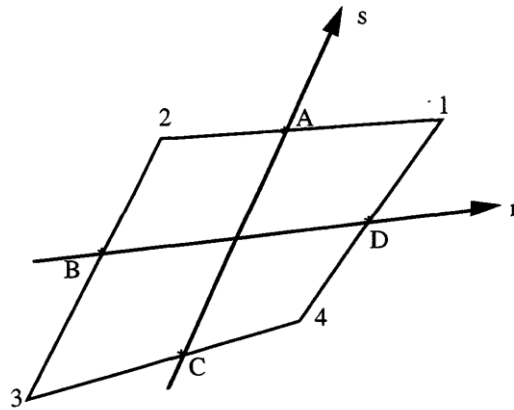


Figure 2.8 – Élément Mitc4, points d'interpolation des composantes de cisaillement transversal.

Les composantes covariantes aux points A, B, C et D sont déterminées directement à partir des relations reliant les déformations aux déplacements.

$$\begin{aligned} \gamma_{rt} &= \frac{h}{2} \left(\{a_1\}^t (\{\theta\} \wedge \{k\}) + \frac{\partial W}{\partial r} \right) \\ \gamma_{st} &= \frac{h}{2} \left(\{a_2\}^t (\{\theta\} \wedge \{k\}) + \frac{\partial W}{\partial s} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (2-41)$$

Les relations (2-40) permettent de satisfaire l'hypothèse de Love Kirchhoff, sans entraîner le blocage en cisaillement [154].

Le passage des composantes covariantes aux composantes cartésiennes est fourni par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \gamma_{rt} \sqrt{a^{11}} \frac{2}{h} \sin\beta - \gamma_{st} \sqrt{a^{22}} \frac{2}{h} \sin\alpha \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{rt} \sqrt{a^{11}} \frac{2}{h} \cos\beta - \gamma_{st} \sqrt{a^{22}} \frac{2}{h} \cos\alpha \end{aligned}$$

α et β sont les angles qui font respectivement $\{ a_1 \}$ et $\{ a_2 \}$ avec l'axe des x .

En remplaçant γ_{rt} et γ_{st} par leurs valeurs tirées de (2-40) et en explicitant le calcul des quantités à $a^{\alpha\beta}$, on obtient les relations reliant les composantes du cisaillement transversal aux déplacements aux nœuds :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [B_c] \{\hat{u}\} \dots\dots\dots (2-42)$$

La matrice $[B_c]$ est donnée par l'expression :

$$[B_c] = [\tilde{Q}][\check{B}_c]$$

Où :

$$[\tilde{Q}] = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} \sin\beta\sqrt{a^{11}} & -\sin\alpha\sqrt{a^{22}} \\ -\cos\beta\sqrt{a^{11}} & \cos\alpha\sqrt{a^{22}} \end{bmatrix}$$

$$[\check{B}_c] = \begin{bmatrix} B_{11}^k & B_{12}^k & B_{13}^k \\ B_{21}^k & B_{22}^k & B_{23}^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_{11}^k &= \frac{h}{4}(1+s)h_{k,r}^A + \frac{h}{4}(1-s)h_{k,r}^C \\ B_{12}^k &= -\frac{h}{4}(1+s)h_k^A a_{1Y}^A - \frac{h}{4}(1-s)h_k^C a_{1Y}^C \\ B_{13}^k &= \frac{h}{4}(1+s)h_k^A a_{1X}^A + \frac{h}{4}(1-s)h_k^C a_{1X}^C \\ B_{21}^k &= \frac{h}{4}(1+r)h_{k,s}^D + \frac{h}{4}(1-r)h_{k,s}^B \\ B_{22}^k &= -\frac{h}{4}(1+r)h_k^D a_{2Y}^D - \frac{h}{4}(1-r)h_k^B a_{2Y}^B \\ B_{23}^k &= \frac{h}{4}(1+r)h_k^D a_{2X}^D + \frac{h}{4}(1-r)h_k^B a_{2X}^B \end{aligned}$$

a_{1X}, a_{1Y}, a_{1Z} sont les composantes du vecteur a_1 ; a_{2X}, a_{2Y}, a_{2Z} sont celles du vecteur a_2 .

En remplaçant la relation (2-42) dans le travail virtuel des forces intérieures, on obtient la matrice de rigidité $[K_c]$ qui représente la contribution du cisaillement transversal. Celle-ci est donnée par l'expression :

$$[K_c] = \iint_{Ae} [B_c]^t [H_c] [B_c] dA \dots \dots \dots (2-43)$$

Les matrices $[K_f]$ et $[K_c]$ sont calculées numériquement en utilisant un schéma de Gauss à quatre points.

II- 1.4.5.3 Matrice de masse élémentaire :

La matrice de masse élémentaire est obtenue à partir du travail virtuel des forces d'inertie. En remplaçant la relation (2-36) dans la relation (2-11), on obtient :

$$\delta w_j^e = -\langle \delta \hat{u} \rangle [M] \{ \hat{u} \} \dots \dots \dots (2-44)$$

$[M]$ est la matrice de masse cohérente de l'élément. Elle est donnée par :

$$[M] = \iint_{A^e} (\rho_M \{N_w\} \langle N_w \rangle + \rho_F [N_\theta]^t [N_\theta]) dA \dots \dots \dots (2-45)$$

II- 1.4.5.4 Vecteur force élémentaire :

Soit p la pression appliquée sur la face supérieure ou inférieure de la plaque, le travail virtuel de cette force vaut :

$$\delta w_e^e = \iint_{A^e} p \delta w dA \dots \dots \dots (2-46)$$

En remplaçant la relation (2-36) dans la relation (2-46), on obtient le vecteur force élémentaire :

II- 1.4.6 Élément Mitc8 :

Dans ce paragraphe, on donne une brève description de l'élément plaque Mitc8 déduit de l'élément coque Mitc8 [121]. Cet élément est identique à l'élément Q8 classique pour le comportement en flexion ; le cisaillement transversal est introduit selon la démarche adoptée pour l'élément Mitc4.

On se limite à la présentation des schémas d'interpolation pour les composantes du cisaillement transversal dans le système des coordonnées (r, s) . Ces composantes sont données par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{rt} = \sum_{i=1}^4 h_i^{rt} \varepsilon_{rt}^i + \frac{1}{2} h_5^{rt} (\varepsilon_{rt}^{RA} + \varepsilon_{rt}^{RB}) \dots \dots \dots (2-47a)$$

$$\varepsilon_{st} = \sum_{i=1}^4 h_i^{st} \varepsilon_{st}^i + \frac{1}{2} h_5^{st} (\varepsilon_{st}^{SA} + \varepsilon_{st}^{SB}) \dots \dots \dots (2-47b)$$

Les points d'interpolation sont illustrés dans la figure (2.9)

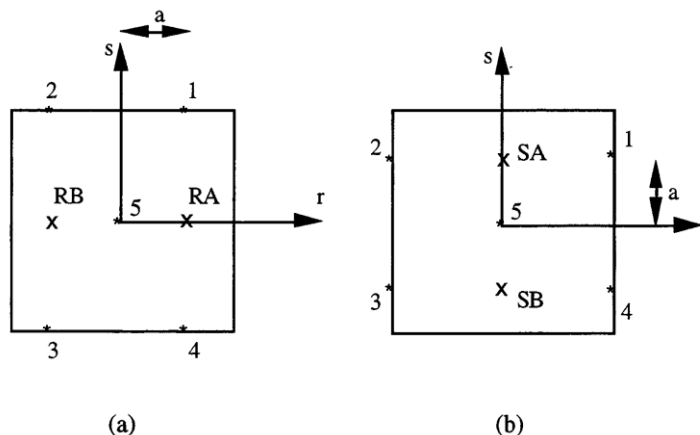


Figure 2.9 – Élément Mitc8
 a) Points utilisés pour l'interpolation de ε_{rt}
 b) Points utilisés pour l'interpolation de ε_{st}

Les composantes ε_{rt}^i ε_{rt}^{RA} ε_{rt}^{RB} ε_{st}^i ε_{st}^{SA} ε_{st}^{SB} sont calculées directement à partir des formules d'interpolation des déplacements pour l'élément Q8 et des relations (2-41).

Les fonctions d'interpolation ($h_i^{rt}, h_i^{st}; i = 1 \text{ à } 5$) sont données par :

$$\begin{aligned}
 h_1^{rt} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) (1 + s) - \frac{1}{4} h_5^{rt} \\
 h_2^{rt} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) (1 + s) - \frac{1}{4} h_5^{rt} \\
 h_3^{rt} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) (1 - s) - \frac{1}{4} h_5^{rt} \\
 h_4^{rt} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) (1 - s) - \frac{1}{4} h_5^{rt} \\
 h_5^{rt} &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) (1 - s^2) \\
 h_1^{st} &= \frac{1}{4} (1 + r) \left(1 + \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st} \\
 h_2^{st} &= \frac{1}{4} (1 - r) \left(1 + \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st} \\
 h_3^{st} &= \frac{1}{4} (1 - r) \left(1 - \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st} \\
 h_4^{st} &= \frac{1}{4} (1 + r) \left(1 - \frac{s}{a}\right) - \frac{1}{4} h_5^{st} \\
 h_5^{st} &= \left(1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2\right) (1 - r^2)
 \end{aligned}$$

Avec : $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

D'autres éléments plaques à huit nœuds utilisant le schéma d'interpolation précédent ont été publiés. Parmi ces éléments nous citons l'élément Quad8* [163] et l'élément CL8 [164]. La différence entre les éléments précédents et Mitc8 réside dans la base polynomiale utilisée par les fonctions d'interpolation.

En appliquant la démarche suivie pour l'élément Mitc4, on obtient la matrice de rigidité due au cisaillement transversal. Dans ce cas, l'intégration des termes de la matrice de rigidité nécessite l'utilisation de neuf points de Gauss.

II- 2 Coques :

II- 2.1 Cinématique des coques :

II- 2.1.1 Champ de déplacement - Hypothèse de Mindlin Reissner :

Il s'agit de l'hypothèse énoncée au premier paragraphe pour les plaques. En se plaçant en petits déplacements, nous avons (figure 2.10) :

$$\{u_M\} = \{u_m\} + z\{\theta\} \wedge \{n\} = \{u_m\} + t \frac{h}{2} \{\theta\} \wedge \{n\} \dots \dots \dots (2-48)$$

Les points m et M sont situés respectivement sur la surface moyenne et dans l'épaisseur de la coque. Ils sont reliés par la relation $\{mM\} = z\{n\}$, $\{n\}$ étant le vecteur unitaire normal au plan moyen en m , $\{u_M\}$ et $\{u_m\}$ représentent respectivement les vecteurs déplacements aux points M et m ; $\{\theta\}$ est le vecteur rotation de la normale à la coque en m ; t est la coordonnée paramétrique de l'épaisseur, elle varie entre -1 et + 1.

La relation (2-48) implique que cinq paramètres sont nécessaires pour définir l'état cinématique d'une coque : les trois composantes (u, v, w) du vecteur déplacement au point m dans le repère cartésien $(O X Y Z)$ et les deux rotations (α, β) de la normale $\{n\}$ autour de deux axes appartenant au plan tangent à la surface moyenne. La définition de ces axes sera précisée plus loin.

II- 2.2 Champ des déformations de la coque :

Le champ des déformations est défini par ses composantes covariantes dans la base paramétrique (g_1, g_2, g_3) :

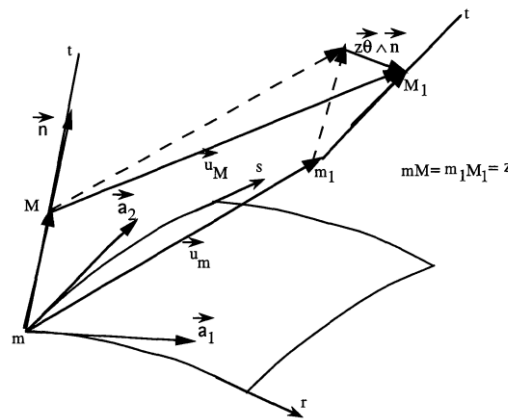


Figure 2.10 – Déplacements des points de la coque.

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} g^i \otimes g^j \dots\dots\dots(2-49)$$

Les composantes ε_{ij} sont définies par [165] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left((g_{ij})_1 - (g_{ij})_0 \right) \dots\dots\dots(2-50)$$

Les indices i et j varient de 1 à 3 ($1 \equiv r, 2 \equiv s, 3 \equiv t$), r et s sont les coordonnées paramétriques de la surface moyenne. Les termes $(g_{ij})_1$ et $(g_{ij})_0$ désignent respectivement les composantes covariantes du tenseur métrique dans les configurations déformée et initiale:

$$\{g_i\}_1 = \{g_i\}_0 + \{u_M\}_{,i} \dots\dots\dots(2-51)$$

En remplaçant la relation (2-51) dans la relation (2-50) et en négligeant les termes du second ordre en u_M , on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\{g_i\}^t \{u_M\}_{,j} + \{g_j\}^t \{u_M\}_{,i}] \dots\dots\dots(2-52)$$

Les vecteurs g_i dans la relation (2-52) sont ceux de la configuration initiale.

II- 2.2.1 Composantes de déformations membrane – flexion :

En s'intéressant aux composantes de déformations dans le plan, nous avons :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\{g_\alpha\}^t \{u_M\}_{,\beta} + \{g_\beta\}^t \{u_M\}_{,\alpha}] \dots\dots\dots(2-53)$$

Les indices α et β varient de 1 à 2.

En remplaçant la relation (2-48) dans la relation précédente on obtient :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\{g_\alpha\}^t \{u_M\}_{,\beta} + \{g_\beta\}^t \{u_M\}_{,\alpha}) + \frac{1}{2} z (\{g_\alpha\}^t (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\beta} + \{g_\beta\}^t (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha}) \dots\dots\dots(2-54)$$

Si la coque est de faible épaisseur, les termes de second ordre en z deviennent négligeables :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + z\chi_{\alpha\beta} \dots\dots\dots(2-55)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\{a_\alpha\}^t \{u_M\}_{,\beta} + \{a_\beta\}^t \{u_M\}_{,\alpha}) \dots\dots\dots(2-56)$$

Le tenseur ($e_{\alpha\beta}$) représente le premier tenseur de déformation de la surface moyenne, il caractérise la déformation d'extension.

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\{a_\alpha\}^t (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\beta} + \{a_\beta\}^t (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha}) + \frac{1}{2} (\{n\}_{,\alpha} (\{u_M\}_{,\beta} + \{n\})_{,\beta} (\{u_M\})_{,\alpha}) \dots\dots\dots(2-57)$$

$\chi_{\alpha\beta}$ représente le second tenseur de déformation de la surface moyenne, il caractérise la déformation de flexion.

Dans le cas d'une plaque en flexion, il n'y a pas d'extension de la surface moyenne, et la normale reste inchangée :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \quad \{n\}_{,\alpha} = 0 \quad \{n\}_{,\beta} = 0$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\{a_\alpha\}^t (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\beta} + \{a_\beta\}^t (\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha} \right) \dots \dots \dots (2-58)$$

II- 2.2.2 Composantes du cisaillement transversal :

Les composantes du cisaillement transversal sont données par :

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3} = \{g_\alpha\}^t \{u_M\}_{,3} + \{g_3\}^t \{u_M\}_{,\alpha} \dots \dots \dots (2-59)$$

D'après (2-48) on peut écrire :

$$\{u_M\}_{,\alpha} = \{u_M\}_{,\alpha} + z(\{\theta\} \wedge \{n\})_{,\alpha} \dots \dots \dots (2-60)$$

$$\{u_M\}_{,3} = \frac{h}{2} \{\theta\} \wedge \{n\} \dots \dots \dots (2-61)$$

En remplaçant les relations (2-60) et (2-61) dans la relation (2-59), on obtient :

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{h}{2} \left(\{a_\alpha\}^t (\{\theta\} \wedge \{n\}) + \{n\}^t \{u_m\}_{,\alpha} \right) \dots \dots \dots (2-62)$$

La relation (2-62) conduit à des contraintes de cisaillement transversal incompatibles avec les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la coque. Pour remédier à cette situation, nous suivons le raisonnement utilisé au premier paragraphe, en faisant appel à des coefficients de correction.

II- 2.2.2.1 Déformation normale suivant l'épaisseur :

La relation (2-48) implique qu'un segment normal au plan moyen est inextensible :

$$\varepsilon_{33} = \{g_3\}^t \{u_M\}_{,3} = 0 \dots \dots \dots (2-63)$$

II- 2.3 Principe des travaux virtuels :

Considérons une coque élastique délimitée par une surface S constituée d'une partie (S_u) soumise à des déplacements imposés et d'une autre partie (S_f) soumise à des forces imposées:

$$S = S_u \cup S_f \quad S_u \cap S_f = \{\emptyset\}$$

Soit δu un champ des déplacements virtuels cinématiquement admissible définie sur la coque: $\delta u = 0$ sur (S_u). D'après le principe des travaux virtuels :

$$\delta w_i = \delta w_e + \delta w_j \dots \dots \dots (2-64)$$

Le premier membre représente le travail des forces intérieures, le second membre représente la somme des travaux des forces extérieures et des forces d'inertie.

Le travail des forces intérieures est donné par :

$$\delta w_i = \iiint_V S^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \dots\dots\dots(2-65)$$

S^{ij} représente les composantes contravariantes du tenseur des contraintes, $\delta \varepsilon_{ij}$ représente les composantes covariantes du tenseur des déformations du champ de déplacement virtuel.

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\{g_i\}^t \{\delta u_M\}_{,j} + \{g_j\}^t \{\delta u_M\}_{,i} \right) \dots\dots\dots(2-66)$$

Le travail des actions extérieures s'écrit sous la forme :

$$\delta w_e = \iiint_V \rho g \{i_g\}^t \{\delta u_M\} dV + \iint_S -P \{n\}^t \{\delta u_S\} dS + \sum_{i=1}^P \{F_i\}^t \{\delta u_{mi}\} + \{M_i\}^t \{\delta \theta_i\} + \iiint_V \{S^{\alpha\beta}\}_{t\theta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dV \dots\dots\dots(2-67)$$

Les termes du second membre représentent respectivement les travaux virtuels du poids propre, des forces surfaciques, des actions concentrées et des forces d'origine thermique.

Le travail des forces d'inerties peut s'exprimer sous la forme :

$$\delta W_j = \iiint_V -\rho \{\gamma_M\}^t \{\delta u_M\} dV \dots\dots\dots(2-68)$$

γ_M représente le vecteur accélération au point M.

II- 2.4 Loi de comportement :

La coque est supposée constituée de matériaux isotropes ou multicouches ; dans ce dernier cas chacune des couches est constituée de matériaux renforcés de fibres orientées d'un angle θ par rapport à l'axe local g_1 de la couche (figure 2.11). La normale $\{n\}$ à la surface moyenne constitue un axe d'orthotropie pour l'ensemble des couches.

On définit pour chaque couche trois repères :

- Le repère d'orthotropie $(1, t, n)$ dans lequel les contraintes normales sont découplées des déformations de cisaillement et inversement,
- Le repère (t_1, t_2, n) qui joue le rôle du repère (x, y, z) utilisé dans les plaques pour le calcul des facteurs de correction du cisaillement,
- Le repère paramétrique (g_1, g_2, g_3) dans lequel sont exprimées les contraintes et les déformations intervenant dans le principe des travaux virtuels.

Les vecteurs t_1 et t_2 sont définis de la manière suivante :

$$\{t_1\} = \frac{\{g_1\}}{|\{g_1\}|} = \frac{\{g_1\}}{\sqrt{g_{11}}}\dots\dots\dots(2-69)$$

$$\{t_1\} = \{n\} \wedge \{t_2\}\dots\dots\dots(2-70)$$

II- 2.4.1 Relations contraintes déformations dans le plan :

On se place dans l'hypothèse des contraintes planes : $S^{33} = 0$

Les relations reliant les contraintes (S^{11}, S^{22}, S^{12}) aux déformations ($\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$) en un point d'une couche sont données par la matrice H telle que :

$$\begin{Bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}\dots\dots\dots(2-71)$$

La matrice $[H]$ tient compte des caractéristiques mécaniques de la couche dans le repère d'orthotropie et de l'orientation de ce dernier par rapport au repère (t_1, t_2, n) .
En utilisant les matrices de passage entre les différents repères, on a :

$$[H] = [T_{CF}]^t [\check{H}_L] [T_{CF}]\dots\dots\dots(2-72)$$

$$[\check{H}_L] = [Q]^t [H_L] [Q]\dots\dots\dots(2-73)$$

Les matrices $[H_L]$ et $[Q]$ ont été définies au premier paragraphe, la matrice $[T_{CF}]$ est exprimée par :

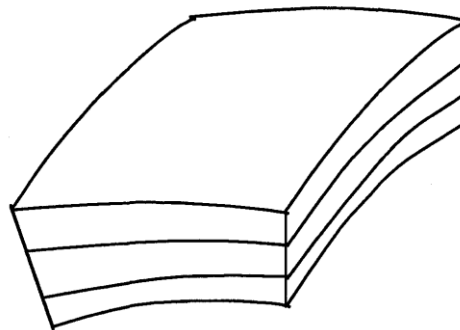


Figure 2.11a – Coque constituée de trois couches.

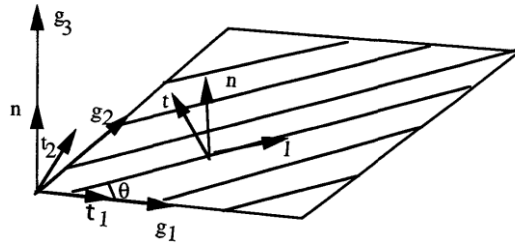


Figure 2.11b – Repères associés à une couche.

$$[T_{CF}] = \begin{bmatrix} A^2 & C^2 & A * C \\ B^2 & D^2 & B * D \\ 2 * A * B & 2 * C * D & A * D + C * B \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2-74)$$

Où :

$$A = \{g^1\}^t \{t_1\} \quad B = \{g^1\}^t \{t_2\}$$

$$C = \{g^2\}^t \{t_1\} \quad D = \{g^2\}^t \{t_2\}$$

Si on suppose que le matériau est isotrope et sujet à des variations thermiques, les relations (2-71) deviennent :

$$S^{\alpha\beta} = \frac{2Gv}{1-v} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} + 2G g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} - \frac{E}{1-v} \lambda_L g^{\alpha\beta} T \dots\dots\dots(2-75)$$

$$T(r, s, t) = \frac{T_{sup}(r, s) + T_{inf}(r, s)}{2} + \frac{t}{2} (T_{sup}(r, s) - T_{inf}(r, s))$$

Où T_{sup} et T_{inf} sont respectivement la variation de température sur les faces supérieure et inférieure de la coque. λ_L est le coefficient de dilatation linéaire du matériau.

II- 2.4.2 Relation contraintes déformations de cisaillement transversal :

Ces relations sont définies par la matrice $[H_C]$ tel que :

$$\begin{Bmatrix} S^{13} \\ S^{23} \end{Bmatrix} = [H_C] \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2-76)$$

$$[H_C] = [T_C]^t [\tilde{H}_{LT}] [T_C] \dots\dots\dots(2-77)$$

$$[\tilde{H}_{LT}] = [Q_1]^t [H_{LT}] [Q_1] \dots\dots\dots(2-78)$$

Les matrices $[H_{LT}]$ et $[Q_1]$ ont été définies dans le premier paragraphe, la matrice $[T_C]$ est définie par :

$$[T_C] = \begin{bmatrix} (\{g^1\}^t\{t_1\})(\{g^3\}^t\{n\}) & (\{g^2\}^t\{t_1\})(\{g^3\}^t\{n\}) \\ (\{g^1\}^t\{t_2\})(\{g^3\}^t\{n\}) & (\{g^2\}^t\{t_2\})(\{g^3\}^t\{n\}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2-79)$$

Les éléments diagonaux de la matrice $[\tilde{H}_{LT}]$ seront multipliés par les coefficients correctifs k_1 et k_2 définis ci dessous.

II- 2.4.3 Calcul des coefficients correcteurs :

Le calcul des coefficients k_1 et k_2 est semblable au calcul effectué au paragraphe (II-1.3). Pour cela on néglige l'effet de la courbure et on admet l'hypothèse de la flexion cylindrique [137], [166].

On s'intéresse tout d'abord à la flexion dans le plan (x, z); cherchons la position z_n du plan neutre par rapport au plan moyen. L'effort normal N_x étant nul, on peut écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} H_{11}(z - z_n) dz = 0 \dots\dots\dots(2-80)$$

Car :

$$\sigma_x = H_{11}(z - z_n)\chi_1 = H_{11}(z - z_n) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \dots\dots\dots(2-81)$$

H_{11} est tiré de la relation (2-14) du premier paragraphe.

$$z_n = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z H_{11} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} H_{11} dz} \dots\dots\dots(2-82)$$

La relation reliant le moment fléchissant à la contrainte σ_x est donnée par :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(z - z_n) \dots\dots\dots(2-83)$$

En remplaçant les relations (2-81) et (2-82) dans la relation (2-83) on obtient :

$$M_x = \chi_1 R_1 \dots\dots\dots(2-84)$$

$$R_1 = \int_{-h/2}^{h/2} H_{11}(z - z_n)^2 \dots\dots\dots(2-85)$$

En tenant compte de l'hypothèse de la flexion cylindrique ($\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$), l'équilibre locale donne:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(2-86)$$

En intégrant la relation (2-86) dans l'épaisseur et en utilisant les relations (2-81) et (2-84), on obtient :

$$\sigma_{xz} = - \int_{-h/2}^z \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_x}{\partial x} H_{11}(z - z_n) dz = \frac{T_{xz}}{R_1} g_1(z) \dots\dots\dots(2-87)$$

$$g_1(z) = - \int_{-h/2}^z H_{11}(z - z_n) dz \dots\dots\dots(2-88)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} dz = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_{xz}^2}{G_{xz}} dz = \frac{1}{2} \frac{T_{xz}^2}{R_1^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_1^2}{G_{xz}} dz \dots\dots\dots(2-89)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} T_{xz} \gamma_{xz} \dots\dots\dots(2-90)$$

Le coefficient de correction k_1 est donné par :

$$T_{xz} = k_1 \left(\int_{-h/2}^{h/2} G_{xz} dz \right) \gamma_{xz} = k_1 \bar{G}_{xz} \gamma_{xz} \dots\dots\dots(2-91)$$

$$\bar{G}_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{xz} dz \dots\dots\dots(2-92)$$

En remplaçant la relation (2-91) dans la relation (2-90) on obtient :

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{T_{xz}^2}{k_1 \bar{G}_{xz}} \dots\dots\dots(2-94)$$

En comparant U_1 à U_2 , on trouve pour le coefficient k_1 :

$$k_1 = \frac{R_1^2}{\bar{G}_{xz} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_1^2}{G_{xz}(z)} dz} \dots\dots\dots(2-94)$$

Par un raisonnement analogue, on peut déterminer le deuxième coefficient correcteur :

$$k_2 = \frac{R_2^2}{\bar{G}_{yz} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g_2^2}{G_{yz}(z)} dz} \dots\dots\dots(2-95)$$

Avec :

$$z_{n1} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z H_{22} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} H_{22} dz}, \quad R_2 = \int_{-h/2}^{h/2} H_{22} (z - z_n)^2 dz, \quad g_2(z) = - \int_{-h/2}^{h/2} H_{22} (z - z_n) dz$$

$$\bar{G}_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{yz} dz$$

Pour un matériau isotrope, on retrouve $k_1 = k_2 = \frac{5}{6}$ et la relation (2-76) devient :

$$S^{\alpha 3} = \frac{5}{6} G g^{\alpha\beta} g^{33} \gamma_{\beta 3}$$

Les coefficients correcteurs calculés dans ce paragraphe sont valables pour un empilement des couches quelconque.

II- 2.5 Modélisation par éléments finis :

Nous présentons dans ce paragraphe une discrétisation en utilisant l'élément Mitc4 [167] et l'élément Mitc9 [168]. On décrit en détail la formulation de l'élément Mitc4 et on donne la démarche pour la formulation de l'élément Mitc9.

II- 2.5.1 Élément Mitc4 :

L'élément Mitc4 est un élément à quatre nœuds non nécessairement coplanaires et à cinq degrés de liberté par nœud. Le comportement en membrane et en flexion est identique à l'élément classique Q4. Le comportement en cisaillement transversal est basé sur la construction d'un champ de substitution en utilisant le schéma de l'élément Mitc4 plaque. Par conséquent, l'élément Mitc4 coque est identique à l'élément Mitc4 plaque quand il est appliqué à une plaque en flexion.

II- 2.5.1.1 Approximation de la géométrie et des variables cinématiques :

Soit m un point appartenant à un élément, de coordonnées (X, Y, Z), on peut écrire :

$$\begin{aligned} X(r, s) &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) X_k \\ Y(r, s) &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) Y_k \\ Z(r, s) &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) Z_k \\ \{n\} &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \{n^k\} \end{aligned} \dots\dots\dots(2-96)$$

(X_k, Y_k, Z_k) représentent les coordonnées du nœud k de l'élément. $\{n^k\}$ représente la normale unitaire à la surface moyenne au nœud k ; le calcul de ce vecteur sera précisé par la suite; h_k est la fonction d'interpolation associée au nœud k .

Soit M un point situé dans l'épaisseur, on a d'après (2-96) :

$$\begin{Bmatrix} X(r, s, t) \\ Y(r, s, t) \\ Z(r, s, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix} + \frac{th}{2} \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) \begin{Bmatrix} n_x^k \\ n_y^k \\ n_z^k \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2-97)$$

II- 2.5.1.2 Calcul de la normale :

Les vecteurs tangents aux lignes des coordonnées de la surface au nœud k sont donnés par :

$$\begin{aligned} \{a_1^k\} &= \frac{\partial X}{\partial r}(r_k, s_k, 0)\{i\} + \frac{\partial Y}{\partial r}(r_k, s_k, 0)\{j\} + \frac{\partial Z}{\partial r}(r_k, s_k, 0)\{k\} \\ \{a_2^k\} &= \frac{\partial X}{\partial s}(r_k, s_k, 0)\{i\} + \frac{\partial Y}{\partial s}(r_k, s_k, 0)\{j\} + \frac{\partial Z}{\partial s}(r_k, s_k, 0)\{k\} \end{aligned} \dots\dots\dots(2-98)$$

$\{i\}$, $\{j\}$ et $\{k\}$ sont les vecteurs unitaires du système d'axes (O, X, Y, Z) .

Le vecteur normal unitaire est donné par :

$$\{n_e^k\} = \frac{\{a_1^k\} \wedge \{a_2^k\}}{|\{a_1^k\} \wedge \{a_2^k\}|} \dots\dots\dots(2-99)$$

Ce vecteur est généralement discontinu quand on passe d'un élément à un autre. Pour obtenir une approximation de ce vecteur, on effectue une moyenne des vecteurs normaux aux éléments entourant le nœud k :

$$\{n^k\} = \frac{\sum_e \{n_e^k\}}{|\sum_e \{n_e^k\}|} \dots\dots\dots(2-100)$$

L'approximation des grandeurs cinématiques est donnée d'après (2-48) par l'expression :

$$\{u_M\} = \sum_{k=1}^4 h_k \{u^k\} + \frac{th}{2} \sum_{k=1}^4 h_k (\{\theta\} \wedge \{n\})^k \dots\dots\dots(2-101)$$

Avec :

$$(\{\theta\} \wedge \{n\})^k = -\alpha_k \{e_2^k\} + \beta_k \{e_1^k\} \dots\dots\dots(2-102)$$

α_k et β_k représentent la rotation de la normale $\{n^k\}$ autour des deux vecteurs orthonormés $\{e_1^k\}$ et $\{e_2^k\}$ appartenant au plan tangent à la coque au nœud k . Du fait que ces vecteurs ne sont pas uniques, un des choix possibles, consiste à passer par une matrice de rotation $[QR]$ [120] définie de la manière suivante :

$$[QR] = \begin{bmatrix} c + \frac{1}{1+c} (n_Y^k)^2 & -\frac{1}{1+c} n_X^k n_Y^k & n_X^k \\ -\frac{1}{1+c} n_X^k n_Y^k & c + \frac{1}{1+c} (n_X^k)^2 & n_Y^k \\ -n_X^k & -n_Y^k & n_Z^k \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2-103)$$

Avec :

$$c = \{n^k\}^t \{k\} = n_Z^k$$

Cette matrice représente la matrice de passage du repère cartésien au repère nodal au nœud k :

$$[QR]\{i\} = \{e_1^k\} \quad [QR]\{j\} = \{e_2^k\} \quad [QR]\{k\} = \{n^k\}$$

Dans le cas particulier où le vecteur $\{n^k\}$ est opposé au vecteur $\{k\}$, on trouve $c = -1$, on prend alors pour $[QR]$ l'expression :

$$[QR] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En projetant la relation (1-101) sur les axes du système cartésien, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} U(r, s, t) \\ V(r, s, t) \\ W(r, s, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 h_k \begin{Bmatrix} U^k \\ V^k \\ W^k \end{Bmatrix} + \frac{th}{2} \sum_{k=1}^4 h_k \left(-\alpha_k \begin{Bmatrix} e_{2X}^k \\ e_{2Y}^k \\ e_{2Z}^k \end{Bmatrix} + \beta_k \begin{Bmatrix} e_{1X}^k \\ e_{1Y}^k \\ e_{1Z}^k \end{Bmatrix} \right) \dots\dots\dots(2-104)$$

Ou, sous une forme équivalente :

$$\begin{Bmatrix} U_M \\ V_M \\ W_M \end{Bmatrix} = [N]\{\hat{u}\}$$

Avec :

$$[N] = \begin{bmatrix} h_k & 0 & 0 & -\frac{th}{2} h_k e_{2X}^k & \frac{th}{2} h_k e_{1X}^k \\ 0 & h_k & 0 & -\frac{th}{2} h_k e_{2Y}^k & \frac{th}{2} h_k e_{1Y}^k \\ 0 & 0 & h_k & -\frac{th}{2} h_k e_{2Z}^k & \frac{th}{2} h_k e_{1Z}^k \end{bmatrix}$$

$$\langle \hat{u} \rangle = \langle \dots \dots | U_k; V_k; W_k; \alpha_k; \beta_k | \dots \dots \rangle \quad k = 1 \text{ à } 4$$

Ce vecteur regroupe les degrés de liberté de l'élément.

II- 2.5.1.3 Matrice de rigidité élémentaire :

On décompose le travail virtuel des forces intérieures en deux parties : la première représente la contribution des efforts de membrane et de flexion, et la seconde concerne la contribution des efforts de cisaillement transversal.

$$\iiint_{V_e} S^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iiint_{V_e} S^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dV + \iiint_{V_e} S^{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3} dV \dots \dots \dots (2-105)$$

La partie membrane-flexion s'écrit :

$$\iiint_{V_e} S^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dV = \iiint_{V_e} \langle \delta \varepsilon_{11} \quad \delta \varepsilon_{22} \quad \delta \gamma_{12} \rangle \begin{Bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \end{Bmatrix} dV \dots \dots \dots (2-106)$$

D'après les relations (2-54) et (2-104), on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [B_{mf}] \{ \hat{u} \} \dots \dots \dots (2-107)$$

La matrice de déformation $[B_{mf}]$ est donnée par l'expression :

$$[B_{mf}] = \begin{bmatrix} B_{11}^k & B_{12}^k & B_{13}^k & B_{14}^k & B_{15}^k \\ B_{21}^k & B_{22}^k & B_{23}^k & B_{24}^k & B_{25}^k \\ B_{31}^k & B_{32}^k & B_{33}^k & B_{34}^k & B_{35}^k \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2-108)$$

$$B_{11}^k = h_{k,r} g_{1X} \quad B_{12}^k = h_{k,r} g_{1Y} \quad B_{13}^k = h_{k,r} g_{1Z}$$

$$B_{14}^k = -\frac{th}{2} h_{k,r} \{g_1\}^t \{e_2^k\} \quad B_{15}^k = \frac{th}{2} h_{k,r} \{g_1\}^t \{e_1^k\} \quad B_{21}^k = h_{k,s} g_{2X}$$

$$\begin{aligned}
 B_{22}^k &= h_{k,s}g_{2Y} & B_{23}^k &= h_{k,s}g_{2Z} & B_{24}^k &= -\frac{th}{2}h_{k,s}\{g_2\}^t\{e_2^k\} \\
 B_{25}^k &= \frac{th}{2}h_{k,s}\{g_2\}^t\{e_1^k\} & B_{31}^k &= h_{k,s}g_{1X} + h_{k,r}g_{2X} & B_{32}^k &= h_{k,s}g_{1Y} + h_{k,r}g_{2Y} \\
 B_{32}^k &= h_{k,s}g_{1Y} + h_{k,r}g_{2Y} & B_{34}^k &= -\frac{th}{2}(h_{k,s}\{g_1\}^t\{e_2^k\} + h_{k,r}\{g_2\}^t\{e_2^k\}) \\
 B_{35}^k &= \frac{th}{2}(h_{k,s}\{g_1\}^t\{e_1^k\} + h_{k,r}\{g_2\}^t\{e_1^k\})
 \end{aligned}$$

La relation contrainte-déformation s'exprime sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \end{Bmatrix} = [H][B_{mf}]\{\hat{u}\} \dots \dots \dots (2-109)$$

En remplaçant les relations (2-107) et (2-109) dans (2-106), on obtient la matrice de rigidité correspondant aux efforts de membrane et de flexion :

$$[K_{mf}] = \iiint_{Ve} [B_{mf}]^t [H] [B_{mf}] dV \dots \dots \dots (2-110)$$

Le travail des efforts de cisaillement transversal s'écrit sous la forme :

$$\iiint_{Ve} S^{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3} dV = \iiint_{Ve} \langle \delta \gamma_{13} \quad \delta \gamma_{23} \rangle \begin{Bmatrix} S^{13} \\ S^{23} \end{Bmatrix} dV \dots \dots \dots (2-111)$$

Pour contrôler le blocage en cisaillement, Bathe et Dvorkin [167] proposent d'utiliser le champ de substitution utilisé pour l'élément plaque Mitc4 :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{13} &= \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{13}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{13}^C \\
 \gamma_{23} &= \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{23}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{23}^B \dots \dots \dots (2-112)
 \end{aligned}$$

Les termes γ_{13}^A γ_{13}^C γ_{23}^D γ_{23}^B sont calculés à partir des relations (2-62) et (2-100) aux points A, B, C, D. Ces points ont été définis dans le premier paragraphe.

En remplaçant chaque terme par sa valeur dans (2-111) on obtient l'expression :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = [B_c]\{\hat{u}\} \dots \dots \dots (2-113)$$

La matrice $[B_c]$ a la forme suivante :

$$[B_c] = \begin{bmatrix} B_{c11}^k & B_{c12}^k & B_{c13}^k & B_{c14}^k & B_{c15}^k \\ B_{c21}^k & B_{c22}^k & B_{c23}^k & B_{c24}^k & B_{c25}^k \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2-114)$$

$$B_{c11}^k = \frac{1}{2}(1+s)h_{k,r}^A g_{3X}^A + \frac{1}{2}(1-s)h_{k,r}^C g_{3X}^C$$

$$B_{c12}^k = \frac{1}{2}(1+s)h_{k,r}^A g_{3Y}^A + \frac{1}{2}(1-s)h_{k,r}^C g_{3Y}^C$$

$$B_{c13}^k = \frac{1}{2}(1+s)h_{k,r}^A g_{3Z}^A + \frac{1}{2}(1-s)h_{k,r}^C g_{3Z}^C$$

$$B_{c14}^k = \frac{-h}{4} \left((1+s)h_k^A \{a_1^A\}^t \{e_2^k\} + (1-s)h_k^C \{a_1^C\}^t \{e_2^k\} \right)$$

$$B_{c15}^k = \frac{h}{4} \left((1+s)h_k^A \{a_1^A\}^t \{e_1^k\} + (1-s)h_k^C \{a_1^C\}^t \{e_1^k\} \right)$$

$$B_{c21}^k = \frac{1}{2}(1+r)h_{k,s}^D g_{3X}^D + \frac{1}{2}(1-r)h_{k,s}^B g_{3X}^B$$

$$B_{c22}^k = \frac{1}{2}(1+r)h_{k,s}^D g_{3Y}^D + \frac{1}{2}(1-r)h_{k,s}^B g_{3Y}^B$$

$$B_{c23}^k = \frac{1}{2}(1+r)h_{k,s}^D g_{3Z}^D + \frac{1}{2}(1-r)h_{k,s}^B g_{3Z}^B$$

$$B_{c24}^k = \frac{-h}{4} \left((1+r)h_k^D \{a_2^D\}^t \{e_2^k\} + (1-r)h_k^B \{a_2^B\}^t \{e_2^k\} \right)$$

$$B_{c25}^k = \frac{h}{4} \left((1+r)h_k^D \{a_2^D\}^t \{e_1^k\} + (1-r)h_k^B \{a_2^B\}^t \{e_1^k\} \right)$$

La relation contrainte-déformation donne :

$$\begin{Bmatrix} S^{13} \\ S^{23} \end{Bmatrix} = [H_c][B_c]\{\hat{u}\} \dots\dots\dots(2-115)$$

D'où l'expression de la matrice de rigidité due au cisaillement transversal :

$$[K_c] = \iiint_{V_e} [B_c]^t [H_c] [B_c] dV \dots\dots\dots(2-116)$$

II- 2.5.1.4 Matrice de masse élémentaire :

Le travail virtuel des forces d'inertie s'écrit sous la forme :

$$\delta W_j^e = - \iiint_{V_e} \rho \{\delta u_M\}^t \{\gamma_M\} dV \dots\dots\dots(2-117)$$

En remplaçant la relation (2-103) dans (2-117), on obtient :

$$\delta W_j^e = -\langle \partial \hat{u} \rangle [M] \{ \ddot{u} \} \dots \dots \dots (2-118)$$

Avec :

$$[M] = \iiint_{V^e} \rho [N]^t [N] dV \dots \dots \dots (2-119)$$

[M] est la matrice de masse cohérente de l'élément.

II- 2.5.1.5 Travail des forces extérieures :

Le travail des forces extérieures est donné par :

$$\delta w_e = \{ \delta \hat{u} \}^t (\{ R_p \} + \{ R_g \} + \{ R_{th} \}) \dots \dots \dots (2-120)$$

Les termes du second membre de (2-120) représentent respectivement la contribution des forces surfaciques, du poids propre et des contraintes thermiques :

$$\{ R_p \} = \iint_{S^e} -P \{ N_p \} \sqrt{a} dr ds$$

$$\langle N_p \rangle = \langle n_x h_k \quad n_y h_k \quad n_z h_k \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\{ R_g \} = \iiint_{V^e} \rho g \{ \check{R}_g \} dV$$

$$\langle \check{R}_g \rangle = \langle \quad | i_{gx} h_k \quad i_{gy} h_k \quad i_{gz} h_k \quad g_1 \quad g_2 \quad | \quad \rangle$$

$$g_1 = -\frac{th}{2} h_k (\{ i_g \}^t \{ e_2^k \})$$

$$g_2 = \frac{th}{2} h_k (\{ i_g \}^t \{ e_1^k \})$$

{i_g} est le vecteur directeur de la pesanteur, ρg représente le poids volumique du matériau constituant la coque.

$$\{ R_{th} \} = \iiint_{V^e} \frac{E \lambda_L}{1 - \nu} [B_{mf}]^t \begin{Bmatrix} Tg^{11} \\ Tg^{22} \\ Tg^{12} \end{Bmatrix} dV$$

II- 2.5.2 Élément Mitc9 :

Les éléments à faible ordre d'interpolation tel que l'élément Mitc4 nécessitent un maillage fin pour modéliser correctement la géométrie, et souffrent d'une convergence lente (formulation déplacement) dans le cas où les efforts de membranes sont prépondérants. Afin d'améliorer la modélisation tant géométrique que mécanique, des éléments d'ordre supérieurs ont été proposés tels que les éléments à huit, neuf, douze et seize nœuds [87]. Ces éléments sont bons sur le plan de la représentation géométrique, mais ils doivent s'affranchir des blocages en cisaillement et en membrane [121], [163], [169]. Ce dernier type de blocage n'affecte pas l'élément Mitc4.

