



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques



N° d'ordre :

T H E S E

Présentée pour l'obtention du diplôme

de Doctorat en Sciences

Spécialité

Mathématiques

Option

Mathématiques

Par

ABDELAZIZ KHERNANE

Thème

Perfectionnement de certaines méthodes de calcul numérique

Soutenue le 23 / 11 /2020 devant le jury composé de :

Lakhdar DJEFFAL	Professeur	Université de Batna 2	Président
Naceur KHELIL	Professeur	Université de Biskra	Rapporteur
Mohamed BERBICHE	Professeur	Université de Biskra	Examineur
Khaled SAOUDI	MCA	Université de Khenchela	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le Tout Puissant de m'avoir permis de réaliser cet objectif. Il m'a toujours donné la force et le courage pour surmonter tous les obstacles qui se sont dressés à moi dans la vie, et ce en me guidant depuis que j'étais petit.

Je remercie infiniment mon directeur de thèse, M. Naceur Khelil de m'avoir soumis le sujet de cette thèse, et de m'avoir encouragé tout au long de ce travail.

Je remercie chaleureusement, M. Lakhdar Djefal pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Mes remerciements s'adressent aussi à M. Mohamed Berbiche et à M. Khaled Saoudi pour avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie du jury de soutenance.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes défunts parents, qui durant toutes les années que j'ai passé en leurs compagnie, n'ont cessé de m'inculquer les vertus de l'instruction et de l'éducation, pour bien se comporter dans la société, et m'ont toujours encouragé à faire ce que je souhaitais, et donner le meilleur de moi-même pour y arriver. Une grande pensée pour eux, ainsi que pour mon défunt frère. Que Dieu les accueille dans son Vaste Paradis. Ce travail est dédié à leurs mémoires.

Je remercie vivement mon épouse Salima pour sa patience, son soutien et ses encouragements tout au long de ces années de travail.

Je dois beaucoup à mes chers enfants, Sara, Mohamed El Amine et Youcef, les instigateurs de ce projet. Ils m'ont à chaque fois pousser pour aller au bout. Qu'ils soient bénis.

Je tiens à remercier mes frères, mes sœurs, mon neveu, ma nièce, ainsi que mes beaux-parents, mes beaux-frères et ma belle-sœur pour leur soutien indéfectible.

Un grand merci à M. Omar Barkat pour les nombreuses et intéressantes discussions scientifiques que nous avons eues.

Je voudrais exprimer mon amitié aux personnes avec qui j'ai eu le plaisir de partager ces années d'études.

Résumé

L'étude de l'approximation numérique de la contrôlabilité exacte pour les systèmes hyperboliques et paraboliques passe par la résolution numérique d'une équation. Elle consiste à proposer pour sa résolution, des méthodes issues du calcul numérique.

Une fois les résultats de l'étude sont insatisfaisants, des méthodes numériques perfectionnistes sont introduites en vue de leurs améliorations.

Ce travail étudie l'approximation numérique de la contrôlabilité exacte par le bord d'un système, qui n'est ni hyperbolique, ni parabolique, à travers l'implémentation numérique de la méthode d'unicité hilbertienne.

Cette étude se base sur la connaissance du comportement asymptotique du contrôle gouvernant le système au temps T . Le développement de cette idée permet de proposer, dans une première phase, une méthode déterministe de résolution d'un problème d'optimisation, qui s'inscrit dans le cadre de l'approximation numérique du contrôle par le bord pour l'équation de la poutre vibrante. Plus précisément, un contrôle approximatif va être trouvé qui ramène le système considéré au repos au temps T , avec une estimation de l'erreur d'état final, par l'utilisation de la méthode des différences finies symétriques.

Dans une deuxième phase, le calcul de la valeur de l'erreur d'état final est amélioré par l'utilisation de la métaheuristique d'optimisation par essaim de particules. Cette approche non déterministe perfectionne la méthode de calcul numérique introduite dans la première phase.

Mots-clés : contrôlabilité exacte, équations aux dérivées partielles, contrôle par le bord, équation de la poutre, comportement asymptotique, approximation numérique, méthode des différences finies, métaheuristiques, optimisation par essaim de particules.