Pour remédier au blocage en membrane, différentes approches sont utilisées. Parmi les plus connues, on peut citer la technique de l'intégration réduite et sélective, la formulation mixte, la décomposition modale, et l'utilisation d'un champ de substitution. La technique de l'intégration réduite et sélective améliore le comportement dans certains cas mais introduit de modes parasites. En revanche, elle ne peut pas être appliquée en présence de couplage entre les termes de membrane et de flexion. A cela s'ajoute le risque de blocage quand les conditions aux limites sont très rigides. La formulation mixte quoique intéressante dans la prédiction des sollicitations exige une certaine cohérence dans la représentation des sollicitations et des déplacements. Des travaux récents [170], [245] utilisant des principes variationnels mixtes modifiés, ont aboutis à des éléments de membranes robustes libres de blocage moyennant une certaine modification.

L'utilisation des champs de substitution pour les composantes de déformation est une technique très suivie à l'heure actuelle : Huang et Hinton [163] ont développé un élément à neuf nœuds en se servant d'un champ de substitution pour les composantes de membrane après leur séparation de celles de flexion dans un système de coordonnées cartésiennes locales ; Bathe et Dvorkin [121] ont utilisé des interpolations mixtes des composantes tensorielles dans le plan pour l'élément Mitc8. Jank et Pinsky [171] ont de leur part construit un élément à neuf nœuds doté d'un champ de substitution pour les composantes covariantes de déformation dans le plan.

L'élément Mitc9 proposé par Bucelem et Bathe [168] pour le calcul non linéaire des coques est basé sur la technique des champs de substitution. Nous présentons brièvement, ci-après, la construction de cet élément. Il s'agit d'un élément à neuf nœuds identique à l'élément Q9 pour l'interpolation des variables cinématiques. Sa matrice de rigidité est construite à partir des champs de substitution adéquats aussi bien pour les composantes dans le plan que pour les composantes de cisaillement transversal.

II- 2.5.2.1 Interpolation des composantes ε_{rr} et ε_{rt} :

Les composantes de déformation sont définies par interpolation de leurs valeurs calculées aux points de la figure (2.12a). Cette interpolation est linéaire suivant r et quadratique suivant s :

$$\varepsilon_{rr}(r, s, t) = \sum_{i=1}^6 \check{h}_{ir}(r, s) \varepsilon_{rr}^i(r_i, s_i, t)$$

$$\varepsilon_{rt}(r, s) = \sum_{i=1}^6 \check{h}_{ir}(r, s) \varepsilon_{rt}^i(r_i, s_i)$$

Les fonctions d'interpolation associées sont :

$$\check{h}_{1r} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right)$$

$$\check{h}_{2r} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right)$$

$$\check{h}_{3r} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(\frac{s}{b} - 1\right)$$

$$\check{h}_{4r} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{b}\right) \left(\frac{s}{b} - 1\right)$$

$$\check{h}_{5r} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{s}{b}\right)^2\right)$$

$$\check{h}_{6r} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{s}{b}\right)^2\right)$$

II- 2.5.2.2 Interpolation des composantes ε_{ss} et ε_{st} :

On utilise pour ces composantes le schéma inverse du schéma précédent : l'interpolation est linéaire suivant s et quadratique suivant r . Les points d'interpolations sont donnés dans la figure (2.12b) :

$$\varepsilon_{ss}(r, s, t) = \sum_{i=1}^6 \check{h}_{is}(r, s) \varepsilon_{ss}^i(r_i, s_i, t)$$

$$\varepsilon_{st}(r, s) = \sum_{i=1}^6 \check{h}_{is}(r, s) \varepsilon_{st}^i(r_i, s_i)$$

Les fonctions d'interpolation associées sont :

$$\begin{aligned}
\check{h}_{1s} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{b}\right) \\
\check{h}_{2s} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(\frac{r}{b} - 1\right) \\
\check{h}_{3s} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(\frac{r}{b} - 1\right) \\
\check{h}_{4s} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{s}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(\frac{r}{b} + 1\right) \\
\check{h}_{5s} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right) \\
\check{h}_s &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{a}\right) \left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

II- 2.5.2.3 Interpolations des composantes ε_{rs} :

Dans ce cas on utilise les quatre points de la figure (2.12c), par conséquent l'interpolation est bilinéaire suivant r et s .

$$\varepsilon_{rs}(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 \check{h}_{irs}(r, s) \varepsilon_{rs}^i(r_i, s_i, t)$$

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{aligned}
\check{h}_{1rs} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right) \\
\check{h}_{2rs} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(\frac{s}{a} + 1\right) \\
\check{h}_{3rs} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{a}\right) \\
\check{h}_{4rs} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{b}\right) \left(1 - \frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

Les composantes des déformations aux points d'interpolation sont calculées à partir des relations (2-54) et (2-62) et des formules d'interpolation de type (2-104) utilisant les fonctions d'interpolation de l'élément Q9.

La construction des matrices et vecteurs élémentaires est effectuée selon la démarche utilisée pour l'élément Mitc4. L'intégration numérique est effectuée avec 3x3x2 points dans les directions r , s , et t .

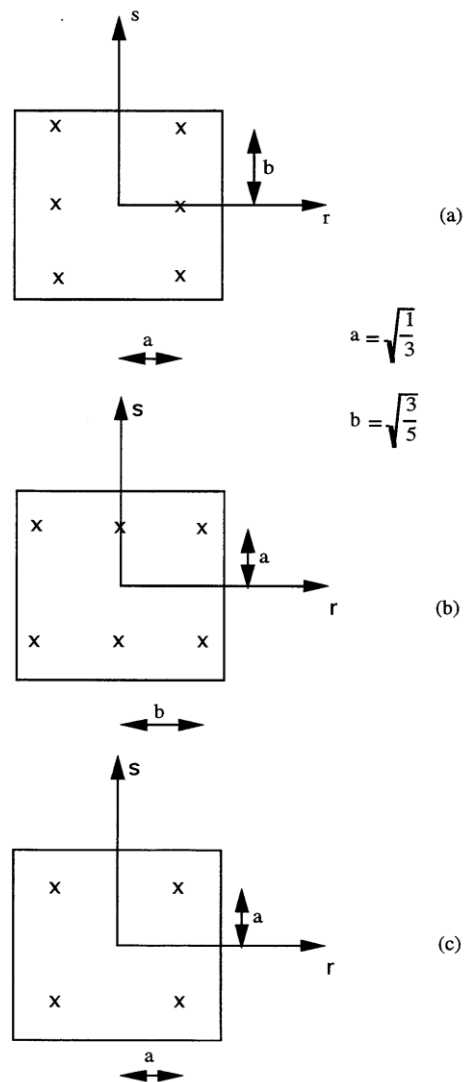


Figure 2.12 – Élément Mitc9, points d'interpolations des composantes du tenseur de déformation

- a) composantes ε_{rr} et ε_{rt}
- b) composantes ε_{ss} et ε_{st}
- c) composantes ε_{rs}

II- 3 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons émis les hypothèses de base et introduit les principales expressions et notations relatives à la discrétisation par la méthode des éléments finis du modèle variationnel en déplacements et à la résolution du système fondamental obtenu suite à la discrétisation.

Notre but de se doter des outils et des techniques de base nécessaires à l'élaboration des modèles de plaques et de coques tant minces qu'épaisses est enfin atteint. Nous nous abstenons ici de discuter les hypothèses et le champ d'application et les mérites de chacun de ces modèles.

Cela sera fait dans le chapitre subséquent et plus concrètement dans le chapitre "Résultats et discussions".

Chapitre III
Non linéarités matérielle et
géométrique

Chapitre 3

Non linéarités matérielle et géométrique

Le matériau béton peut être observé à différentes échelles, de l'échelle microscopique à l'échelle de la structure. L'échelle microscopique du béton non fissuré est donnée par la dimension de ses plus grandes hétérogénéités, les agrégats. En revanche, la fissuration du matériau peut intervenir à toutes les échelles, de celle des agrégats à celle de la structure, qui peut présenter des fissures franches nettement localisées. Cet aspect multi-échelle de la fissuration rend pratiquement impossible la construction complète d'un modèle partant du microscopique pour arriver à un comportement macroscopique, à l'aide de techniques d'homogénéisation. A cet aspect multi-échelle s'ajoute un aspect multi-composants du béton (pâte de ciment durcie, granulats et liaisons pâte de ciment-granulats) [173].

Pour modéliser cette fissuration, il faut d'abord supposer qu'une description continue des phénomènes discontinus d'une matière hétérogène est possible à l'échelle macroscopique de la structure, en postulant :

- L'hypothèse de continuité,
- L'hypothèse d'homogénéité de la matière (dans un sens "statistique").

L'hypothèse de continuité signifie que les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre, tout en faisant abstraction de la constitution intime de la matière. On suppose ainsi que le comportement non-linéaire du matériau est principalement imputable au développement d'une microfissuration à une échelle inférieure : les variables utilisées pour modéliser ce comportement non-linéaire rendront alors compte à l'échelle macroscopique des effets de cette microfissuration.

Les lois de comportement appliquées à l'échelle macroscopique pour le béton diffèrent en termes de variables d'état. Les premiers modèles proposés ont été des relations élastiques non linéaires, reliant contraintes et déformations [174].

Le but de cette partie n'est pas de détailler les divers modèles pour le béton. Il s'agit plutôt de tracer les grandes lignes utilisées pour modéliser, à l'échelle macroscopique (figure 3.1)

- L'apparition et l'évolution des déformations permanentes,
- Le phénomène d'adoucissement et
- Le phénomène d'assouplissement du béton.

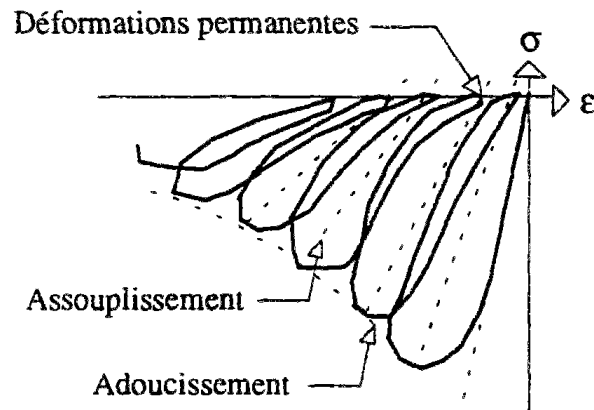


Figure 3.1 – Courbe uni-axiale de compression simple sous chargement cyclique [175].

III- 1 Non linéarité matérielle :

Dans la théorie de l'élastoplasticité appliquée à la description du comportement du béton, les déformations permanentes observées lors de déchargements sont attribuées à un (ou plusieurs) mécanisme(s) plastique(s). L'incrément de déformations totales est décomposé en une partie élastique et une partie plastique (ou plutôt permanente) :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \dots\dots\dots(3-1)$$

Et l'incrément de contraintes est calculé par :

$$d\sigma = C_0 : (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \dots\dots\dots(3-2)$$

Avec C_0 le tenseur de comportement élastique.

Les modèles existants pour le béton diffèrent en termes :

- De la définition des domaines d'élasticité C_E initial et actuel,
- De la loi d'évolution des déformations permanentes,
- Du comportement écrouissable.

Dans la théorie élastoplastique, c'est

La notion de la surface de charge, qui répond à la question "quand" y a-t-il évolution des déformations plastiques ?

La règle d'écoulement répondant à la question "comment" s'effectuent ces évolutions ?

La notion d'écrouissage, liant le "quand" et le "comment".

Dans les ouvrages [176], [177] et [178], la notion de loi de comportement est développée dans un cadre thermodynamique global.

Pour les modèles élastoplastiques existants pour le béton, on se reporte aux travaux de synthèse plus complets, notamment ceux de Chen [174], repris et complétés dans Chen et Han [179], d'Eberhardsteiner et al. [180] ou de Labbane et al. [181], où se trouve l'application de tous les éléments de la théorie rappelée brièvement ci-dessous.

III- 1.1 Critère de plasticité :

Le domaine d'élasticité C_E du matériau peut être défini comme un sous-ensemble de l'espace \mathbb{R}^6 des contraintes, sous la forme d'une fonction de charge $f(\sigma)$. Pour un matériau plastique parfait ou pour un matériau vierge, nous notons :

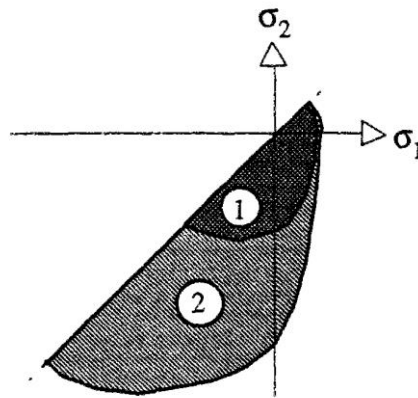


Figure 3.2 – Domaines d'élasticité du béton initial (1) et actuel (2).

$$\sigma \in C_E \Leftrightarrow f(\sigma) \leq 0 \dots \dots \dots (3-3)$$

Dans le cas d'un matériau écouissable, le domaine d'élasticité C_E n'est plus fixe {figure 3.2}. Il dépend également de paramètres d'écrouissage Z , scalaires et/ou tensoriels :

$$\sigma \in C_E \Leftrightarrow f(\sigma, z) \leq 0 \dots \dots \dots (3-4)$$

Il n'y a évolution des variables plastiques que lorsque le point de charge est situé sur la frontière du domaine d'élasticité.

III- 1.2 Règle d'écoulement :

Le critère de plasticité défini par la fonction de charge $f(\sigma, z)$ répond à la question, "quand" y a-t-il apparition et évolution des déformations plastiques. "Comment" s'effectue cette évolution, est de la règle d'écoulement.

Si l'on introduit une fonction convexe $g(\sigma, z)$, appelée potentiel plastique, l'évolution des déformations plastiques est supposée vérifier les relations suivantes :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \dots \dots \dots (3-5)$$

Avec
$$\begin{cases} d\lambda \geq 0 & \text{si } f = 0 \text{ et } df = 0 \\ d\lambda = 0 & \text{si } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ et } df < 0 \end{cases}$$

Où $d\lambda$ est le multiplicateur plastique, et :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi \dots \dots \dots (3-6)$$

Si $f(\sigma, z) = g(\sigma, z)$, la règle d'écoulement est associée, et la direction des incréments de déformations plastiques est normale à la frontière du domaine d'élasticité actuelle C_E (figure 3.3a).

Lorsque $f(\sigma, z) \neq g(\sigma, z)$, la règle d'écoulement est non associée (figure 3.3b). Le matériau est dit non standard [182]. Dans un cadre thermodynamique, ε^p est une variable d'état interne, et $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ représente la direction suivie par $d\varepsilon^p$, parmi les directions possibles.

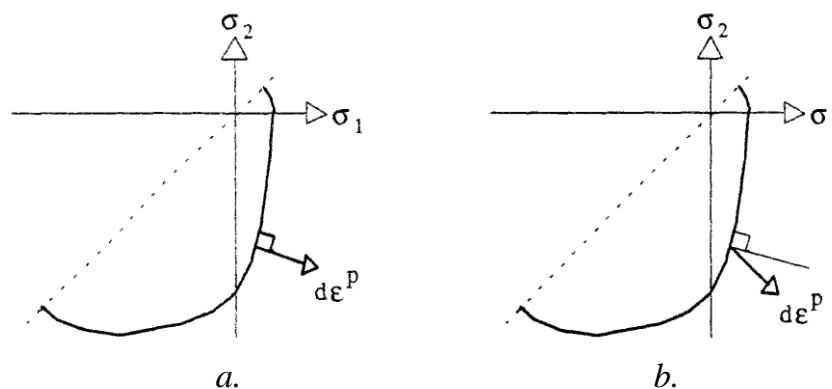


Figure 3.3 – Illustration de la règle d'écoulement :
a. associée / b. non associée

III- 1.2.1 Dissipation intrinsèque :

L'inégalité fondamentale locale de Clausius-Duhem pour des évolutions isothermes s'écrit :

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} \geq 0 \dots \dots \dots (3-7)$$

L'équation précédente exprime la non-négativité de la dissipation intrinsèque avec Ψ , l'énergie libre volumique, fonction des variables d'état thermodynamique. Dans le cas d'un matériau élastoplastique écrouissable, on a :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, \varepsilon^p, \chi) = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^p) : C_0 : (\varepsilon - \varepsilon^p) + U(\chi) \dots \dots \dots (3-8)$$

D'où :

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \sigma : \dot{\varepsilon}^p + \frac{\partial U}{\partial \chi} \dot{\chi} \dots \dots \dots (3-9)$$

Où χ sont les variables d'écrouissage et $U(\chi)$ l'énergie bloquée par écrouissage. Utilisant (3-9) dans (3-7), la non-négativité de la puissance intrinsèque dissipée (en chaleur) s'écrit [178]:

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial U}{\partial \chi} \dot{\chi} \geq 0 \dots \dots \dots (3-10)$$

Où le premier terme de cette équation est la puissance plastique Φ^p et le second est dû aux phénomènes d'écrouissage. On déduit de l'expression (3-10) de la dissipation intrinsèque, que les forces thermodynamiques associées dans la dissipation aux vitesses du tenseur des déformations plastiques et des variables d'écrouissage, sont respectivement le tenseur de contraintes σ et le terme $-\frac{\partial U}{\partial \chi}$, appelé force d'écrouissage ξ :

$$z = \xi \quad \text{et} \quad \xi = -\frac{\partial U}{\partial \chi} \dots \dots \dots (3-11)$$

Dans (3-8) l'énergie bloquée $U(\chi)$ est supposée indépendante de l'état de déformation ε .

Enfin, l'évolution de ε^p est donnée par la règle d'écoulement (3-5). L'évolution de χ est donnée par la loi d'écrouissage.

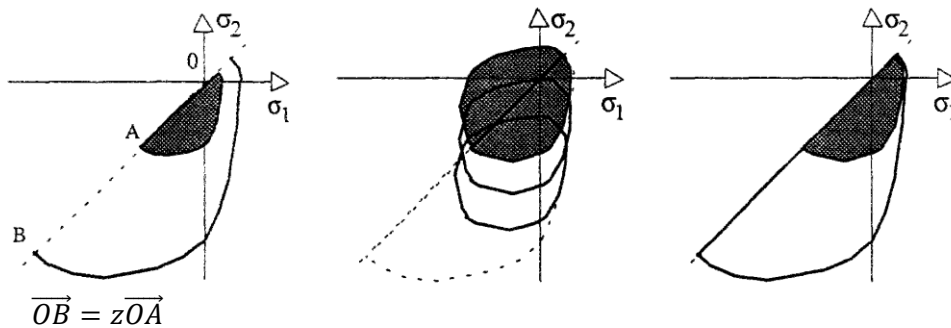
III- 1.2.2 Loi d'écrouissage :

Le domaine d'élasticité initiale est donné par l'expérience. Son évolution dans l'espace des contraintes est décrite par les modèles d'écrouissage. La dépendance du domaine d'élasticité actuel dans l'espace \mathbb{R}^6 de contraintes permet l'identification expérimentale des paramètres d'écrouissage Z .

En vue de leur identification expérimentale, les modèles font intervenir un nombre limité de paramètres d'écrouissage. On peut citer :

- Le modèle d'écroissage isotrope, où un seul paramètre scalaire z définit une transformation homothétique du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes ;
- Le modèle d'écroissage cinématique, où un seul paramètre tensoriel Z définit la translation des frontières du domaine d'élasticité.

Les différents modèles et leur combinaison possible sont schématisés sur la figure 3.4.



a. Ecroissage isotrope

b. Ecroissage cinématique

c. Ecroissage isotrope et cinématique

Figure 3.4 – Modèles d'écroissage

Supposons déterminée une fonction $Z = Z(q)$ représentative de l'évolution du domaine d'élasticité C_E (équation (3-4)). q regroupe les variables mesurables contrôlant l'évolution des paramètres d'écroissage Z . Il n'y aura possibilité d'évolution élastoplastique, avec modification de l'état d'écroissage, que si un point de charge actuel est situé sur la frontière du domaine d'élasticité ($f = 0$), qu'il entraîne avec lui ($df = 0$), tout en le modifiant. On pourrait déterminer la relation supplémentaire pour l'écroissage uniquement à partir de la relation de consistance (3-6) sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial Z} dZ = \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial q} dq = -\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = -d\lambda H \dots \dots \dots (3-12)$$

Où H est le module d'écroissage actuel. Une relation $q = q(\epsilon^p)$, avec la règle d'écoulement (3-5) conduit à :

$$H = -\frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial q} \frac{\partial Z}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \dots \dots \dots (3-13)$$

Dans le cadre de la thermodynamique, où les paramètres d'écroissage Z sont les forces d'écroissage ξ , associées aux variables d'état internes χ (équation (3-11)), l'évolution des variables d'écroissage est décrite par une règle d'écroissage, en supposant que l'on peut définir un potentiel h tel que :

$$d\chi = d\lambda \frac{\partial h}{\partial \xi} \dots \dots \dots (3-14)$$

Où $\frac{\partial h}{\partial \xi}$, représente la direction prise par $d\chi$, parmi les directions possibles. Compte tenu des relations (3-8) et (3-14), la relation de consistance $df = 0$, s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} \right) d\chi = -\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = -d\lambda H \dots \dots \dots (3-15)$$

D'où l'expression de H :

$$H = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} \dots \dots \dots (3-16)$$

Pour un point de charge situé sur la frontière d'élasticité actuelle ($f = 0$), on peut distinguer le cas de l'écroutissage positif, défini par $H > 0$, de l'écroutissage négatif, défini par $H < 0$, avec quelques implications sur la règle d'écoulement concernant le critère de charge / décharge :

$$\text{Pour } H > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda > 0 \text{ si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma > 0 \\ d\lambda = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \leq 0 \end{array} \right. \dots \dots \dots (3-17a)$$

$$\text{Pour } H < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda > 0 \\ \text{ou} \\ d\lambda = 0 \end{array} \right\} \text{ si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma < 0 \dots \dots \dots (3-17b)$$

$$d\lambda = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou si } f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = 0$$

On note que l'écroutissage négatif (équation (3-17b)) pose une difficulté inhérente de modélisation : si le pilotage s'effectue en incrément de contraintes $d\sigma$, et que cet incrément est tel que le nouveau point de charge $\sigma + d\sigma$ rentre à l'intérieur du domaine d'élasticité actuel C_E , il est impossible de distinguer une charge plastique ($d\lambda > 0$) d'une décharge élastique ($d\lambda = 0$), figures 3.5. Par conséquent, un pilotage en incréments de déformations $d\varepsilon$ est nécessaire pour déterminer le domaine d'élasticité actuel d'un matériau adoucissant.

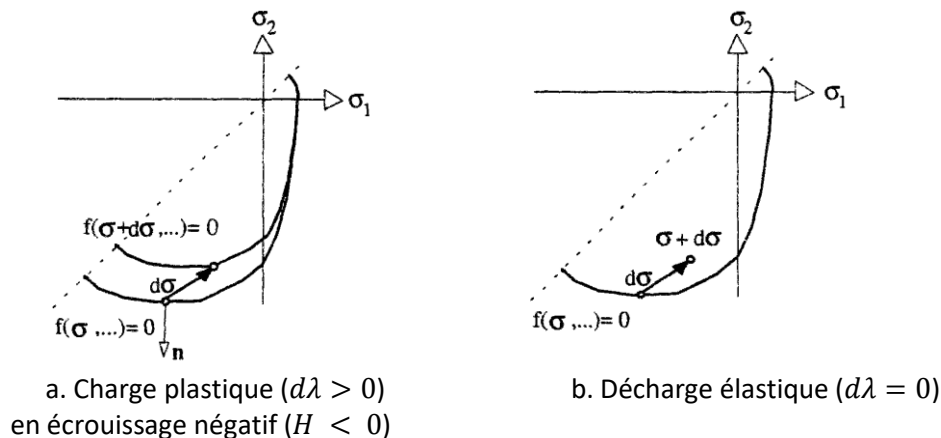


Figure 3.5 – Illustration de la difficulté de déterminer de façon univoque la condition charge/décharge dans le cas d'un matériau adoucissant

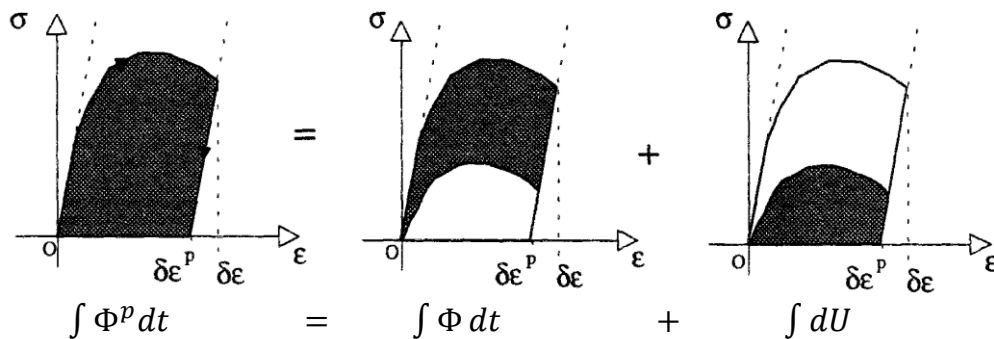
III- 1.2.3 Restrictions thermodynamiques, énergie bloquée par écrouissage :

L'approche thermodynamique évoquée ci-dessus pour décrire l'évolution de la variable d'écrouissage permet de déterminer les directions possibles, suivies par $d\varepsilon^p$ et $d\chi$, imposées par la non-négativité de la dissipation intrinsèque (3-10). Le potentiel non associé h , précisant la règle d'écrouissage (3-14), peut être différent du potentiel non associé g , précisant la règle d'écoulement (3-5). En revanche, les fonctions g et h ne peuvent être choisies de façon quelconque. Utilisant (3-5), (3-11) et (3-14) dans l'inégalité (3-10), les potentiels g et h doivent satisfaire la condition suffisante :

$$\sigma: \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \xi \frac{\partial h}{\partial \xi} \geq 0 \text{ si } f = 0 \dots \dots \dots (3-18)$$

La condition (3-18) définit ainsi les directions thermodynamiquement admissibles suivies par $d\varepsilon^p$ (éq. (3-5)) et $d\chi$ (éq. (3-14)).

D'autre part, l'inégalité de Clausius-Duhem (3-10) montre que l'énergie dissipée en chaleur pendant le temps dt est égal à $\Phi dt = \Phi^p dt - dU$. Le terme $-dU$ apparaît comme une énergie infinitésimale non convertie en chaleur pendant le temps dt , mais qui ne peut être immédiatement restituée sous forme d'un travail lors d'un rechargement [178]. C'est pourquoi on l'appelle énergie bloquée par écrouissage. Les composantes de la puissance intrinsèque sont illustrées sur la figure 3.6, où les aires représentent l'intégrale des puissances des composantes de l'équation (3-10) pendant un cycle de charge à partir de l'origine.



Energie plastique Energie dissipée en chaleur Energie bloquée par écrouissage

Figure 3.6 – Illustration de la dissipation intrinsèque

Indiquons ici aussi l'origine de l'énergie bloquée par écrouissage. Pour cela, il faut descendre à l'échelle microscopique, échelle en deçà de l'échelle adoptée pour la description continue des évolutions élastoplastiques. Les phases de l'évolution élastoplastique provoquent à l'échelle microscopique une modification de la structure de la matrice hétérogène. Une partie de ces modifications est irréversible. Après une décharge complète du système, en raison de la structure hétérogène de la matrice, l'état de déformation à l'échelle microscopique ne peut

pas correspondre à un état de plastification homogène. Par exemple, il pourrait exister des forces résiduelles de contact élastique entre les composants de la matrice. En effet, comme un champ de déformation purement plastique n'est pas compatible à lui seul, c'est à dire qu'il ne dérive pas d'un champ de déplacement, la déformation élastique induite par ces contributions élastiques à l'échelle microscopique assure la compatibilité cinématique des modifications irréversibles de la structure de la matrice. Une certaine énergie n'est pas récupérée à la décharge sous forme de travail, ni convertie sous forme de chaleur, mais bloquée - par écrouissage.

III- 1.2.4 Formulation élastoplastique dans l'espace des déformations :

Le comportement adoucissant (écrouissage négatif) pose une difficulté inhérente à la modélisation (III-1.2.2) : on ne peut pas a priori distinguer une décharge élastique d'une charge plastique, lorsque le pilotage s'effectue en contraintes. Cette difficulté a amené plusieurs auteurs à proposer une formulation élastoplastique dans l'espace des déformations analogue à la formulation plus classique dans l'espace des contraintes.

L'idée de base consiste à définir un état de contraintes de référence du matériau vierge élastique.

Sous forme incrémentale, on a :

$$d\sigma = d\tilde{\sigma} - d\sigma^p \dots\dots\dots(3-19) \quad \text{avec : } \begin{cases} d\tilde{\sigma} = C_0 : d\varepsilon \\ d\sigma^p = C_0 : d\varepsilon^p \end{cases}$$

Où σ est le tenseur de contraintes totales associé par l'équilibre mécanique à un effort extérieur défini à l'échelle du système élémentaire, $\tilde{\sigma}$ est le tenseur de contraintes dites effectives, et σ^p est le tenseur dit de relaxation dû à la plastification. La règle d'écoulement s'écrit :

$$d\sigma^p = d\Lambda \frac{\partial G(\varepsilon, q)}{\partial \varepsilon} \dots\dots\dots(3-20) \quad \text{avec : } \begin{cases} d\Lambda > 0 \text{ si } F = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} : d\varepsilon > 0 \\ d\Lambda = 0 \text{ si } F < 0 \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} : d\varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

Où la fonction $G(\varepsilon, q)$ est le potentiel plastique et la fonction $F(\varepsilon, q)$ la surface de charge ou surface de relaxation [183]. F définit le domaine d'élasticité C_E dans l'espace des déformations :

$$\varepsilon \in C_E \Leftrightarrow F(\varepsilon, q) \leq 0 \dots\dots\dots(3-21)$$

L'équation (3-20) montre l'avantage de la formulation élastoplastique dans l'espace des déformations par rapport à celle dans l'espace des contraintes : la définition de la condition charge/décharge est univoque. A l'aide d'un état de contraintes effectives de référence attribué à un état vierge de la matière, on ne fait pas la distinction entre l'écrouissage (positif)

($|d\tilde{\sigma}| > |d\sigma^p|$). L'adoucissement ($|d\tilde{\sigma}| < |d\sigma^p|$), ou le comportement plastique parfait ($d\tilde{\sigma} = d\sigma^p$) du matériau, (figure 3.7). C'est pourquoi cette formulation est fréquemment utilisée pour modéliser le comportement du béton [184,179,185,186,187]. Par ailleurs, comme tout critère, qu'il soit de plasticité, d'endommagement ou de rupture fragile, ne peut se mettre a priori que sous la forme $f(\sigma, \dots)$, [178], le critère de relaxation $F(\varepsilon, q)$ peut seulement être déduit d'un critère de plasticité $f(\sigma, Z)$ établi dans l'espace des contraintes [187].

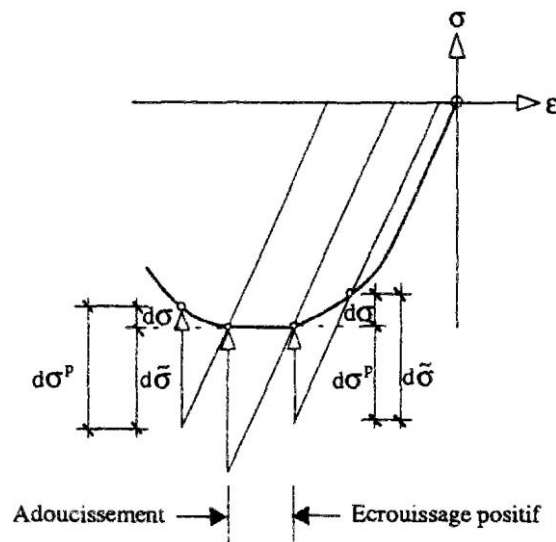
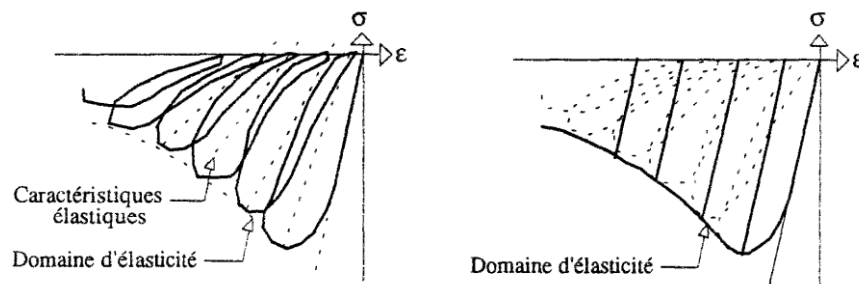


Figure 3.7 – Illustration de la modélisation du comportement écouissage (positif), plastique parfait et adoucissement dans la formulation élastoplastique dans l'espace de déformations.

III- 1.2.5 Limites de la modélisation élastoplastique du béton :

Une modélisation élastoplastique permet de modéliser les déformations permanentes, et le comportement écouissable et adoucissant du béton. Mais elle ne rend donc pas compte du phénomène d'assouplissement (variation des caractéristiques élastiques), et surestime la valeur des déformations permanentes dans le domaine d'adoucissement, (figures 3.8). D'un point de vue pratique, cela signifie en particulier que ce type de modèle n'est pas adapté à l'étude des structures en béton soumises à des chargements cycliques.



- a. Courbe uni axiale de compression simple sous chargement cyclique [175].
b. Modélisation élastoplastique correspondante, avec écouissages positif et négatif.

Figure 3.8 – Illustration des limites de la modélisation élastoplastique concernant l'application au cas d'un chargement cyclique.

Supposant qu'une description continue du phénomène d'assouplissement est possible à l'échelle macroscopique de la structure, on est amené à définir une variable macroscopique, prenant en compte d'une façon explicite ou implicite la variation des caractéristiques élastiques. La définition même d'une telle variable mécanique pose un problème complexe, car les phénomènes discontinus de microfissuration auxquels cette détérioration est attribuée sont difficilement quantifiables à l'échelle de description macroscopique. Les paragraphes suivants sont consacrés à quelques modèles existants qui prennent en compte ce phénomène.

Parmi les modèles décrivant le comportement d'assouplissement à l'échelle macroscopique, on peut distinguer, selon les variables utilisées :

- Les modèles de détérioration due à la fissuration, caractérisés par l'utilisation explicite d'une variable de déformation associée à la fissuration,
- Les modèles d'endommagement avec des variables (scalaires ou tensorielles) décrivant d'une façon explicite la dégradation progressive des caractéristiques élastiques.

La principale différence entre ces deux ensembles de modèles réside dans l'existence ou non d'une élasticité infinitésimale.

III- 1.3 Modèles de détérioration :

III- 1.3.1 Formalisme général :

D'une façon générale, les modèles de détérioration due à la fissuration attribuent les déformations anélastiques à deux mécanismes, l'un d'origine plastique et l'autre associé à des fissures réparties d'une façon régulière dans un volume élémentaire dû :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p + d\varepsilon^f \dots\dots\dots(3-22)$$

La décomposition (3-22) conduit à exprimer l'incrément de contrainte de manière analogue à celle de l'équation (3-2) :

$$d\sigma = C_0 : (d\varepsilon - d\varepsilon^p - d\varepsilon^f) \dots\dots\dots(3-23)$$

Avec C_0 le tenseur de comportement élastique, indépendant de l'état physique (plastification, détérioration) du matériau. Ainsi, on constate l'existence d'une élasticité infinitésimale. L'effet d'assouplissement est pris en compte d'une façon implicite par l'intermédiaire de $d\varepsilon^f$. On écrit également :

$$d\sigma = d\tilde{\sigma} - d\sigma^p - d\sigma^f \dots\dots\dots(3-24)$$

Où $d\sigma^f$ est l'incrément du tenseur de relaxation due à la fissuration.
Les relations précédentes sont illustrées sur la figure 3.9.

La déformation permanente due à la refermeture incomplète des fissures dans le cas d'un déchargement total est seulement attribuée à des déformations d'origine plastique, tandis que les déformations de fissuration ε^f s'annulent après une décharge totale, figure 3.9 [184,188], ce qui revient à supposer pour un cycle complet de charge-décharge en contraintes:

$$\varepsilon^f = \oint d\varepsilon^f \equiv 0 \dots \dots \dots (3-25)$$

La condition (3-25) peut être considérée comme une relation supplémentaire pour le déchargement. Il en existe de variées.

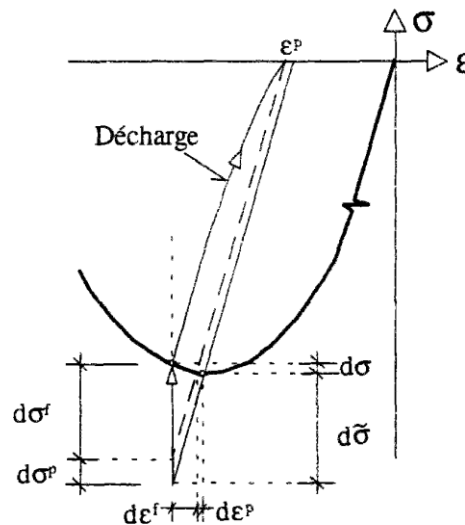


Figure 3.9 – Illustration de la décomposition incrémentale du tenseur des déformations et des contraintes [184].

Les modèles existants diffèrent en termes de détermination de $d\varepsilon^f$ ou $d\sigma^f$. On peut distinguer deux approches différentes, qui peuvent être toutefois complémentaires :

D'une part, il s'agit des modèles issus des modèles orthotropes de fissuration répartie ("smeared cracking approaches") [189,190].

À distinguer de ceux postulant un potentiel de dissipation pour décrire leur évolution [191,184,188,190].

III- 1.3.2 Modèles orthotropes de fissuration :

Les premiers modèles orthotropes de fissuration répartie ("smeared cracking approaches") datent de la fin des années 60 [192]. Après fissuration, le comportement initialement isotrope est remplacé par une relation orthotrope reliant les contraintes et les déformations dans le

repère principal des déformations, considéré comme repère de fissuration. On peut distinguer les modèles où les axes d'orthotropie sont fixés avec le début de la fissuration ("fixed smeared crack models"), de ceux où les axes d'orthotropie sont en rotation, attachés aux vecteurs propres unitaires associés aux valeurs propres du tenseur de déformations ("rotating smeared crack concept"), [193]. Cette approche, souvent retenue pour l'analyse non linéaire de structures planes en béton armé, peut être considérée comme une extension des modèles élastiques non linéaires liés à un repère particulier de fissuration, et où la décomposition des déformations (3-22) n'apparaît qu'implicitement.

Dans les modèles où cette décomposition intervient de manière explicite [189,190]), on suppose que les ouvertures de fissures ont lieu dans un plan repéré par une normale n donnée par le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre du tenseur des déformations d'extension. Les fissures sont considérées comme étant planes et parallèles, uniformément réparties sur une longueur caractéristique b (figure 3.10a). Elle permet de lier l'ouverture de fissure w à une grandeur de déformation de fissuration dans le volume élémentaire sous la forme :

$$dw = b d\varepsilon_{nn}^f \dots \dots \dots (3-26)$$

On utilise ici un critère énergétique de la mécanique non linéaire de la rupture :

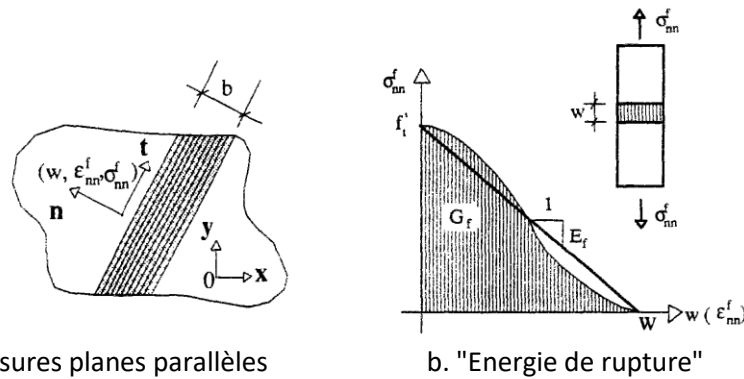
$$G_f = \int_0^w \sigma_{nn}^f dw = b \int_0^{\varepsilon_w^f} \sigma_{nn}^f d\varepsilon_{nn}^f = \frac{1}{2} \frac{f'_t{}^2}{E_f} b \dots \dots \dots (3-27)$$

Où G_f est "l'énergie de rupture", f'_t la résistance en traction simple et E_f le module liant σ_{nn}^f ε_{nn}^f d'une façon linéaire, (figure 3.10b). "L'énergie de rupture" est l'énergie nécessaire pour qu'une fissure s'ouvre de $w = 0$ ($\Leftrightarrow \sigma_{nn}^f = f'_t$) à $w = W$ ($\Leftrightarrow \sigma_{nn}^f = 0$). "L'énergie de rupture" et la courbe ($\sigma_{nn}^f - w$) sont considérées comme étant des propriétés intrinsèques du matériau.

Avec quelques hypothèses supplémentaires concernant l'activation du frottement dans le plan de fissuration, on établit des relations reliant contraintes et déformations de type :

$$d\sigma_{nn}^f = C_{f0}(G_f, b, f'_t, E_f, \dots): d\varepsilon_{nt}^f \dots \dots \dots (3-28)$$

Où C_{f0} est le tenseur de comportement dans le repère de fissuration, et ne dépend que des propriétés intrinsèques (G_f, b, f'_t, E_f, \dots) du matériau. Cette formulation peut être étendue aux cas de plusieurs fissures de directions différentes [189], avec prise en compte de la densité de la fissuration dans le volume élémentaire considéré [190].



a. Fissures planes parallèles uniformément réparties

b. "Energie de rupture"

Figure 3.10 – Illustration des déformations de fissuration et liaison avec la mécanique de la rupture [190].

La description macroscopique est effectuée par l'intermédiaire d'une longueur caractéristique b . Cette longueur b constitue un outil numérique nécessaire imposé par la description continue choisie. Mais des propriétés intrinsèques comme l'énergie de rupture G_f sont difficiles à déterminer [194,195]. De plus, le modèle stipule l'observabilité de directions privilégiées non associées à la matière, mais aux valeurs propres d'une grandeur d'ordre cinématique, le tenseur de déformations totales ε . On peut se poser la question de l'objectivité spatiale des relations liants les contraintes et les déformations. Enfin, cette approche s'étend difficilement au cas tridimensionnel.