ملخص

تتطلب دراسة التقريب العددي للتحكم الدقيق لأنظمة القطع الزائد والقطع المكافئ حل معادلة عددية . يقترح لحلها طرق مستمدة من الحساب العددي، حيث أنه بمجرد أن تكون نتائج الدراسة السالفة الذكر غير مرضية بالشكل المطلوب، يتحتم علينا إيجاد طرق عددية مناسبة لتجويدها.

يدرس عملنا هذا التقريب العددي للتحكم الحدودي الدقيق لنظام لا هو قطع مكافئ ولا هو قطع زائد وذلك بواسطة الإسقاط العددي لطريقة الوجدانية الهلبارتية.

بشكل عام تستند هذه الدراسة إلى معرفة السلوك التقاربي للتحكم الذي يقود النظام في الوقت T .

إن تطوير هذه الفكرة يسمح كمرحلة أولى، باقتراح طريقة حتمية لحل مشكلة التجويد والتي يمكن اعتبارها كجزء من التقريب العددي لعنصر التحكم الحدودي لمعادلة العارضة الاهتزازية. بدقة أكبر، سيتم البحث على تحكم تقريبي يجعل النظام المعتبر في حالة توازن في الوقت T ، مع تقدير الخطأ الناجم في الحالة النهائية وذلك باستخدام طريقة الفروقات المنتهية التناظرية. في مرحلة ثانية، يسمح بحساب قيمة الخطأ للحالة النهائية و الذي يتم تطويره باستخدام التجويد وهذا باستعمال سرب من الجسيمات. هذه المقاربة غير القطعية تسمح بتجويد طريقة الحساب العددي المقدمة في المرحلة الأولى.

الكلمات المفتاحية: التحكم الدقيق، المعادلات التفاضلية الجزئية، التحكم الحدودي، معادلة العارضة، السلوك التقاربي، التقريب العددي، طريقة الفروقات المنتهية، الطرق التقريبية العامة، التجويد باستعمال سرب من الجسيمات.

Abstract

The study of the numerical approximation of the exact controllability for hyperbolic and parabolic systems requires the numerical resolution of an equation. It consists in proposing for its resolution, methods derived from numerical calculation.

Once the results of the study are unsatisfactory, perfectionist numerical methods are introduced for their improvement.

This work studies the numerical approximation of the exact boundary controllability for a system, which is neither hyperbolic nor parabolic, through the implementation of the Hilbert's uniqueness method.

This study is based on the knowledge of asymptotic control behavior governing the system at time T . The development of this idea makes it possible to propose, in a first phase, a deterministic method of solving an optimization problem, which is part of the numerical approximation of the boundary control for the vibrating rod equation. More precisely, an approximate control shall be found which returns the system under consideration to rest at time T , with an estimation of the final state error, by the use of the symmetric finite difference method.

In a second phase, the calculation of the final state error value is improved using the particle swarm optimization algorithm. This non deterministic approach improves the numerical calculation method introduced in the first phase.

Keywords : exact controllability, partial differential equations, boundary control, rod equation, asymptotic behavior, numerical approximation, finite difference method, metaheuristics, particle swarm optimization.

Table des matières

Introduction Générale	3
1 Introduction à l'optimisation	11
1.1 Introduction	11
1.2 Classification des problèmes d'optimisation	12
1.3 Notions de base	12
1.3.1 Formulation	12
1.3.2 Propriétés caractéristiques d'un problème d'optimisation	14
1.4 Optimisation linéaire	18
1.4.1 Modélisation	18
1.5 Exemples	19
1.5.1 Optimisation sans contraintes	19
1.5.2 Optimisation non linéaire avec contraintes	19
1.5.3 Résolution du problème d'optimisation linéaire	19
2 Etude théorique des problèmes de la contrôlabilité	21
2.1 Introduction	21
2.2 Contrôlabilité des équations aux dérivées partielles linéaires	22
2.2.1 Contrôlabilité par le bord de l'équation des ondes	22
2.2.2 Contrôlabilité à zéro par le bord de l'équation des ondes	24
2.2.3 Contrôlabilité approchée par le bord de l'équation des ondes	26
2.2.4 Contrôlabilité par le bord de l'équation de la chaleur	27
2.2.5 Contrôlabilité exacte par le bord de l'équation des plaques vibrantes	28
3 Méthodes déterministes et perfectionnistes	33
3.1 Introduction	33
3.2 Approximation de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes	34
3.3 Approximation de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur	36
3.4 Approximation du contrôle exact par le bord de l'équation de la poutre vibrante	36
3.4.1 Exposé du problème	36
3.4.2 Formulation du problème	37
3.4.3 Choix du contrôle	38
3.4.4 Présentation de la méthode de résolution	39
3.4.5 Méthode déterministe de résolution	41
3.5 Essais numériques	44
3.6 Amélioration de l'erreur d'état final	46