III- 1.3.3 Un potentiel de détérioration :

La décomposition (3-22), respectivement (3-24), a amené plusieurs auteurs à traiter l'évolution des déformations, liée au processus de détérioration interne, à l'aide d'un potentiel $h(\sigma)$ (respectivement, $H(\varepsilon)$) tel que l'évolution des déformations de détérioration (respectivement, l'évolution des contraintes de relaxation associées à la détérioration) vérifie [196,191,188,190] :

$$d\varepsilon^f = d\lambda \frac{\partial h}{\partial \sigma} \dots \dots \dots (3-29) \quad \text{respectivement, } d\sigma^f = d\Lambda \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}$$

Les relations précédentes répondent à la question "comment" ? Qu'en est-il de la question "quand" ? En particulier, compte tenu de la condition de décharge totale (3-25), que se passerait-il dans le cas d'un déchargement ? En effet, en l'absence d'autres variables (comme l'endommagement) qui traduisent l'effet du tenseur de déformation de détérioration sur les caractéristiques élastiques, ces modèles ne peuvent être utilisés que pour décrire l'évolution de ε^f sous un chargement croissant.

Pour ce qui concerne les déchargements, une relation supplémentaire est nécessaire. Par exemple, on peut supposer $d\sigma^f$ fonction d'une variation des caractéristiques élastiques dC et du tenseur des déformations recouvrables totales $\varepsilon - \varepsilon^p$ [184] :

$$d\sigma^f = dC : (\varepsilon - \varepsilon^p) \dots \dots \dots (3-30)$$

Qui conduit à réécrire l'équation (3-23) sous la forme :

$$d\sigma = C_0 : (d\varepsilon - d\varepsilon^p) - dC : (\varepsilon - \varepsilon^p) \dots \dots \dots (3-31)$$

Sous la forme (3-31), le tenseur $d\varepsilon^f$ n'apparaît qu'implicitement, et on peut constater la perte d'élasticité infinitésimale. Le tenseur dC peut par exemple être exprimé en fonction du tenseur de déformations plastiques ε^p [197,184]. Dans ce cas, on suppose que les déformations plastiques rendront compte à l'échelle macroscopique des effets de la microfissuration : la variation de caractéristiques élastiques est ainsi liée à une variable macroscopique mesurable.

III- 2 Modélisation élastoplastique du béton :

Les évolutions irréversibles du béton seront modélisées par les variables d'état plastiques du matériau : les déformations plastiques (ou plutôt permanentes) rendront compte à l'échelle macroscopique des effets de la microfissuration. Les développements présentés ici n'ont donc pas pour objectif l'étude d'une fissure franche en tant que discontinuité dans l'ouvrage, mais la prédiction de l'apparition de dommages (concentrés), représentés en termes de déformations permanentes.

Ainsi, pour être pratiquement utilisable, les paramètres intervenant dans le modèle doivent être en nombre limité et avant tout avoir une signification physique claire.

En ce qui concerne le critère de plasticité, notre choix s'est porté sur le critère de Willam-Warnke [198] à trois paramètres, présenté par exemple pour le cas plastique parfait par Fauchet [199].

Il s'agit d'une modification du critère de Drucker-Prager adapté au béton. Ici, ce critère est brièvement présenté, en intégrant un écrouissage isotrope. Il s'agit d'un critère à quatre paramètres.

Il est bien différent du critère de ruine de Willam-Warnke à 5 paramètres, présenté dans de multiples travaux de synthèse [174], repris et complétés dans [179,180,200]). Par rapport au critère à trois paramètres, les modifications portent en particulier sur la forme des méridiens, et sur la distinction entre comportements plastiquement contractant et dilatant. Cette

distinction permet l'élaboration d'un modèle d'érouissage avec une variable d'érouissage nouvelle : la porosité plastique.

III- 2.1 Quelques notations et définitions :

Afin d'alléger la présentation, notons quelques définitions auxquelles nous nous référons dans la suite :

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les valeurs principales du tenseur des contraintes σ , ordonnées suivant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Définissons ensuite le triplet (σ, τ, θ) , fonction univoque des trois invariants du tenseur σ , par :

$$\begin{cases} \sigma = \text{tr } \sigma / 3 \\ \tau = \sqrt{J_2(\sigma)} = \sqrt{\frac{1}{2} S : S} \dots \dots \dots (3-32) \\ \cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{12}\tau} \end{cases}$$

Où $S = \sigma - \sigma_1$ est le déviateur de σ . Notons de plus, que l'angle de Lode θ ne peut varier qu'entre :

$$0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \dots \dots \dots (3-33)$$

Aux deux bornes des inégalités (3-33), on peut associer des points de charge, tels que :

$$\begin{cases} \forall \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, \theta = 0^\circ \\ \forall \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3, \theta = 60^\circ \dots \dots \dots (3-34) \end{cases}$$

L'essai de compression simple correspond ainsi à $\theta = 60^\circ$, tandis que $\theta = 0^\circ$ correspond aux essais de traction simple et de compression biaxiale.

Dans l'espace \mathbb{R}^3 des contraintes principales, on appelle axe hydrostatique (ou trisectrice) l'axe passant par l'origine et de vecteur directeur unitaire $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, correspondant aux états de contraintes isotropes pour lesquels $\sigma = \sigma_1$ et $\tau = 0$.

Enfin, un plan déviatorique est défini comme un plan orthogonal à l'axe hydrostatique. Les projections orthogonales des axes de coordonnées sur ce plan font un angle de 60° les uns par rapport aux autres. Dans le cas d'un matériau isotrope, les indices des axes (1,2,3) sont arbitraires. Par conséquent, la coupe déviatorique d'une surface représentant un critère isotrope doit avoir une triple symétrie.

III- 2.2 Faits expérimentaux :

Un état vierge ou "sain" du matériau béton n'existe jamais. Même en absence de sollicitation mécanique, le matériau présente une fissuration plus ou moins intense [201] due au développement de champs d'auto-contraintes à l'échelle de la structure durant la phase de refroidissement qui suit la prise du béton. Ici, ces phénomènes sont négligés et on considère que la cause majeure de la fissuration est la forte sollicitation mécanique du matériau.

III- 2.2.1 Limites de rupture :

La figure 3.11 présente une courbe enveloppe typique de rupture du béton pour des états de contraintes biaxiales (contraintes planes) dans l'espace des contraintes principales $\sigma_1 - \sigma_2$ [202], avec les directions des plans de fissurations correspondants [203]. Dans ce plan, trois caractéristiques mécaniques sont précisées : la résistance en compression simple σ_c , la résistance en traction σ_t et la résistance en compression biaxiale σ_{bc} .

L'ordre de grandeur du rapport entre ces différentes caractéristiques est le suivant :

$$\sigma_t/\sigma_c \approx 0.1 \text{ et } \sigma_{bc}/\sigma_c \approx 1.15$$

Pour ce qui concerne la limite de rupture sous état de contraintes triaxiales, les formes des méridiens de compression ($\theta = 60^\circ$) et de traction ($\theta = 0^\circ$) sont illustrées sur la figure 3.12 dans le demi-plan (τ, σ) . On notera une relation quasi linéaire entre τ et σ dans le domaine des faibles confinements et une forme plus courbée pour des pressions hydrostatiques importantes. Le domaine d'élasticité initiale, de surface fermée sur l'axe hydrostatique, est également présenté figure 3.12.

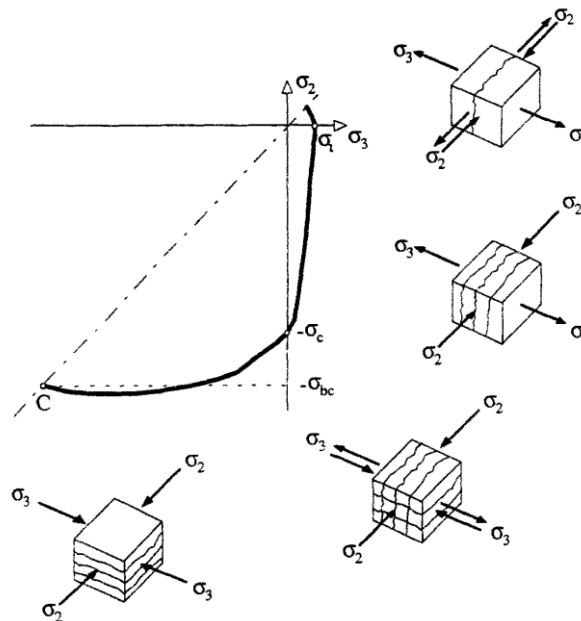


Figure 3.11 – Limite de rupture du béton en sollicitations biaxiales avec directions des plans de fissuration correspondants [203].

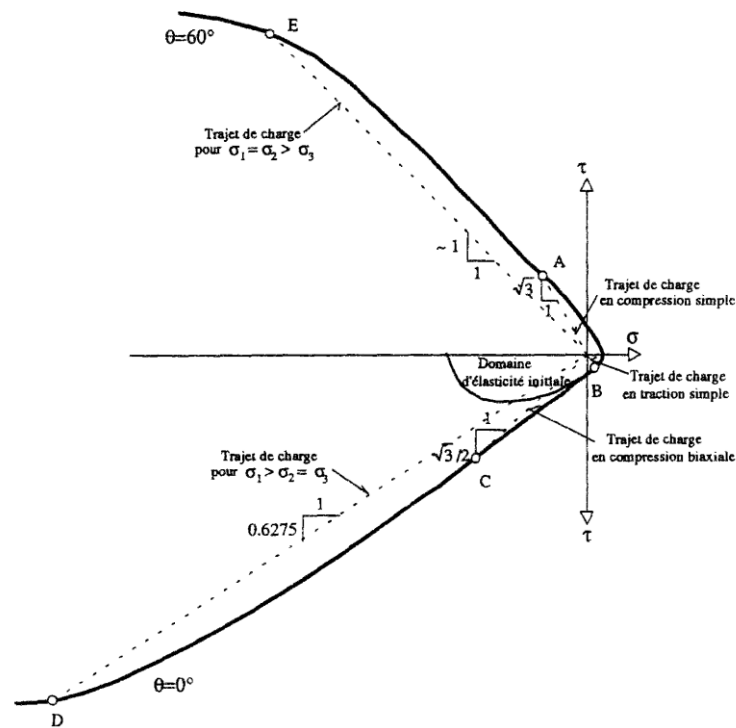


Figure 3.12 – Limite de ruine pour le béton dans les demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction avec quelques chemins de chargement [179].

III- 2.2.2 Comportement uniaxial du béton :

La figure 3.13 présente une courbe typique $\sigma - \varepsilon$ du béton en compression simple et en traction simple. En compression, on peut distinguer les phases suivantes [174] :

- $0 - 0,3\sigma_c$: domaine élastique ;
- $0,3 - 0,75 \dots 0,8 \sigma_c$: fissuration stable dans le sens où les longueurs de fissures sous chargement constant atteignent rapidement leur valeur finale ;
- $0,75 \dots 0,8 - 1,0\sigma_c$: fissuration instable conduisant à un comportement adoucissant si l'essai est piloté en déplacement.

On note également le comportement dissymétrique du béton en compression et en traction.

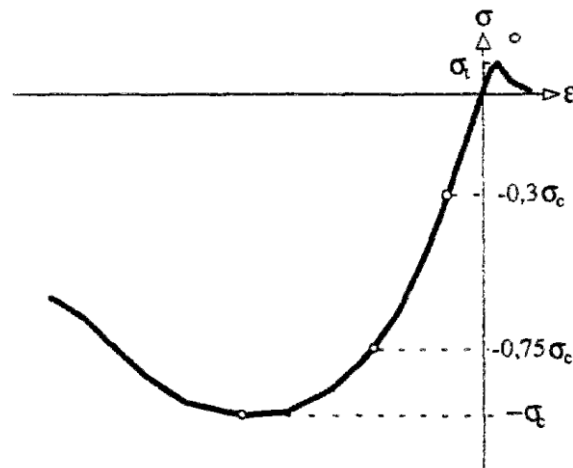


Figure 3.13 – Courbe $\sigma - \varepsilon$ uniaxiale du béton
(Compression simple et traction simple)

III- 2.2.3 Variation de volume anélastique :

Le béton a un comportement particulier en ce qui concerne sa variation de volume sous sollicitations mécaniques. Afin d'apprécier ce comportement à l'échelle macroscopique, il est nécessaire de rappeler la formule de transport de volume matériel d'un milieu continu déformable.

On note $d\Omega$ le volume matériel élémentaire initial. A l'instant t , après déformation, le volume initial devient $d\Omega_t$, et la transformation est décrite par la formule de transport :

$$d\Omega_t = Jd\Omega \dots \dots \dots (3-35)$$

Où J est le jacobien de la transformation. Avec l'hypothèse de petites déformations, J s'écrit :

$$J = I + tr\varepsilon \dots \dots \dots (3-36)$$

Où la trace du tenseur de déformations représente la dilatation volumique observable, définie comme la différence entre le volume actuel et le volume initial rapportée au volume initial :

$$tr\varepsilon = \frac{d\Omega_t - d\Omega}{d\Omega} \dots \dots \dots (3-37)$$

Les courbes expérimentales de la variation de volume du béton $tr\varepsilon$ dans des essais de compression simple ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$), de compression biaxiale ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 < 0$) et de traction simple ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) sont illustrées en figure 3.13a.

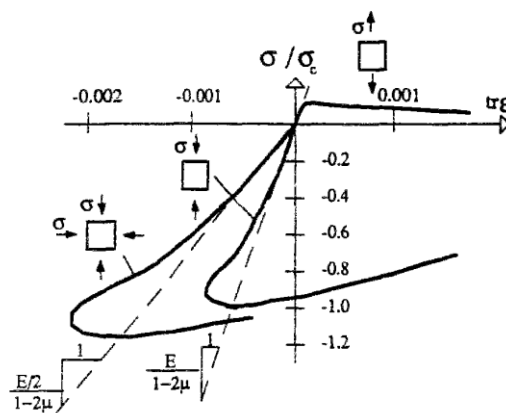
Utilisant la décomposition (I) du tenseur de déformation en une partie élastique et une partie permanente, on peut écrire :

$$tr\varepsilon = tr\varepsilon^e + tr\varepsilon^p \dots\dots\dots(3-38)$$

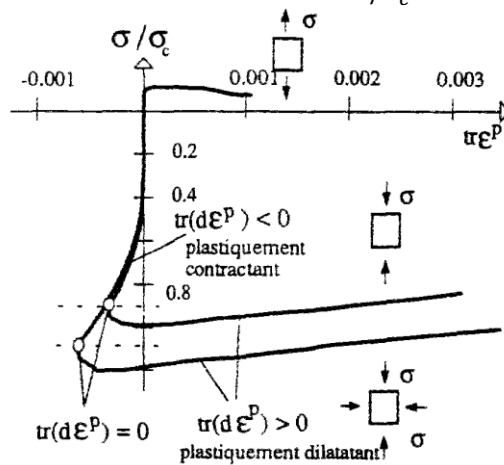
Où $tr\varepsilon^p$ est la déformation volumique irréversible du matériau après décharge complète du système. On appellera $tr\varepsilon^p > 0$ (respectivement $tr\varepsilon^p < 0$) la dilatance plastique (respectivement la contraction plastique). Ainsi, le comportement pour lequel $tr(d\varepsilon^p) > 0$ (respectivement $tr(d\varepsilon^p) < 0$) est dit plastiquement dilatant (respectivement plastiquement contractant).

Les évolutions expérimentales de $tr\varepsilon^p$ en fonction des contraintes sont tracées sur la figure 3.14b.

Pour des essais en compression simple et compression biaxiale, on retrouve au niveau de la variation de volume plastique les phases mises en évidence précédemment [174] :



a. Courbe expérimentale de la variation de volume total : $\sigma/\sigma_c - tr\varepsilon$



b. Courbe expérimentale de la variation de volume anélastique : $\sigma/\sigma_{max} - tr\varepsilon^p$

Figure 3.14 – Variations de volume (a) total et (b) plastique du béton en compression simple et compression biaxiale [174].

- Une relation élastique linéaire pour une contrainte appliquée inférieure à 30% de la résistance,
- Un comportement plastiquement contractant ($tr(d\varepsilon^p) < 0$) pour une contrainte appliquée égale à 30% - 75...90 % de la résistance,
- Suivi par un comportement plastiquement dilatant ($tr(d\varepsilon^p) > 0$), conduisant au pic et à la ruine.

On note également que le béton en traction ne suit qu'un comportement plastiquement dilatant.

III- 2.3 Porosité plastique et microfissuration :

La variation de volume anélastique $tr\varepsilon^p$ joue un rôle important en ce qui concerne la description macroscopique du comportement non-linéaire du béton.

Considérons maintenant le béton comme un milieu poreux, constitué d'une matrice et d'un espace poreux connecté (figure 3.15). La matrice est composée de solides et éventuellement de pores. Cette porosité occluse est essentiellement composée des pores de contraction qui résultent de la phase de cristallisation du ciment durant l'hydratation, et influent peu sur les propriétés mécaniques du matériau [199]. En revanche, la porosité connectée (porosité des granulats, porosité capillaire de la pâte de ciment), a un effet néfaste sur les propriétés du matériau. On la définit par :

$$\phi = \frac{\text{Volume de l'espace poreux connecté}}{\text{Volume total}} \dots\dots\dots(3-39)$$

Par exemple, la porosité ϕ_0 dans la configuration initiale et la porosité ϕ dans la configuration actuelle s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = \frac{d\Omega - d\Omega^m}{d\Omega} \\ \text{et} \\ \phi = \frac{d\Omega_t - d\Omega_t^m}{d\Omega_t} \end{array} \dots\dots\dots(3-40) \right.$$

Où $d\Omega^m$ et $d\Omega_t^m$ sont les volumes occupés par la matrice respectivement dans l'état initial et actuel.

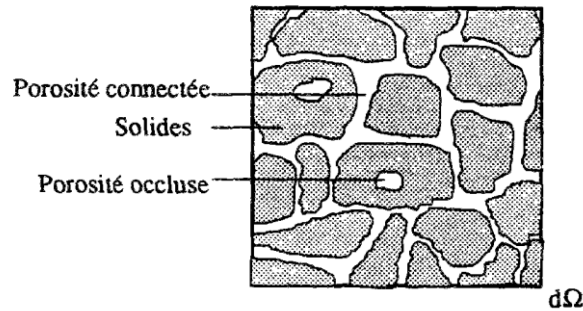


Figure 3.15 – Le béton - un milieu poreux [178].

La variation de volume observable du squelette, $tr\varepsilon$, est due d'une part à la variation du volume de l'espace poreux connecté, et d'autre part à la dilatation moyenne de la matrice, noté ε_m , et définie par :

$$\varepsilon_m = \frac{d\Omega_t^m - d\Omega^m}{d\Omega^m} \dots\dots\dots(3-41)$$

Utilisant (3-40) avec la formule de transport (3-36) et la linéarisation (3-37) dans l'équation (3-41), on obtient une relation liant ε_m et $tr\varepsilon$ [178] :

$$(1 - \phi_0)\varepsilon_m = (1 - \phi)tr\varepsilon - (\phi - \phi_0) \dots\dots\dots(3-42)$$

Considérons maintenant le cas d'une décharge totale élastique ($tr(\varepsilon - \varepsilon^p) = 0$) à partir de l'état actuel. De (3-42) on déduit la relation :

$$(1 - \phi_0)\varepsilon_m^p = (1 - \phi^d)tr\varepsilon^p - (\phi^d - \phi_0) \dots\dots\dots(3-43)$$

Où ε_m^p est la déformation volumique permanente moyenne de la matrice et ϕ^d la porosité dans le volume $d\Omega^d = (1 + tr\varepsilon^p)d\Omega$ obtenu après décharge totale. En notant $\phi_0 d\Omega$ l'espace poreux initial, et $\phi^d d\Omega^d$ l'espace poreux connecté après décharge totale, la variation irréversible de l'espace poreux est obtenue par :

$$\phi^p d\Omega = \phi^d d\Omega^d - \phi_0 d\Omega \dots\dots\dots(3-44)$$

Où ϕ^p est la porosité plastique, la variation irréversible de l'espace poreux connecté par unité de volume $d\Omega$:

$$\phi^p = \phi^d(1 + tr\varepsilon^p) - \phi_0 \dots\dots\dots(3-45)$$

La substitution de (3-45) dans (3-43) conduit à :

$$tr\varepsilon^p = (1 - \phi_0)\varepsilon_m^p + \phi^p \dots\dots\dots(3-46)$$

Cette relation met en évidence que la variation de volume anélastique mesurable, $tr\varepsilon^p$, est due d'une part à la variation irréversible du volume de la matrice, quantifiée par $(1 - \phi_0)\varepsilon_m^p$, et d'autre part à la variation irréversible du volume de l'espace poreux connecté, quantifiée par ϕ^p .

Si la matrice est anélastiquement incompressible ($\varepsilon_m^p = 0$), la variation de volume anélastique $tr\varepsilon^p$, due uniquement à la variation irréversible de la porosité, est égale à la porosité plastique :

$$\varepsilon_m^p = 0 \Leftrightarrow \phi^p = tr\varepsilon^p \dots\dots\dots(3-47)$$

Dans le cas d'une matrice anélastiquement compressible et d'un comportement isotrope, [178] propose une relation incrémentale liant $tr\varepsilon^p$ et $d\phi^p$ d'une façon linéaire:

$$\varepsilon_m^p \neq 0 \Leftrightarrow d\phi^p = \beta tr(d\varepsilon^p) \dots\dots\dots(3-48)$$

Avec : $\phi_0 < \beta < 1$

Le coefficient β peut éventuellement dépendre des forces d'écroutissage, i.e. $\beta = \beta(\xi)$. La relation (3-48) sera utilisée par la suite.

La porosité plastique ϕ^p quantifie alors l'augmentation ou la réduction irréversible de l'espace poreux connecté $\phi^p d\Omega$. Appliquée au béton à l'échelle macroscopique, on peut la considérer comme la porosité créée par la fissuration [199].

La porosité plastique ϕ^p est ainsi considérée comme étant la variable macroscopique représentative de l'état de microfissuration et de l'état de compactage au sein du matériau.

En vertu des observations expérimentales sur la variation de volume anélastique, nous tirons les conclusions suivantes :

$\forall \phi^p < 0$ (respectivement $tr\varepsilon^p < 0$) : le béton suit un comportement écroutissable proprement dit (écroutissage positif). Deux phases sont à distinguer : d'une part, le comportement plastiquement contractant ($d\phi^p < 0$), et, d'autre part, le comportement plastiquement dilatant ($d\phi^p > 0$).

$\forall \phi^p > 0$ (respectivement $tr\varepsilon^p > 0$) : le béton suit un comportement adoucissant. Son évolution est entièrement définie par le critère de plasticité ("quand ?") et par la règle d'écoulement ("comment ?").

III- 2.4 Critère de Von-Mises :

Ce critère a été proposé indépendamment par Beltrami [204], Huber [205], Von-Mises [206] et Hencky (Hencky, [207]). La fonction de charge s'exprime :

$$f(\sigma) = \|s\| - R \dots \dots \dots (3-49)$$

où $s = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)I$ représente le déviateur du tenseur de contraintes σ .

Selon la relation (3-49), le critère de Von-Mises est entièrement déterminé par le seul paramètre R . Ce dernier représente la limite d'élasticité en cisaillement simple [$\sigma_I = -\sigma_{II}$ et $\sigma_{III} = 0$, ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$) étant les contraintes principales]. Il est lié à la limite en traction simple f_y par :

$$f_y = R\sqrt{3/2} \dots \dots \dots (3-50)$$

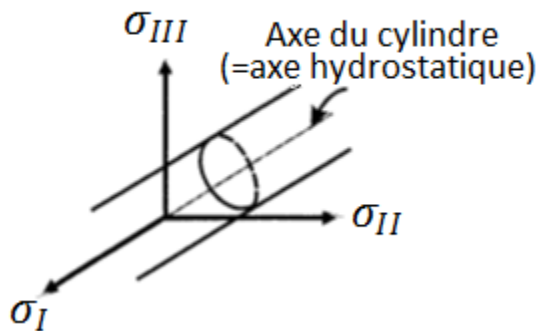


Figure 3.16 – Domaine d'élasticité du critère de Von-Mises dans l'espace des contraintes principales

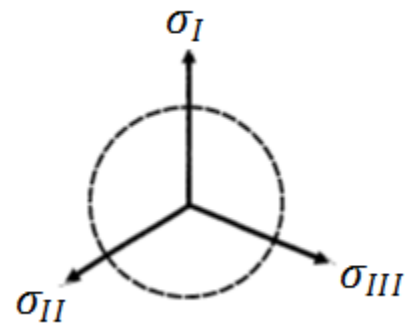


Figure 3.17 – Surface limite du critère de Von-Mises dans le plan déviatorique

Dans l'espace des contraintes principales, la surface limite du critère de Von-Mises est un cylindre à base circulaire de rayon R autour de l'axe hydrostatique [$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$] (figure 3.16).

La figure 3.17 représente cette surface dans le plan déviatorique.

Le critère de Von-Mises peut recevoir une interprétation énergétique. En effet, on prouve que le second invariant du déviateur de contraintes est proportionnel à l'énergie élastique de distorsion (c'est à dire l'énergie élastique totale diminuée de sa partie provenant d'une pure dilatation volumique) ; on peut alors considérer dans ce cas, que le critère de Von-Mises exprime le fait que la plastification se produit lorsque l'énergie élastique de distorsion a atteint une valeur critique.

On peut également considérer que le critère de Von-Mises est un critère de cission effective. En effet, pour ce critère, cette cission n'est rien d'autre que la cission octaédrique.

$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|s\|$. L'écoulement ne se produit donc que si la cission octaédrique a atteint une valeur critique.

III- 2.4.1 Règle d'écoulement :

De façon classique, la règle d'écoulement définit comment a lieu l'écoulement plastique. Cette loi conduit à établir, à chaque pas, l'état de la déformation plastique. On l'introduit généralement à partir d'une fonction convexe appelée potentiel plastique et notée g , en imposant certaines conditions quant à sa validité. Le critère de plasticité est alors convexe et la règle d'écoulement normale. Le potentiel plastique g est alors égal à la fonction de charge f et la règle d'écoulement est dite associée.

Avec le critère de Von-Mises, l'utilisation d'une règle d'écoulement associée suffit pour modéliser le comportement élastoplastique du béton. Le potentiel plastique est donc simplement défini par l'équation du critère (3-49). La règle d'écoulement s'écrit :

$$d\varepsilon^P = d\gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} = d\gamma \frac{s}{\|s\|} = d\gamma m \dots \dots \dots (3-51)$$

où $d\gamma$ représente le multiplicateur plastique défini par la condition de consistance :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C : \left(d\varepsilon - d\gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) = 0 \dots \dots \dots (3-52)$$

III- 2.4.2 Extension au modèle plastique anisotrope :

Différents critères ont été proposés dans la littérature, nous citerons : les critères de Hill [208], de Hoffman [209] et le critère de Tsai [177]. Nous nous limitons dans cette étude au critère de Hill, adopté également par Owen pour l'étude des plaques et coques minces [137, 210], et considérons le matériau comme élastique parfaitement plastique (c'est à dire sans écrouissage) vu les difficultés à définir les règles d'écrouissage pour les matériaux anisotropes [208].

III- 2.4.3 Critère de Hill :

En se laissant guider par la forme typique des critères isotropes, on peut préciser par extension, des critères anisotropes ayant les deux propriétés simplificatrices suivantes : l'indépendance vis à vis de la pression hydrostatique et la dépendance quadratique en fonction du tenseur déviateur des contraintes. On adopte ainsi pour ces critères l'expression « anisotropisée » ($\sigma : P : \sigma$), avec P un tenseur du quatrième ordre.

Dans les axes d'orthotropie, l'expression de la fonction de charge prend la forme tensorielle suivante :

$$f(\sigma) = \sqrt{(\sigma : P : \sigma)} - R \dots \dots \dots (3-53)$$

avec $R = \sqrt{2/3} \bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ étant la contrainte ultime de référence.

Si $[P]$ est la représentation matricielle du tenseur P , celle-ci s'écrit en fonction de six coefficients adimensionnels α_{ij} :

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\alpha_{12} + \alpha_{31}) & -\frac{1}{3}\alpha_{12} & -\frac{1}{3}\alpha_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}\alpha_{12} & \frac{1}{3}(\alpha_{23} + \alpha_{12}) & -\frac{1}{3}\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}\alpha_{31} & -\frac{1}{3}\alpha_{23} & \frac{1}{3}(\alpha_{31} + \alpha_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{66} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3-54)$$

Ces coefficients sont déterminés expérimentalement par trois essais de traction et trois essais de cisaillement. Nous remarquons bien que lorsque tous les coefficients α_{ij} sont égaux à 1, le critère de Hill revient au critère isotrope de Von-Mises.

Examinons à présent le type de la surface de charge du critère de Hill dans l'espace des contraintes principales. Il convient pour cela de réduire la forme quadratique associée à P puisque cette surface est une quadrique dont la forme est donnée par les valeurs propres de P . En effet, en exprimant le polynôme caractéristique de P dans l'espace des contraintes principales, on obtient des valeurs propres qui, selon leurs signes, permettront la détermination de la nature de la surface de charge du critère de Hill.

Considérons donc le tenseur P dans l'espace des contraintes principales. Celui-ci s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[P'] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{11} & P_{11} \\ P_{11} & P_{11} & P_{11} \\ P_{11} & P_{11} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\alpha_{12} + \alpha_{31}) & -\frac{1}{3}\alpha_{12} & -\frac{1}{3}\alpha_{31} \\ -\frac{1}{3}\alpha_{12} & \frac{1}{3}(\alpha_{23} + \alpha_{12}) & -\frac{1}{3}\alpha_{23} \\ -\frac{1}{3}\alpha_{31} & -\frac{1}{3}\alpha_{23} & \frac{1}{3}(\alpha_{31} + \alpha_{23}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3-55)$$

III- 2.5 Critère de Willam-Warnke à trois paramètres :

On rappelle brièvement ici le critère de Willam-Warnke à trois paramètres, en utilisant la présentation du cas parfaitement plastique proposée par Fauchet [199], en particulier en ce qui concerne la signification physique des paramètres.

III- 2.5.1 Critère de plasticité parfaite :

Le critère de Willam-Warnke peut être considéré comme un critère de type Drucker-Prager adapté au béton dans le domaine des faibles confinements : la forme des méridiens dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques (figure 3.12), est approximée par une droite. Par rapport au critère de Drucker-Prager qui dépend de plus de l'angle de Lode θ . Il s'écrit sous la forme :

$$f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_0) \dots \dots \dots (3-56)$$

Où le coefficient de frottement $f(\theta)$ varie en fonction de l'angle θ entre deux extrêmes :

$f_c = f(60^\circ)$ - coefficient de frottement sur le méridien de compression,

$f_t = f(0^\circ)$ - coefficient de frottement sur le méridien de traction.

Les différences entre le critère de Drucker-Prager (correspondant à $f = f_c$) et celui de Willam- Warnke à trois paramètres sont illustrées sur la figure 3.18 dans les demi-plans (τ, σ) des méridiens de compression et de traction et dans un plan déviatorique. Le domaine d'élasticité est un cône (figure 3.18a) dont la section n'est plus circulaire (figure 3.18b). En effet, l'expression de $f(\theta)$ est telle que, dans un plan déviatorique, la section circulaire du critère de Drucker-Prager se met sous la forme d'une portion d'ellipse entre deux méridiens successifs, l'un de compression et l'autre de traction.

Les trois paramètres du modèle (f_c, f_t, ρ_0) se déduisent de trois caractéristiques mécaniques introduites précédemment : les résistances en compression simple σ_c , en traction simple σ_t et en compression biaxiale σ_{bc} , grâce aux relations [199] :

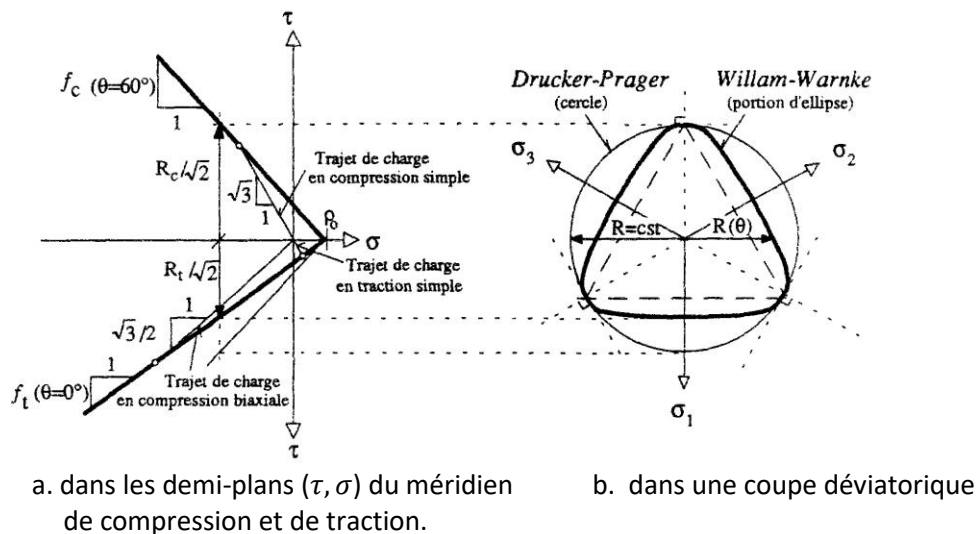


Figure 3.18 – Comparaison des critères de plasticité de Drucker-Prager et de Willam-Warnke [199].

$$\begin{cases} \sigma_c = \frac{3f_c}{\sqrt{3}-f_c} \rho_0 & \text{si } f_c < \sqrt{3}, \text{ sinon } \sigma_c = \infty \\ \sigma_t = \frac{3f_t}{\sqrt{3}+f_t} \rho_0 & \\ \sigma_{bc} = \frac{3f_t}{\sqrt{3}-2f_t} \rho_0 & \text{si } f_t < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ sinon } \sigma_c = \infty \end{cases} \dots\dots\dots(3-57)$$

Comme le trajet de charge de compression simple en fonction des invariants (3-32) est décrit par $\tau = \sqrt{3}\sigma$ et le trajet de charge en compression biaxiale par $\tau = \sqrt{3}/2\sigma$, l'existence même de résistances σ_c et σ_{bc} (intersections trajets de chargements - méridiens de compression et de traction, figure 3.18a) conduit aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leq f_c \leq \sqrt{3} \\ \text{et} \\ 0 \leq f_t \leq \sqrt{3}/2 \end{cases} \dots\dots\dots(3-58)$$

Par exemple, pour des valeurs de résistances tirées des essais de référence [202] (III-2.2.1), on $f_c = 1,3037$; $f_t = 0,7578$; $\rho_0 = 0,1095$; $\sigma_c = 1,0952\sigma_t$.

En vertu de la condition de convexité du critère, les coefficients de frottement f_c et f_t doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2}f_t \leq f_c \leq 2f_t \dots\dots\dots(3-59)$$

Dans le cas limite où $f_c = 2f_t$, dans une coupe déviatorique, le domaine d'élasticité dégénère en un triangle inscrit dans le cercle du critère de Drucker-Prager (figure 3.18b). Dans le cas particulier où $f_c = f_t$, le critère de Willam-Warneke coïncide avec le critère de Drucker-Prager.

III- 2.5.2 Critère de plasticité avec écrouissage isotrope :

Une première approximation pour rendre compte d'un comportement écrouissable consiste à considérer la pression de cohésion ρ comme paramètre d'écrouissage isotrope, $\rho = z\rho_0$, où ρ_0 est la pression de cohésion maximale déduite des résistances en traction simple et en compression biaxiale (équations (3-57)). Dans ce cas, le critère de plasticité s'écrit :

$$f(\sigma, z) = \tau + f(\theta)(\sigma - z\rho_0) \dots\dots\dots(3-60)$$

Les figures 3.19 présentent l'évolution du domaine d'élasticité d'une part dans les demi-plans des méridiens de compression et de traction (figure 3.19a), d'autre part dans une coupe déviatorique (figure 3.19b). La surface de charge correspondant à la fonction de charge (3-60)

est encore un cône à section triple elliptique entre les trois demi-axes inclinés à 120° les uns par rapport aux autres.

Dans l'espace des contraintes, la surface de charge actuelle se déduit par homothétie de centre l'origine et de rapport z de la surface de charge définie par $z = 1$, qui correspond au cas du matériau plastique parfait. Les inégalités (3-59), qui assurent la convexité du critère, s'appliquent également.

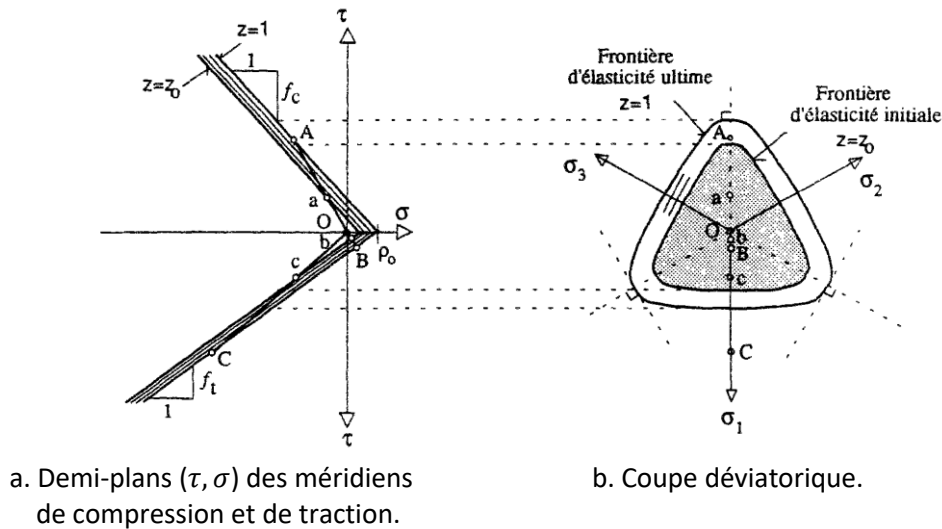


Figure 3.19 – Domaines d'élasticité initial et actuel du modèle de Willam-Warnke avec écrouissage isotrope.

Sur les figures 3.19, les trajets de charge O-a-A, O-b-B et O-c-C correspondent aux trajets de compression simple, traction simple et compression biaxiale. Les points de charge (a,b,c) et (A,B,C) sont ainsi situés sur la frontière du domaine d'élasticité initiale ($z = z_0$) et sur la frontière définie par les résistances du béton en compression simple, traction simple et compression biaxiale ($z = 1$). Le chemin parcouru entre ces deux limites entraîne l'évolution de l'écrouissage.

III- 2.5.3 Règle d'écoulement :

Dans le cas écrouissable, considérons un potentiel plastique g de la forme :

$$g(\sigma, z) = \tau + \delta(\sigma - z\rho_0).....(3-61)$$

Où δ est le coefficient de dilatance du matériau. Supposons d'abord que ce coefficient est constant ou ne dépend que des variables d'écrouissage. La règle d'écoulement s'écrit sous la forme :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \left(\frac{s}{2\tau} + \frac{\delta}{3} I \right) \dots\dots\dots(3-62)$$

En raison de l'équation (3-12) et de la fonction de charge (3-60), et en notant que $\partial\theta/\partial\sigma$ est un tenseur de trace nulle et que $\sigma: \frac{\partial\theta}{\partial\sigma}$, le multiplicateur plastique s'écrit :

$$d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = \frac{1}{H} \left(\left(\frac{s}{2\tau} + \frac{\partial f}{\partial \theta} (\sigma - z\rho) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) : ds + f(\theta) d\sigma \right) \dots\dots\dots(3-63)$$

Où H est le module d'écrouissage.
On aurait donc pu écrire également :

$$\begin{cases} tr(d\varepsilon^p) = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \\ d\gamma_{\acute{e}q}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \tau} \end{cases} \dots\dots\dots(3-64)$$

Donc : $\begin{cases} tr(d\varepsilon^p) = d\lambda \delta \\ d\gamma_{\acute{e}q}^p = d\lambda \end{cases}$

Ce qui est illustré sur la figure 3.16b. Par ailleurs, la règle d'écoulement est non-associée $\delta \neq f(\theta)$.

Dans le cas plastique parfait ($z = I$), une règle d'écoulement associée est utilisée ($\delta(\theta) = f(\theta)$).

On a alors :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \left(\frac{s}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} I + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} (\sigma - \rho_0) \right) \dots\dots\dots(3-65)$$

D'où

$$\begin{cases} tr(d\varepsilon^p) = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} = d\lambda f(\theta) \\ d\gamma_{\acute{e}q}^p = d\lambda \sqrt{1 + 2 \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} (\sigma - \rho_0)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} : \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}} \end{cases} \dots\dots\dots(3-66)$$

La définition $tr(d\varepsilon^p) = \delta d\gamma_{\acute{e}q}^p$ du coefficient de dilatance est seulement vérifiée si l'expression $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ s'annule. Ce n'est le cas que lorsque $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 60^\circ$, ce qui est illustré sur la figure 3.20a.

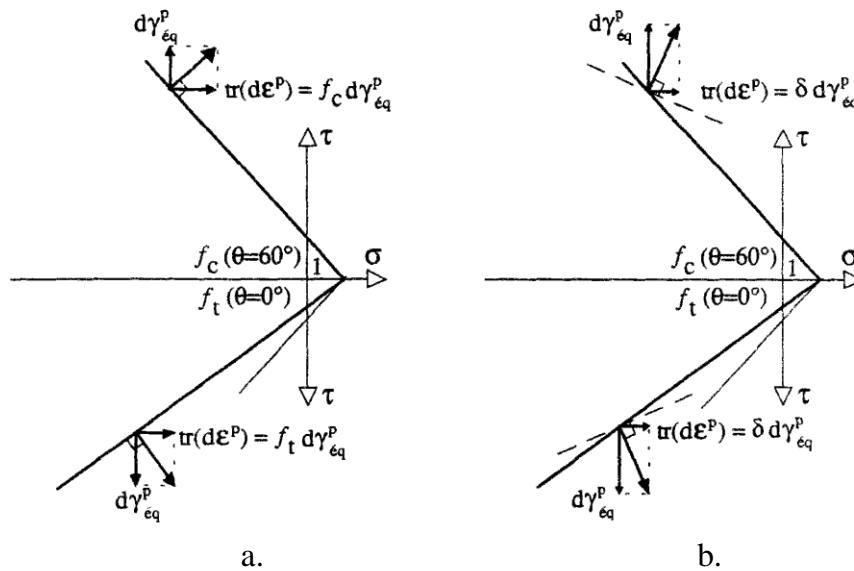


Figure 3.20 – Règles d'écoulement dans les demi-plans des méridiens de compression et de traction.

III- 2.5.4 Loi d'écrouissage :

La variation de volume anélastique $tr\varepsilon^p$ joue un rôle important dans la description macroscopique du comportement écrouissable du béton (III-2.2.3). On peut ainsi à partir des essais déterminer une relation $z = z(tr\varepsilon^p)$, ou bien, comme la règle d'écoulement (3-62) (respectivement (3-64)) vérifie la définition du facteur de dilatace, une relation $z = z(\gamma_{\epsilon q}^p)$, représentative de l'évolution du domaine d'élasticité. Utilisant (3-64), on écrit :

$$dq = d\gamma_{\epsilon q}^p = d\lambda \dots \dots \dots (3-67)$$

Où d'une façon alternative :

$$d\chi = d\gamma_{\epsilon q}^p = d\lambda \frac{\partial h}{\partial \xi} = d\lambda \dots \dots \dots (3-68)$$

Où $h = h(\sigma, \xi)$ et le potentiel non associé défini par [178] :

$$h(\sigma, \xi) = \tau + \delta\sigma + \xi - \delta\rho_0 \dots \dots \dots (3-69)$$

On suppose ici que la distorsion plastique est la variable d'état thermodynamique à associer à la force d'écrouissage ξ .

Supposons de plus, que le potentiel non associé $h(\sigma, \xi)$ précisant la règle d'écoulement (3-58), a les mêmes valeurs numériques que le potentiel non associé g (3-61), précisant la règle d'écoulement (3-62), respectivement (3-64). On peut alors effectuer le changement de variables $z \rightarrow \xi$:

$$\begin{cases} z\delta\rho_0 = -\xi + \delta\rho_0 \\ \xi = \delta\rho_0(1 - z) \dots\dots\dots(3-70) \\ z = 1 - \xi/\delta\rho_0 \end{cases}$$

Qui ne modifie pas l'expression de la règle d'écoulement (3-62), respectivement (3-64). Utilisant (3-70) dans l'expression (3-60) de la surface de charge, il vient :

$$f(\sigma, \xi) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_0) + \xi f(\theta)/\delta \dots\dots\dots(3-71)$$

Comme on a ainsi $\partial f/\partial \xi = f(\theta)/\delta$, $\partial h/\partial \xi = 1$ et $\xi = -\partial U/\partial \gamma_{\text{éq}}^p$, on déduit par (3-16) l'expression du module d'écoulement H :

$$H = \frac{f(\theta)}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_{\text{éq}}^p} = -\frac{f(\theta)}{\delta} \frac{\partial \xi}{\partial \gamma_{\text{éq}}^p} \dots\dots\dots(3-72)$$

Etudions maintenant le signe de l'écoulement :

Pour cela, réécrivons la puissance intrinsèque (3-10) ($\Phi = \sigma: \dot{\varepsilon}^p + \xi \dot{\chi}$) ≥ 0 à l'aide des règles d'écoulement (3-62) et d'écoulement (3-68), on a :

$$d\lambda(\tau + \delta\sigma + \xi) \geq 0 \text{ quand } f(\sigma, \xi) = 0 \dots\dots\dots(3-73a)$$

En remplaçant dans l'inégalité τ par sa valeur donnée dans la relation (3-72), la non-négativité de la dissipation intrinsèque impose la condition :

$$(\sigma + \xi/\delta)(\delta - f(\theta)) + f(\theta)\rho_0 \geq 0 \text{ quand } f(\sigma, \xi) = 0 \dots\dots\dots(3-73b)$$

Cette condition est satisfaite si :

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \delta \leq \inf f(\theta) = f_t \dots\dots\dots(3-74) \end{cases}$$

Le modèle de Willam-Warnke à trois paramètres implique donc la non-négativité de la dilataance :

$$\begin{cases} \forall f(\sigma, \xi) = f(\sigma, z) = 0 \\ tr(d\varepsilon^p) = \delta d\gamma_{\acute{e}q}^p \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots(3-75)$$

Avec les inégalités (3-59), le facteur de dilatance doit alors satisfaire :

$$0 \leq \delta \leq f_t \leq \sqrt{3}/2 \dots\dots\dots(3-76)$$

Par conséquent, de l'expression (3-73), on déduit que le signe de l'écouissage dépend uniquement de l'évolution de la force d'écouissage :

$$sgn(H) = -sgn(d\xi) = -sgn(\partial\xi/\partial\gamma_{\acute{e}q}^p) \dots\dots\dots(3-77)$$

Rappelons que dans des essais de compression simple, de compression biaxiale et de traction simple, le béton suit un comportement dilatant et un écouissage positif pour des charges appliquées comprises entre 75% et 100% de résistances : on fixera le domaine d'écouissage positif par :

$$H > 0: z \in [z_0, z_{max}] = [0,75; 1,0] \dots\dots\dots(3-78)$$

La forme qualitative des courbes $\xi = \xi(\gamma_{\acute{e}q}^p)$ qu'on pourrait extraire des essais pour ce domaine d'écouissage positif est illustrée sur la figure 3.21. Cette figure présente également la forme des courbes $\xi = \xi(\gamma_{\acute{e}q}^p)$ dans le domaine d'écouissage négatif. Pour ce domaine, il faut ainsi définir deux fonctions pour rendre compte du comportement adoucissant dissymétrique en traction et en compression.

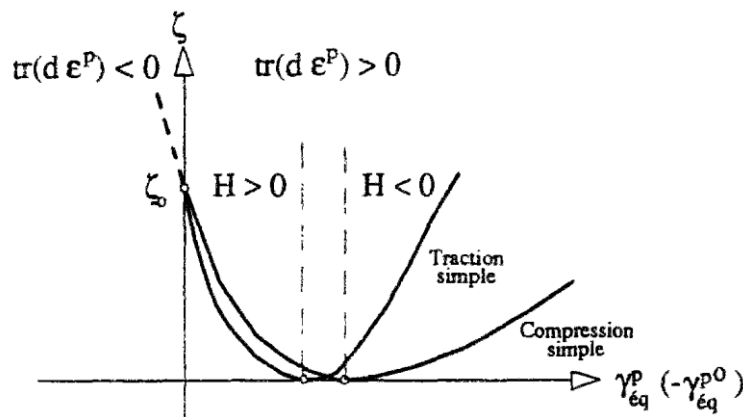


Figure 3.21 – Courbes $\xi = \xi(\gamma_{\acute{e}q}^p)$ (qualitatives) en compression simple et traction simple tirées de résultats d'essais, utilisées sous forme $z = z(\gamma_{\acute{e}q}^p)$ [211].

III- 3 Aspects géométriques et cinématiques :

III- 3.1 Définitions géométriques :

Une coque est un solide limité par deux surfaces parallèles. Géométriquement, un tel domaine peut être défini par une surface courbe π dite surface de référence et un ensemble de fibres transversales, de longueur h éventuellement variable en chacun des points de la surface π mais restant petites en comparaison avec ses dimensions et son rayon de courbure minimum figure (3.22). Une configuration arbitraire de la coque est alors définie par des données de la position de chacun des points de la surface de référence et des vecteurs unitaires, dits vecteurs directeurs, liés à chacun de ces points.

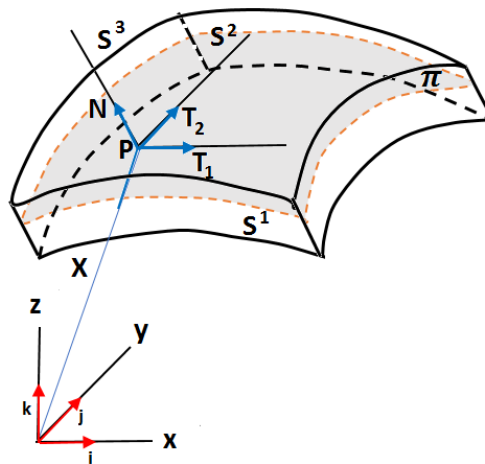


Figure 3.22 – Géométrie de la coque.

Il est fréquent et commode de considérer la surface moyenne, dite aussi surface médiane, comme surface de référence et décrire cette surface par deux coordonnées paramétriques S^1 et S^2 suivant deux vecteurs unitaires orthogonaux S_1 et S_2 choisis dans la configuration initiale de la coque. Ainsi, si p est un point matériel quelconque de la surface moyenne de référence, le vecteur position de p dans la configuration initiale est défini par $X(S^1, S^2)$ et dans la configuration actuelle par $x(S^1, S^2)$. Quant aux vecteurs unitaires tangents à la ligne S^α , respectivement à ces configurations, ils sont définis par :

$$S_\alpha = \frac{\partial X}{\partial S^\alpha}$$

et

$$S_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} \frac{\partial x}{\partial S^\alpha} \quad \text{où} \quad \lambda_\alpha = \left\| \frac{\partial x}{\partial S^\alpha} \right\|$$

Où l'indice α et d'autres indices grecques minuscules, pour décrire les quantités reliées à la surface moyenne varient de 1 à 2. Nous attachons au point p dans la configuration initiale

une base orthonormale mobile $A^0(S^1, S^2)$, engendrée par les vecteurs de base T_1, T_2 et N , choisis tels que :

$$T_1 = S_1, \quad T_2 = S_2 \quad \text{et} \quad N = T_1 \times T_2$$

Et auxquels nous associerons les vecteurs t_1, t_2 et n , définissant dans la configuration actuelle la base orthonormale $A(S^1, S^2)$, obtenue par une transformation orthogonale de la base $A^0(S^1, S^2)$:

$$t_1 = R.T_1, \quad t_2 = R.T_2 \quad \text{et} \quad n = R \times N$$

C'est dans la base orthonormale $A^0(S^1, S^2)$ que sera formulé le principe des travaux virtuels et c'est suivant ses vecteurs de base que seront définies les mesures physiques de déformations et de contraintes. Pour une définition plus explicite de ces vecteurs, considérons les vecteurs de base covariants $\frac{\partial X}{\partial \xi^1}$ et $\frac{\partial X}{\partial \xi^2}$, tangents en p aux directions définies par les coordonnées paramétriques gaussiennes ξ^1 et ξ^2 . Le vecteur N est choisi comme étant le vecteur unitaire normal au plan tangent $(\frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2})$ en p :

$$N = \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi^2} / \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\|$$

Ce vecteur permet de définir la coordonnée paramétrique $S^3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ suivant la fibre transversale dans la configuration initiale et par le fait même, l'orientation de la coque dans cette configuration. La surface située à l'abscisse dans le sens positif de N est la surface supérieure de la coque et l'autre est sa surface inférieure. Pour la définition de $T_1 = S_1$ et $T_2 = S_2$, nous adoptons la convention suivante :

$$T_2 = \begin{cases} \frac{N \times i}{\|N \times i\|} & \text{si } N \cdot i < \cos 0.1^\circ \\ \frac{N \times k}{\|N \times k\|} & \text{si } N \cdot i \geq \cos 0.1^\circ \end{cases}$$

Et

$$T_1 = T_2 \times N$$

Où i et k sont respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes globaux x et z (figure 3.22). Ainsi, la direction locale S^1 est par défaut la projection de l'axe global x sur la surface moyenne. Si l'axe x est presque normale à la surface, la ligne S^1 est alors la projection sur la surface de l'axe global z . La direction S^2 est choisie de sorte que (T_1, T_2, N) forme un trièdre droit.

L'élément différentiel dX au point p s'écrit par conséquent :

$$dX = T_\alpha dS^\alpha = \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta \dots\dots\dots(3-79)$$

Ce qui permet de déduire la transformation géométrique entre les coordonnées paramétriques S^α et ξ^β :

$$\frac{\partial}{\partial S^\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$$

Où

$$\left[\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial S^\beta} \right] = \left[\frac{\partial S^\alpha}{\partial \xi^\beta} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \cdot \partial X / \partial \xi^1 & T_1 \cdot \partial X / \partial \xi^2 \\ T_2 \cdot \partial X / \partial \xi^1 & T_2 \cdot \partial X / \partial \xi^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

III- 3.2 Hypothèses cinématiques :

La théorie des coques que nous considérons dans ce chapitre est fondée sur l'hypothèse cinématique des sections droites et de non variation de l'épaisseur. Selon cette hypothèse, souvent associée aux noms de Reissner, Mindlin et Naghdi, une fibre transversale de longueur h , initialement rectiligne et normale à la surface moyenne reste rectiligne (mais pas nécessairement normale à la surface moyenne) et ne subit aucune élongation au cours du temps. Un point matériel q de la fibre transversale initialement situé à la position :

$$\tilde{X}(S^1, S^2, S^3) = X(S^1, S^2) + S^3 N(S^1, S^2) \dots\dots\dots(3-80)$$

Est transformé dans la configuration actuelle à la position :

$$\tilde{x}(S^1, S^2, S^3) = x(S^1, S^2) + S^3 n(S^1, S^2) \dots\dots\dots(3-81)$$

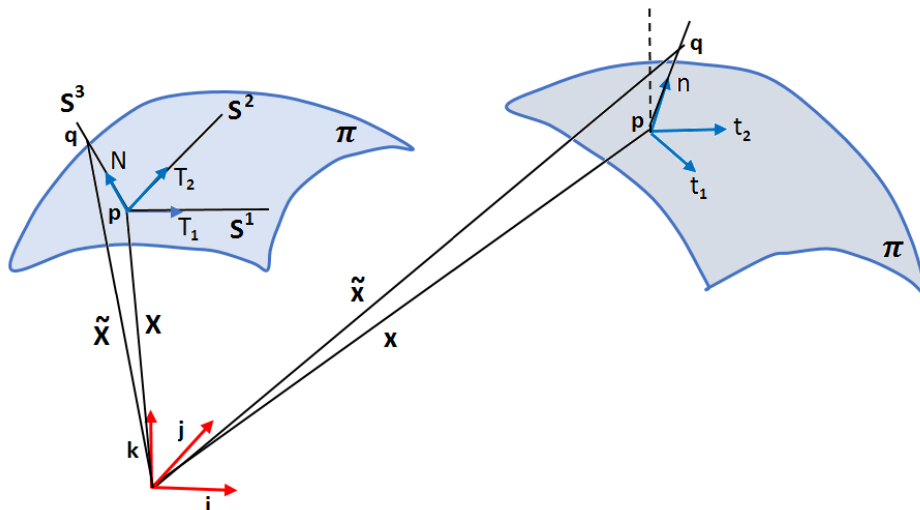


Figure 3.23 – Cinématique de la coque.

Connue sous le nom de cinématique de la surface de Cosserat à un seul vecteur directeur inextensible, une telle cinématique permet donc de décrire le mouvement de la coque en

entier, simplement par la connaissance en chaque instant du couple (x, n) , ou plus explicitement, du champ de déplacement : $u = x - X$ et du champ de rotation ϕ définissant la transformation orthogonale R , reliant les vecteurs directeurs n et N :

$$n = R.N \quad \text{et} \quad R = \exp(\check{\phi})$$

Où $\check{\phi}$ et le tenseur antisymétrique défini par les propriétés :

$$\check{\phi} \cdot \phi = 0 \quad \text{et} \quad \check{\phi} \cdot v = \phi \times v \quad \text{pour tout vecteur } v$$

Et $\exp(\check{\phi})$ est le tenseur orthogonal défini en termes du vecteur rotation ϕ par

$$\exp(\check{\phi}) = \cos\phi I + \frac{\sin\phi}{\phi} \check{\phi} + \frac{1 - \cos\phi}{\phi^2} \phi \otimes \phi$$

La cinématique au cours du temps de la coque est alors décrite par le couple (x, n) représentant respectivement la position de la surface moyenne et le champ de vecteurs directeurs aux points de la surface moyenne, cinématique connue sous le nom de cinématique de la surface de Cosserat à un seul vecteur directeur inextensible.

Avec ces hypothèses, les gradients de la position actuelle du point q par rapport aux coordonnées paramétriques $S^i|_{i=1,2,3}$ sont donc :

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial S^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial S^\alpha} + S^3 \frac{\partial n}{\partial S^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial S^3} = n$$

Dans la configuration initiale nous avons les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^\alpha} = \frac{\partial X}{\partial S^\alpha} + S^3 \frac{\partial N}{\partial S^\alpha} = T_\alpha - S^3 B_{\alpha\beta} T_\beta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^3} = N$$

Nous permettons à leur tour d'obtenir les vecteurs contravariants :

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial \tilde{X}} = R^{-1} \epsilon_\beta^\alpha \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^3} \times \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^\beta} = T_\alpha - S^3 B_{\alpha\beta} T_\beta + O(S^2)$$

$$\frac{\partial S^3}{\partial \tilde{X}} = R^{-1} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^2} = N$$

Avec R égal à :

$$R = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^3} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^2} \right) = 1 - S^3 B_{\alpha\alpha} + O(S^2)$$

$\epsilon_{\alpha}^{\beta}$ désigne le symbole de permutation et $B_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur des courbures B de la surface moyenne initiale :

$$\epsilon_1^1 = -\epsilon_2^2 = 0, \quad \epsilon_1^2 = -\epsilon_2^1 = 1$$

Et

$$B_{\alpha\beta} = T_{\alpha} \cdot B \cdot T_{\beta} = -\frac{\partial N}{\partial S^{\alpha}} \cdot T_{\beta} = N \cdot \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial S^{\beta}} = B_{\beta\alpha}$$

Remarques

- Nous adoptons une formulation lagrangienne totale, dans laquelle la configuration initiale de la coque est choisie comme référence. L'élément de volume initial dV^0 , donnée par la relation paramétrique :

$$dV^0 = R dS^1 dS^2 dS^3 \quad \text{où} \quad R = \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^1} \times \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^2} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^3}$$

sera approché par:

$$dV^0 = R dS^1 dS^2 dS^3 = dA dS^3$$

En admettant que la longueur de la fibre longitudinale, c'est-à-dire parallèle à la surface moyenne ne varie pas beaucoup à travers l'épaisseur.

- Pour spécifier l'orientation du vecteur directeur n , nous utilisons l'algèbre quaternion. La transformation orthogonale $R = \exp(\check{\phi})$ est remplacée dans ce cas par le quaternion unitaire $r = (r_0, r)$, de sorte que :

$$r_0 = \cos(\phi/2) \quad \text{et} \quad r = \frac{\sin(\phi/2)}{\phi} \phi$$

ce qui permet d'exprimer le tenseur rotation par:

$$\exp(\check{\phi}) = (2r_0^2 - 1)I + 2r_0\check{r} + 2r \otimes r$$

et le vecteur directeur par:

$$n = r \circ N \circ r^t = (2r_0^2 - 1)N + 2r_0 r \times N + 2(r \cdot N)r$$

III- 3.3 Mesure de déformation :

Valable pour les grandes rotations mais petites déformations et bien approprié pour une description lagrangienne totale, le tenseur de Green-Lagrange ε^G est retenu comme mesure de déformation des coques. Il est défini en terme du gradient de déformation F par :

$$\varepsilon^G = \frac{1}{2} (F^T \cdot F - I)$$

Ou aussi, en fonction de ses composantes covariantes par :

$$\varepsilon^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial S^i} \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial S^j} - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^i} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial S^j} \right) \frac{\partial S^i}{\partial \tilde{X}} \otimes \frac{\partial S^j}{\partial \tilde{X}} \quad i, j = 1, 2, 3$$

Ce tenseur sera rapporté à la base orthonormale $A^0 \equiv [T_1, T_2, N]$ dans le but de définir les mesures physiques de déformations, soit les déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transversal de la surface de référence. Ainsi :

$$\varepsilon^G = \varepsilon_{\alpha\beta} T_\alpha \otimes T_\beta + \varepsilon_{\alpha 3} T_\alpha \otimes N + \varepsilon_{3\alpha} N \otimes T_\alpha + \varepsilon_{33} N \otimes N \dots \dots \dots (3-82)$$

Où nous obtenons, compte tenu des résultats de la section précédente et en négligeant tous les termes de second ordre et plus en S^3 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= T_\alpha \varepsilon^G T_\beta = \frac{1}{2} [g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} + S^3 (B_{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} - 2b_{\alpha\beta})] \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= T_\alpha \varepsilon^G N = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x}{\partial S^\alpha} \cdot n + S^3 B_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial x}{\partial S^\gamma} \cdot n \right) \right] \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= N \varepsilon^G T_\alpha = \varepsilon_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{33} &= N \varepsilon^G N = 0 \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles nous avons introduit les variables cinématiques $g_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ définies par:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial S^\beta} = g_{\beta\alpha}$$

dénotant le métrique de la surface moyenne déformée et

$$b_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial n}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial S^\beta} + \frac{\partial n}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial x}{\partial S^\alpha} \right) = b_{\beta\alpha}$$

désignant l'approximation des courbures de cette surface, puisque n n'est pas tout à fait normal à la surface moyenne dans la configuration actuelle. Nous introduisons à présent les déformations généralisées suivantes :

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) && : \text{déformation de membrane} \\
 \kappa_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} + B_{\alpha\gamma}e_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma}e_{\gamma\alpha} && : \text{déformation de flexion} \dots\dots\dots(3-83) \\
 \gamma_{\alpha 3} &= \frac{\partial x}{\partial S^\alpha} \cdot n && : \text{déformation de cisaillement transversal}
 \end{aligned}$$

La substitution de ces expressions dans les composantes de ε^G , nous permet de définir les déformations :

$$\begin{cases}
 \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + S^3 \kappa_{\alpha\beta} \\
 \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha 3} = \varepsilon_{3\alpha}
 \end{cases} \dots\dots\dots(3-84)$$

Où nous avons négligé dans l'expression de $\varepsilon_{\alpha 3}$, terme $S^3 B_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma 3}$. Notons au passage que $\varepsilon_{33} = 0$, dû au fait que la fibre transversale est supposée inextensible. Même si cette composante n'est pas nulle, sa contribution au travail virtuel ne sera pas considérée, puisque nous admettons qu'il n'y a pas de contrainte selon la normale à la surface moyenne.

III- 3.4 Variations des déformations :

III- 3.4.1 Premières variations :

La linéarisation des relations (7.6), nous permet d'obtenir les premières variations des déformations, soit :

$$\begin{cases}
 \delta\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta e_{\alpha\beta} + S^3 \delta\kappa_{\alpha\beta} \\
 \delta\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \delta\gamma_{\alpha 3}
 \end{cases} \dots\dots\dots(3-85)$$

où les variations des déformations généralisées sont données par les expressions:

$$\begin{aligned}
 \delta\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\lambda_\beta s_\beta \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial S^\alpha} + \lambda_\alpha s_\alpha \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial S^\beta} \right) \\
 \delta\kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial S^\alpha} + \frac{\partial n}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial S^\beta} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\lambda_\beta \frac{\partial n}{\partial S^\alpha} \cdot s_\beta + \lambda_\alpha \frac{\partial n}{\partial S^\beta} \cdot s_\alpha \right) \cdot \delta\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\lambda_\beta n \cdot s_\beta \frac{\partial \delta\theta}{\partial S^\alpha} \cdot s_\beta + \lambda_\alpha n \cdot s_\alpha \frac{\partial \delta\theta}{\partial S^\beta} \right) + B_{\alpha\gamma} \delta e_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma} \delta e_{\gamma\alpha} \\
 \delta\gamma_{\alpha 3} &= n \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial S^\alpha} + \lambda_\alpha n \cdot s_\alpha \cdot \delta\theta
 \end{aligned}$$

qui s'écrivent aussi sous la forme:

$$\begin{cases} \delta E = B \cdot \delta u \\ \delta \gamma = B_\gamma \cdot \delta u \end{cases}$$

exprimant moyennant les opérateurs différentiels B et B_γ , la dépendance des déformations virtuelles généralisées δE et $\delta \gamma$ aux déplacements virtuels généralisés δu . Ces entités sont définis par :

$$\delta u \equiv [\delta x \quad \delta \phi]^T, \quad \delta E \equiv [\delta e_{11} \quad \delta e_{22} \quad 2\delta e_{12} \quad \delta \kappa_{11} \quad \delta \kappa_{22} \quad 2\delta \kappa_{12}]^T, \\ \delta \gamma \equiv [\delta \gamma_{13} \quad \delta \gamma_{23}]^T$$

et les opérateurs différentiels par:

$$B \equiv [B_x \quad B_\phi] \quad \text{et} \quad B_\gamma \equiv \begin{bmatrix} n^T \frac{\partial}{\partial S^1} (\lambda_1 n \cdot s_1)^T \cdot H \\ n^T \frac{\partial}{\partial S^2} (\lambda_2 n \cdot s_2)^T \cdot H \end{bmatrix}$$

Avec

$$B_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 s_1^T \frac{\partial}{\partial S^1} \\ \lambda_2 s_2^T \frac{\partial}{\partial S^2} \\ \lambda_1 s_1^T \frac{\partial}{\partial S^1} + \lambda_2 s_2^T \frac{\partial}{\partial S^2} \\ \left(\frac{\partial n}{\partial S^1} + 2\lambda_1 B_{11} s_1 + \lambda_2 B_{12} s_2 \right)^T \frac{\partial}{\partial S^1} + \lambda_1 B_{12} s_1^T \frac{\partial}{\partial S^2} \\ \left(\frac{\partial n}{\partial S^2} + 2\lambda_2 B_{22} s_2 + \lambda_1 B_{12} s_1 \right)^T \frac{\partial}{\partial S^2} + \lambda_2 B_{12} s_2^T \frac{\partial}{\partial S^1} \\ \left(\frac{\partial n}{\partial S^2} + \lambda_2 (B_{11} + B_{22}) s_2 + 2\lambda_1 B_{12} s_1 \right)^T \frac{\partial}{\partial S^1} \\ + \left(\frac{\partial n}{\partial S^1} + \lambda_1 (B_{11} + B_{22}) s_1 + 2\lambda_2 B_{12} s_2 \right)^T \frac{\partial}{\partial S^2} \end{bmatrix}$$

Et

$$B_\phi \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\lambda_1 \frac{\partial n}{\partial S^1} \cdot s_1\right)^T \cdot H + (\lambda_1 n \cdot s_1)^T \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial S^1} + H \frac{\partial}{\partial S^1}\right) \\ \left(\lambda_2 \frac{\partial n}{\partial S^2} \cdot s_2\right)^T \cdot H + (\lambda_2 n \cdot s_2)^T \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial S^2} + H \frac{\partial}{\partial S^2}\right) \\ \left(\lambda_2 \frac{\partial n}{\partial S^1} \cdot s_2 + \lambda_1 \frac{\partial n}{\partial S^2} \cdot s_1\right)^T \cdot H \\ + (\lambda_2 n \cdot s_2)^T \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial S^1} + H \frac{\partial}{\partial S^1}\right) \\ + (\lambda_1 n \cdot s_1)^T \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial S^2} + H \frac{\partial}{\partial S^2}\right) \end{bmatrix}$$

H étant l'opérateur tangentiel reliant la variation angulaire spatiale $\delta\theta$ à la variation de la rotation $\delta\phi$.

III- 3.4.2 Secondes variations :

Des expressions des premières variations des déformations, nous obtenons :

$$\begin{cases} d\delta\varepsilon_{\alpha\beta} = d\delta e_{\alpha\beta} + S^3 d\delta\kappa_{\alpha\beta} \\ d\delta\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} d\delta\gamma_{\alpha 3} \end{cases} \dots\dots\dots(3-86)$$

où il est facile de montrer, que

$$d\delta e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \delta x}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial dx}{\partial S^\beta} + \frac{\partial \delta x}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial dx}{\partial S^\alpha} \right]$$

$$\begin{aligned}
d\delta\kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial\delta x}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial n}{\partial S^\beta} \cdot d\theta - \delta\theta + \frac{\partial n}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial dx}{\partial S^\alpha} + \right. \\
& \frac{\partial\delta x}{\partial S^\beta} \cdot \frac{\partial n}{\partial S^\alpha} \cdot d\theta - \delta\theta + \frac{\partial n}{\partial S^\alpha} \cdot \frac{\partial dx}{\partial S^\beta} + \\
& \frac{\partial\delta x}{\partial S^\alpha} \cdot n \cdot \frac{\partial d\theta}{\partial S^\beta} - \frac{\partial\delta\theta}{\partial S^\beta} \cdot n \cdot \frac{\partial dx}{\partial S^\alpha} + \\
& \left. \frac{\partial\delta x}{\partial S^\beta} \cdot n \cdot \frac{\partial d\theta}{\partial S^\alpha} - \frac{\partial\delta\theta}{\partial S^\alpha} \cdot n \cdot \frac{\partial dx}{\partial S^\beta} \right] \\
& + \frac{1}{4} \delta\theta \cdot \left[\lambda_\alpha \left(s_\alpha \otimes \frac{\partial n}{\partial S^\beta} + \frac{\partial n}{\partial S^\beta} \otimes s_\alpha \right) \right. \\
& \left. \lambda_\beta \left(s_\beta \otimes \frac{\partial n}{\partial S^\alpha} + \frac{\partial n}{\partial S^\alpha} \otimes s_\beta \right) + 4b_{\alpha\beta} I \right] \cdot d\theta \\
& + \frac{1}{4} \lambda_\beta \left[\delta\theta \cdot (s_\beta \otimes n + n \otimes s_\beta) \frac{\partial d\theta}{\partial S^\alpha} + \frac{\partial\delta\theta}{\partial S^\alpha} (s_\beta \otimes n + n \otimes s_\beta) \delta\theta \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_\alpha \left[\delta\theta \cdot (s_\alpha \otimes n + n \otimes s_\alpha) \frac{\partial d\theta}{\partial S^\beta} + \frac{\partial\delta\theta}{\partial S^\beta} (s_\alpha \otimes n + n \otimes s_\alpha) \delta\theta \right] \\
& + B_{\alpha\gamma} d\delta e_{\gamma\beta} + B_{\beta\gamma} d\delta e_{\gamma\alpha}
\end{aligned}$$

$$\delta\gamma_{\alpha 3} = -\frac{\partial\delta x}{\partial S^\alpha} \cdot n \cdot d\theta + \delta\theta \cdot n \cdot \frac{\partial dx}{\partial S^\alpha} + \frac{1}{2} \lambda_\alpha \cdot \delta\theta \cdot (s_\alpha \otimes n + n \otimes s_\alpha) \cdot d\theta$$

où nous avons supposé $\gamma_{\alpha 3} = 0$ dans les expressions de $\delta\kappa_{\alpha\beta}$ et $\delta\gamma_{\alpha 3}$.

III- 4 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre une modélisation qui permet une prise en compte des non-linéarités matérielles et géométriques dans l'analyse de structures constituées de plaques et coques.

Pour la non linéarité matérielle, des modèles élastoplastiques et leur extension à un modèle élastoplastique avec endommagement "adaptés" au béton à l'échelle de description des structures.

A cette échelle, on considère que les variables plastiques du matériau modélisent sa fissuration et la variation des caractéristiques élastiques l'effet du dommage dû à la refermeture incomplète des fissures. Compte tenu de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu dans ce matériau, nous avons été amenés à poser des approximations parfois assez grossières. Dans tous les cas, nous avons essayé de faire une économie maximum de paramètres, en vue de l'applicabilité des modèles comme aides au concepteur des ouvrages d'art en béton.

Pour les non-linéarités géométriques, nous avons présenté les développements relatifs à un modèle de coque non linéaire de type Cosserat basé sur une cinématique à un seul vecteur directeur et sur l'hypothèse de Reissner/Mindlin/Naghdi.

La modélisation ainsi développée permet l'étude du phénomène d'instabilité élastique se produisant dans les structures coques (flambement linéaire), mais aussi les problèmes de grands déplacements et de grandes rotations, tout en restant en petites déformations.

Chapitre IV
Théorie des réseaux de
neurones artificiels

Chapitre 4

Théorie des réseaux de neurones artificiels

IV- 1 Introduction et historique :

En 1943, Mac Culloch et Pitts ont proposé le premier modèle de neurone biologique [212]. Ce dernier, appelé aussi neurone à seuil, a été inspiré des récentes découvertes en biologie. Ce sont des neurones logiques (0 ou 1). Ces deux physiciens ont montré que les neurones formels peuvent réaliser des fonctions logiques.

En 1949, le psychologue Donald Hebb a introduit le terme connexionnisme pour parler des modèles massivement parallèles et connectés. Il a proposé de nombreuses règles de mise à jour des poids dont la plus connue à cette époque est la "règle de Hebb" [212].

En 1958, le psychologue Frank Rosenblatt a développé le modèle du perceptron [213]. Il s'agit d'un réseau de neurones, capable d'apprendre à différencier des formes simples et à calculer certaines fonctions logiques. Il est inspiré du système visuel. Il a réussi à l'appliquer pour la reconnaissance des formes. Au début des années 60, les travaux de Rosenblatt ont vécu un grand intérêt dans le milieu scientifique. Mais en 1969, deux scientifiques américains appelés Minsky et Papert [212] ont publié un livre dans lequel ont démontré les limites du perceptron proposé par Rosenblatt. En particulier, son incapacité réside à la résolution des problèmes non linéaires.

Les travaux se sont ralentis considérablement jusqu'aux années 80. En 1982, Hopfield a fini par démontrer l'intérêt des réseaux entièrement connectés [212]. Parallèlement, Werbos a conçu un mécanisme d'apprentissage pour les réseaux multicouches de type perceptron : la rétropropagation (Back-Propagation). Cet algorithme qui permet de propager l'erreur vers les couches cachées sera popularisé en 1986 dans un livre "Parallel Distributed Processing" par Rumelhart et al. [214].

Depuis ces travaux, les applications des réseaux de neurones n'ont cessé de croître. Il a d'ailleurs été démontré qu'un réseau MLP (Multi Layer Perceptron) avec seulement deux couches peut approximer n'importe quelle fonction de R^n dans R^m avec une précision arbitraire [215].

Dans ce chapitre, une introduction sur l'intérêt d'utilisation des réseaux de neurones artificiels est décrite ainsi qu'en quoi cet outil mathématique peut nous en servir. On présente ensuite quelques notions de bases sur les réseaux de neurones. Puis, nous présentons la phase d'apprentissage d'un réseau de neurones. Nous intéresserons par la suite au réseau de

type RBF et nous expliquerons la démarche de calcul des erreurs par la technique de retropropagation.

Ce chapitre sera terminé par une présentation des diverses applications destinées à montrer la variété des domaines où les réseaux de neurones sont susceptibles d'apporter des solutions efficaces.

IV- 2 L'intérêt de l'utilisation des réseaux de neurones artificiels :

Les réseaux de neurones formels, tels que nous les allons définir dans les paragraphes qui suivent, possèdent la propriété d'approximation qui peut être énoncée de la manière suivante:

Toute fonction bornée suffisamment régulière peut être approchée avec une précision arbitraire dans un domaine fini de l'espace de ses variables, par un réseau de neurones comportant une couche de neurones cachés en nombre fini, possédant tous la même fonction d'activation et un neurone de sortie linéaire [216].

En plus, les réseaux de neurones nécessitent moins de paramètres ajustables (les poids des connexions) que d'autres outils mathématiques couramment utilisés. Dans la pratique, on n'utilise pas les réseaux de neurones pour réaliser des approximations de fonctions connues.

Le plus souvent, le problème qui se pose est de trouver une relation entre un ensemble de sorties dans un processus donné, et l'ensemble des entrées correspondant à travers les mesures effectuées.

On suppose que cette relation existe malgré que :

- Les mesures sont en nombre fini,
- Elles sont certainement entachées de bruit,
- Toutes les variables qui déterminent le résultat du processus ne sont pas forcément mesurées.

En d'autres termes, l'ingénieur cherche un modèle du processus qu'il étudie à partir des mesures dont il dispose : on dit qu'il effectue une modélisation "boîte noire" [217]. Dans la "syntaxe" des réseaux de neurones, les données à partir desquelles on cherche à construire le modèle s'appellent des exemples. Donc la raison pour laquelle les réseaux de neurones sont jugés d'être une bonne alternative est qu'on peut trouver une approximation à partir des mesures disponibles par un modèle RNA.

De manière générale, un réseau de neurones permet de faire un meilleur usage des mesures disponibles que les méthodes d'approximation non linéaires conventionnelles [218]. Ce gain peut être considérable lorsque le processus à modéliser dépend de plusieurs variables tel que dans le cas des procédés de mise en forme là où il intervient plusieurs types de non-linéarités et plusieurs paramètres matériels et technologiques.

IV- 3 Notions de base sur les réseaux de neurones artificiels :

IV- 3.1 Du Neurone biologique au neurone artificiel :

Un neurone biologique est une cellule vivante consacrée au traitement de l'information (figure 4.1). De son corps cellulaire ou soma, rayonnent de nombreuses dendrites (jusqu'à 100000) qui reçoivent des signaux provenant d'autres neurones ou cellules sensorielles. Ces signaux sont traités par le neurone qui transmet à son tour un signal, si certaines conditions sont réunies le long de son axone à d'autres neurones ou à de cellules effectrices (cellule musculaire par exemple) : On dit que le neurone est alors activé.

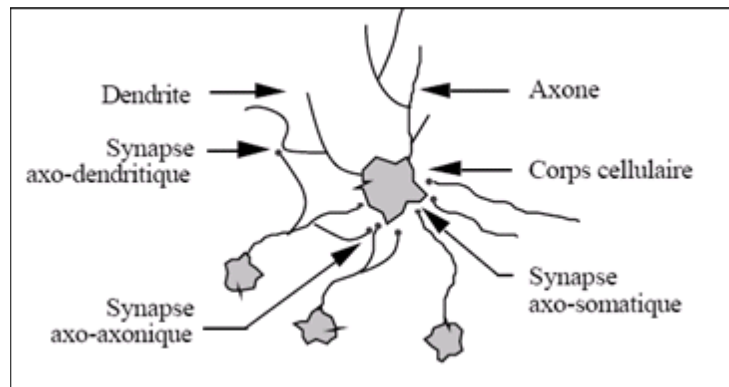


Figure 4.1 – Un neurone avec son arborisation dendritique.

La figure 4.2 montre la structure d'un neurone artificiel. Chaque neurone artificiel est un processeur élémentaire. Il reçoit un nombre variable d'entrées en provenance de neurones amont. A chacune de ces entrées est associée un poids w représentatif de la force de la connexion. Chaque processeur élémentaire est doté d'une sortie unique qui se ramifie ensuite pour alimenter un nombre variable de neurones aval. A chaque connexion est associé un poids.

Le modèle général du neurone artificiel est composé des éléments suivants :

- Une ou plusieurs entrées pondérées,
- Un sommateur,
- Une fonction de transfert,
- Une sortie.

Avec :

- x_i est l'entrée i ,
- w_{ij} est la valeur du poids synaptique reliant l'entrée i au neurone j ,
- \sum est la somme pondérée des entrées x_i ,
- $F(\)$ est la fonction de transfert,
- s est la sortie du neurone.

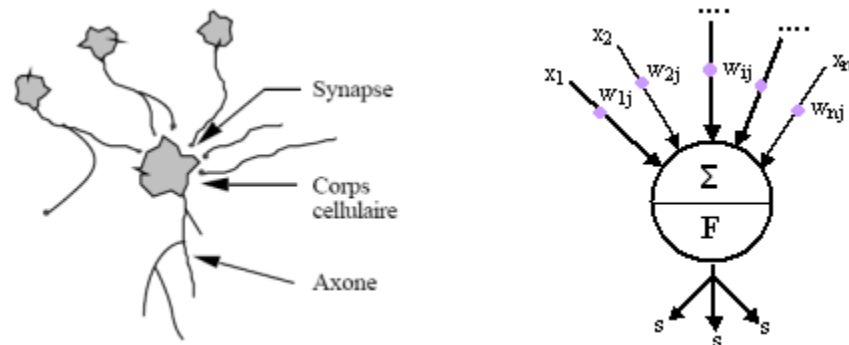


Figure 4.2 – Mise en correspondance neurone biologique / neurone artificiel

Définition : Un neurone est une fonction algébrique non linéaire, paramétrée à valeurs bornées [219].

IV- 3.2 Les réseaux de neurones :

Les réseaux de neurones artificiels (RNA) sont des processeurs élémentaires fortement connectés fonctionnant en parallèle. Chaque processeur élémentaire calcule une sortie unique sur la base des informations qu'il reçoit [219].

De point de vue modélisation mathématique, on peut définir un réseau de neurone artificiel par les quatre éléments suivants :

– La nature des entrées et des sorties :

Elles peuvent être :

– Binaire : $(-1; +1)$ ou $(0,1)$

– Réelles.

– La fonction d'entrée totale qui définit le prétraitement effectué sur les entrées : Elle peut être :

– Booléenne

– Linaire

– Affine

– Polynomiale de degré supérieur à deux

– La fonction d'activation du neurone qui définit son état en fonction de son entrée totale :

Elle peut être :

– Une fonction binaire à seuil ; dans ce cas on s'arrange pour que la forme de la fonction soit telle qu'on puisse utiliser la fonction de Heaviside (figure 4.3.a) ou la fonction signe (figure 4.3.b) :

– Une fonction linéaire à seuil (figure 4.4.a) : Soit SATUR la fonction à seuil

– Une fonction sigmoïde (figure 4.4.b).

– La fonction de sortie qui calcule la sortie du réseau en fonction de son état d'activation ; en général cette fonction est considérée comme la fonction identité.

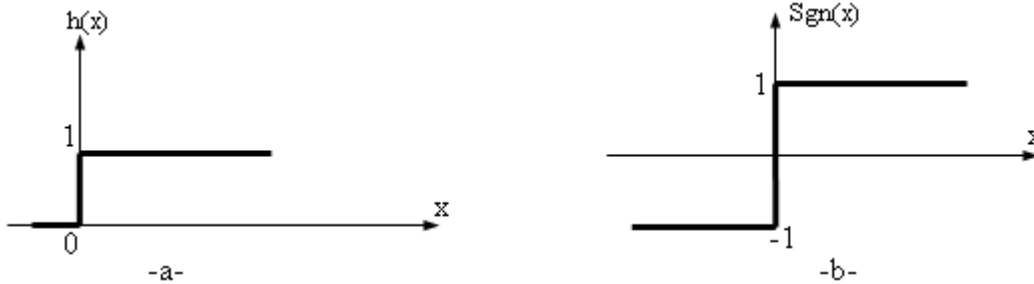


Figure 4.3 – a-Fonction de Heaviside, b-Fonction signe.

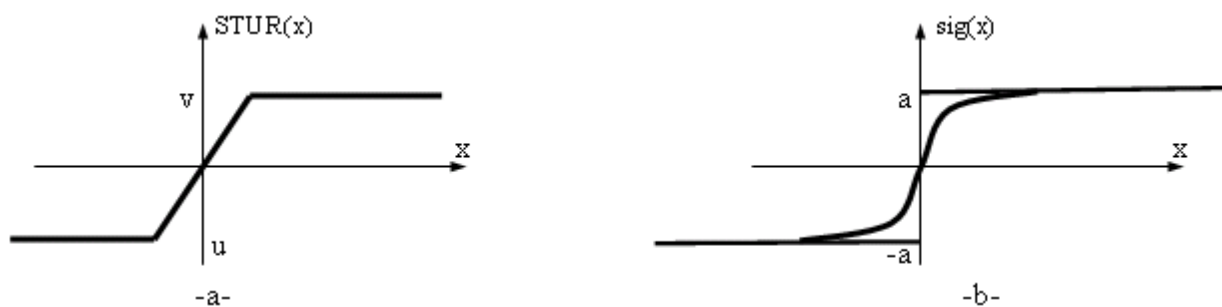


Figure 4.4 – a-Fonction linéaire à seuil, b-Fonction sigmoïde.

On distingue deux types de réseaux de neurones : Les réseaux non bouclés et les réseaux bouclés.

IV- 3.2.1 Réseau de neurones non bouclé :

Un réseau de neurones non bouclé est donc représenté graphiquement par un ensemble de neurones connectés entre eux, l'information circulant des entrées vers les sorties sans "retour en arrière" [220]. On constate que le graphe d'un réseau non bouclé est acyclique. En effet, si on se déplace dans ce type de réseau à partir d'un neurone quelconque en suivant les connexions, on ne peut pas revenir au neurone de départ. Les neurones qui effectuent le dernier calcul de la composition de fonctions sont les neurones de sortie. Ceux qui effectuent des calculs intermédiaires sont les neurones cachés (figure 4.5).

Les réseaux non bouclés à couche sont structurés tel que les neurones qui appartiennent à une même couche ne soient pas connectés entre eux, chacune des couches recevant des signaux de la couche précédente, et transmettant le résultat de ses traitements à la couche suivante. Les deux couches extrêmes correspondent à la couche d'entrée qui reçoit ses entrées du milieu extérieur d'une part, et à la couche de sortie qui fournit le résultat des traitements effectués d'autre part. Les couches intermédiaires sont appelées couches cachées, leur nombre est variable.

Les réseaux de neurones non bouclés à couches dont les neurones cachés ont une fonction d'activation sigmoïde, sont souvent appelés des perceptrons multicouche (ou MLP pour Multi-Layer Perceptron) [219].