3.6.1 Optimisation par essaim de particules	46
3.6.2 Discussion	49
Conclusion Générale	51
Bibliographie	52

Introduction Générale

Avant toute chose, commençons par justifier le choix du thème de la thèse et l'importance de son étude.

On s'intéresse aux différentes méthodes numériques proposées dans la littérature scientifique et à leurs perfectionnement pour l'approximation numérique du problème de la contrôlabilité exacte frontière, lorsque le contrôle est de type Dirichlet.

Cette étude a vu le jour durant les années 1990 par une série de publications dans le cadre de l'équation des ondes [18, 21], à travers l'implémentation numérique de la méthode d'unicité hilbertienne (de l'anglais HUM : Hilbert Uniqueness Method) de J.L. Lions. Elle consiste à résoudre numériquement une équation, elle même équivalente à la résolution d'un problème d'optimisation (Nous allons nous étendre sur cette étude dans le chapitre 3).

L'utilisation de l'algorithme du gradient conjugué a permis de résoudre numériquement l'équation en question avec en prime des résultats insatisfaisants [18, 21]. Dans le cadre de l'amélioration des résultats, différentes approches numériques et perfectionnistes ont été diffusées dans la littérature, on peut citer entre autres la régularisation de Tychonov [21], l'analyse spectrale [22] et la régularisation de maillage (un algorithme à deux grilles) [23].

D'autre part, et comme la résolution numérique de l'équation en question revient à résoudre un problème de minimisation, cette caractérisation a été exploitée dans [25]. Une fois que le problème de minimisation discrétisée, deux méthodes sont présentées pour sa résolution. La première est basée sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange, quant à la deuxième, elle transforme le problème d'optimisation contraint en un problème d'optimisation non contraint résolu par la méthode du gradient conjugué. Cette approche a permis de trouver des résultats meilleurs, améliorant encore dans une certaine manière les résultats déjà trouvés précédemment. Nous y reviendrons dans le chapitre 3 quant à la discussion de ces différentes méthodes.

Toutes ces études numériques concernent les systèmes hyperboliques.

Pour les systèmes paraboliques, voir [4] pour l'étude théorique et [10] pour l'approximation numérique.

Notons que toutes les méthodes numériques proposées pour l'approximation numérique du problème de la contrôlabilité exacte sont déterministes.

Constatant que dans la littérature scientifique, les auteurs proposent à chaque fois de nouvelles méthodes numériques et ce dans le but d'améliorer les résultats trouvés précédemment. Ceci nous amène à dire que le perfectionnement d'une méthode numérique passe par l'amélioration des résultats du point de vue convergence. Dans ce contexte, une idée surgit, et qui consiste à utiliser des méthodes non déterministes (stochastiques) pour arriver au but escompté, d'autant plus que ces dernières années a vu leur utilisation s'accroître dans la résolution des problèmes d'optimisation. Cette idée va être exploitée dans le cadre de notre travail.

Dans ce qui suit, on essaye de mettre en valeur l'importance de l'optimisation dans notre quotidien.

De nos jours, les mathématiques appliquées sont devenues une partie incontournable à tout savoir mathématique se transmettant à n'importe quel domaine. Parmi ces domaines, il y a l'optimisation, branche des mathématiques et de l'informatique en tant que disciplines, cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer quelles sont la ou les solution(s) satisfaisant un objectif quantitatif tout en respectant d'éventuelles contraintes.

L'optimisation joue un rôle important en recherche opérationnelle (domaine à la frontière entre l'informatique, les mathématiques et l'économie), en analyse, en analyse numérique et en théorie de contrôle.