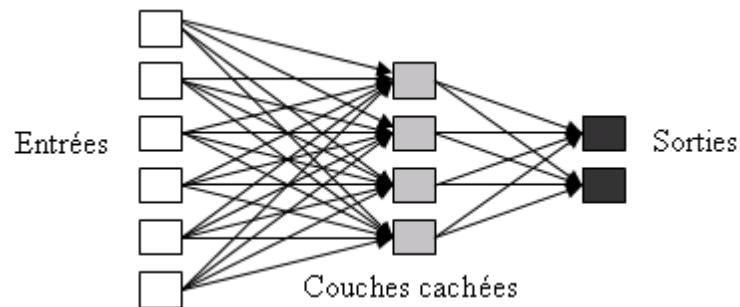


Figure 4.5 – Structure d'un réseau de neurones non bouclé.

IV- 3.2.2 Réseau de neurones bouclé (ou récurrent) :

Un réseau de neurones bouclé est schématisé par un graphe des connexions qui est cyclique. Lorsqu'on se déplace dans le réseau en suivant le sens des connexions, il est possible de trouver au moins un chemin qui revient à son point de départ (un tel chemin est désigné sous le terme de "cycle"). Ainsi, un retard entier multiple de l'unité de temps choisie est attaché à chaque connexion d'un réseau de neurones bouclé (ou à chaque arrête de son graphe). Une grandeur à un instant donné ne peut pas être fonction de sa propre valeur au même instant. Tout cycle du graphe du réseau doit avoir un retard non nul.

La figure 4.6 représente un exemple de réseau de neurones bouclé. Les chiffres dans les carrés indiquent le retard attaché à chaque connexion, exprimé en multiple de l'unité de temps. Ce réseau contient un cycle, qui part du neurone 3 et revient à celui-ci en passant par le neurone 4. La connexion de 4 vers 3 ayant un retard d'une unité de temps.

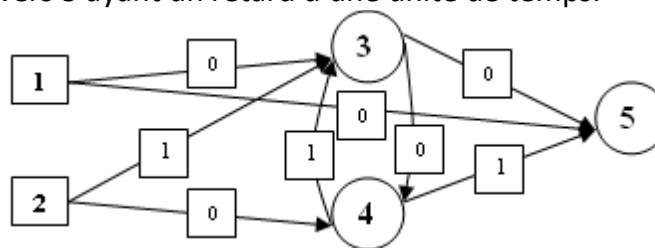


Figure 4.6 – Un réseau de neurones bouclé à deux entrées.

IV- 4 Apprentissage des réseaux de neurones :

On distingue deux types d'apprentissage : Un apprentissage "supervisé" et un apprentissage "non supervisé" [221].

IV- 4.1 L'apprentissage supervisé :

L'apprentissage "supervisé" pour les réseaux de neurones formels, consiste à calculer les coefficients synaptiques de telle manière que les sorties du réseau soient, pour les exemples utilisés lors de l'apprentissage, aussi proches que possibles des sorties "désirées". Ils peuvent être la classe d'appartenance de :

- La forme que l'on veut classer,
- La valeur de la fonction que l'on veut approcher,
- La sortie du processus que l'on veut modéliser,
- La sortie souhaitée du processus à commander.

On connaît donc, en tout point ou seulement en quelques points les valeurs que doit avoir la sortie du réseau en fonction des entrées correspondantes : C'est en ce sens que l'apprentissage est "supervisé". Cela signifie qu'un "professeur" peut fournir au réseau des "exemples" de ce que celui-ci doit faire. Ce type d'apprentissage sera adopté par la suite dans notre algorithme d'optimisation.

La plupart des algorithmes d'apprentissage des réseaux de neurones formels sont des algorithmes d'optimisation : Ils cherchent à minimiser par des méthodes d'optimisation non linéaire une fonction coût qui constitue une mesure de l'écart entre les réponses réelles du réseau et ses réponses désirées. Cette optimisation se fait de manière itérative, en modifiant les poids en fonction du gradient de la fonction coût : Le gradient est estimé par une méthode spécifique aux réseaux de neurones, dite méthode de rétropropagation, puis il est utilisé par l'algorithme d'optimisation proprement dit. Les poids sont initialisés aléatoirement avant l'apprentissage, puis modifiés itérativement jusqu'à obtention d'un compromis satisfaisant entre la précision de l'approximation sur l'ensemble d'apprentissage et la précision de l'approximation sur un ensemble de validation disjoint du précédent.

IV- 4.2 L'apprentissage non supervisé :

Un réseau de neurones non bouclé peut être également utilisé dans un but de visualiser ou d'analyser des données : On dispose d'un ensemble de données, représentées par des vecteurs de grande dimension et l'on cherche à les regrouper selon des critères de ressemblance qui sont inconnus à priori. Ce type de tâches est connu en statistique sous le nom de méthodes "d'agrégation". On peut utiliser les réseaux de neurones non bouclés pour réaliser une tâche assez voisine : A partir des données décrites par des vecteurs de grande dimension, on cherche à trouver une représentation de ces données dans un espace de dimension beaucoup plus faible (typiquement de dimension 2) tout en conservant les "proximités" ou "ressemblances" entre ces derniers. Il n'y a pas là, donc de "professeur", puisque c'est au réseau de découvrir les ressemblances entre les éléments de la base de données, et de les traduire par une proximité dans la "carte" de dimension 2 qu'il doit produire.

IV- 4.3 Calcul d'erreur :**IV- 4.3.1 Notation et définitions :**

Si l'on considère un réseau de n neurones numérotés de 0 à $n - 1$ (soit $v = n - 1$), on définit le vecteur colonne des états, le vecteur potentiels V et la matrice synaptique W . L'état du réseau est défini par le vecteur d'états. Le coefficient w_{ij} est la valeur du poids synaptique associé à la connexion qui lie la sortie du neurone j à une entrée du neurone i . La $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice W contient ainsi tous les coefficients synaptiques du neurone i . La matrice W est une matrice carrée $n.n$. Si le neurone i n'est pas connecté à la sortie du neurone j , le coefficient synaptique w_{ij} est maintenu à 0.

Il conviendra que toutes les entrées synaptiques x_j d'un neurone i sont connectées aux sorties de chaque neurone j du réseau, ainsi pour tout i , $x_j = \sigma_j$. Le réseau doit pouvoir être sensible à son environnement, il dispose pour cela de neurone d'entrée à entrée particulière dite externe. Une entrée externe n'est pas connectée à la sortie d'un autre neurone. Le réseau agit sur son environnement par l'intermédiaire d'un ensemble de neurones matérialisant ses sorties.

Dans le modèle neuronal que nous allons utiliser, l'entrée externe d'un neurone est non pondérée, elle s'ajoute à ses entrées synaptiques. Le potentiel de ces neurones est alors défini:

$$V_i(t + \tau) = \sum_{j=0}^{n-1} (W_{ij} \cdot \sigma_j(t)) + I_i(t) \dots \dots \dots (4-1)$$

Il devrait donc exister deux types de neurones dans un réseau : Ceux disposant d'une entrée externe et les autres, mais cela alourdirait les notations et les expressions analytiques pour peu de choses. Aussi, on considère sauf indication contraire que le potentiel de tout neurone est défini par l'équation (4-1). Lorsqu'un neurone ne dispose pas d'entrée externe, la variable $I_i(t)$ est toujours nulle.

Le fait d'utiliser des notations différentes pour distinguer les neurones de sortie des autres neurones, apporterait aussi des difficultés de notation. Pour cela, on définit un vecteur booléen de n composantes w , chacune étant associée à un neurone, tel que : $w_i = 0$ si le neurone i n'est pas un neurone de sortie et $w_i = 1$ si le neurone i est un neurone de sortie.

Tout neurone d'un réseau peut en être une entrée ou une sortie du réseau sans qu'il y ait de contrainte. Un neurone qui n'est ni une entrée ni une sortie est un neurone dit caché du réseau.

Il est utile de reconnaître les synapses actives de celles qui ne le sont pas. Par exemple ils peuvent nous en servir pour la reconnaissance des coefficients synaptiques modifiables durant un apprentissage ou alors, d'un point de vue algorithmique pour éviter d'effectuer d'inutiles multiplications par 0 durant l'utilisation du réseau. Dans ce but, on associe

généralement à un réseau de neurones un graphe d'adjacence dont les sommets représentent les neurones et les arcs les synapses. Les arcs sont orientés de la sortie d'un neurone vers l'entrée d'un autre.

On définit de même une matrice d'adjacence C , telle que C_{ij} est égale à 1 s'il existe une connexion du neurone pré-synaptique j vers le neurone post-synaptique i .

IV- 4.3.2 Fonctionnement d'un réseau :

Un neurone artificiel fait une somme pondérée des potentiels d'actions qui lui parviennent (chacun de ces potentiels est une valeur numérique qui représente l'état du neurone qui l'a émis), puis s'active suivant la valeur de cette sommation pondérée. Si cette somme dépasse un certain seuil, le neurone est activé et transmet une réponse (sous forme de potentiel d'action) dont la valeur est celle de son activation. Si le neurone n'est pas activé, il ne transmet rien.

Le modèle de W. S. McCulloch et W. E. Pitts (IV-1), appelé neurone artificiel, est un automate capable de prendre deux états, 0 (inactif) ou 1 (actif). Il dispose d'une sortie correspondant à l'axone et transmettant son état à d'autres neurones artificiels et des entrées pondérées.

Ils correspondent aux dendrites recevant des états qui proviennent d'autres neurones ou des grandeurs provenant des capteurs. Le nombre qui pondère chaque entrée est appelé "coefficient synaptique" (figure 4.7).

Soit W_{ij} le coefficient synaptique, ou poids synaptique, correspondant à la synapse transmettant l'activité du neurone j vers le neurone i . Soient $x_j(t)$ les valeurs présentées sur chacune des v entrées du neurone i à l'instant t . Soit θ_i une quantité associée au neurone i appelé "seuil". On définit $V_i(t)$ le potentiel d'action du neurone i à l'instant t de la façon suivante [222] :

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^v (W_{ij} \cdot x_j(t)) \dots \dots \dots (4-2)$$

L'état $\sigma_i(t + \tau)$ du neurone i à l'instant $t + \tau$ s'écrit :

$$\sigma_i(t + \tau) = 0 \quad \text{si } V_i(t) \leq \theta_i \dots \dots \dots (4-3)$$

$$\sigma_i(t + \tau) = 1 \quad \text{si } V_i(t) > \theta_i \dots \dots \dots (4-4)$$

La durée τ est caractéristique du neurone. On considèrera pour ce rapport que la durée est la même pour tous les neurones d'un réseau. L'état $\sigma_i(t + \tau)$ constitue le signal qui est transmis à d'autres neurones.

Il est commode de traiter le seuil θ_i comme un coefficient synaptique, la synapse correspondante étant considérée comme connectée à un neurone dont l'état est maintenu à -1.

L'écriture des expressions analytiques s'en trouve souvent légèrement simplifiée. Ce neurone comporte donc $v + 1$ entrées. Supposons que le seuil correspond au coefficient synaptique W_{i0} , on aura :

$$W_{i0} = \theta_i \text{ et } x_0 = -1$$

On définit alors l'évolution de l'état d'un neurone par les expressions suivantes :

$$V_i(t) = \sum_{j=0}^v (W_{ij} \cdot x_j(t)) \dots\dots\dots(4-5)$$

$$\sigma_i(t + \tau) = f(V_i(t)) \dots\dots\dots(4-6)$$

Dans le cas des neurones de Mc Culloch et Pitts, la fonction f est l'échelon de Heaviside (figure 4.7).

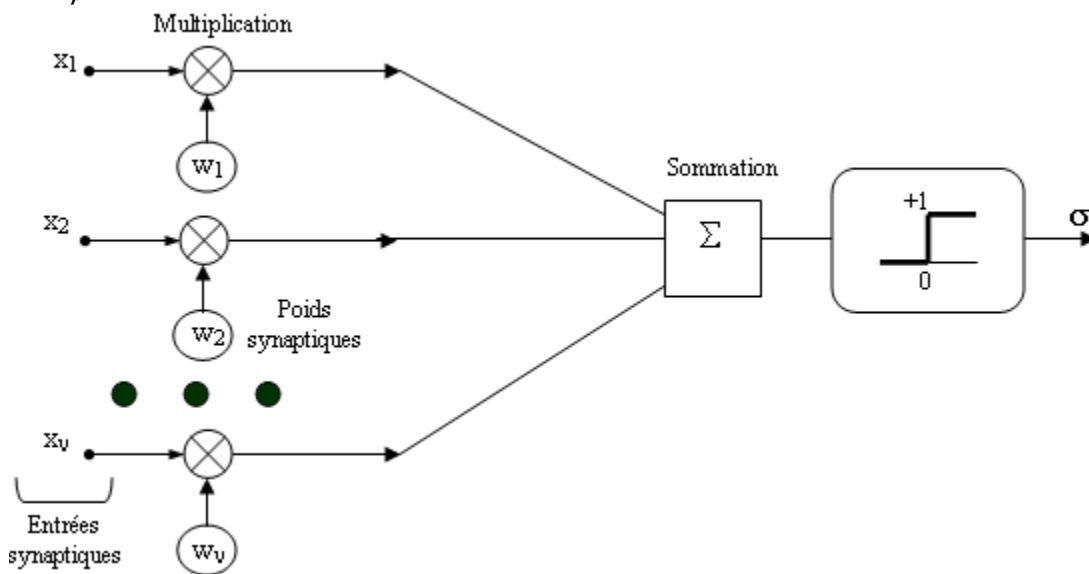


Figure 4.7 – Le neurone artificiel de Mc Culloch et Pitts.

IV- 4.3.3 L'algorithme de rétropropagation des erreurs :

Soit un exemple k qui est formé d'un couple de vecteurs $I(k)$ et $d(k)$ qui représentent respectivement l'état imposé à l'entrée du réseau et l'état de sortie désiré. Pour chaque neurone du réseau correspond une composante de $d(k)$ et $I(k)$. Si le neurone i n'est pas un neurone d'entrée, $I_i(k) = 0$, s'il n'est pas un neurone de sortie, la valeur de $d_i(k)$ n'est pas définie et la composante $w_i = 0$. Si le neurone i est un neurone de sortie $w_i = 1$.

La différence entre le vecteur $d(k)$ et le vecteur des états des neurones $'(k)$ peut être exprimée par un coût quadratique $J(k)$:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i (d_i(k) - \sigma(k))^2 \dots\dots\dots(4-7)$$

Le coût quadratique doit être minimisé pour tout exemple k . Cela revient à minimiser le coût quadratique global $J = \sum J(k)$:

$$J(k) = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{i=0}^{n-1} w_i (d_i(k) - \sigma(k))^2 \dots\dots\dots(4-8)$$

Ou s est le nombre d'exemples de l'ensemble d'apprentissage.

L'algorithme de rétropropagation des erreurs [214] est une méthode d'évaluation du gradient dont les calculs ont été astucieusement organisés de façon à réduire leur complexité temporelle et spatiale. Pour toute structure neuronale non bouclée l'algorithme fonctionne de la façon ci-dessous.

A chaque itération d'un algorithme de gradient, le moyen le plus simple de réduire la valeur de J est d'ajouter à chaque poids W_{ij} une quantité ΔW_{ij} définie de la façon suivante :

$$\Delta W_{ij} = -\eta \frac{\partial J}{\partial w_{ij}} \quad \text{avec } \eta > 0 \dots\dots\dots(4-9)$$

Le coefficient η appelé pas de gradient doit être choisi suffisamment grand, pour réduire au mieux le nombre d'itérations, mais pas trop pour que l'algorithme reste stable.

En introduisant le potentiel $V_i(k)$ du neurone i pour un exemple k et en utilisant la formule des dérivations composées, on obtient :

$$\Delta W_{ij} = -\eta \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\partial J(k) \partial V_i(k)}{\partial V_i(k) \partial W_{ij}} \dots\dots\dots(4-10)$$

Les neurones du réseau sont numérotés tel que si l'état du neurone i dépend de celui du neurone j , alors $j < i$. Tous ces neurones peuvent disposer d'une entrée et/ou d'une sortie externe. En remplaçant la dépendance par rapport au temps dans les expressions (4-5) et (4-6) par l'indice k de l'exemple courant présenté au réseau, on obtient :

$$V_i(k) = \sum_{j=0}^{n-1} W_{ij} \sigma_j(k) + I_i(k) \dots\dots\dots(4-11)$$

$$\sigma_j(k) = f(V_j(k)) \dots\dots\dots(4-12)$$

On en déduit alors :

$$\frac{\partial V_i(k)}{\partial w_{ij}} = \sigma_j(k) \quad \text{pour } j < i \dots\dots\dots(4-13)$$

On pose:

$$\delta_i(k) = -\frac{\partial J(k)}{\partial V_i(k)} \dots\dots\dots(4-14)$$

Soit i , le numéro d'un neurone quelconque du réseau, soit $J_i(k)$ la quantité :

$$J_i(k) = \sum_{m=i}^{n-1} w_m (d_m(k) - \sigma_m(k))^2 \dots\dots\dots(4-15)$$

On a :

$$J_i(k) = w_i (d_i(k) - \sigma_i(k))^2 + J_{i+1}(k) \quad \text{si } i \leq n - 1 \dots\dots\dots(4-16)$$

On a l'identité suivante :

$$\delta_i(k) = -\frac{\partial J(k)}{\partial V_i(k)} = -\frac{\partial J_i(k)}{\partial V_i(k)} = -\frac{\partial J_p(k)}{\partial V_i(k)} \quad \forall p \leq i \dots\dots\dots(4-17)$$

D'où, en utilisant les expressions (4-12) et (4-16) et la formule des dérivations composées :

$$\delta_i(k) = 2w_i f'(V_i(k))(d_i(k) - \sigma_i(k)) - \sum_{l=i+1}^{n-1} \frac{\partial J_{i+1} \partial V_l}{\partial V_l \partial V_i} \dots\dots\dots(4-18)$$

Où $f'(V_i(k))$ désigne la dérivée de la fonction de transfert. On convient que la somme à droite de l'expression (4-16) n'existe pas si $i = n - 1$.

Comme $l \geq i + 1$, selon l'identité (4-17) on aura :

$$-\frac{\partial J_{i+1}}{\partial V_l} = \delta_l(k) \dots\dots\dots(4-19)$$

D'autre part :

$$\frac{\partial V_l(k)}{\partial V_i(k)} = \frac{\partial \{ \sum_{j=0}^{l-1} W_{lj} \sigma_j(k) + I_l(k) \} \partial \sigma_i(k)}{\partial \sigma_i(k) \partial V_i(k)} = W_{lj} f'(V_i(k)) \dots\dots\dots(4-20)$$

En remplaçant les termes calculés en (4-19) et (4-20) dans (4-18), on obtiendra l'expression définitive de $\delta_i(k)$:

$$\delta_i(k) = f'(V_i(k)) \{ 2w_i (d_i(k) - \sigma_i(k)) + \sum_{l=i+1}^{n-1} W_{li} \delta_l(k) \} \dots\dots\dots(4-21)$$

En résumé, si le neurone i est un neurone de sortie, $\delta_i(k)$ contient le terme $(d_i(k) - \sigma_i(k))$ qui représente l'erreur que commet le neurone i par rapport à la sortie désirée $d_i(k)$. De plus, la valeur de $\delta_i(k)$ dépend des valeurs de $\delta_l(k)$, où l est le numéro de neurones placés sur des couches supérieures à celle de neurone i . Cette information se propage donc en sens

inverse de l'activation de $\sigma(k)$ et ne dépend que des erreurs commises par les neurones de sortie ainsi que des poids du réseau. Tout se passe comme si l'algorithme permettait d'attribuer une erreur commise à tout neurone du réseau, même ceux qui sont cachés. Ces considérations justifient le nom "rétropropagation des erreurs" pour cet algorithme. Ce dernier permet de calculer une valeur exacte du gradient : Il s'agit d'un algorithme de gradient total. On le présentera dans le paragraphe suivant :

IV- 4.3.4 L'algorithme du gradient total :

Soit $\epsilon(t)$ une mesure de l'erreur commise par le réseau pour tous les exemples de l'ensemble d'apprentissage à l'itération t . Soit ϵ_{max} , l'erreur maximale acceptable et soit C_{ij} le booléen tel que :

- $C_{ij} = 1$ s'il existe une connexion du neurone j vers le neurone i ,
- $C_{ij} = 0$ sinon

Tous les exemples sont présentés en séquence durant une epoch d'apprentissage, qui constitue pour une itération de l'algorithme de gradient. Il y'en a autant que nécessaire pour que l'erreur $\epsilon(t)$ soit inférieure à ϵ_{max} . Avec un tel critère d'arrêt, l'algorithme peut ne pas s'arrêter si le coût quadratique du minimum vers lequel tend la matrice synaptique est supérieur à ϵ_{max} . En pratique, le critère d'arrêt de l'algorithme est aussi généralement plus sophistiqué pour éviter d'être bloqué dans cette situation.

Tant que $\epsilon(t) > \epsilon_{max}$, faire

Pour $k = 0$ à $s - 1$ faire

Pour $i = 0$ à $n - 1$ faire ---Calcul de l'état du neurone---

$$V_i(k) = \sum_{j=0}^{i-1} W_{ij} \sigma_j(k) + I_i(k)$$

$$\sigma_i(k) = f(V_i(k))$$

Fin pour

--- calcul de l'erreur par rétropropagation---

Pour $i = n - 1$ à 0 faire

$$\delta_i(k) = f'(V_i(k)) \left\{ 2w_i(d_i(k) - \sigma_i(k)) + \sum_{l=i+1}^{n-1} W_{li} \delta_l(k) \right\}$$

Fin pour

Fin pour

---Calcul de la modification des poids après une présentation des exemples---

Pour $i = 0$ à $n - 1$ faire

Pour $j = 0$ à $n - 1$ faire

$$\Delta W_{ij} = -\eta C_{ij} \sum_{k=0}^{s-1} \delta_i(k) \sigma_j(k)$$

$$W_{ij}(t+1) = W_{ij}(t) + \Delta W_{ij}$$

Fin pour

Fin pour

Erreur (I, d, W) —Fonction qui retourne l'erreur commise par le réseau—

$t = t + 1$

Fin Tant que

IV- 4.3.5 L'algorithme du gradient stochastique LMS :

L'algorithme présenté au paragraphe précédent peut être très lent : Quel que soit la taille de l'ensemble d'apprentissage grand ou petit, le gradient n'est connu qu'après une epoch d'apprentissage.

Cela implique qu'il n'y a qu'une modification des poids synaptiques par epoch.

Il pourrait paraître plus intéressant d'utiliser une estimation du gradient obtenue avec des sous-ensembles de l'ensemble d'apprentissage. De cette façon, il y'aurait davantage de mise à jour des coefficients synaptiques par epoch et l'algorithme de gradient s'en trouverait plus accéléré. A la limite, on calcule une estimation du gradient pour chaque exemple présenté, et donc les coefficients synaptiques sont modifiés pour chaque exemple selon la quantité :

$$\Delta W_{ij} = -\eta C_{ij} \delta_i(k) \sigma_j(k) \dots \dots \dots (4-22)$$

Où η est une quantité positive permettant la convergence de l'algorithme.

IV- 4.4 Modélisation des réseaux de neurones artificiels (RNA):

L'erreur moyenne au carré (MSE) est une fonction d'erreur couramment utilisée qui tente de minimiser l'erreur moyenne entre la sortie du réseau et la valeur cible.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y - y')^2 \dots \dots \dots (4-23)$$

où N est le nombre d'échantillons, y et y' correspond aux valeurs mesurées et prédites, respectivement.

IV- 4.4.1 Fonction de base radiale (RBF) :

Dans un réseau typique à fonction de base radiale (RBF) (voir la figure 4.7), la couche d'entrée est simplement un récepteur pour les données d'entrée. La fonctionnalité cruciale du réseau RBF est le calcul de la fonction qui est effectué dans la couche masquée. Cette fonction

effectue une transformation non linéaire de l'espace d'entrée vers l'espace du calque masqué. Les fonctions des neurones cachés forment une base pour les vecteurs d'entrée et les neurones de sortie calculant simplement une combinaison linéaire (pondérée) des sorties des neurones cachés [248]. Les centres c_i et λ_i les écarts types des fonctions d'activation de la base radiale. Les fonctions d'activation de base radiale couramment utilisées sont gaussiennes et multiquadratiques. Une structure de réseau RBF typique est donnée à la figure 4.7.

Les paramètres c_{ij} et λ_{ij} sont les centres et les écarts-types des fonctions d'activation de base radiale. Les fonctions d'activation de base radiale couramment utilisées sont gaussiennes et multiquadratiques. Étant donné les entrées x , l'entrée totale du $i^{\text{ème}}$ neurone caché γ_i est donnée par (4-24).

$$\gamma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^l \left(\frac{x_j - c_{ij}}{\lambda_{ij}}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, l \quad \dots\dots\dots(4-24)$$

où N est le nombre de neurones cachés. La valeur de sortie du $i^{\text{ème}}$ neurone caché est $Z_{ij} = \sigma(\gamma_i)$ ou $\sigma(\gamma_i)$ est une fonction de base radiale. Enfin, les sorties du réseau RBF sont calculées à partir de neurones cachés, comme indiqué dans (4-25).

$$y_k = \sum_{i=0}^N \omega_{ki} Z_{ki} \dots\dots\dots(4-25)$$

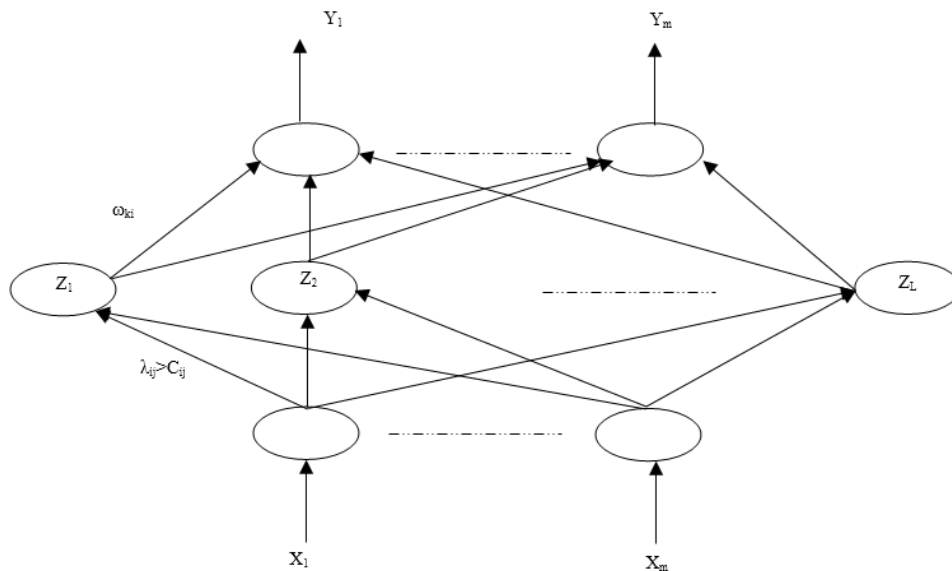


Figure 4.8 – Fonction de base radiale (RBF) Structure de réseau de neurones artificielle.

Où ω_{ki} est le poids du lien entre le $i^{\text{ème}}$ neurone de la couche cachée et le $k^{\text{ème}}$ neurone de la couche de sortie. Les paramètres de formation ω du réseau RBF incluent $\omega_{k0}, \omega_{ki}, c_{ij}, \lambda_{ij}, k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, n$.

IV- 5 Principaux travaux dans le domaine de Génie Civil :

Les réseaux de neurones sont des modèles de calcul très puissants et tolérants aux informations bruitées ou même inachevées, ces caractéristiques ont fait des réseaux de neurones un bon candidat pour une large variété d'applications en génie civil. Parmi les premiers articles publiés dans ce domaine c'est celui de Adeli et Yeh [223] paru en 1989 décrivant l'utilisation et l'apprentissage du perceptron dans la conception en ingénierie, et depuis ; plusieurs équipes se sont orientés vers l'application des réseaux de neurones aux problèmes de mécanique des structures, modélisation des matériaux, contrôle des vibrations, prédiction de fissures, détection des dommages, régulation des transports etc. [224, 225, 226, 227, 228].

Dans le domaine des matériaux bon nombre d'applications ont vu le jour, surtout dans les domaines de la modélisation, de la composition des bétons, de la durabilité des matériaux composites, de la fissuration etc.

Le béton est l'un des matériaux de construction les plus utilisés dans le monde, il est composé d'éléments bien connus ciment, eau, fines, agrégats etc. Dans la composition et la qualité du béton, la résistance à la compression axiale est une des propriétés les plus importantes.

D'autres propriétés telles que le module d'élasticité, la perméabilité, la résistance aux agents atmosphériques etc. sont directement liées à cette résistance. Seulement cette résistance ne peut être obtenue qu'après le 28ème jour de fabrication, des erreurs expérimentales sont inévitables et à cette date il est souvent trop tard d'apporter des améliorations si les tests sont insatisfaisants. C'est pourquoi il est fortement désirable de connaître une estimation de la résistance avant la fabrication du béton. Plusieurs études ont été menées pour déterminer la résistance du béton en utilisant les réseaux de neurones [229, 230, 231].

Kasperkiewicz et al. [229] ont utilisé les réseaux de neurones artificiels pour déterminer la composition d'un béton à haute performance en utilisant la technique de Carpenter et al des réseaux de neurones à résonance adaptative.

Plusieurs chercheurs [230, 231, 232, 233, 234] ont publié ; peu de temps après des articles sur l'utilisation des réseaux de neurones pour la prédiction de la résistance d'une composition de béton.

L'utilisation des réseaux de neurones a montré qu'on pouvait, à partir d'un seul test, extraire plus d'informations qu'à partir de plusieurs tests traditionnels. Peu de temps après les mêmes auteurs [235] ont utilisé un nouveau type de réseaux de neurones pour l'appliquer à la modélisation du béton, sable et matériaux composites. Ce nouveau type que l'on appelle Nested Adaptive Neural Network (NANN), qui prend avantage de la structure inclusive de donnée du milieu étudié. Le principe est d'utiliser un ancien réseau de neurones, lui ajouter de nouveaux modules et refaire une partie de l'apprentissage, comme ça on obtient un nouveau réseau de neurones représentant le comportement du milieu étudié dans une dimension plus grande. L'application de cette technique a été le chemin de contrainte dans l'essai triaxial.

Plus récemment Hashash et al. [236] ont proposé l'utilisation des réseaux de neurones (NANN) dans la modélisation par les éléments finis des problèmes de frontière. Sachant que les réseaux de neurones ont l'avantage d'apprendre continuellement suivant la disponibilité des données, et qu'ils ne nécessitent pas d'intégrations spéciales pour leur implémentation dans l'analyse par éléments finis contrairement aux modèles élastoplastiques.

La technique de rétropropagation back propagation neural network (BPNN) a été utilisée les premiers temps, laissant place à d'autres techniques plus récentes [237] comme les réseaux de neurones probabilistes (PNN) améliorant ainsi la qualité et le temps d'apprentissage.

Plusieurs travaux de recherche témoignent de l'efficacité de cette technique à modéliser des comportements non linéaires complexes. A titre d'exemples, citons les travaux récents de Waszczyszyn et al. [228, 238, 239] ont utilisé la technique de régularisation des réseaux de neurones associée à l'analyse des problèmes mal posés pour l'estimation de la fatigue du béton. Gotlib et al. [240] ont utilisé les réseaux de neurones pour l'analyse des matériaux composites hétérogènes désordonnés. L'utilisation des réseaux de neurones pour l'évaluation des paramètres de la distribution statistique a été faite par Fairbairn et al. [241] dans le but de simuler la fissuration du béton par la méthode des éléments finis. L'étude de la fissuration d'une poutre en béton armé renforcée par des fibres dans les zones de fissuration peut être faite par la MEF, néanmoins, cela implique beaucoup de complication, une technique empirique par les réseaux de neurones a été utilisée par Flood [242] dans le but de faciliter cette étude. D'autres utilisations dans la conception des éléments en acier ont également été faites dans les références [243, 244]. Et la liste reste longue et ouverte.

IV- 6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une théorie du fonctionnement et des possibilités des réseaux de neurones. Hopfield fixe préalablement le comportement à atteindre pour son modèle et construit à partir de là, la structure et la loi d'apprentissage correspondant au résultat escompté.

Dès l'apparition de la rétropropagation de gradient, nous avons la possibilité de réaliser une fonction non linéaire d'entrée/sortie sur un réseau en décomposant cette fonction en une suite d'étapes linéairement séparables.

Néanmoins les réseaux de neurones artificiels ont besoin de cas réels servant d'exemples pour leur apprentissage. Ces cas doivent être d'autant plus nombreux que le problème est complexe et que sa topologie est peu structurée. Sur un plan pratique, cela n'est pas toujours facile car les exemples peuvent être soit en quantité absolument limitée ou trop onéreux à collecter en nombre suffisants.

Chapitre V

Résultats et discussions

Chapitre 5

Résultats et discussions

V- 1 Validation :

V- 1.1 Domaine élastique :

Pour la validation, les résultats donnés par notre programme seront comparés à ceux théoriques de Timoshenko [249].

V- 1.1.1 Exemple 1 :

Plaque carrée de dimensions $L = 1\text{ m}$ soumise à une charge uniforme $q = 1\text{ kn/mm}^3$

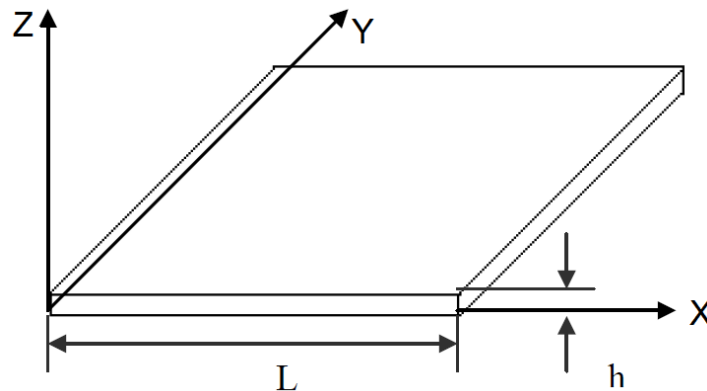
Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$E = 10920\text{Kn/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

L'épaisseur de la plaque h est égale à : 0.1 m .

$$\sigma_0 = 1600\text{Kn/mm}^2$$



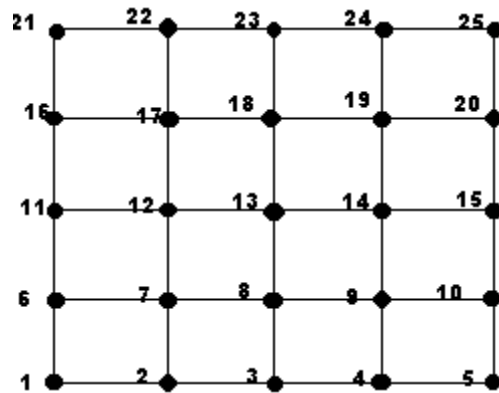
Selon la théorie des plaques de Timoshenko, la flèche maximale d'une plaque carrée dans la direction des z est donnée par :

$$W = \alpha q \frac{L^4}{D}$$

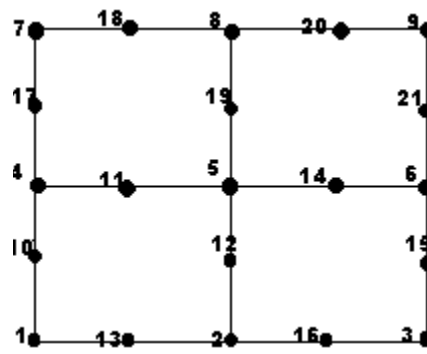
Où α est un facteur numérique dépendant du rapport de la longueur sur la largeur de la plaque ainsi que de ses côtés,

D est la rigidité de la plaque.

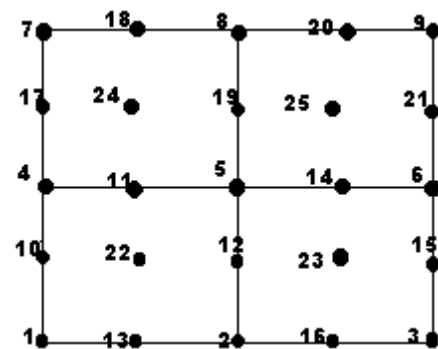
La comparaison se fera avec seize éléments à 4 nœuds Q4 désignés par M1,



Par quatre éléments de Serendip à 8 nœuds Q8 désignés par M2,



Et quatre éléments de Lagrange Q9 et Hétérosis à 9 nœuds désignés par M3 et M4 respectivement.



M1 16 éléments à 4 nœuds Q4.

M2 4 éléments Serendip à 8 nœuds Q8

M3 4 éléments Lagrange à 9 nœuds Q9

M4 4 éléments Hétérosis à 9 nœuds

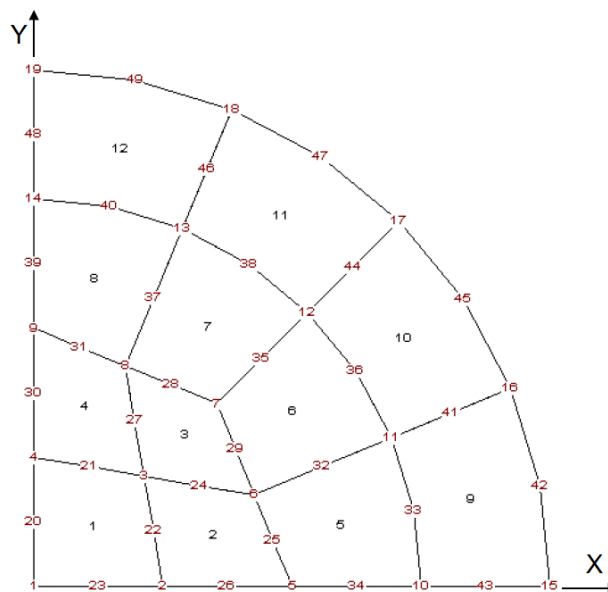
Après l'exécution du programme, on aura les résultats suivants :

Conditions d'appui	W_{th}	$W_{cal}(M1)$	$W_{cal}(M2)$	$W_{cal}(M3)$	$W_{cal}(M4)$
Plaque simplement appuyée	$4.06 \cdot 10^{-2}$	$4.45338 \cdot 10^{-2}$	$3.54404 \cdot 10^{-2}$	$4.29771 \cdot 10^{-2}$	$4.53805 \cdot 10^{-2}$
Plaque encastree	$1.26 \cdot 10^{-2}$	$1.61548 \cdot 10^{-2}$	$1.49997 \cdot 10^{-2}$	$1.5309 \cdot 10^{-2}$	$1.56511 \cdot 10^{-2}$
Plaque à un côté encastree et trois en appuis simple	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$3.57331 \cdot 10^{-2}$	$2.65461 \cdot 10^{-2}$	$3.16647 \cdot 10^{-2}$	$3.31333 \cdot 10^{-2}$
Plaque à un côté libre et trois en appui simple	$1.286 \cdot 10^{-1}$	$1.2001 \cdot 10^{-1}$	$1.30157 \cdot 10^{-1}$	$1.30257 \cdot 10^{-1}$	$1.28551 \cdot 10^{-1}$
Plaque à 2 côtés opposés en appui simple et 2 encastrés	$1.92 \cdot 10^{-2}$	$2.29687 \cdot 10^{-2}$	$2.06328 \cdot 10^{-2}$	$2.43747 \cdot 10^{-2}$	$2.49124 \cdot 10^{-2}$

Tableau 5.1 – Test de validation des éléments Q4, Q8, Q9 et Hétérosis pour différents types de plaques.

Les résultats obtenus sont comparables à ceux donnés par la théorie de Timoshenko [249].

V- 1.1.2 Exemple 2 :



Plaque circulaire encastree au bord de rayon $R = 1m$ et uniformement chargée ; modélisée en raison de la symétrie par un quart de cercle.

Les caractéristiques de la plaque sont :

$$E = 10920kn/mm^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$h = 0.1m$$

$$\sigma_0 = 1600kn/mm^2$$

Après l'exécution du programme, on aura les résultats du déplacement latéral du nœud 1 suivants :

Conditions d'appui	W_{Hinton}	W_{cal}
Encastrement	$1.633 \cdot 10^{-2}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$

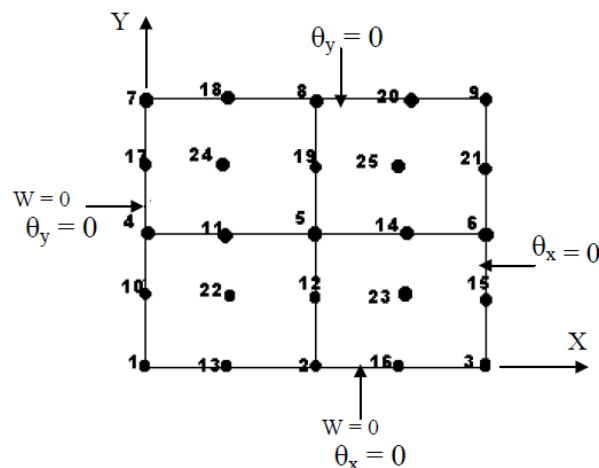
Tableau 5.2 – Test de validation de l'élément Q9 pour la plaque circulaire.

On remarque que les résultats donnés par notre programme sont comparables à ceux donnés par le programme de Hinton [250].

V- 1.2 Domaine élasto-plastique :

V- 1.2.1 Exemple :

Une plaque carrée $L = 1m$ d'épaisseur $h = 0,01m$ supportée sur le contour suivant les conditions de Hinton (en raison de la symétrie) qui sont mentionnées sur la figure ci-dessous. Matériau $E = 10920kn/mm^2$, $\nu = 0.3$, $q = 1$, $\sigma_0 = 400kn/mm^2$ Critère de plastification Von-Mises appuyé par la méthode de résolution de Newton-Raphson.



En comparant avec l'exemple de plaque en flexion à comportement élasto-plastique cité par Hinton, on arrive à des résultats similaires que nous présentons dans la figure suivante :

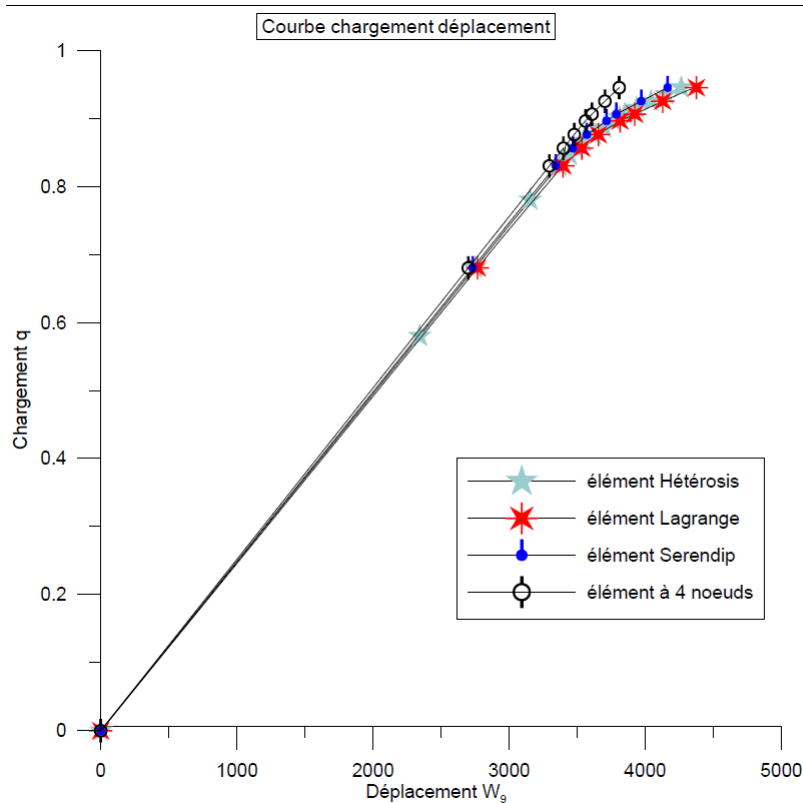


Figure 5.1 – Chargement déplacement.