La recherche dans ce domaine est intense : non seulement de nouveaux problèmes sont traités mais les questions classiques sont toujours d'actualité, les méthodes sont améliorées, des procédés nouveaux sont découverts. . . et il en résulte une meilleure précision pour des temps de calcul plus courts et un encombrement mémoire réduit. Ainsi des problèmes considérés, jadis comme impossible à traiter par la complexité ou la durée des calculs sont maintenant abordés.

On peut distinguer deux modes de recherche de l'optimum : déterministe et stochastique.

Un mode de recherche déterministe trouve toujours le même optimum si les condi-

tions initiales et les paramètres de contrôle de l'algorithme sont identiques, donc s'il ne laisse aucune place au hasard. Un mode de recherche stochastique utilise des mécanismes de transitions probabilistes qui peuvent conduire à des résultats différents pour des conditions initiales et des paramètres de contrôle identiques. Selon le mode de recherche utilisé, les méthodes de résolution de problèmes d'optimisation sont classées entre méthodes déterministes et stochastiques (non déterministes).

Les méthodes déterministes utilisent essentiellement des opérateurs d'exploitation alors que les méthodes stochastiques reposent principalement sur l'exploration.

De nombreux algorithmes déterministes existent dans la littérature tant pour l'optimisation sans contraintes qu'avec contraintes.

Commençons par donner un bref aperçu historique sur ce domaine se rapportant au 20^{ème} siècle. Le premier algorithme à avoir vu le jour est celui du mathématicien Leonid Kantorovitch en 1939. Celui-ci a développé un algorithme pour la programmation linéaire afin d'en tirer des applications concrètes à l'optimisation de la production économique planifiée de l'ex Union Soviétique. En 1947, George Dantzig a inventé l'algorithme du simplexe pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à grande échelle. En 1951, H.Kuhn et A.W. Tucker ont étudié l'optimisation non linéaire et ont développé les conditions d'optimalité, qui sont en fait la généralisation des multiplicateurs de Lagrange aux inégalités non linéaires, connues maintenant comme les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, ou simplement les conditions de Kuhn-Tucker, qui sont des conditions nécessaires pour qu'une solution soit optimale dans la programmation non linéaire. Puis, en 1957, Richard Bellman de l'Université de Stanford a développé la programmation dynamique et le principe d'optimalité. Après les années 1960, une avancée considérable a été constatée dans le domaine de l'optimisation.

La plupart des algorithmes classiques sont déterministes. Ce sont des méthodes à direction de descente qui ont besoin de l'information du gradient de la fonction objectif pour la recherche de l'optimum du problème posé. Parmi ces méthodes, il y a l'algorithme du gradient [48]. Il désigne un algorithme d'optimisation différentiable. Il est itératif et procède donc par des améliorations successives. Au point courant un déplacement est effectué dans la direction opposée au gradient de manière à faire décroître la fonction. Cet algorithme utilise la direction du gradient.

En analyse numérique, la méthode du gradient conjugué [2, 34] qui est théoriquement une méthode directe est en fait utilisée comme une méthode itérative. Il s'agit d'un algorithme pour résoudre des systèmes d'équations dont la matrice est symétrique

définie positive. L'idée de la méthode est de construire des directions mutuellement conjuguées. Le choix correct des directions conjuguées permet de considérer la méthode du gradient conjugué comme une méthode itérative. Ce choix permet ainsi de considérer la résolution de systèmes de grande taille, où le calcul de l'ensemble des directions aurait été très long. Cet algorithme utilise la direction du gradient conjugué. Cette méthode a été l'origine de la première implémentation numérique de la méthode d'unicité Hilbertienne de J.L Lions vers les années 90. S'ensuivirent d'autres pour son perfectionnement. On les verra au chapitre 3.

La méthode de Newton (ou méthode de Newton-Raphson) [7] est un algorithme efficace pour résoudre une équation non linéaire et même un système d'équations non linéaires. Cet algorithme utilise la direction de newton.

La méthode de Quasi-Newton [7] est une méthode numérique utilisée pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires. Cette méthode remplace la méthode de Newton lorsque la dimension du système est grande car le calcul de la matrice Jacobienne peut prendre beaucoup de temps. Cette méthode utilise la direction de Quasi-Newton.