La figure 5.1 représente la courbe du déplacement latéral suivant l'axe Z du nœud 9 (W_9) en fonction du chargement appliqué avec variation du type d'élément.

On remarque que ce sont les éléments de Lagrange Q9 et Hétérosis à 9 nœuds qui sont les plus performants, leurs courbes sont légèrement plus inclinées du fait que la plasticité des nœuds s'opère d'abord au niveau de ces éléments puis en augmentant encore la charge se produit pour le cas de l'élément Serendip Q8 et enfin celui à 4 nœuds Q4.

V- 1.3 Expérimentation numérique :

Dans cette partie, il s'agit d'exécuter le programme pour différents cas afin d'illustrer la propagation de la plasticité à travers l'élément. Pour cela, les nœuds plastifiés seront présentés en couleur noire dans les simulations.

V- 1.3.1 Simulation de la propagation de la plasticité pour l'élément Hétérosis :**V- 1.3.1.1 Exemple 1 :**

Une plaque complètement encastree (élément Hétérosis) Les propriétés matérielles et dimensions sont :

$$h = 0.01m ,$$

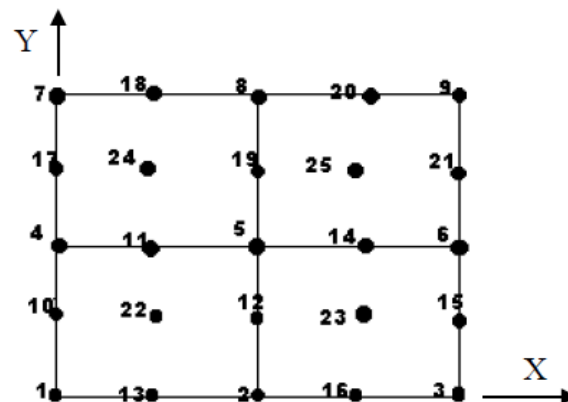
$$\sigma_0 = 180kn/mm^2 ,$$

$$\nu = 0.3 ,$$

$$q = 1kn/mm^3 ,$$

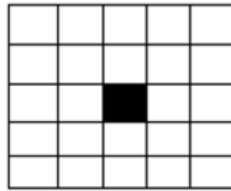
$$E = 10920kn/mm^2$$

La plastification des nœuds est donnée par le critère de Von-Mises appuyé par la méthode de résolution de Newton-Raphson.

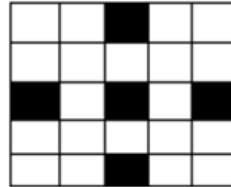


Chargement **Noeuds 7, 18, 8, 20, 9**

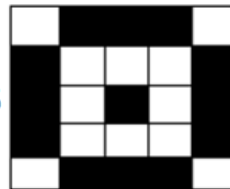
0.52



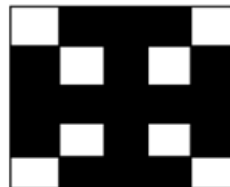
0.68



0.825



0.830



0.862



0.876

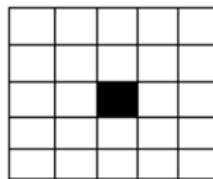


V- 1.3.1.2 Exemple 2 :

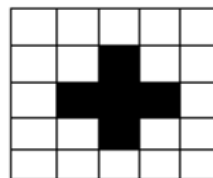
Plaque simplement appuyée avec les mêmes propriétés matérielles et dimensions de l'exemple 1 seulement, $\sigma_0 = 400,436kn/mm^2$

Chargement **Noeuds 7, 18, 8, 20, 9**

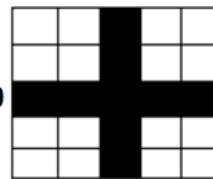
0.68



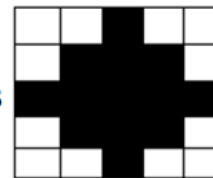
0.82



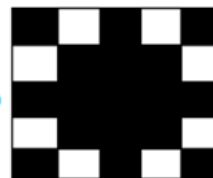
0.890



0.913



0.959



0.963



V- 1.3.1.3 Discussion :

D'après les lois de la résistance des matériaux, les calculs des plaques simplement supportées ou encastées sollicitées en flexion, fournissent des flèches plus défavorables au centre.

On remarque ainsi dans les tests effectués sur les deux exemples cités ci-dessus, que la plastification débute au nœud central le plus sollicité et s'étend progressivement aux autres. Dans le cas d'une plaque encastée la propagation de la plastification s'étend aux alentours des encastements jusqu'à plastification totale du fait que les rotations sont bloquées suivant les deux directions, ceci se traduit par le fait que le cumul de chargement est répartie entre le centre et les alentours de la plaque, par contre dans le cas d'une plaque simplement appuyée, la propagation de la plastification s'étend aux alentours du nœud central jusqu'à plastification totale procurée par les rotations libres, ceci génère une forte pression au centre suivie par une propagation vers l'extérieur causé par le cumul de chargement.

V- 1.3.1.4 Exemple 3 :

Dans cet exemple on fait varier l'épaisseur (0.01, 0.015, 0.02) de la plaque pour les éléments Hétérosis et Lagrange à 9 nœuds Q9, Serendip à 8 nœuds Q8 et celui à 4 nœuds Q4.

On garde les mêmes propriétés matérielles et dimensions de l'exemple précédent sauf $\sigma_0 = 1600kn/mm^2$ et les conditions limites suivantes :

Déplacement w nul pour les nœuds 1, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 16, 17.

Rotations θ_x nulle pour les nœuds 1, 2, 3, 6, 9, 13, 15, 16, 21.

Rotations θ_y nulle pour les nœuds 1, 4, 7, 8, 9, 10, 17, 18, 20.

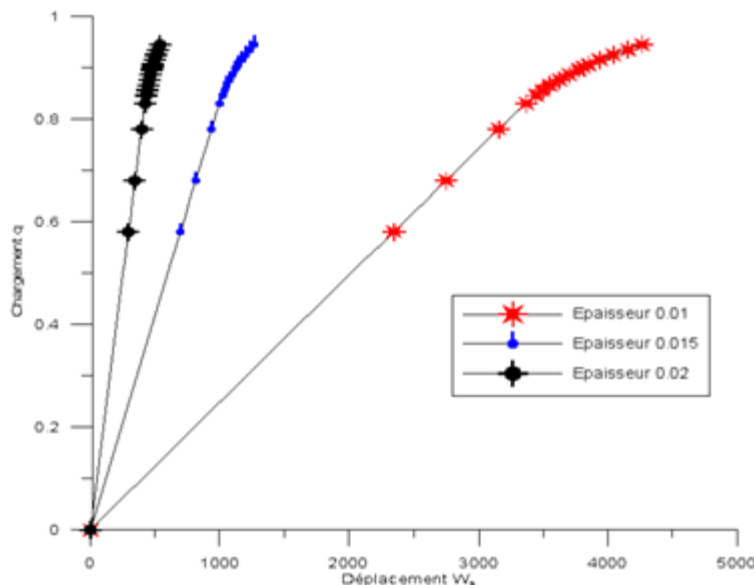


Figure 5.2 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (élément Hétérosis).

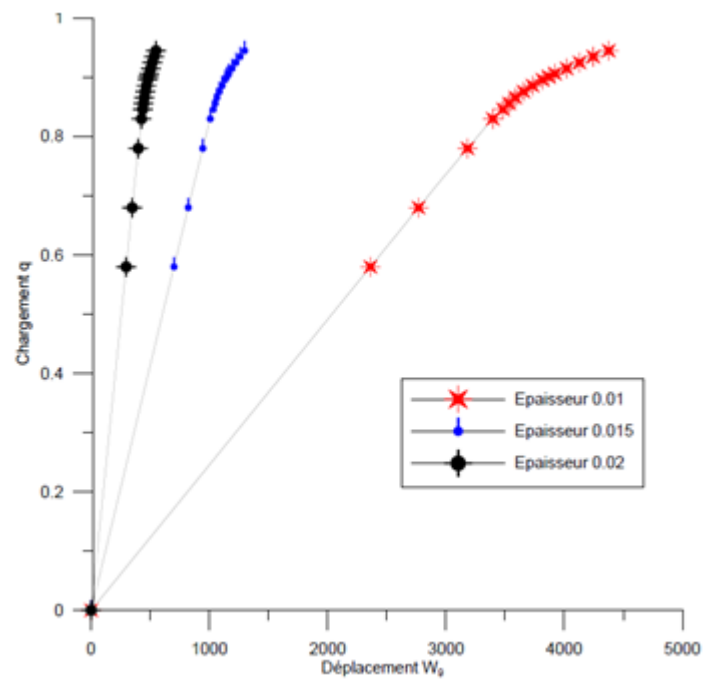


Figure 5.3 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (Q9).

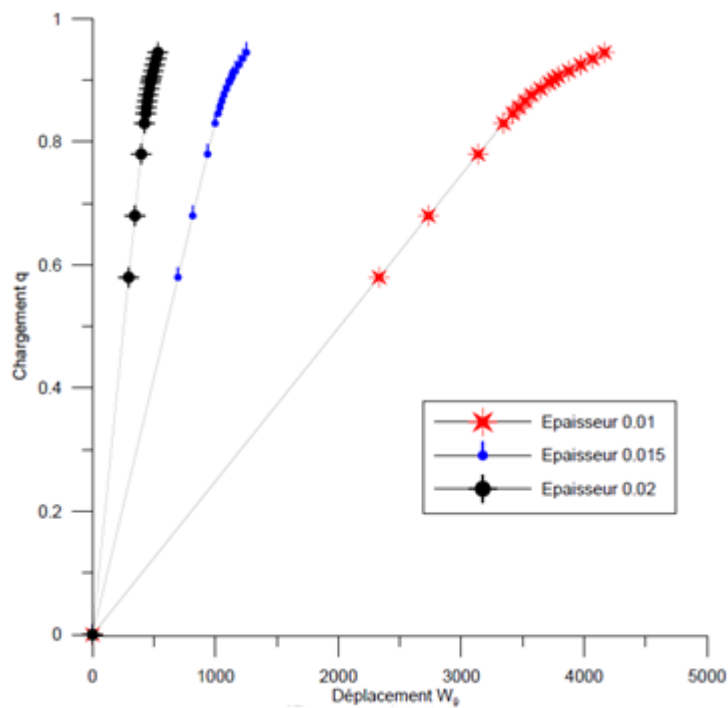


Figure 5.4 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (Q8).

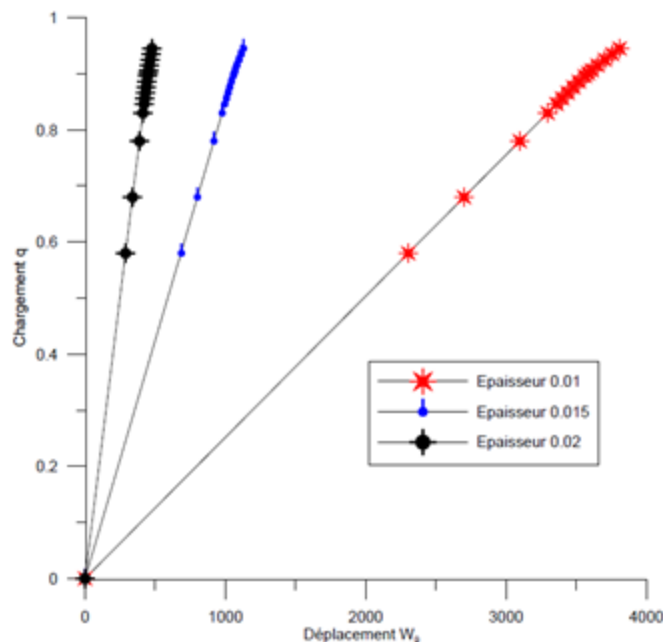


Figure 5.5 – Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur (Q4).

V- 1.3.1.5 Discussion :

On remarque que la courbe de déplacement latéral du nœud 9 en fonction du chargement (figures 5.2, 5.3) s'incline davantage en diminuant l'épaisseur et ainsi la limite élastique diminue. De plus, pour le cas de $h = 0.01 \div 0.015m$, la courbe reste encore dans le domaine élastique à l'incrément de charge appliqué pour le cas de l'élément à 4 nœuds Q4 alors que pour $h = 0.02m$ la plastification débute.

Si on diminue encore l'épaisseur, en appliquant les mêmes conditions, la plastification de la plaque sera plus immédiate. Ainsi, l'épaisseur joue un rôle dans le phénomène de plastification.

V- 1.4 Plaques sur appuis élastiques :

Nous étudions dans cette partie deux cas de plaques sur appuis élastiques. On rencontre ce type de liaison par exemple dans le calcul des radiers et dallages où le sol de fondation est modélisé par des appuis élastiques.

Le premier test concerne une plaque carrée soumise à une charge uniforme et reposant sur un sol élastique ; la surface d'impact de la charge est un carré centré de $0,5 \times 0,5m^2$ (Figure 5.6a). Le sol de fondation développe une réaction proportionnelle au tassement ; le coefficient de proportionnalité est le module de réaction du sol (K).

La solution de référence a été proposée par Shi et al. [251]. Elle est fondée sur la théorie des plaques de Mindlin-Reissner et consiste en la superposition de trois solutions élémentaires.

La première résulte de l'étude d'une plaque, soumise au même chargement et possédant les conditions d'appuis suivantes :

Effort tranchant $T = 0$; moment de torsion $M_{xy} = 0$; rotation dans le plan (n, z) $\theta = 0$, n étant la normale extérieure au bord de la plaque.

Les deux autres solutions sont celles d'une plaque dont deux côtés opposés sont soumis aux conditions d'appuis définies précédemment et les deux autres sont sollicités par deux moments de flexion inconnus. La solution est obtenue chaque fois par un développement en double série de Fourier ; les moments inconnus sont déterminés par les conditions de bords libres après superposition des différentes solutions élémentaires.

On modélise le quart de la plaque avec un maillage de 10 x 10 éléments Mitc4 ou Mitc8. La figure (5.7a) montre les résultats obtenus. On observe un très bon accord entre les éléments Mitc4 et Mitc8 et la solution de référence avec un écart au centre inférieur à 2%.

La figure (5.7b) montre l'évolution de la contrainte normale sur la face inférieure en fonction de la variable x . Les résultats obtenus avec les éléments Mitc4 et Mitc8 sont presque identiques ce qui prouve que la convergence est atteinte. L'écart maximal par rapport à la solution de référence est de 9% et se situe au centre de la plaque. Cet écart peut être attribué à la différence d'approximation utilisée dans les deux simulations.

V- 1.4.1 Caractéristiques de la plaque épaisse :

$$a = 1m \quad c = 0,5m \quad h = 0,4m$$

$$E = 300e^6 N/m^2 \quad \nu = 0,35 \quad K = 50e^6 N/m^3$$

Chargement :

$$q = 1N/m^2 \text{ appliquée sur le carré centré de côté } c = 0,5m$$

V- 1.4.2 Caractéristiques de la plaque mince :

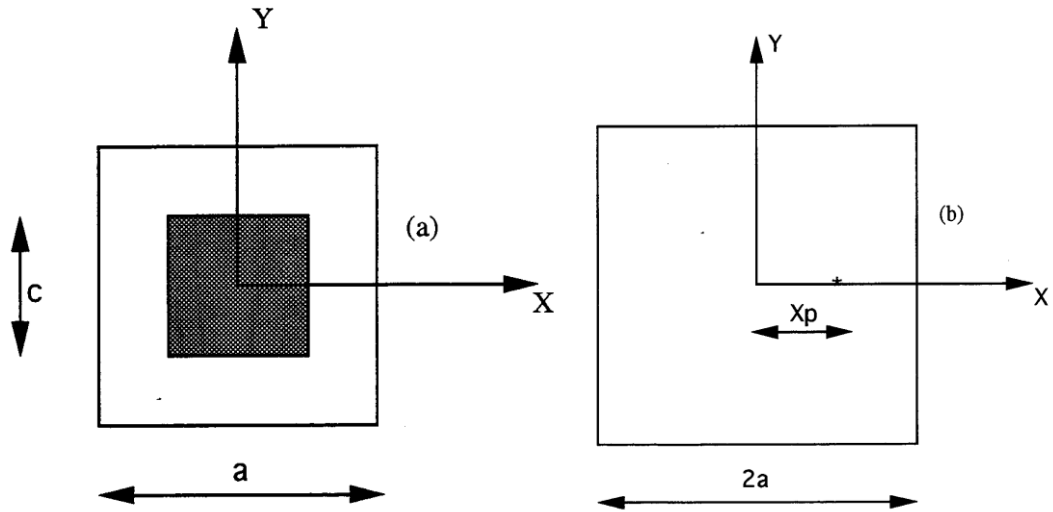
$$a = 2,5m \quad h = 0,12m$$

$$E = 2e^6 T/m^2 \quad \nu = 0,25 \quad K = 7864T/m^3$$

$$P = 100T$$

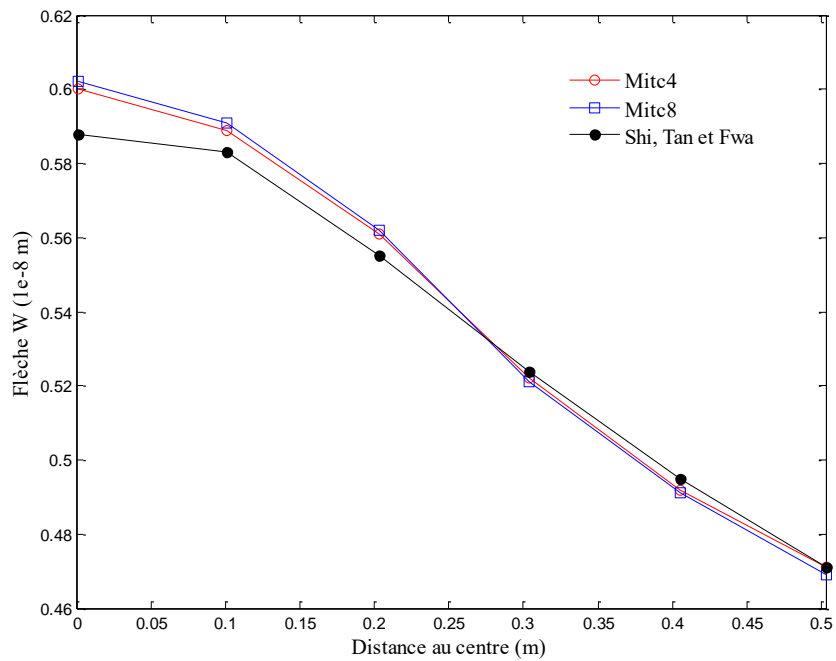
Valeurs adimensionnelles :

$$w = \frac{W}{a} \quad p = Pa/D \quad k = Ka^4/D = 1000$$



a) Plaque épaisse soumise à une charge uniforme b) Plaque mince soumise à une force concentrée appliquée sur l'axe des x

Figure 5.6 – Plaques carrées sur appuis élastiques



(a)

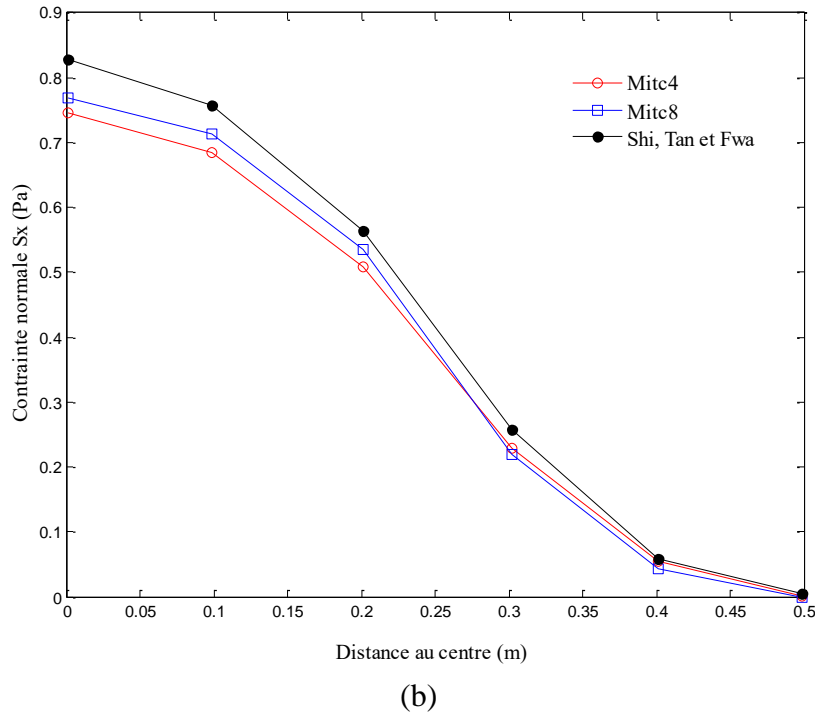


Figure 5.7 – Validation des éléments Mitc4 et Mitc8 sur une plaque épaisse sur appuis élastiques.

a) Evolution de la flèche le long de l'axe des x

b) Evolution de la contrainte normale le long de l'axe des x.

V- 1.5 Cylindre pincé avec diaphragmes :

Il s'agit d'un cylindre sollicité par deux forces diamétralement opposées et qui repose à ses extrémités sur deux diaphragmes rigides dans leur plan. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure 5.8. La solution de référence est une solution analytique basée sur la théorie de Kirchhoff [252].

Ce test constitue un des tests les plus sévères pour vérifier la capacité d'un élément de coque à décrire des champs de déformations de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne. Il est souvent utilisé pour vérifier l'absence de blocage en membrane pour des éléments coques.

Un huitième de la coque est modélisé avec des éléments Mitc4 ou Mitc9. Les conditions aux limites sont données dans la figure 5.8. Les tableaux (5.3a, 5.3b, 5.3c) montrent les résultats obtenus avec les éléments Mitc4 et Mitc9 pour le déplacement transversal en C, le déplacement axial en D et l'effort normal circonférentiel en C. Nous avons également inclus dans ces tableaux les résultats obtenus par les éléments Q8-48, DKQ24 et Q4y24 [120]. Ce

dernier élément est semblable à l'élément Mitc4 mais il est construit avec une intégration explicite dans l'épaisseur et possède six degrés de liberté par nœud.

En ce qui concerne l'élément Mitc9, la convergence est rapide sur les déplacements : on obtient pratiquement les valeurs de référence avec un maillage de 8x8 éléments.

Pour le même maillage, l'effort normal au point de Gauss le plus proche du point C donne une valeur inférieure de 17% à la valeur de référence. Un calcul direct au nœud donne une valeur 20% supérieure à cette dernière.

Les figures (5.9a et 5.9b) montrent l'évolution de l'effort normal et du moment fléchissant circonférentiels le long du côté DC, obtenue avec l'élément Mitc9 avec le maillage de 8 x 8 éléments.

On observe un gradient très important pour ces sollicitations au voisinage du point C.

On note que l'élément Mitc4 converge très lentement mais d'une manière monotone sur les déplacements et sur l'effort normal.

Avec un maillage de 20x20 éléments, les Caractéristiques géométriques et mécaniques sont :

$$L = 6m \quad R = 3m \quad h = 0,03m \quad E = \frac{3e^{10} N}{m^2} \quad \nu = 0.3$$

Chargement :

$$P = 1N$$

Conditions aux limites :

$$U = V = \beta = 0 \text{ sur AD} \quad W = \beta = 0 \text{ sur AB}$$

$$V = \alpha = 0 \text{ sur BC} \quad U = \beta = 0 \text{ sur CD}$$

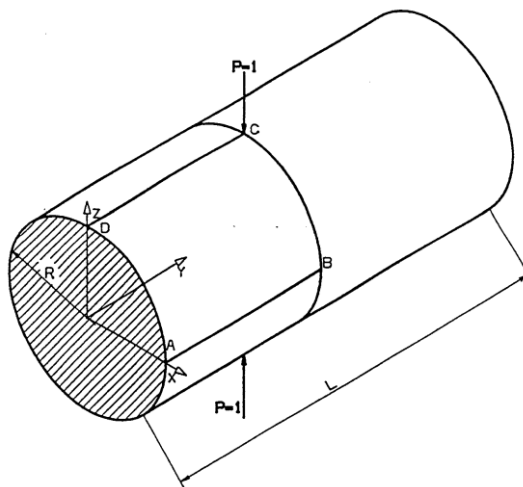


Figure 5.8 – Cylindre pincé avec diaphragmes rigides soumis à deux forces diamétralement opposées.

	Modèle	Q4γ24	DKQ24	Q8_48	Mitc4	Mitc9
Maillage	4 x 4	60.93	101.24	151.67	62.01	158.31
	8 x 8	121.95	154.84	161.05	122.4	164.25
	12 x 12	143.37	164.95		143.85	
	16 x 16				152.8	
	20 x 20				157	
	Valeur de référence $\bar{W}_C = \frac{Eh}{P} W_C = 164.24$					

Tableau 5.3a – Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé déplacement du point C dans la direction de la charge.

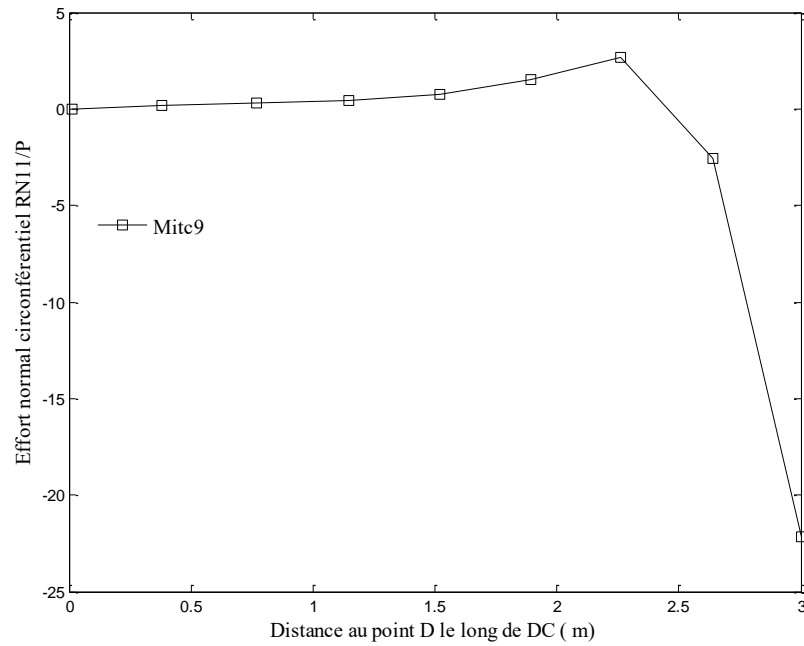
	Modèle	Q4γ24	DKQ24	Q8_48	Mitc4	Mitc9
Maillage	4 x 4	3.98	5.96	3.78	3.97	3.816
	8 x 8	4.19	4.44	4.11	4.21	4.106
	12 x 12	4.16	4.26	4.11	4.17	
	16 x 16				4.15	
	20 x 20				4.138	
	Valeur de référence $\bar{V}_D = \frac{Eh}{P} V_D = 4.114$					

Tableau 5.3b – Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé déplacement du point D suivant l'axe du cylindre.

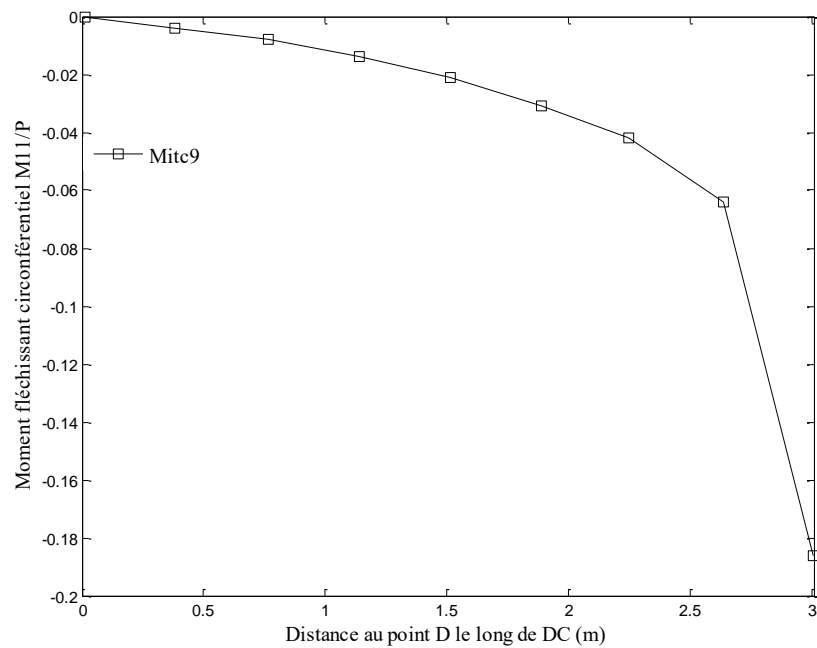
	Modèle	Q4γ24	DKQ24	Mitc4*	Mitc9*
Maillage	4 x 4	1.83	8.83	5.09	9.93
	8 x 8	10.98	17.65	11.09	15.54
	12 x 12	12.58	20.32	14.7	
	16 x 16			16.76	
	20 x 20			17.91	
	Valeur de référence $\bar{N}_{11C} = \frac{R}{P} N_{11C} = 18.6$				

Tableau 5.3c – Test de validation des éléments Mitc4 et Mitc9 sur un cylindre pincé effort normal circonférentiel en C.

(*) Valeur calculée au point de Gauss le plus proche du point C



(a)



(b)

Figure 5.9 – Test de l'élément Mitc9 sur un cylindre pincé soumis à deux forces diamétralement opposées.

- a) Effort normal circonférentielle long de DC
b) Moment fléchissant circonférentielle long de DC

Les erreurs sur le déplacement et l'effort normal en C sont respectivement de 4,5% et 3,7%. Ce comportement de l'élément Mitc4 peut s'expliquer par la faiblesse bien connue de l'élément Q4 à bien prédire les efforts membranaires et par une rigidité importante à la flexion dans ce cas.

V- 1.5.1 Coque cylindrique sous poids propre :

L'exemple proposé concerne une coque cylindrique soumise à son poids propre. Cet exemple de validation a également été testé par Owen et Figuieras [137, 210] et De Borst et Feenstra [208].

V- 1.5.1.1 Géométrie et modélisation :

La coque, présentée sur la figure 5.10, a une longueur de $2L = 15.2\text{m}$ et une épaisseur de $h = 0.076\text{m}$. Les bords longitudinaux de cette coque sont libres tandis que les bords courbes sont simplement appuyés (arcs AB et DE). Pour des raisons de double symétrie, seul un quart de la coque est modélisé, et les conditions de symétrie appliquées. Un maillage de 16 éléments de coque multicouches à 8 nœuds est utilisé et la section est discrétisée en 8 couches.

V- 1.5.1.2 Matériau :

Trois cas sont considérés :

V- 1.5.1.2.1 Premier Cas : Le matériau est isotrope. Une loi élastoplastique parfaite de Von-Mises est utilisée.

V- 1.5.1.2.2 Deuxième Cas : Le matériau est anisotrope. Une loi de Hill est utilisée tout en supposant l'élasticité isotrope.

V- 1.5.1.2.3 Troisième Cas : Le matériau est anisotrope. Une loi de Hill est utilisée tout en supposant l'élasticité isotrope.

Les différentes caractéristiques mécaniques correspondant à chaque cas sont indiquées dans le tableau 5-1.

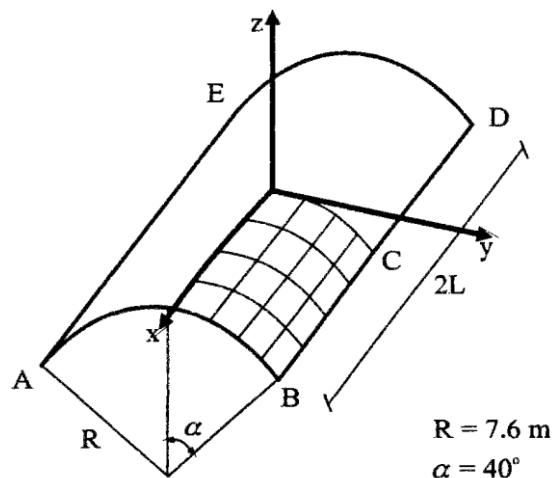


Figure 5.10 – Coque cylindrique sous poids propre.

Cas	Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
01	Von-Mises	$E = 21000MPa, \nu = 0$ $f_y = 8.4 MPa$	$R = 2.425 Mpa$
02	Hill	$E = 21000MPa, \nu = 0$ $\bar{\sigma} = 4.2 MPa$ $\sigma_{11} = 8.4 MPa$ Résistances : $\sigma_{22} = 4.2 MPa$ $\sigma_{33} = \sigma_{22}$ $\sigma_{12} = 2.4 MPa$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12}$	$\alpha_{12} = 0.25$ $\alpha_{23} = 1.75$ $\alpha_{31} = 0.25$ $\alpha_{44} = 1.021$ $\alpha_{55} = 1.021$ $\alpha_{66} = 1.021$
03	Hill	$E = 21000MPa, \nu = 0$ $\bar{\sigma} = 4.2 MPa$ $\sigma_{11} = 4.2 MPa$ Résistances : $\sigma_{22} = 8.4 MPa$ $\sigma_{33} = \sigma_{11}$ $\sigma_{12} = 2.4 MPa$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12}$	$\alpha_{12} = 0.25$ $\alpha_{23} = 0.25$ $\alpha_{31} = 1.75$ $\alpha_{44} = 1.021$ $\alpha_{55} = 1.021$ $\alpha_{66} = 1.021$

Tableau 5.4 – Caractéristiques matérielles et paramètres des modèles considérés.

V- 1.5.1.3 Chargement :

La coque est soumise à son poids propre. Le chargement est alors augmenté d'une façon croissante jusqu'à la ruine. 11 incréments de chargement sont utilisés dans le calcul.

V- 1.5.1.4 Résultats :

L'évolution du déplacement vertical du point C en fonction de l'intensité du poids propre est tracée pour les 3 cas considérés respectivement en figures 5.12, 5.13 et 5.14, puis comparée aux solutions numériques de référence proposées par Owen et Figuieras [137, 210] et De Borst et Feenstra [208].

Owen et Figuieras ont utilisé pour cette étude différents maillages : un maillage de 6 éléments avec 6 couches dans l'épaisseur et un maillage de 6 éléments semiloof avec 2*2 points d'intégration de Gauss. De Borst et Feenstra ont utilisé un maillage de 16 éléments de coque dégénérés à 8 nœuds avec 2*2 points d'intégration de Gauss dans le plan et 5 points d'intégration de Simpson dans l'épaisseur.

Les résultats obtenus par nos calculs ainsi que les solutions numériques de références concordent correctement. La sensible différence peut s'expliquer par le fait que les maillages ainsi que les formulations adoptées ne sont pas identiques. Nous remarquons également que, pour les deux cas où le matériau est anisotrope ($\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ et $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$), les courbes poids propre – déplacement vertical du point C diffèrent considérablement. Toutefois, la charge

ultime de rupture est pratiquement identique pour ces deux cas. Ceci ne peut être constaté sur les résultats obtenus par Owen et Figuierras car leurs calculs ont été interrompus avant d'atteindre la charge ultime.

Les figure 5.15 et 5.16 montrent, pour les deux cas anisotropes considérés, l'influence du nombre de couches sur les réponses.

Nous remarquons que la réponse s'améliore avec l'augmentation du nombre de couches. Toutefois, peu de différence existe entre la réponse obtenue avec une discrétisation de 4 couches et celle avec 10 couches. Ainsi, 4 couches suffisent pour obtenir une réponse correcte et proche des solutions de référence précédentes.

Pour finir, nous avons représenté pour les trois cas étudiés, l'étendue des zones plastiques sur le quart de la coque selon différents niveaux de chargement (figures 5.17, 5.18 et 5.19)

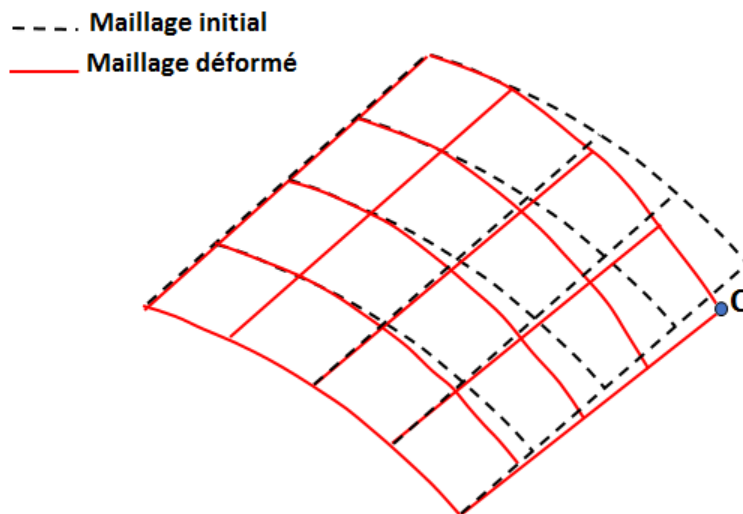


Figure 5.11 – Maillage déformé de la coque considérée.

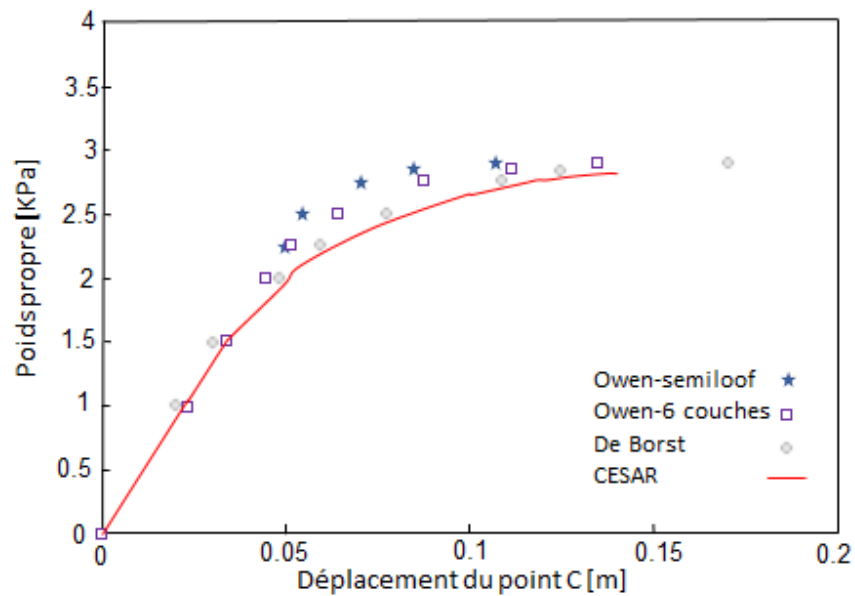


Figure 5.12 – Courbe poids propre-déplacement du point C
- Premier cas -

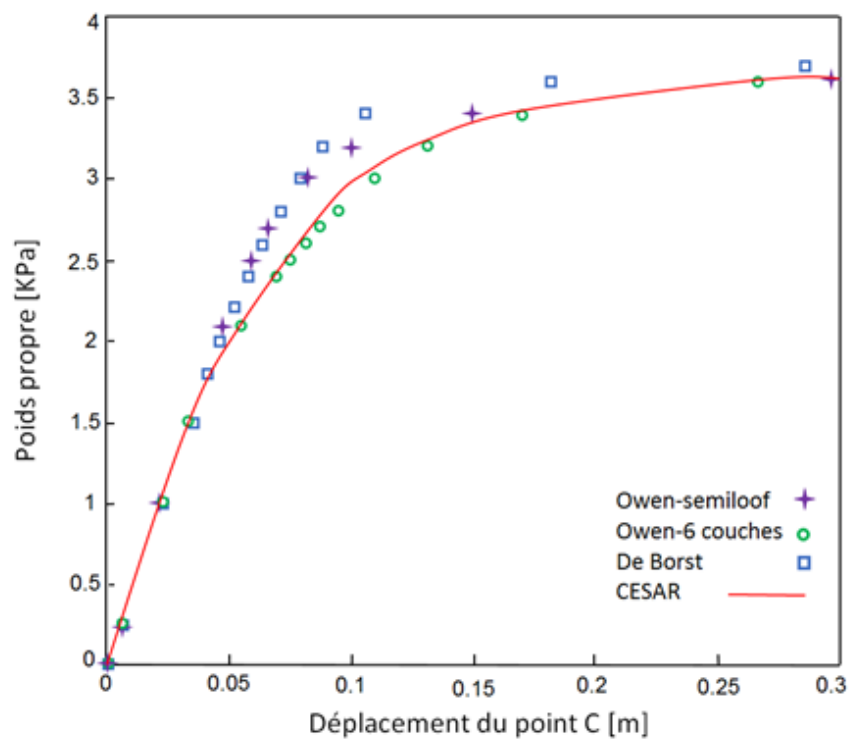


Figure 5.13 – Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ -
- Deuxième cas -

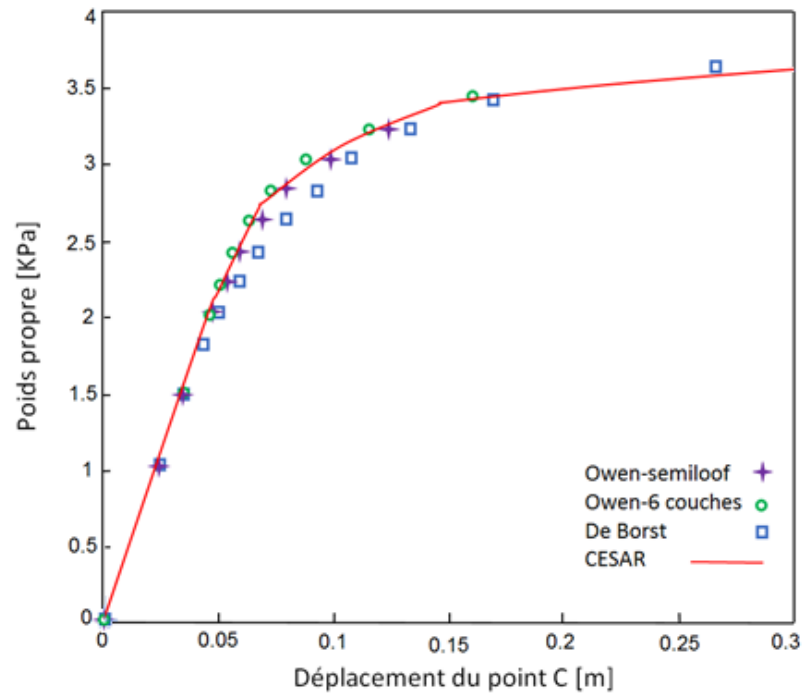


Figure 5.14 – Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$ -
- Troisième cas -

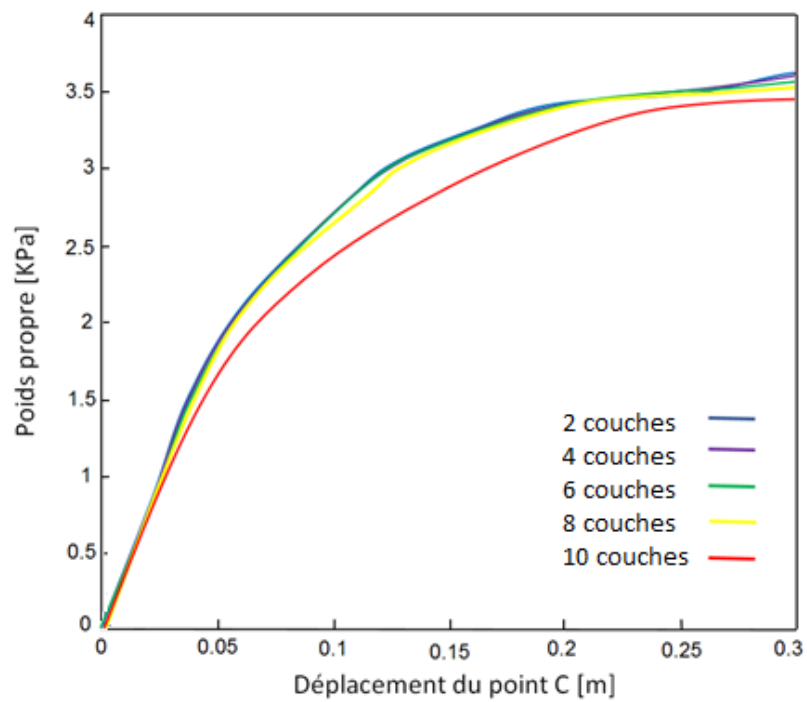


Figure 5.15 – Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ -
- Influence du nombre de couches -

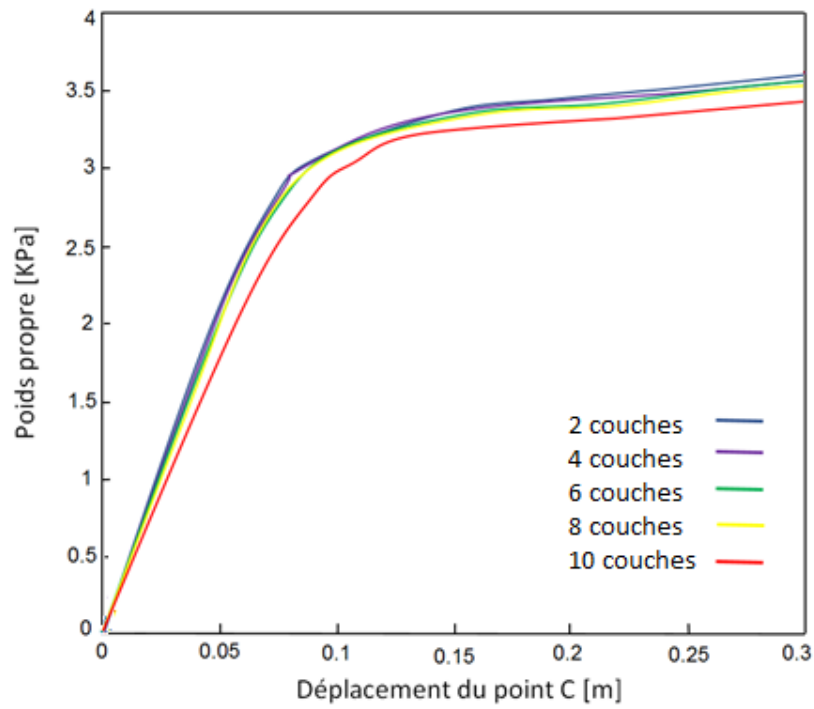


Figure 5.16 – Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$ -
 - Influence du nombre de couches –

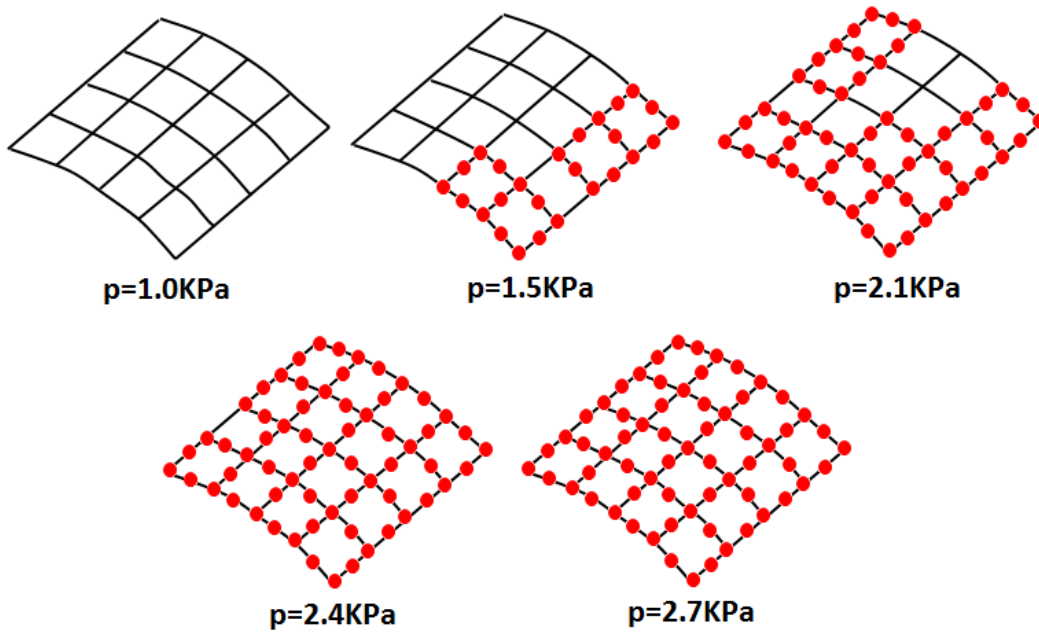


Figure 5.17 – Etendue des zones plastiques
 -Premier cas-

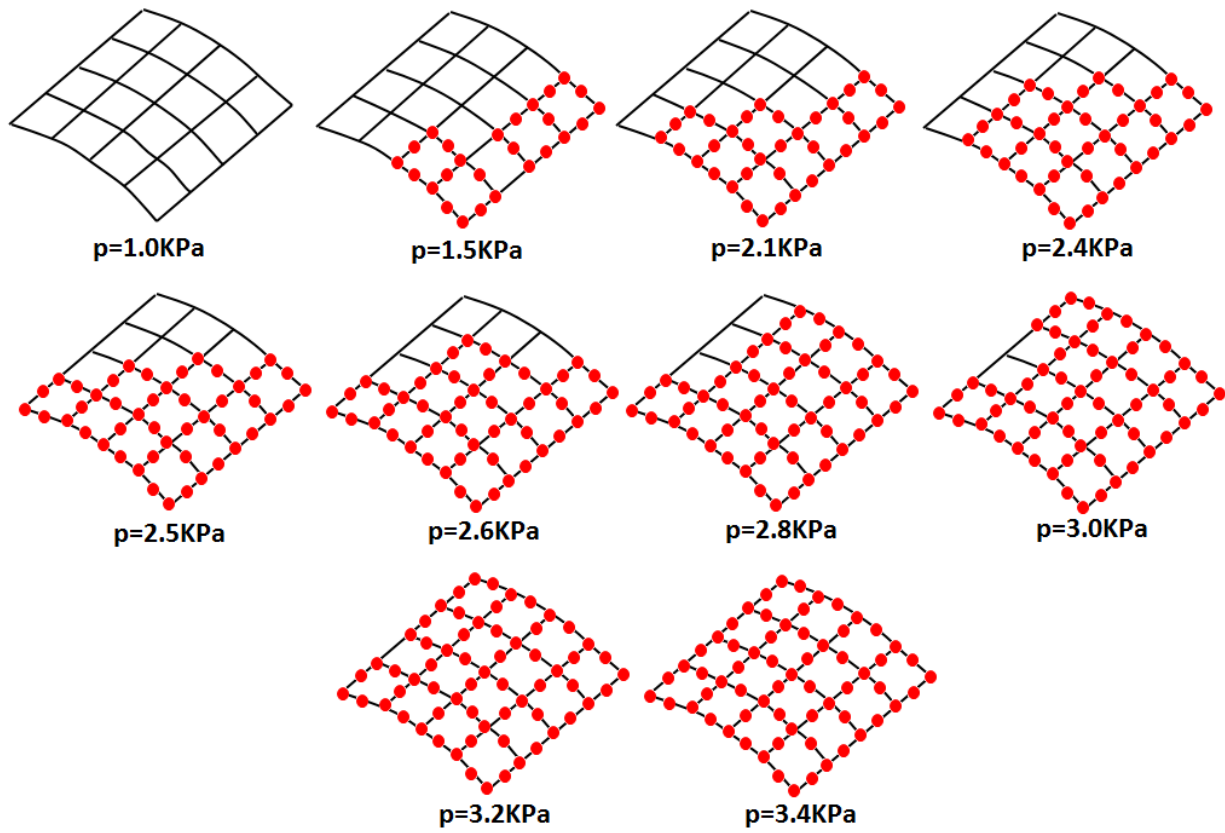


Figure 5.18 – Etendue des zones plastiques - $\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ -
-Deuxième cas-

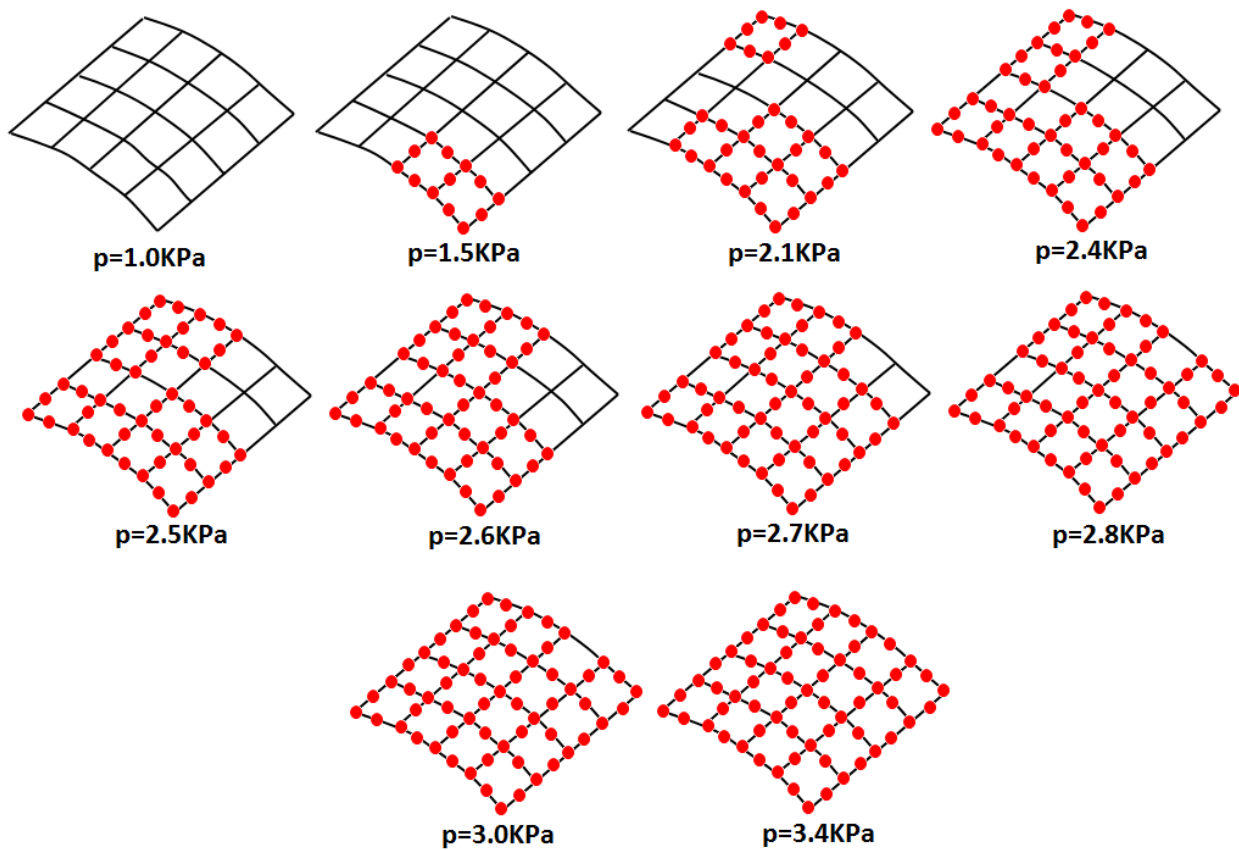


Figure 5.19 – Etendue des zones plastiques - $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$ -
-Troisième cas-

V- 1.6 Plaque en flexion :

Dans le but d'évaluer la performance des éléments de coque proposés dans le régime non linéaire avec grands déplacements et grandes rotations, on étudie le porte-à-faux indiqué ci-dessous avec seulement un couple constant M , appliqué à son bout libre.

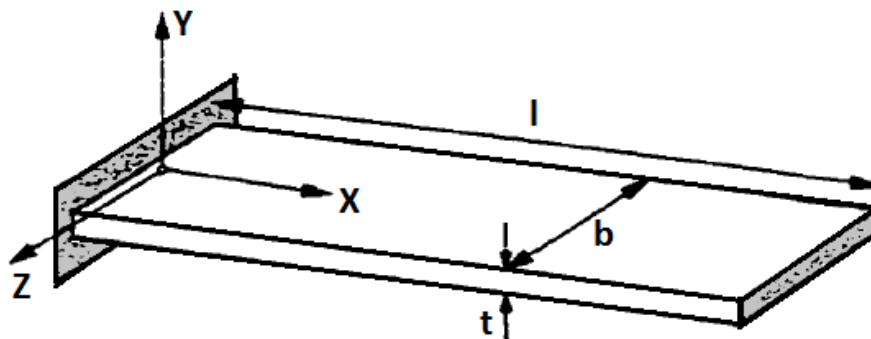


Figure 5.20 – Porte à faux sous chargement de flexion.

Les données physiques et géométriques sont :

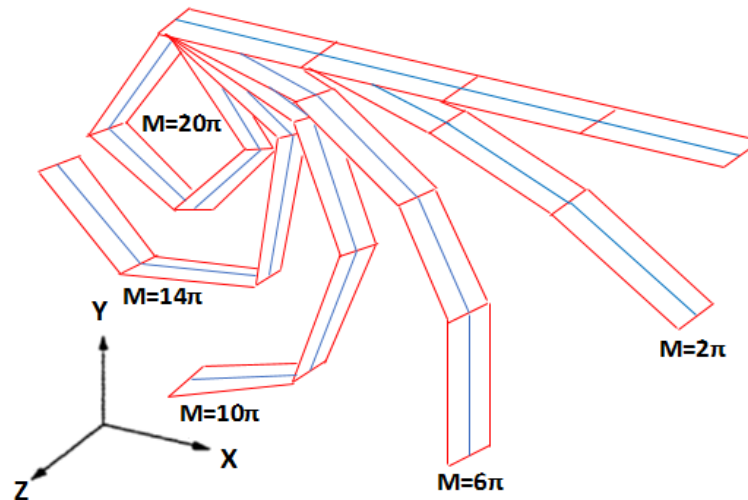
$$l = 10m \quad b = 1m \quad t = 0,1m \quad E = 1.2 \times 10^6 N/m^2 \quad \nu = 0.3$$

La plaque est modélisée avec un maillage de 8×4 éléments à 4 nœuds (Q4) et 4×2 éléments à 8 nœuds (Q8). Les déformées successives correspondant à ce dernier maillage, pour quelques séquences de chargement, sont illustré sur la figure 5.21.a. Pour chaque type d'élément, un total de dix incréments de chargement de valeur $\Delta M = 2\pi$ est considéré pour tracer la courbe charge-déplacement de l'extrémité libre de la plaque.

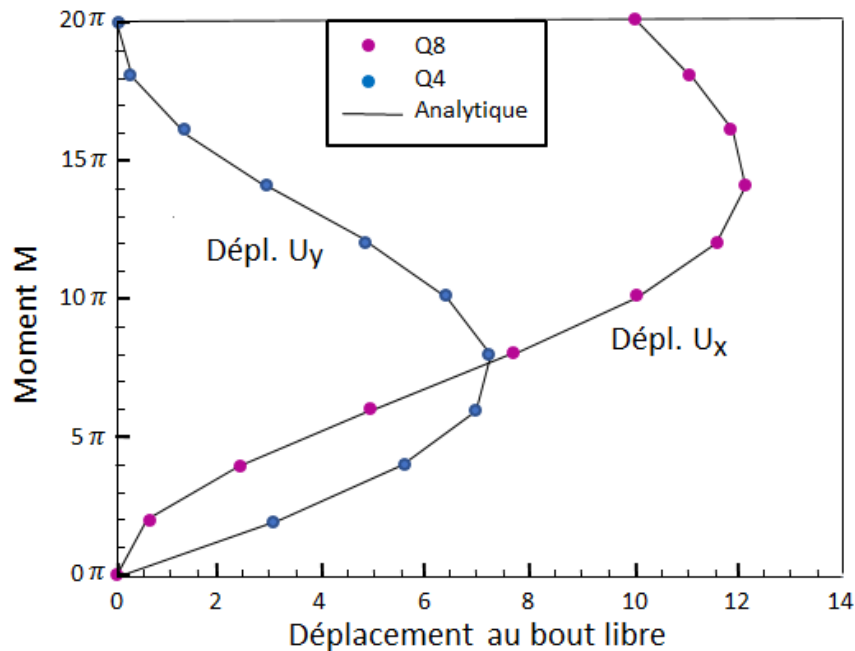
Ces courbes et les résultats numériques correspondants sont présentés à figure 5.21.b et au tableau 5.5 respectivement. On remarque que les résultats obtenus concordent très bien avec la solution analytique. Ceci révèle la précision et la performance des éléments de coque proposés dans les problèmes de flexion à grands déplacements et grandes rotations.

M		2π	4π	6π	8π	10π	12π	14π	16π	18π	20π
Analy-tique	U_x	0.6451	2.4317	4.9545	7.6613	10.0000	11.5590	12.1620	11.8920	11.0390	10.0000
	U_y	3.0396	5.4987	6.9446	7.1978	6.3662	4.7986	2.9762	1.3747	0.3377	0.0000
Q8	U_x	0.6493	2.4469	4.9826	7.6985	10.0380	11.5860	12.1700	11.8780	11.0080	9.9638
	U_y	3.0494	5.5130	6.9546	7.1950	6.3455	4.7611	2.9297	1.3311	0.3092	0.0062
Q4	U_x	0.6469	2.4385	4.9693	7.6866	10.0360	11.6000	12.1990	11.9120	11.0330	9.9645
	U_y	3.0502	5.5183	6.9706	7.2257	6.3891	4.8094	2.9710	1.3562	0.3169	0.0065

Tableau 5.5 – Test de validation des éléments Q4 et Q8 pour quelques séquences de chargement.



(a) Séquences de déformation



(b) Courbe charge-déplacement
Figure 5.21 – Plaque en flexion.

V- 1.7 Modélisation des réseaux de neurones artificiels en non linéarité matérielle :

Les données d'apprentissage et de test des modèles ANN ont été obtenues à partir de résultats expérimentaux donnés dans des travaux antérieurs [151, 153]. Les données sont sous forme de matrice composée d'entrées et de valeurs cibles et organisées en fonction des définitions du problème. Dans ce travail, les nombres de paires de données d'entrée-sortie dans les ensembles de données d'apprentissage, de validation et de test sont choisis respectivement pour 41%, 26% et 33% de l'ensemble de données complet. Après de nombreux essais, il a été constaté que la cible de haute précision était résumée dans le tableau 5.6.

Cas	Compression uniaxiale				Compression biaxiale					Compression triaxiale				
Paramètres														
Conception	RBF													
Couche cachée	6				19					40				
Etalement des valeurs	1				0.05					0.1				
Entrées		Déformation principale	Rce de cp	E béton		Déformation principale ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$)	Rce de cp	E béton	C ^{te} béton (σ_3 / σ_2)		Déformation principale ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \varepsilon_3$)	Rce de cp	E béton	C ^{te} béton ($\sigma_1 = \sigma_2$)
	Min	-0.004	20	25000	Min	-0.004	32	19600	0	Min	-0.005	28.6	25000	1.05
	Max	0	51	35700	Max	0.003	33.9	29000	1	Max	0.004	28.6	35700	21
Sorties	Déformation principale													
	Min	-60			-45					-120				
	Max	0			0					0				
Pré-traitement	Entrées et sorties, entre 0 et 1 $\frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$													
Critère d'erreur	Erreur quadratique moyenne $MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y - y')^2$													

Tableau 5.6 – Détails des performances des modèles ANN.

V- 1.7.1 Application de la technique réseaux de neurones artificiels :

La figure 5.22 montre les performances du RBF au cours d'une session de formation. La meilleure performance de validation est celle de l'époque 6. Dans ce réseau, le MSE minimum du meilleur modèle en cas de formation est de $7,70278 \cdot 10^{-5}$. Ici, les erreurs obtenues à partir du jeu de validation sont surveillées pendant la formation.

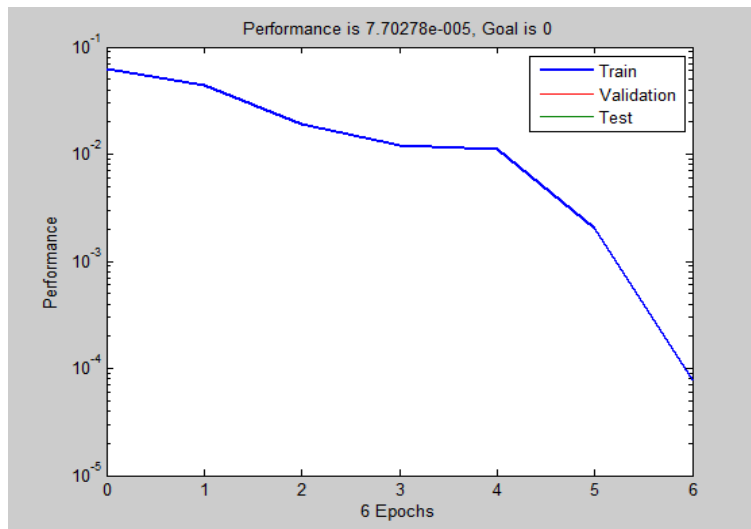


Figure 5.22 – Graphique de performance des réseaux de neurones pour la compression uniaxiale.

Ensuite, les performances de formation du modèle réseaux de neurones artificiels développé pour le cas de la compression biaxiale. Le modèle est formé à 19 époques et le MSE minimum pour le meilleur modèle en cas de formation est de $9,20581 \cdot 10^{-4}$ (figure 5.23).

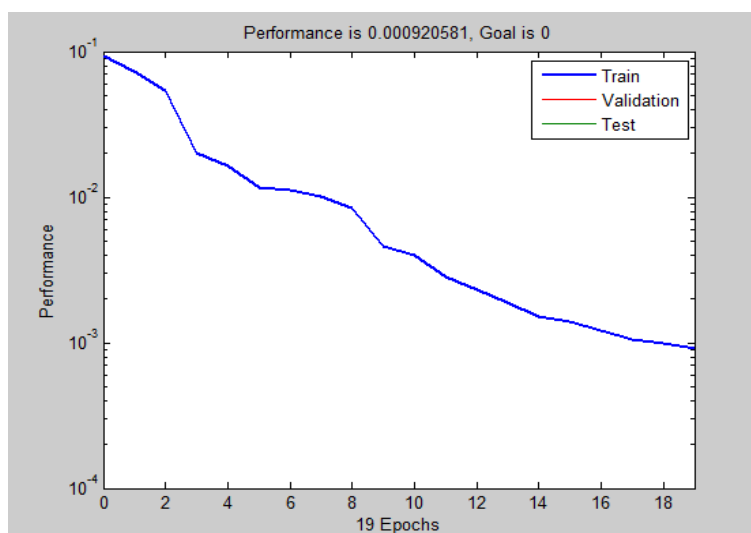


Figure 5.23 – Graphique de performance des réseaux de neurones pour la compression biaxiale.

La caractéristique d'apprentissage du modèle proposé basé sur le RBF est illustrée à la figure 5.24. Il a été observé que le nombre total de 40 époques et le MSE minimum pour le meilleur modèle en cas d'entraînement est de $4.02284 \cdot 10^{-3}$.

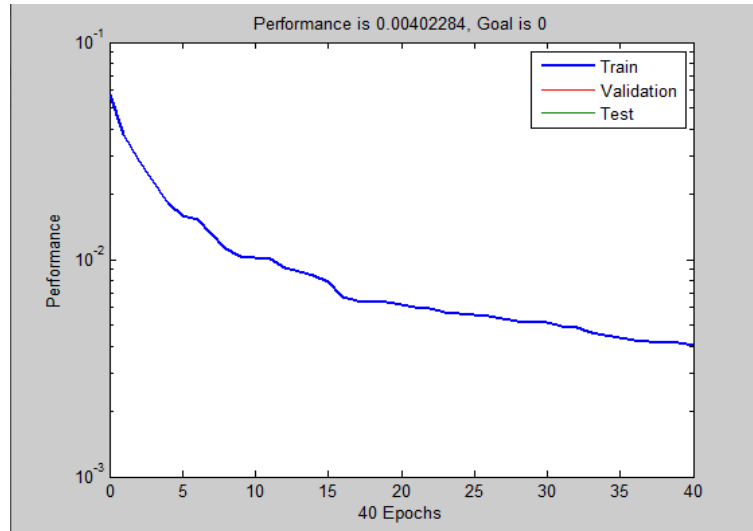


Figure 5.24 – Graphique de performance des réseaux de neurones pour la compression triaxiale.

V- 1.7.2 Résultats numériques et discussion :

Pour la vérification, les résultats numériques obtenus par le modèle proposé ont été comparés avec les résultats des tests existants pour les différents états de contraintes et les propriétés des matériaux. Les résultats numériques sur le comportement du béton à la compression uniaxiale avec différentes résistances à la compression et les modules d'élasticité, ont été comparés avec les résultats du test par Hognestad et al. [253].

Dans l'essai [253],

$$f'_c = 20, 34.5, 46 \text{ et } 51 \text{ Mpa} \quad \text{et} \quad E_c = 18.700, 21.550, 26.900 \text{ et } 31.600 \text{ Mpa}$$

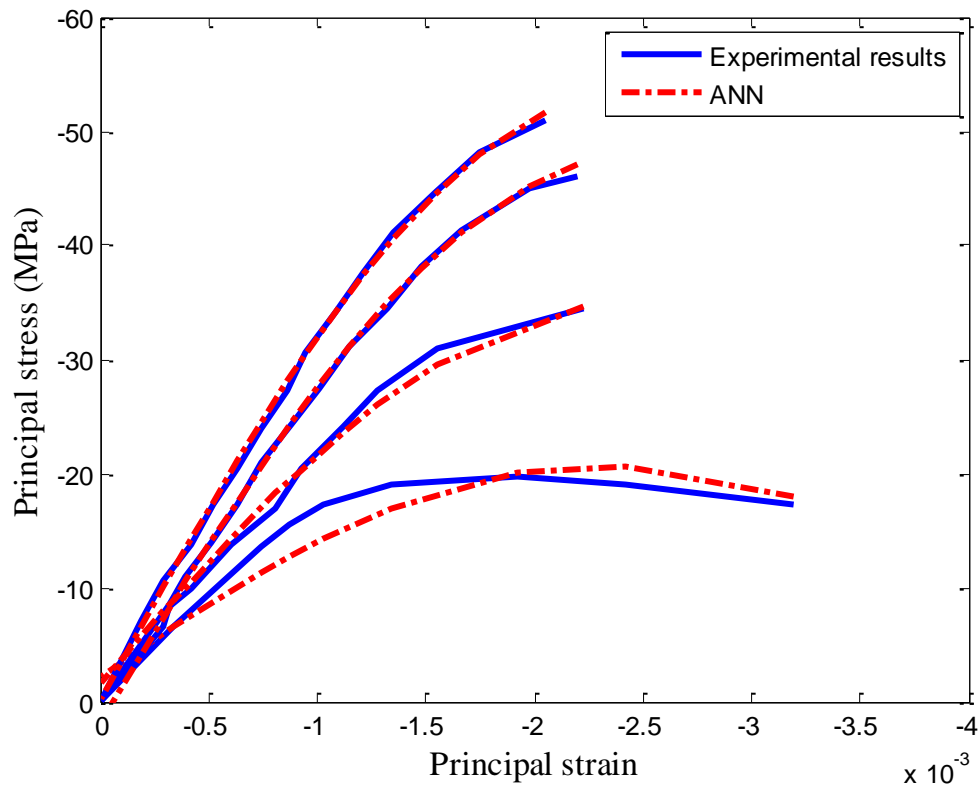


Figure 5.25 – Comparaison entre les résultats ANN et expérimentaux sur la compression uniaxiale [253].

Les comparaisons des résultats numériques et d'essais sont montrées dans la figure 5.25. Comme représenté sur la figure 5.25, le modèle proposé décrit avec précision le comportement en compression uniaxiale de béton avec différentes résistances à la compression et les modules d'élasticité. Dans la figure 5.25, les contraintes post-pic ont diminué plus rapidement pour plus de résistance du béton.

La figure 5.26 montre les relations contrainte-déformation obtenues à partir des essais de compression biaxiale par Kupfer et al. [254] dont $f'_c = 32\text{Mpa}$ et $E_c = 29,000\text{Mpa}$.

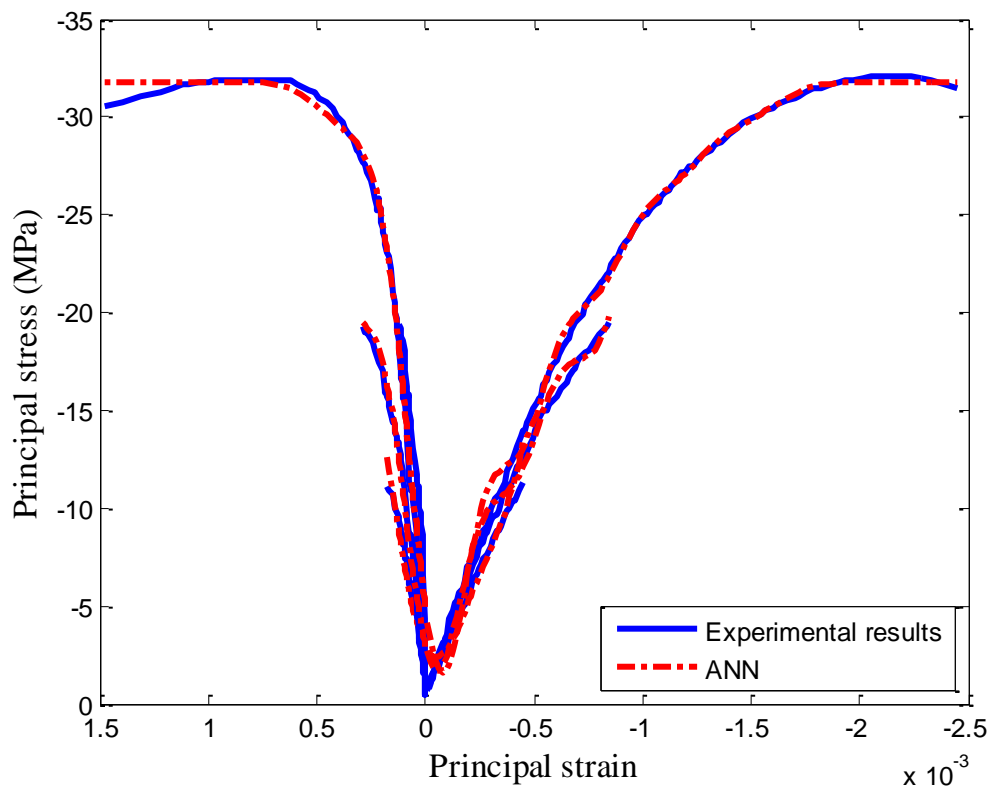


Figure 5.26 – Comparaison entre les résultats ANN et expérimentaux sur la compression biaxiale [254].

Le modèle proposé est en bon accord avec la résistance à la compression des essais de compression biaxiale.

La figure 5.27 montre les résultats du test par Imran et Pantazopoulou [255], $f'_c = 47.4\text{Mpa}$ et $E_c = 30,000\text{Mpa}$.

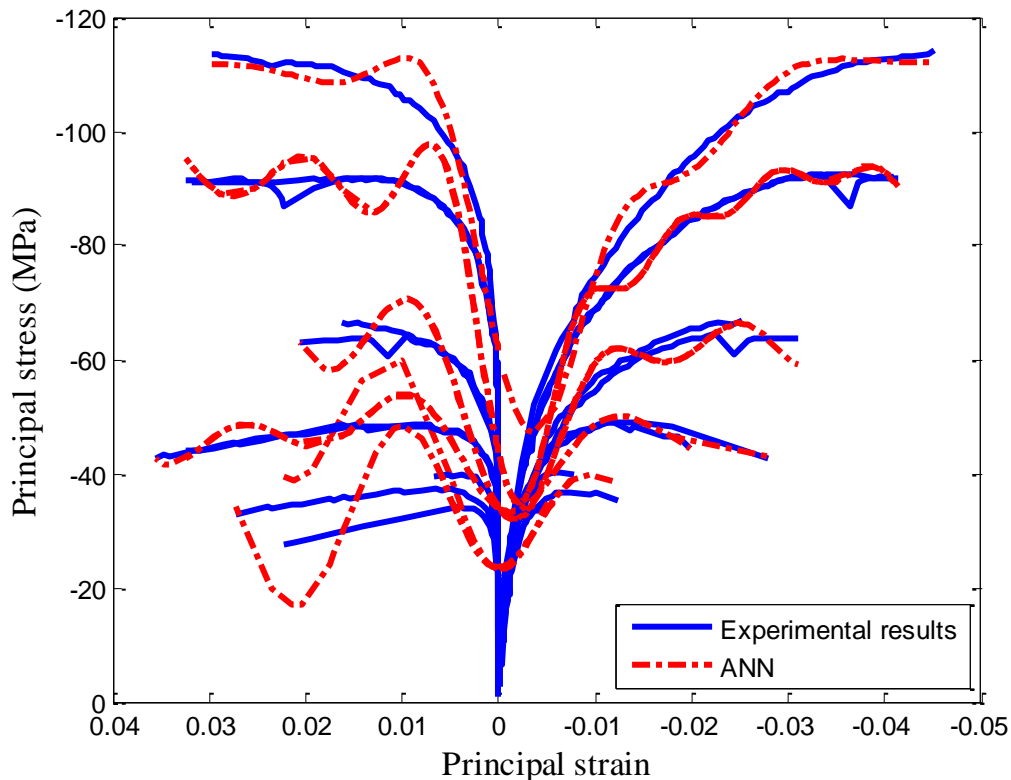


Figure 5.27 – Comparaison entre l'ANN et les résultats expérimentaux sur la compression triaxiale d'un béton de résistance normale (Imran et al.) [255].

Dans l'essai triaxial montré sur la figure 5.27, le modèle proposé est surestimé en dilatation du béton. Ce résultat indique qu'une fois la structure ANN est déterminée, la capacité des modèles de comportement ANN devient dépend principalement de la qualité et de la quantité de poids de connexion. En général, les modèles RNA avec un plus grand nombre de neurones sont capables de rapprocher les comportements plus complexes que celles qui ont le moins de nombre de neurones (comme dans notre cas).

V- 2 Conclusion :

Ce dernier chapitre résultats et discussions a porté sur l'étude et la validation des éléments plaques et coques destinés au calcul des structures minces et épaisses rencontrées en génie civil. Dans cet objectif, et dans un premier lieu, nous avons étudié et programmé différents phénomènes qu'il est nécessaire de prendre en compte dans l'étude d'une structure par éléments finis. Il s'agit des éléments Q4, Q8, Q9 et l'élément hétérosis. Les résultats donnés par notre programme sont comparables à ceux donnés par le programme de Hinton. Un point clé révélé par cette étude concerne la nécessité de connaître dans un deuxième lieu, un model

rhéologique isotrope basé sur la théorie de Mindlin/Reissner avec prise en compte de cisaillement transversal à comportement élasto-plastique

La non linéarité matérielle considérée est du type élasto-plastique et les systèmes d'équations résultants sont résolus en utilisant une approche incrémentale itérative, les solutions numériques de références concordent correctement. La formulation isoparamétrique offre un avantage supplémentaire dans une analyse non linéaire ; elle permet grâce à l'intégration numérique de suivre la plastification à l'intérieur des éléments. Cet œuvre a permis de mettre en évidence la bonne performance de l'élément hétérois par rapport aux éléments plaques standard.

Pour les plaques épaisses, un blocage du au cisaillement transversal est observé. Et pour surmonter ce problème nous avons utilisé deux éléments plaques: les éléments Mitc4 et Mitc8, et deux éléments coques : les éléments Mitc4 et Mitc9.

Ces éléments ont fait l'objet de nombreux tests de validation en statique sur des plaques et coques isotropes et multicouches et sur des plaques avec appuis élastiques.

Ces tests ont porté sur différents aspects tels que le degré d'anisotropie, la capacité des éléments à décrire de champs de déformations et de contraintes complexes. Ils ont montré la capacité des modèles utilisés à résoudre une large classe de problèmes rencontrés en génie civil. Ils ont permis également de vérifier la démarche adoptée, en particulier le bon choix des facteurs de correction du cisaillement transversal et la bonne stratégie utilisée dans la programmation des éléments.

Avec la technique des réseaux de neurones artificiels de plus en plus sophistiquée il est maintenant possible de faire des simulations numériques détaillées des phénomènes de la plasticité (non linéarité matérielle).

De ce fait, un nouveau modèle de plasticité utilisant la technique des réseaux de neurones a été développé pour décrire le comportement non linéaire du béton dans les différents états de contraintes de compression.

Pour cela, le modèle de plasticité utilisant les réseaux de neurones artificiels RBF a été mis en œuvre. Contrairement aux modèles de plasticité existant le modèle proposé décrit avec précision le comportement post-pic adoucissant, ce qui permet de décrire avec plus de précision les caractéristiques comportementales de béton dans divers états de contraintes.

Le modèle proposé a été vérifié par comparaison des résultats avec ceux des uni- bi, et triaxiaux existants. Les comparaisons montrent que le modèle proposé est applicable à une utilisation générale, car elle peut prédire la plupart des résultats des tests, en utilisant les propriétés de base des matériaux tels que la résistance à la compression uniaxiale et le module d'élasticité.

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

Notre thèse est scindée en deux parties :

La première partie, concerne la présentation d'une approche éléments finis permettant d'améliorer sensiblement l'analyse non linéaire des structures et d'avoir une meilleure compréhension de leurs comportement global ainsi que du comportement individuel de chacun des éléments qui les constitue. Ils ont été développés en s'inspirant d'une riche recherche bibliographique. Les modèles associés simples de par leur formulation, se distinguent nettement de ceux proposés par la littérature en termes de facilité de compréhension et surtout efficacité d'utilisation.

Ce travail a été entrepris dans le but d'étudier et de valider des éléments plaques et coques destinés au calcul des structures minces et épaisses rencontrées en génie civil. Dans cet objectif, et dans un premier lieu, nous avons étudié et programmé un modèle d'éléments finis avec formulation en déplacements dans le domaine linéaire. Il s'agit des éléments Q4, Q8, Q9 et l'élément hétéro-sis. Les résultats donnés par notre programme sont comparables à ceux donnés par le programme de Hinton. Dans un deuxième lieu, nous avons exposé un modèle rhéologique isotrope basé sur la théorie de Mindlin/Reissner avec prise en compte de cisaillement transversal à comportement élasto-plastique. La non linéarité matérielle considérée est du type élasto-plastique et les systèmes d'équations résultants sont résolus en utilisant une approche incrémentale itérative, les solutions numériques de références concordent correctement. La formulation isoparamétrique offre un avantage supplémentaire dans une analyse non linéaire ; elle permet grâce à l'intégration numérique de suivre la plastification à l'intérieur des éléments. Cet œuvre a permis de mettre en évidence la bonne performance de l'élément hétéro-sis par rapport aux éléments plaques standard.

Pour les plaques épaisses, un blocage du au cisaillement transversal est observé. Et pour surmonter ce problème nous avons utilisé deux éléments plaques : les éléments Mitc4 et Mitc8, et deux éléments coques : les éléments Mitc4 et Mitc9.

Ces éléments ont fait l'objet de nombreux tests de validation en statique sur des plaques et coques isotropes et multicouches et sur des plaques avec appuis élastiques.

Ces tests ont porté sur différents aspects tels que le degré d'anisotropie, la capacité des éléments à décrire de champs de déformations et de contraintes complexes. Ils ont montré la capacité des modèles utilisés à résoudre une large classe de problèmes rencontrés en génie civil. Ils ont permis également de vérifier la démarche adoptée, en particulier le bon choix des facteurs de correction du cisaillement transversal et la bonne stratégie utilisée dans la programmation des éléments.

Une analyse de ces tests permet de tirer un certain nombre de commentaires :

- L'élément Mitc4 est un bon élément de flexion, qui a donné de résultats satisfaisants avec les plaques isotropes en statique. Les tests effectués sur des plaques très minces n'ont pas révélés de blocage en cisaillement. Sa faiblesse réside dans une convergence lente quand le gradient des efforts résultants est important. Avec l'élément Mitc8, des bons résultats ont été obtenus avec les plaques isotropes et aucun blocage en cisaillement n'a été observé. En revanche, les tests effectués sur les plaques épaisses ont montré parfois une surestimation de la flèche, l'écart a été d'autant plus important que la plaque est fortement anisotrope.
- En ce qui concerne l'élément Mitc4 coque, les résultats sont satisfaisants d'une manière générale, surtout dans les problèmes où la flexion est importante. L'élément est libre de tout blocage en cisaillement et en membrane. Le test sur le cylindre pincé a fait apparaître une convergence lente qui ne peut pas être attribuée à un blocage en membrane. On l'attribue plutôt à une faible capacité de cet élément à décrire de fort gradient des sollicitations accompagné d'une importante rigidité à la flexion. Pour ce qui est de l'élément Mitc9, les tests effectués ont été très satisfaisants. Ils montrent que cet élément est prometteur.

En conclusion de ce travail, nous mettons l'accent sur les différentes possibilités de simulation offertes par les modèles développés. Ces possibilités ont été illustrées à travers les applications traitées, notamment l'étude de l'aspect d'un cylindre pincé avec diaphragmes et le comportement statique d'une coque cylindrique sous son poids propre et l'étendue des zones plastiques.

Dans le but d'évaluer la performance des éléments plaques et coques proposés dans le régime non linéaire avec grands déplacements et grandes rotations, nous avons illustré à travers un porte-à-faux chargé avec seulement un couple constant M , appliqué à son bout libre, discrétisé par des éléments finis plaques Q4 et Q8.

Nous remarquons que les résultats obtenus concordent très bien avec la solution analytique. Ceci révèle la précision et la performance des éléments proposés dans les problèmes de flexion à grands déplacements et grandes rotations.

Dans La deuxième partie, nous avons commencé par présenter les réseaux de neurones biologiques, car il est important de bien comprendre le fonctionnement du système nerveux humain pour pouvoir le reproduire. Nous avons ensuite défini les réseaux de neurones artificiels, leur modèle mathématique, les différentes fonctions d'activation usuelles, ainsi que les différentes règles d'apprentissage.

Les chercheurs ont trouvé que cette technique donnait de très bons résultats sans avoir recours à développer des règles ou utiliser des approximations analytiques.

Il apparaît que les résultats d'une analyse linéaire d'une structure ne sont plus approximatifs, mais sont complètement erronés, d'où la nécessité d'une analyse élastoplastique approximative.