Pour les méthodes déterministes qui traitent les problèmes contraints, l'algorithme du simplexe [7] en est la parfaite illustration. Il s'agit d'un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a beaucoup contribué au démarrage de l'optimisation numérique.

Une approche possible pour résoudre des problèmes non linéaires contraints est de les convertir en une série de problèmes non contraints, c'est la méthode de pénalité [48], qui consiste à introduire les contraintes dans l'objectif sous forme de pénalités qui pénalisent l'infaisable. Cependant, il y a une méthode plus générale qui utilise les multiplicateurs de Lagrange [48] pour convertir le problème non linéaire contraint à un problème non contraint, généralement plus facile à résoudre. Enfin, les conditions de Kuhn-Tucker [48] permettent de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalité non linéaires.

Les méthodes stochastiques sont classées en deux catégories : les heuristiques et les métaheuristiques.

Le mot heuristique a son origine dans l'ancien mot grec *heuriskein*, qui signifie l'art de découvrir de nouvelles stratégies (règles) pour résoudre un problème posé. Ce qui nous amène à dire qu'une heuristique est une méthode de résolution spécifique à un problème donné. Le suffixe méta, aussi mot grec, qui signifie la "méthodologie

de niveau supérieur” en anglais (upper level methodology), ce qui nous permet de dire que les métaheuristiques sont des algorithmes polyvalents qui peuvent être appliqués pour résoudre de nombreux problèmes d’optimisation. Elles se comportent comme des algorithmes de recherche, tentant d’apprendre les caractéristiques d’un problème afin d’en trouver une approximation de la meilleure solution.

La plupart des métaheuristiques sont inspirées de systèmes naturels, nous pouvons citer entre autres : les algorithmes génétiques (de l’anglais GA : Genetic Algorithms) [24, 27, 48] qui sont inspirés de l’évolution biologique des espèces, les algorithmes basés sur l’intelligence par essaim, comme l’algorithme des colonies de fourmis (de l’anglais ACO : Ant Colony Optimization) [15, 48], l’algorithme des colonies d’abeilles artificielles (de l’anglais ABC : Artificial Bee Colony) [28, 48], ainsi que l’algorithme d’optimisation par essaim de particules (de l’anglais PSO : Particle Swarm Optimization) [29, 16, 48] et qui s’inspirent de l’éthologie, science étudiant le comportement des animaux évoluant en groupe.

Les méthodes d’optimisation basées sur l’intelligence par essaim sont devenues ces dernières années très populaires. Un système en essaim est un système qui doit son intelligence à la coopération d’éléments qui, individuellement sont de faible intelligence. La performance du système entier est supérieure à la somme des performances de ses parties : comme le cas des oiseaux et des poissons qui se regroupent en essaim pour faire face aux prédateurs ou pour rechercher la nourriture, les fourmis qui se regroupent pour construire leurs nids, rechercher la nourriture et élever les larves, des abeilles qui vivent en colonies dont les membres œuvrent pour le bien du groupe.

Dans la classe des métaheuristiques basées sur l’intelligence par essaim, PSO est la principale métaheuristique pour la résolution des problèmes d’optimisation continus (Nous allons revenir sur cette métaheuristique dans le chapitre 3).

L’étude d’autres phénomènes réels sont à la base de la naissance d’autres métaheuristiques, on peut citer entre autres l’algorithme du feu d’artifices (de l’anglais FWA : Fireworks Algorithm) [46, 47] et l’algorithme de pollinisation des fleurs (de l’anglais FPA : Flower Pollination Algorithm) [49].

Différents chercheurs ont utilisé dans leurs travaux l’intelligence par essaim pour optimiser les fonctions tests [48] existantes dans la littérature et d’en comparer expérimentalement les résultats trouvés avec ceux obtenus par d’autres métaheuristiques et ce en terme de vitesse de convergence et de précision globale.

L’objectif de cette thèse est de proposer ; dans une première phase, une méthode

déterministe de résolution d'un problème d'optimisation, qui s'inscrit dans le cadre de l'approximation du contrôle exact par le bord de l'équation de la poutre vibrante avec une estimation de l'erreur d'état final. Dans le but de réaliser notre objectif, nous avons commencé nos recherches par une phase de récoltes d'informations et de connaissances dans le domaine de la contrôlabilité, suivie des études existantes dans la littérature concernant l'approximation numérique du contrôle exact, dans le cadre de l'équation des ondes et des différentes études qui suivirent pour son perfectionnement.

Dans une deuxième phase, nous avons essayé d'améliorer les résultats trouvés par la méthode de calcul numérique introduite dans la première phase et ce par le biais de la métaheuristique PSO, qui a prouvé sa simplicité et sa performance. Notre travail s'est basé sur l'amélioration du calcul de l'erreur d'état final dans le problème de l'approximation numérique du contrôle exact par le bord de l'équation de la poutre vibrante.

Rappelons que le système considéré n'est ni hyperbolique, ni parabolique.

Notre travail de thèse se présente en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous abordons quelques notions de base en optimisation. Nous présentons des définitions de notions confrontées souvent dans le domaine de l'optimisation. Nous donnons les différents types d'optimisation existant dans la littérature. Enfin, nous tentons d'élucider le principe de quelques problèmes d'optimisation à travers quelques exemples.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'étude de la théorie de la contrôlabilité frontière de quelques équations aux dérivées partielles linéaires. Plus précisément dans le cadre de l'équation des ondes, de l'équation de la chaleur et de l'équation des plaques vibrantes et ce, pour des contrôles de type Dirichlet.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les résolutions explicites du problème de la contrôlabilité exacte frontière dans le cadre de l'équation des ondes, faites par des approches déterministes existantes dans la littérature. Ensuite, nous présentons dans le même cadre, les méthodes numériques déterministes et perfectionnistes servant à l'amélioration des résultats précédents. A la fin de ce chapitre, nous présentons notre contribution. Nous dévoilons d'abord la méthode déterministe servant à approximer le contrôle exact par le bord de l'équation de la poutre vibrante. Nous commençons par expliquer son principe, ensuite le cheminement conduisant à l'approximation du contrôle avec une estimation de l'erreur d'état final. Ensuite, nous présentons la métaheuristique PSO servant à l'amélioration

du calcul de la valeur de l'erreur d'état final, en mettant en valeur l'absence de comparaison entre cette métaheuristique et d'autres métaheuristicues comme par exemples ABC, FWA et FPA. Enfin, nous présentons et discutons nos résultats expérimentaux.

A la fin de cette thèse, nous présentons une conclusion générale et les perspectives de travaux de recherche futurs.

1 Introduction à l'optimisation

1.1. Introduction

L'optimisation est un paradigme présent dans tous les aspects de la vie. Le besoin d'optimiser découle directement du besoin d'organiser. Optimiser consiste à identifier, dans un contexte bien défini une configuration optimale, ou un optimum d'un système, jugé le mieux adapté à un problème au regard des circonstances données.

Dans le contexte du développement technologique et de l'innovation, l'optimisation décrit la recherche de techniques qui font une meilleure utilisation des ressources disponibles pour résoudre les problèmes posés [48].

Les applications scientifiques et d'ingénierie nécessitent régulièrement des algorithmes pour localiser et affiner la solution optimale [20].

Dans le cadre d'une démarche scientifique, comment peut-on juger que l'état est favorable et comment peut-on décrire formellement les circonstances ?

La réponse à ces questions, donnée dans [7] constitue une étape essentielle à toute optimisation : la modélisation mathématique. Elle consiste en trois étapes :

- (i) Identification des variables de décision, i.e les composantes du système concerné sur lesquelles il est possible d'agir afin d'améliorer son fonctionnement.
- (ii) Définition d'une fonction objectif permettant d'évaluer l'état du système (ex : rendement, performance ...)
- (iii) Description mathématiques des circonstances, ou contraintes imposées aux variables de décision.

Le problème d'optimisation consiste alors à déterminer les variables de décision conduisant aux meilleures conditions de fonctionnement du système (ce qui revient à minimiser ou à maximiser la fonction objectif tout en respectant les contraintes d'utilisation définies à l'étape 3).

Formellement, l'optimisation est l'étude des problèmes qui s'expriment sous la forme suivante :

Minimiser $f(x)$ sous la contrainte $x \in \Omega$.

On dit que l'on cherche à minimiser la fonction f sur l'ensemble Ω .

La fonction f porte le nom de fonction objectif (ou coût ou critère ou économique). L'ensemble Ω est appelé ensemble admissible (ou réalisable).