Du fait que les essais expérimentaux sont coûteux, leur reproductibilité n'étant pas toujours assurée et les résultats présentent souvent des incertitudes, le recours à des simulations numériques utilisant la technique des réseaux de neurones s'avère incontournable et constitue un complément au support expérimental.

Avec la technique des réseaux de neurones artificiels de plus en plus sophistiquée il est maintenant possible de faire des simulations numériques détaillées des phénomènes de la plasticité (non linéarité matérielle).

De ce fait, un nouveau modèle de plasticité utilisant la technique des réseaux de neurones a été développé pour décrire le comportement non linéaire du béton dans les différents états de contraintes de compression.

Pour cela, le modèle de plasticité utilisant les réseaux de neurones artificiels RBF a été mis en œuvre. Contrairement aux modèles de plasticité existant le modèle proposé décrit avec précision le comportement post-pic adoucissant, ce qui permet de décrire avec plus de précision les caractéristiques comportementales de béton dans divers états de contraintes.

Le modèle proposé a été vérifié par comparaison des résultats avec ceux des uni-, bi-, et triaxiaux existants. Les comparaisons montrent que le modèle proposé est applicable à une utilisation générale, car elle peut prédire la plupart des résultats des tests, en utilisant les propriétés de base des matériaux tels que la résistance à la compression uniaxiale et le module d'élasticité.

Cette thèse ne prétend pas être complète pour résoudre tous les problèmes d'analyse non linéaire de structures de type plaques et coques. Pour mieux améliorer le travail présenté et le rendre plus avantageux, nous formulons les recommandations suivantes :

- ❖ Convertir notre programme développé en FORTRAN en d'autres langages plus utilisés dans l'analyse des structures, tel que MATLAB.
- ❖ Développer les éléments finis basés sur la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER pour l'analyse non-linéaire mixte géométrique et matérielle.
- ❖ Étendre les modèles de plaques et de coques, pour résoudre les problèmes dynamiques.
- ❖ Il serait également intéressant de généraliser ces modèles pour l'analyse des structures en grandes déformations.
- ❖ Appliquer des techniques qui permettent d'ajouter de larges rotations dans l'espace tridimensionnel.
- ❖ Développer de nouveaux modèles, pour le calcul des structures de types plaques et coques composites en présence de non- linéarités mixtes matérielles et géométriques.

- ❖ Élargir ce modèle non linéaire spécifique au béton armé.
- ❖ Implémenter la technique des réseaux de neurones artificiels dans les codes de calcul éléments finis.
- ❖ Le réseau de neurones pourrait être utilisé en combinaison avec d'autres approches de régression supervisée.
- ❖ Envisager des stratégies plus sophistiquées autres que les RBF afin d'améliorer davantage les performances du processus de réseau de neurones.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] J. M. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin and R. J. Melosh "Large deflection of structures subject to heating and external load". J. Aero. Sci., Vol. 27, pp 97-106. 1960.
- [2] S. J. Oden "Finite element application in nonlinear analysis". In H. W. Rowan and R. M. Hackett editors. Proc. Symp. on application of the finite element methods in Civil Engineering, pages 419-456. ASCE and Vanderbilt Univ. Nashville. Nov. 1969.
- [3] J. L. Batoz "Analyse non linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés". Thèse de doctorat, Université Laval. Québec. 1977.
- [4] F. Frey "L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique". Thèse de doctorat. Université de Liège. Belgique, 1978.
- [5] M. S. Gadala, M. A. Dokainish and G. A. Oravas "Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems". Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 20 pp 887-914. 1984.
- [6] M. A. Crisfield "Non-linear finite element analysis of solids and structures". Volume 1. Essentials. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1997.
- [7] M. J. Turner, H.C. Martin and B. C. Weikel "Further developement and applications of stiffness method". In B. Fraeijs de Veubeke, editor, -Matrix methods in structural analysis. pages 203-266. Pergamon Press, 1964.
- [8] J. H. Argyris, S. Kelsey and H. Kamel "Matrix methods of structural analysis - a precise of recent developement". In B. Fraeijs de Veubeke, editor. Matrix methods in structural analysis, pages 1-164- Pergamon Press, 1964.
- [9] J. H. Argyris "Matrix analysis of three-dimensional elastic media – small and large displacements". AIAA Journal. Vol. 3 No. 3 pp 45-51, 1965.
- [10] C. A. Felippa "Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures". Technical Report SESM 66-22, Univ. California, Berkeley. 1966.
- [11] H. C. Martin "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems". In Proc. Air Force 1st Conf. On Matrix Method.s in Structural Mechanics, pages 679-696. Wright-Patterson Air Force Base. Ohio. Nov. 1966.
- [12] J. W. Wissmann "Nonlinear structural analysis-tensor formulation". In Proc. Air Force 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, pages 697-716- Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Nov. 1966.

- [13] J. T. Oden "Calculation of geometric stiffness matrices for complex structures". AIAA Journal. Vol. 4 No. 8 pp 1480-1482.1966.
- [14] T. J. Oden "Numerical formulation of non-linear elasticity problems". In H. W. Rowan and R. M. Hackett editors, Proc. Symp. on application of the finite element methods in Civil Engineering, pages 419-456. ASCE and Vanderbilt Univ. Nashville. Nov- 1969.
- [15] H. D. Hibbit, P. V. Marcal and J. R. Rice "A finite element formulation for problems of large strain and large displacement". Int. J. Solids Struct., Vol. 6 No. 8 pp 1069-1086. 1970.
- [16] J. S. Oden "Finite element of nonlinear continua". Mc Graw Hill, New York 1972.
- [17] S. Yaghmai "Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution". Technical Report SESM 68-17, Univ. California, Berkeley, Dec. 1968.
- [18] C. Brebbia and J. Connor "Geometrically nonlinear finite element analysis". ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 95 No. EM2 pp 463-483. 1969.
- [19] L. D. Hofmeister, G. A. Greenbaum and D.A. Evensen "Large strain elastoplastic finite element analysis". AIAA J., Vol. 9 No. 7 pp 1248-1254, 1971.
- [20] P. Sharifi and E. P. Popov "Nonlinear buckling analysis of sandwich arches". ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 97 pp 1397-1411, 1971.
- [21] M. A. Crisfield "Non-linear finite element analysis of solids and structures". Volume 2, Advanced topics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1997.
- [22] L. A. Schmit, F.K. Bognor and R. L. Fox "Finite deflection structural analysis using plate and shell discrete elements". AIAA J., Vol. 6 No. 5, pp 781-791,1968.
- [23] R. H. Mallett and L. A. Schmit "Non-linear structural analysis by energy search". ASCE J. Struct. Div., Vol. 93 No. ST3, pp 221-234, 1967.
- [24] K. J. Bathe, H. Ozdemir and E. L. Wilson "Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis". Technical Report UC SESM 74-4, Univ. California. Berkley, Feb. 1974.
- [25] K. J. Bathe and H.Ozdemik "Elastic plastic large deformation static and dynamic analysis". Comp. Struct. Vol. 6, pp 81-92, 1975.
- [26] T. Kawai and N. Yoshimura "Analysis of large deflection of plates by the finite element method". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 1 pp 123-133, 1969.
- [27] K. J. Bathe. E. Ramm. and E. L. Wilson "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9 No. 2, pp 353- 386. 1975.
- [28] K. J. Bathe and H. Ozdemir "Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis". Computers Struct., Vol. 6, pp 81-92, 1976.

- [29] T. M. Roberts and D.G. Ashwell "The use of the finite mid-increment stiffness matrices in the post-buckling analysis of imperfect structures". *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 7 No. 7, pp 805-823. 1971.
- [30] H. Gachon "Analyse de comportement des plaques minces raidies anisotropes". *Annales ITBTP. section 'théories et méthodes de calcul'*, 1971.
- [31] J. L. Batoz and G. Dhatt "Buckling of deep shells". In *Proc. Sec. Int. Conf. SMIRT*. Berlin. Sept. 1973.
- [32] J. L. Batoz, A. Chattopadhyay and G. Dhatt "Finite element large deflection analysis of shallow shells". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 10 No. 1, pp 39-58, 1976.
- [33] J. A. Stricklin "Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of shells of revolution". In Univ. de Liège Fraeijs de Veubeke, editor, *Proc. IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures*, pages 383-411. 1971.
- [34] R. H. Gallagher "The finite element method in shell". *Comp. Struct.*, Vol. 3 No. 3, pp 543-557, 1973.
- [35] S. Rajasekaran and D. W. Murray "Couple local buckling in wide flange beam-columns". *ASCE Journal of Structural Division*, Vol. 99 No.ST-6, pp 1003-1023. 1973.
- [36] G. Opperman "Comportement spatiale des poutres-colonnes à section ouverte et parois minces". Thèse de doctorat, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Suisse. 1982.
- [37] J. L. Batoz and J. P. Jameux "Large displacements and post-buckling of plane structures". In *European Mechanics Colloquium*, Munich, May. 1983.
- [38] J. L. Batoz and J. P. Jameux "Post-flambement et grands déplacements d'arcs plans". *J. de mécanique théorique et appliquée*, Vol. 5 No. 2, pp 235-257, 1986.
- [39] F. Lebouvier "Analyse non-linéaire et ruine de structures planes formées de poutres et d'arcs". Thèse de doctorat. Université de Technologie de Compiègne. France. 1985.
- [40] Z. P. Bazant and M. E. Nimeiri "Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames". *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, EM 6, 1973.
- [41] K. Wishizu "Variational methods in elasticity and plasticity". Pergamon Press. 1982.
- [42] K. J. Bathe "Finite element procedures in engineering analysis". Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- [43] S. Jaamei "Etudes des différentes formulations lagrangiennes pour l'analyse des plaques et coques minces élastoplastiques en grands déplacements et grandes rotations". Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1986.

- [44] M. Fafard "Calcul automatique des configurations pré et post-flambement en calcul non linéaire des structures". Thèse de doctorat, Université Laval, Québec. 1987.
- [45] J. C. Simo "A finite strain beam formulation, the three-dimensional dynamic problem". part i. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 49 pp 55-70, 1985.
- [46] J. C. Simo and L. Vu-Quoc "A three-dimensional finite strain rod model". part ii: computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, pp 79-116, 1986.
- [47] J. C. Simo and D. D. Fox "On a stress resultant geometrically exact shell model". part i: Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 72, pp 267-304, 1989.
- [48] J. H. Argyris "An excursion into large rotations". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, pp 85-155. 1982.
- [49] J. C. Simo and L. Vu-Quoc "On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 66, pp 125-161. 1988.
- [50] A. Cardona and M. Geradin "A beam finite element non-linear theory with finite rotations". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp 2403-2438, 1988.
- [51] S. H. Lo "Geometrically nonlinear formulation of 3d finite strain beam element with large rotations". *Comput. Struct.*, Vol. 44, pp 147-157, 1992.
- [52] A. Ibrahimbegovic "On finite element implementation of geometrically nonlinear reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 26, pp 11-26, 1995.
- [53] M. S. Park and B. C. Lee "Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of von-mises-type hardening material". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp 383-408, 1996.
- [54] C. Sansour and H. Bufler "An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 34, pp 73-115. 1992.
- [55] N. Buechter and E. Ramm "Shells theory versus degeneration-a comparison in large rotation finite element analysis". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 34, pp 39-59. 1992.
- [56] B. Brank and F. B. Damjanic "On large deformations of thin elastoplastic shells: Implementation of finite rotation model for quadrilateral shell element". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp 689-726, 1997.
- [57] A. Rahem. M. Fafard. and G. Dhatt "Un élément de coque à 8 nœuds en grandes rotations". In 16 congrès canadien de mécanique appliquée, page 457. Université Laval. Québec. Juin 1997.

- [58] F. Dammak "Formulation isoparamétrique généralisée en analyse linéaire et non linéaire des coques par éléments finis". Thèse de doctorat, Université Laval. Québec. 1996.
- [59] D. W. Murray and E. L. Wilson "An approximate non-linear analysis of thin-plates". In Proc. Air Force 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1968.
- [60] O. C. Zienkiewicz and G. C. Nayak "A general approach to problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements". In Proc. Air Force 3rd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, pages 881-928. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971.
- [61] M. A. Crisfield "Incremental/iterative solution for non-linear structural analysis". in Proc. First Int. Conf. Num. Meth. for Non-Linear Problems, pages 261-290. Swansea. U.K., 1980.
- [62] T. H. H. Pian and P. Tong "Variational formulation of finite-displacements analysis". In B. Fraeijs de Veubeke. editor. High speed computing of elastic structure. pages 43-63. Pergamon Press, 1971.
- [63] W. E. Haisler, J. A. Stricklin and J. E. Key "Displacement incrementation in non-linear structural analysis by self-correcting method". Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 11, pp 3-10. 1977.
- [64] G. A. Wempner "Discrete approximations related to nonlinear theories of Solids". Int. J. Mech. Sci., Vol. 7, pp 1581-1599, 1971.
- [65] E. Riks "The incremental approach to the solution of snapping and buckling problems". Int. J. of Solids and Struc., Vol. 15, pp 529-551, 1979.
- [66] E. Ramm "Strategies for tracing the non-linear response near limits points". In .Nonlinear FE analysis in structural mechanics, pages 68-89. Springer-Verlag. New York. 1981.
- [67] J. C. Murray and J. H. Gregory "A study of incremental-iterative strategies for non-linear analysis". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 29, pp 1365-1391, 1990.
- [68] G. Dhatt and M. Fafard "Modélisation non linéaire des structures". Technical Report GCS-95-08, Université Laval, Québec, Sept. 1995.
- [69] J. A. Stricklin W. E. Haisler. and F. Stebbins "Nonlinear analysis of shells of revolution by the matrix displacement method". AIAA J., Vol. 6 No.12, pp 2306-2312, 1968.
- [70] P. V. Marcal "Large deflection analysis of elastic-plastic shells of revolution". AIAA J., Vol. 8 No.9, pp 1627-1633, 1970.
- [71] J. P. Prost "Analyse de la stabilité élastique des voiles minces de révolution par la méthode des éléments finis". Thèse de maîtrise, Université Laval, 1975.

- [72] C. Tahiani "Analyse des voiles minces dans les domaines linéaire et géométriquement non linéaire par la méthode des éléments finis mixtes". Ph. d. thesis. Université Laval 1971.
- [73] P. G. Bergan and R. W. Clough "Large deflection analysis of plates and shallow shells using the finite element method". Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 5 No. 4, pp 543-556, 1973.
- [74] R. H. Gallagher and H. T. Yang "Elastic instability predictions for doubly curved shells". In Proc. Air Force 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics. pages 711-742- Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1968.
- [75] R. H. Gallagher, S. Lien and S. Mau "A procedure for finite element plate and shell pre and post buckling analysis". In Proc. Air Force 3rd Conf. On Matrix Methods in Structural _Mechanics. pages 857-879. Wright-Patterson Air Force Base. Ohio. 1971.
- [76] K. J. Bathe and H. Ozdemir "Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis". Computers Struct., Vol. 6, pp 81-92, 1976.
- [77] G. Dhatt "Instability of thin shells by the finite element method". In Proc. Sym. of the Association of Shell Structures. Vienna, 1970.
- [78] S. W. Key "The analysis of arbitrary shells with a doubly curved arbitrary quadrilateral finite elements". Int. J. for Computers and Structures, Vol. 2, pp 637-673, 1972.
- [79] J. L. Batoz and G. Dhatt "Flambement axisymétrique et asymétrique des coques minces surbaissées". In Proc. Fifth Canadian Congress of Appl. Mech., pages 167-168. Fredericton. N. B., May 1975.
- [80] J. L. Batoz, G. Dhatt, and J. P. Prost "Buckling behaviour of shells using axisymmetrical element and triangular element". In Proc. Third Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Technology, Londres, Sept. 1975.
- [81] T. Matsui and Matsuoka "A new finite element scheme for instability analysis of thin shells". Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 10 No. 1, pp 145-170, 1976.
- [82] K. J. Bathe and L. W. Ho "A simple and effective element for analysis of general shell structures". Comp. and Struct., Vol. 13, pp 673-681, 1981.
- [83] P. Pol "Modélisation du comportement élastoplastique de coques minces par éléments finis". Thèse de doctorat. Université de Technologie de Compiègne. France. 1992.
- [84] S. Ahmad. B. M. Irons. and O. C. Zienkiewicz "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems". In Proc. Air Force 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech. Wright-Patterson Air Force Base. Ohio, October 1968.

- [85] S. Ahmad, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 2, pp 419-451, 1970.
- [86] K. Parisch "A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 20, pp 323-350. 1979.
- [87] K. J. Bathe and S. Bolourchi "A geometrical and material nonlinear plate and shell element". *Computers and Structures*, Vol. 11, pp 23-48, 1980.
- [88] T. J. R. Hughes and W. K. Liu "Nonlinear finite element analysis of shells", part i: Three-dimensional shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 26, pp 331-362. 1981.
- [89] T. J. R. Hughes and W. K. Liu "Nonlinear finite element analysis of shells, part ii: Two dimensional shells". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 27, pp 167-181, 1981.
- [90] T. J. R. Hughes and E. Carnoy "Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strain". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 39, pp 69-82, 1983.
- [91] K. S. Surana "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell element". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp 581-615, 1983.
- [92] R. V. Milford and W. C. Schinobrich "Degenerated isoparametric elements using explicit intergration". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp 133-154, 1986.
- [93] W. Kanok, Nukulchai, R. L. Taylor and T. J. R. Hughes "Resultant-stress degenerated-shell element". *Comp. Struct.*, Vol. 13, pp 19-25, 1981.
- [94] K. C. Parks and G. M. Stanley "A curved C0 shell element based on assumed natural-coordinate strains". *J. Appl. Mech.*, Vol 53 No. 2, pp 278-290, 1986.
- [95] W. K. Liu, E. S. Law, D. Lam, and T. Belytschko "A large deformation formulation for shell analysis by finite element method". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, pp 259-300, 1986.
- [96] H. Robert and W. Dehmel "Nonlinear analysis of isotropic, orthotropic and laminated plates and shells". *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng.*, Vol. 64, pp 429-446, 1987.
- [97] M. Mahe and J. C. Sourisseau "Explicite thickness integration for three dimensional shell elements applied to non-linear analysis". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp 1085-1114, 1993.
- [98] P. Boisse, J. L. Daniel and J. C. Gelin "A C0 three-node shell element for non-linear structural analysis". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp 689-726, 1991.
- [99] Y. Stander, A. Matzenmiller and E. Ramm "An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis". *Eng Comput.*, Vol. 6, pp 57-66, 1989.

- [100] A. F. Saleeb, T. Y. Chang, W. Graf and S. Yinyeunyoung "A hybrid mixed model for nonlinear shell analysis and its application to large rotation problems". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 29, pp 407-446, 1990.
- [101] H. Parisch "An investigation of a finite rotation four node assumed shell element". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 31, pp 127-150, 1991.
- [102] S. Buechter, E. Ramm, and D. Roehl "Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based of the enhanced assumed strain concept". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp 2551-2568, 1994.
- [103] H. Kebari and A. C. Cassel "A stabilized 9-node non-linear shell element". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 35, pp 37-61. 1992.
- [104] F. Gruttmann, S. Klinkel and W. Wagner "A finite rotation shell theory with application to composite structures". *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 4, No. (5-6), 1995.
- [105] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor "The finite element". Volume 1 et 2 Mc Graw-Hill. London. 1991.
- [106] J. L. Ericksen and C. Truesdell "Exact theory of stress and strain in rods and shells". *Archives for rotational mechanics and analysis*, Vol. 1, pp 295-323, 1958.
- [107] J. C. Simo, D. D. Fox and M. Rifai "On a stress resultant geometrically Exact shell model". part ii: The linear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 73, pp 53-62. 1989.
- [108] J. C. Simo, D. D. Fox and M. Rifai "On a stress resultant geometrically exact shell model". part iii: Computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 79, pp 21-70, 1990.
- [109] J. C. Simo, M. Rifai and D. D. Fox "On a stress resultant geometrically exact shell model". part iv: Variable thickness shells with through the thickness stretching. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 81, pp 91-126, 1990.
- [110] J. C. Simo, M. Rifai and D. D. Fox "On a stress resultant geometrically exact shell model". part vi: Nonlinear dynamics and conserving algorithms. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 34, pp 117-164, 1990.
- [111] J. C. Simo and J. G. Kennedy "On a stress resultant geometrically exact shell model". part v: Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms. *Comp. Meth- Appl. Mech. Eng.*, Vol. 96, pp 133-171, 1992.
- [112] J. C. Simo "On a stress resultant geometrically exact shell model. part vii: Shell intersections with 5/6 dof finite element formulations". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 108, pp 319-339. 1993.
- [113] P. Wriggers and F. Gruttmann "Thin shells with finite rotations formulated in biot stresses: Theory and finite element formulation". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp 2049-2071. 1993.

- [114] J. Chroscielowski, J. Markowski and H. Stumpf "Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity". *Int. J. Numer. Meth- Eng.*, Vol. 35, pp 63-94, 1992.
- [115] A. Ibrahimbegovic "Stress geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations", part i : A consistent formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech, Eng.*, Vol. 118, pp 265-284. 1994.
- [116] A. Ibrahimbegovic and F. Frey "Stress geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations", part ii : Computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 118, pp 285-308, 1994.
- [117] A. Ibrahimbegovic and F. Rey "Stress geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations", part iii : Linearized kinematics. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp 3659-3683, 1994.
- [118] A. Ibrahimbegovic "A intrinsic form of the stress resultant geometrically exact shell theory". In *Proc. Séminaire d'été de la Société Mathématique du Canada*. Université Laval, Québec, Juillet 1996.
- [119] C. Prato "Shell finite element via reissner's principle". *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 5, pp 1119-1133, 1969.
- [120] J. L. Batoz and G. Dhatt "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 3. *Coques*. Les Presses de l'université Laval, Sainte-Foy, Québec, 1992.
- [121] K. J. Bathe and E. Dvorkin "A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 22, pp 697-722, 1986.
- [122] P. M. Pinsky and R. V. Jasti "On use of lagrange multiplier compatible modes for controlling accuracy and stability of mixed shell finite elements". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 85, pp 151-182, 1991.
- [123] H. Kebari and A. C. Cassel "Non-conforming modes stabilisation of 9-node stress-resultant degenerated shell element with drilling freedom". *Comp. Struct.*, Vol. 40, pp 569-580. 1991.
- [124] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too "Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 3, pp 275-293, 1971.
- [125] T. J. R. Hughes, M. Cohen and M. Haroun "Reduced and selective integration technics in finite element analysis of plates". *Nucl. Eng. Des.*, Vol. 46, pp 203-222. 1978.
- [126] D. S. Malkus and T. J. R. Hughes "Mixed finite element method – reduced and selective integration technique: a unification of concepts". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 15, pp 63-81, 1978.

- [127] T. J. R. Hughes, R.L. Taylor and W. Kanoknukulchai "A simple and efficient element for plate bending". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp 1529-1543, 1977.
- [128] T. J. R. Hughes and J. Winget "Finite rotation effects in numerical intergration of rate constitutivs equations arising in large deformation analysis". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp 333-353, 1980.
- [129] J. C. Simo and T. J. R. Hughes "On the variational foundations of assumed strain methods". *J. Appl. Mech.*, Vol. 53, pp 51-54, 1986.
- [130] R. Ayad "Éléments finis de plaques et coques en formulation mixte avec projection en cisaillement". Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne. France. 1993.
- [131] I. Katili "Formulation et évaluation de nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque". Thèse de doctorat. Université de Technologie de Compiègne. France. 1993.
- [132] O. C. Zienkiewicz, Z. Xu, L. F. Zeng, A. Samuelsson and N. E. Wiberg "Linked interpolation for reissner-mindlin plate elements": Part a-a simple quadrilateral. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp 3043-3056, 1993.
- [133] A. Ibrahimbegovic "Quadrilateral finite elements for analysis of thick and plates". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 110, pp 195-209, 1993.
- [134] M. Fafard, G. Dhatt and J. L. Batoz "A new discret kirchhoff plate/shell element with updated procedures". *Comp. Struct.*, Vol. 31, pp 591-606, 1989.
- [135] G. H. Yang and S. Saigal " A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp 617-635, 1985.
- [136] L. M. Dinis and D. R. Owen " Elasto-viscoplastic and elasto-plastic large deformation analysis of thin plates and shells ". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 18, pp 591-607, 1966.
- [137] D. R. J. Owen and J. A. Figueiras « Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by semiloof element ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp 521-539, 1983.
- [138] C. Touzet "Les réseaux de neurones artificiels, Introduction au connexionisme". Notes de cours sous forme HTML, juillet 1992.
- [139] B. Kröse and P. van der Smagt "An introduction to neural network". Ebook of The University of Amsterdam, November 1996.
- [140] X. Wu, J. H. Garrett and J. Ghaboussi "Representation of material behavior". Neural network based models, Proceedings International Joint Conference on Neural Networks, San Diego, California, June 1990.

- [141] J. Ghaboussi, J. H. Garrett and X. Wu "Material modeling with neural networks", Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering, Theory and Applications, Swansea, UK. pp 701, 1990.
- [142] X. Wu "Neural network based material modeling". PhD Thesis, Dept. Civil Engineering, Univ. Of Illinois at Urbana-Champaign, 1991.
- [143] J. Ghaboussi, J. H. Garrett and X. Wu "Knowledge based modeling of material behavior with neural networks". J. Engng. Mech. Div. ASCE. Vol. 117, pp 132. 1991.
- [144] X. Wu and J. Ghaboussi "Neural network based material modeling of composite materials with emphasis on reinforced concrete". Proceeding of the 8th ASCE Conference on Computing in Civil Engng, Dallas, Texas, June 1992.
- [145] J. Ghaboussi, P. V. Lade and D. E. Sidarta "Neural networks based modeling in geomechanics". Proceedings of the 8th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics, Morgantown, WV, 1994.
- [146] D. E. Sidarta and J. Ghaboussi "Constitutive modeling of geomaterials from non uniform material tests". Computers and Geotechnics, Vol. 22, pp. 53, 1998.
- [147] S. ÇELİK and Ö. TAN "Determination of preconsolidation pressure with artificial neural network". Civil Engineering and Environmental Systems Vol. 22, No. 4217–231, December 2005.
- [148] A. H. Alavi et al. "Modeling of maximum dry density and optimum moisture content of stabilized soil using artificial neural networks". J. Plant Nutr. Soil Sci., Vol. 173, pp 368–379, 2010.
- [149] S. J. Lee et al. "An approach to estimate unsaturated shear strength using artificial neural network and hyperbolic formulation". Computers and Geotechnics Vol.30, pp 489–503, 2003.
- [150] G. W. Ellis et al. "Stress-Strain Modeling Of Sands Using Artificial Neural Networks". Journal Of Geotechnical Engineering/429/ May 1995.
- [151] D. Penumadu, R. Zhao "Triaxial compression behavior of sand and gravel using artificial neural networks (ANN) ". Computers and Geotechnics Vol. 24, pp 207-230, 1999.
- [152] M. A. Shahin and B. Indraratna "Modeling the mechanical behavior of railway ballast using artificial neural networks Can". Geotech. J. Vol. 43, pp 1144-1152, 2006.
- [153] A. Karouni , B. Daya, S. Bahlak "Offline signature recognition using neural networks approach Procedia". Computer Science Vol. 3, pp 155–161, 2011.
- [154] J. L. Batoz, G. Dhatt "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 2, Plaques et poutres, Hermès, 1990.

- [155] A. K. Noor and J. M. Peters "A posteriori estimates for shear correction factors in multilayered composite cylinders". *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 115, pp 1225-1244, 1989.
- [156] G. A. Cohen "Transverse shear stiffness of laminated anisotropic shells". *CMAME*, Vol. 13, pp 205-220, 1978.
- [157] E. Reissner "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates" *JAM*, Vol. 12, pp 69-77, 1945.
- [158] R. D. Mindlin "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *JAM*, Vol. 18, pp 31-38, 1951.
- [159] R. D. Mindlin, A. Schacknow and H. Deresiewicz "Flexural vibrations of rectangular plates, *JAM*, Vol. 23 No. 78, pp 431-436, 1966.
- [160] K. J. Bathe and E. Dvorkin "A four - node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation". *Int J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, pp 367-383, 1985.
- [161] E. Hinton and H. C. Huang "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields". *Comput. Struct.*, Vol. 23, pp 409-431, 1986.
- [162] C. Onate, O. C. Zinkiewicz, B. Suarez and R. L. Taylor "A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements" *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.33, pp 345-367, 1992.
- [163] H. C. Huang and E. Hinton "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation". *Int.J. Numer. Methods. Eng.*, Vol. 22, pp 73-92, 1986.
- [164] O. Polit, M. Touratier and P. Lory "A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element". *Int. J. Numer Methods Eng.*, Vol. 37, pp 387-411, 1994.
- [165] L. Sedov "Mécanique des milieux continus". Tomes 1 et 2, Editions Mir, Moscou, 1975.
- [166] S. Vlachoutsis "Shear correction factors for plates and shells". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 33, pp 1537-1552, 1992.
- [167] E. N. Dvorkin and K. J. Bathe "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis". *Eng. Comput.*, Vol. 1, pp 77-88, 1984.
- [168] M. L. Bucelem and K. J. Bathe "Higher-order Mite general shell elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 36, pp 3729-3754, 1993.
- [169] H. Stolarski and T. Belytschko "Membrane locking and reduced integration for curved elements". *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp 172-176, 1982.
- [170] A. Ibrahimbegovic, R. L. Taylor, E. L. Wilson "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom", *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 30, pp 445-457, 1990.

- [171] J. Jang and P. M. Pinsky "An assumed covariant strain based 9-node shell element, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 24, pp 2389-2411, 1987.
- [172] F. Kaddah "Etude numérique d'éléments de plaques et coques minces et épaisses pour des applications en génie civil". Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille. France. 1995.
- [173] ULM. Franz-Josef "Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint". Thèse de doctorat. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de Paris. France. 1994.
- [174] W. F. Chen "Plasticity in reinforced concrete". McGraw-Hill Inc, 1982.
- [175] B. P. Sinha, K. H. Gerstle et L. G. Tulin "Stress-strain-relations for concrete under cyclic loading" *Adjournal*, Vol. 61 No. 2, pp 195-211, 1964.
- [176] P. Germain "Mécanique des milieux continus". Tome 1, théorie générale, ed. Masson, Paris. France, 1973.
- [177] J. Lemaitre et J. L. Chaboche (1985, 1988) "Mécanique des matériaux solides". Éd. Dunod, Paris. France 2e édition 1988.
- [178] O. Coussy "Mécanique des milieux poreux". Éd. Technip, Paris. France, 1991.
- [179] W. F. Chen et DJ. Han "Plasticity for structural engineers". Springer-Verlag, 1988.
- [180] J. Eberhardsteiner, G. Meschke et H. Mang "Triaxiales konstitutive Modellieren von Beton". Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien, Vienna, Autriche, 1987.
- [181] M. Labbane, N. K. Saha et E. G. Ting "Yield criterion and loading function for concrete plasticity". *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30 No. 9 pp 1269-1288. 1993.
- [182] B. Halphen et Q. S. Nguyen "Sur les matériaux standards généralisés". *Journal de Mécanique*, Vol. 14, No. 1, pp 39-63, 1975.
- [183] P. J. Yoder et W. D. Iwan "On the formulation of strain space plasticity with multiple loading surfaces". *Journal of Applied Mechanics*, ASME Vol. 48, pp 773-778, 1981.
- [184] DJ. Han et W. F. Chen "Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling". *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, No. 8, pp 935-950, 1986.
- [185] W. F. Chen, E. Yamaguchi et H. Zhang "On the loading criteria in the theory of plasticity". *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 6, pp 679-683, 1991.
- [186] O. A. Pekau, Z. X. Zhang et G.T. Liu "Constitutive model for concrete in strain space". *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118 No. 9, pp 1907-1927, 1992.
- [187] E. Mizuno et S. Hatanaka "Compressive Softening model for concrete". *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 8, pp 1546-1562, 1992.

- [188] M. Klisinski et Z. Mroz "Description of inelastic deformation and degradation of concrete". *Int. J. Solids Structures*, Vol. 24, No. 4, pp 391-416, 1988.
- [189] R. de Borst et P. Nauta "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model". *Engng. Computations*, Vol. 2, pp 155-177, 1985.
- [190] G. Gajer et P. F. Dux "Crack band based model for FEM analysis of concrete structures". *J. of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 116 No. 6, pp 1696-1714, 1990.
- [191] Z. P. Bazant et S. S. Kim "Plastic-fracturing theory for concrete". *J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, No. EM3, pp 407-428 (Errata 1980, EM2 pp 421), 1979.
- [192] Y. R. Rashid "Analysis of prestressed concrete pressure vessels". *Nuclear Engng. And Design*, Vol. 7, No.4, pp 334-344, 1968.
- [193] R. de Borst "Computational aspects of failure of reinforced concrete". *Colloque Lausanne*, 1991.
- [194] P. E. Petersson "Fracture energy of concrete : method of determination". *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, No. 1, pp 78-89, 1980.
- [195] A. Hillerborg "Results of three comparative test series for determining the fracture energy G_f of concrete". *Materials and structures, RILEM*, Vol. 18, No. 107, pp. 407-413, 1985.
- [196] J. W. Dugill "On stable progressively fracturing solids". *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 27, pp 423-437, 1976.
- [197] Y. F. Dafalias "D'yushin's postulate and resulting thermodynamic conditions on elastoplastic coupling". *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13, pp 239-251, 1977.
- [198] K. J. Willam et E. P. Warnke "Constitutive model for the triaxial behavior of concrete". *International Association of Bridge and Structural Engineers, Seminar on Concrete Structures subjected to triaxial stresses, paper III-I, Bergamo, Italy, IABSE Proc. 1*, 1975.
- [199] B. Fauchet "Analyse poroplastique des barrages en béton et de leurs fondations. Rôle de la pression interstitielle". *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. France*, 1991.
- [200] M. Labbane, N. K. Saha et E. G. Ting "Yield criterion and loading function for concrete plasticity". *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, No. 9, pp. 1269-1288, 1993.
- [201] F. H. Wittmann "Structure and fracture mechanics of concrete". *ÎTBTP – Séminaire "Mécanique de la rupture"*, Saint Rémy les Chevreuses, juin 1982.
- [202] H. Kupfer, H. K. Hilsdorf et H. Rüsçh "Behavior of concrete under biaxial stresses". *ACI Journal*, Vol. 66 No. 8, pp 656-666, 1969.

- [203] L. J. M. Nelissen "Biaxial testing of normal concrete". Heron (Delft), Vol. 18 No. 1, 1972.
- [204] E. Beltrami, Rendiconti Math. Annal., p 704, 1903.
- [205] M. T. Huber Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper « La théorie du contact des corps élastiques solides » Vol. 319, Issue6 Pages 153-163, 1904.
- [206] R. V. Mises "Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand" « Mécanique des corps solides dans un état plastique déformable »: pp 582-592, 1913.
- [207] H. Hencky "Zur Theorie plastischer deformationen und der hierdurch in material hervorgernufenen nebenspannungen". Proceeding of the first international congress on applied mechanics, J. Waltman edition, Delft, 1924.
- [208] R. De Borst, P. H. Feenstra "Studies in anisotropic plasticity with reference to the Hill criterion". Int. J. numer. meth. eng., Vol. 29, pp 315-336, 1990.
- [209] J. C. J Schellekens, R. De Borst "The use of Hoffman yield criterion in finite element analysis of anisotropic composites". Computers and structures, Vol. 37, No. 6, pp 1087-1096, 1990.
- [210] D. R. J. Owen, J. A. Figueiras "Anisotropie elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells". Int. J. numer. meth. eng., Vol. 19, pp 541-566, 1983.
- [211] A. C. T. Chen et W. F. Chen "Constitutive relations for concrete". J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, No. EM4 pp 465-481, 1975.
- [212] E. Davalo, P. Naim "Des Réseaux de Neurones". EYROLLES, Deuxième édition, 1993.
- [213] F. Rosenblatt "The Perceptron : a probabilistic model for information storage and organization in the brain". Psychological Review, Vol. 65 pp 386-408, 1958.
- [214] D. Rumelhart, G. Hinton, R. Williams "Parallel Distributed Processing". MIT Press, Vol. 1, Cambridge, 1986.
- [215] R. L. Watous "Learning algorithms for connectionist networks : Applied gradient methods of non linear optimisation". IEEE, First International Conference On Neural Networks, San Diego, California, 1987.
- [216] K. Hornik, M. Stinchcombe, H. White "Multilayer Feedforward Networks are Universal Approximators". Neural Networks, Vol. 2, pp 359-366, 1989.
- [217] S. Pernot, C. H. Lamarque "Application of neural networks to the modelling of some constitutive laws". Neural Networks, Vol. 12, pp 371-392, 1999.
- [218] M. Mozolin, J. C. Thill, E. Lynn Usery "Trip distribution forecasting with multilayer perceptron neural networks : A critical evaluation". Transportation Research Part B, Vol. 34, pp 53-73, 2000.

- [219] G. Dreyfus, J. M. Martinez, M. Samuelides, M. B. Gordon, F. Badran, S. S. Thiria, L. Hérault "Réseaux de neurones : Méthodologie et Applications". Eyrolles, 2002.
- [220] C. Bishop "Neural Networks for Pattern Recognition". Oxford University Press, 1995.
- [221] O. Nerrand, P. Roussel-Ragot, L. Personnaz, G. Dreyfus "Neural networks and nonlinear adaptive filtering : unifying concepts and new algorithms". Neural Computation, Vol. 5, pp 165-199, 1993.
- [222] C. Touzet "Les réseaux de neurones artificiels : Introduction au connexionnisme". Cours, Exercices et travaux pratiques, 1992.
- [223] H. Adeli and C. Yeh "Perceptron learning in engineering design". Microcomputers in Civil Engng Vol. 4, pp 247, 1989.
- [224] J. Ghaboussi "An overview of the potential applications of neural networks in civil engineering". Proceedings Structures Congress ASCE Irvine, pp 1324, April 1993.
- [225] J. Ghaboussi "Applications of soft computing with neural networks in some civil engineering problems". Quadrilateral Seminar, Taejon, S. Korea, Sept 1993.
- [226] J. Ghaboussi "Current trends in neural networks research in engineering applications" NATO Adv. Rsch. Nafplio Greece, August 1994.
- [227] M. Y. Rafiq, G. Bugmann and D. J. Easterbrook "Neural network design for engineering applications". Computers and Structures, Vol. 79, pp 1541, July 2001.
- [228] Z. Waszczyszyn and L. Ziemiakimageski "Neural networks in mechanics of structures and materials – new results and prospects of applications". Computers and Structures Vol. 79, pp 2261, September 2001.
- [229] J. Kasperkiewicz, J. Racz and A. Dubrawski "HPC Strength Prediction Using Artificial Neural Network". J. Comp. in Civil Engrg. Vol. 9, pp 279 1995.
- [230] S. Lai, and M. Serra "Concrete strength prediction by means of neural network". Constr. Build. Mater. Vol. 11, pp 93, 1997.
- [231] J. W. Oh, I. W. Lee, J. T. Kim, and G. W. Lee "Application of neural networks for proportioning of concrete mixes". ACI Material Journal, Vol. 96, pp 61, 1999.
- [232] H. G. Ni, and J. Z. Wang "Prediction of compressive strength of concrete by neural networks". Cement and Concrete Research, Vol 30, pp 1245, 2000.
- [233] S. C. Lee "Prediction of concrete strength using artificial neural networks". Engng. Structure, Vol. 25, pp 849, 2003.
- [234] J. I. Kim, D. K. Kim, M. Q. Feng, and F. Yazdani "Application of neural networks for estimation of concrete strength". J. Mat. Civil Engng. Vol. 16, pp 257, 2004.

- [235] J. Ghaboussi and D. E. Sidarta "New nested adaptive neural networks (NANN) for constitutive modelling". *Computers and Geotechnics*, Vol. 22, pp 29, 1998.
- [236] Y. M. A. Hashash, S. Jung, J. Ghaboussi "Numerical implementation of a neural network based material model in finite element analysis". *International J. for Num. Meth. in Engng.* Vol. 59, pp 989, 2004.
- [237] D. K. Kim, J. J. Lee, J. H. Lee and S. K. Chang "Application of Probabilistic Neural Networks for Prediction of Concrete Strength". *J. Mat. Civil Engng.* Vol. 17, pp 353, 2005.
- [238] R. Putanowicz and Z. Waszczyszyn "Neural network identification of concrete properties". *Proceedings of the 5th International Conference on Engineering Application of Neural Networks, Warszawa*, pp 286, 1999.
- [239] J. Kaliszuk, A. Urbańska, Z. Waszczyszyn and K. Furtak "Neural analysis of concrete fatigue durability on the base of laboratory tests (in polish) ". *Proceedings of the 45th Polish Civil Engineering Conference, Krynica*, Vol. 4, pp 22, 1999.
- [240] V. A. Gotlib, T. Sato and A. I. Beltzer "Neural computing of effective properties of random composite materials". *Computers and Structures*, Vol. 79, pp 1, 2001.
- [241] E. M. R. Fairbairn, N. F. F. Ebecken, C. N. M. Paz and F. J. Ulm "Determination of probabilistic parameters of concrete: solving the inverse problem by using artificial neural networks". *Computers and Structures*, Vol. 78, pp 497, 2000.
- [242] I. Flood, L. Muszynski and S. Nandy "Rapid analysis of externally reinforced concrete beams using neural networks". *Computers and Structures*, Vol. 79, pp 1553, 2001.
- [243] H. Adeli and A. Karim "Neural Network Model for Optimization of Cold-Formed Steel Beams". *J. Struct. Engrg.* Vol. 123, pp 1535, 1997.
- [244] E. M. A. El-Kassas, R. I. Mackie and A. I. El-Sheikh "Using neural networks in coldformed steel design". *Computers and Structures*, Vol. 79, pp 1687, 2001.
- [245] A. Ibrahimbegovic and E. L. Wilson "Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields". *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 31, pp 1393-1414, 1991.
- [246] C. J. Burgoyne and M. G. Brennan "Calculation of elasto-plastic rigidities using the exact ilyushin yield surface". *Int. J. Solids Struct.*, 30 : 1133-1145, 1993.
- [247] C. J. Burgoyne and M. G. Brennan "Exact ilyushin field surface". *Int. J. Solids Struct.*, 30 :1113-1131, 1993.
- [248] M. E. Tasuji "Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading". *In ACI Journal Proceedings*, Vol. 75, No. 7, July 1978.
- [249] S. P. Timoshenko, S. W. Krieger "Theory of Plates and Shells ". *International Student Edition. Copyright 1970.*

- [250]** E. Hinton D. R. J. Owen "Finite Element Software for Plates and Shells ". Pineridge Press.
- [251]** X. P. Shi, S. A. Tan, T. F. Fwa "Rectangular thick plate with free edges on Pasternak foundation". Journal of Eng. Mechanics, Vol. 120, pp 971-988, 1994.
- [252]** G. M. Lindberg, M. D. Oison, G. R. Cowper "New developments in the finite element analysis of shells". Q. Bull. Div. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada, Vol. 4, 1969.
- [253]** E. Hognestad, N. W. Hanson & D. McHenry "Concrete stress distribution in ultimate strength design". In ACI Journal Proceedings. Vol. 52, No. 12, December 1955.
- [254]** H. Kupfer, H. K. Hilsdorf & H. Rusch "Behavior of concrete under biaxial stresses". In ACI Journal proceedings. Vol. 66, No. 8, August 1969.
- [255]** I. Imran & S. J. Pantazopoulou Plasticity model for concrete under triaxial compression. Journal of engineering mechanics, 127(3), pp 281-290, 2001.