1.2. Classification des problèmes d'optimisation

L'optimisation [48] est découpée en sous disciplines qui se chevauchent, suivant la forme de la fonction objectif et celle des contraintes : l'optimisation en dimension finie ou infinie (on parle ici de la dimension de l'espace vectoriel des variables à optimiser), l'optimisation numérique (optimisation continue) : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, l'optimisation discrète (ou combinatoire) : Ω fini ou dénombrable, la théorie de contrôle : Ω est l'ensemble des fonctions, l'optimisation stochastique : données aléatoires, l'optimisation non linéaire : la fonction objectif ou les contraintes ou les deux contiennent des parties non linéaires, éventuellement non convexes, l'optimisation convexe : f et Ω convexes, l'optimisation différentiable : f est différentiable et Ω est défini par des fonctions différentiables.

Dans l'optimisation discrète, on distingue la programmation linéaire et la programmation linéaire en nombres entiers.

La programmation linéaire (ou optimisation linéaire) [17] étudie le cas où la fonction objectif et les contraintes caractérisant l'ensemble Ω sont linéaires.

La programmation linéaire en nombre entiers (ou optimisation linéaire en nombre entiers) [9] étudie les problèmes d'optimisation linéaire dont lesquels certaines ou toutes les variables sont contraintes de prendre des valeurs entières.

1.3. Notions de base

Dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement à l'optimisation en dimension finie. Néanmoins, le lecteur pourra consulter [13] pour l'optimisation en dimension infinie.

1.3.1. Formulation

Comme déjà mentionné dans la section (1.1), un problème d'optimisation peut s'écrire sous la forme générique suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ sous la contrainte : } x \in \Omega \quad (1.1)$$

où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. La fonction $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction objectif. L'ensemble Ω est appelé ensemble des contraintes. Le problème (1.1) est dit réalisable si $\Omega \neq \emptyset$.

En optimisation, on peut avoir fréquemment un cas où Ω est défini par des égalités et des inégalités :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0, \psi(x) \leq 0\},$$

où $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

L'écriture $\phi(x) = 0$ représente m contraintes d'égalités :

$$\phi_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

De même $\psi(x) \leq 0$ représente p contraintes d'inégalités :

$$\psi_k(x) \leq 0, k = 1, 2, \dots, p.$$

Dans ce cas, on dit qu'il s'agit d'un problème d'optimisation à n variables de décision, m contraintes d'égalités et p contraintes d'inégalités.

Résoudre (1.1) revient à chercher des points de minimum local (ou global) au sens de la définition suivante :

Définition 1.1. (*Minimum local / Minimum global*)

(i) $x^* \in \Omega$ est un minimum local s'il existe un voisinage de x^* noté $V(x^*)$ tel que :

$$\forall x \in V(x^*) \Rightarrow f(x^*) \leq f(x). \quad (1.2)$$

On dit alors que $f(x^*)$ est un minimum local de f sur Ω .

(ii) $x^* \in \Omega$ est un minimum global si

$$\forall x \in \Omega; f(x^*) \leq f(x). \quad (1.3)$$

On dit alors que $f(x^*)$ est un minimum global de f sur Ω .

Si dans la définition ci-dessus, on remplace $\leq$ par $<$, alors on aura un minimum local strict et un minimum global strict respectivement.

Strictement parlant, un problème d'optimisation n'est résolu que si un minimum global est déterminé. Cependant les minimums globaux sont en général difficiles à déterminer. Par conséquent, en pratique, on se contente de déterminer des minimums locaux.

Remarque 1.1. Bien sûr, la qualité du minimum local dépend de la taille du voisinage V . Si $\Omega = V$, alors le minimum local est un minimum global.

Remarque 1.2. Résoudre un problème de maximisation est équivalent à résoudre un problème de minimisation, i.e $\max_{x \in \Omega} f(x) = -\min_{x \in \Omega} (-f(x))$. On peut donc se concentrer uniquement sur les problèmes de minimisation.

Proposition 1.1. (i) Si x^* est un minimum global, alors c'est un minimum local.

(ii) Si on connaît tous les minimums locaux, alors le plus petit est le minimum global.

Le problème considéré dans cette section est la forme générale d'un problème d'optimisation avec contraintes car les variables de décision sont dans l'ensemble des contraintes Ω .

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors on se réfère à un problème d'optimisation sans contraintes.

Dans la section suivante, on s'intéresse à l'optimisation différentiable et non linéaire. Pour cela, on essaye de voir l'existence de solution du problème posé et la possibilité de la caractériser, en incluant le cas non contraint, c'est-à-dire le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Pour l'étude du cas où Ω est constitué par des contraintes fonctionnelles, voir [2]. Quant au cas linéaire, voir [17].

1.3.2. Propriétés caractéristiques d'un problème d'optimisation

On peut retenir comme principe général que la compacité fournit des résultats d'existence et la convexité un cadre favorable pour l'unicité.

Existence d'une solution

Théorème 1.1 (Weirstrass). [7] Soit Ω un sous-ensemble fermé et non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement en chaque point de Ω . Alors, si Ω est compact ou si f est coercive, il existe $x^* \in \Omega$ tel que :

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x).$$

Exemple 1.1. (i) Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.

Soit $\Omega = [0, 1]$. Il est clair que le minimum est atteint en zéro et que $\min_{x \in \Omega} f(x) = 0$. Ω est bien un compact. Les conditions du théorème sont bien vérifiées.

(ii) Par contre, si on étudie la même fonction mais cette fois-ci sur $\Omega =]0, 1]$. On a aussi $\min_{x \in \Omega} f(x) = 0$, mais le minimum n'est pas atteint. Autrement

dit,

$$\nexists x^* \in \Omega \text{ tel que } f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x).$$

Ici les conditions du théorème ne sont pas vérifiées. Ω n'est pas un compact.

Remarque 1.3. Pour l'unicité, il faut utiliser des propriétés propres à la fonction objectif, comme la stricte convexité par exemple.

Conditions d'optimalité

Compte tenu, que dans un problème d'optimisation avec contraintes Ω , le minimum peut se trouver à l'intérieur ou à la frontière de Ω . Pour étudier le cas où il se trouve à la frontière, on a besoin de connaître la notion de direction admissible.

Définition 1.2. (direction admissible) [7] Un vecteur $d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$ est une direction admissible en un point $x \in \Omega$ s'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$x + \alpha d \in \Omega, \forall \alpha \in [0, \eta].$$

Définition 1.3. (Gradient) [48] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. le gradient de f noté ∇f est défini par :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2. Soit $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 7x_2 - x_1x_2 + x_1^2 - 3x_2^2$. Alors :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4 - x_2 + 2x_1 \\ 7 - x_1 - 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.4. (Dérivée directionnelle) [7] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La dérivée directionnelle de f dans la direction d au point x est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial d}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x+hd] - f(x)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + hd) \big|_{h=0} \cdot d_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x + hd) \big|_{h=0} \cdot d_n \\ &= \nabla f(x)^T \cdot d = d^T \cdot \nabla f(x) = \langle \nabla f(x), d \rangle. \end{aligned}$$

Remarque 1.4. (i) Les dérivées partielles de f sont les dérivées directionnelles dans la direction des différents axes de coordonnées, et $\frac{\partial f}{\partial x_i} = e_i^T \cdot \nabla f(x)$, où e_i est la colonne i de la matrice identité, i.e un vecteur composé de 0 sauf à la ligne i qui vaut 1.

(ii) La dérivée directionnelle donne des informations sur la pente dans la

direction d , tout comme la dérivée donne des informations sur la pente d'une fonction à une variable. Notamment la fonction est croissante dans la direction d si la dérivée directionnelle est strictement positive et décroissante si elle est strictement négative.

Définition 1.5. (Direction de descente) [7] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soient $x, d \in \mathbb{R}^n$. La direction est une direction de descente si : $d^T \cdot \nabla f(x) < 0$

Remarque 1.5. Parmi toutes les directions de descente existantes en un point x donné, une des plus remarquables est celle où la pente est la plus forte, c'est-à-dire selon le gradient. pour le démontrer, il suffit de comparer les dérivées directionnelles. Voir pour cela [11].

Théorème 1.2. (Direction de la plus forte descente) [7] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour toute direction d de norme constante égale à $\|d\| = \|\nabla f(x)\|$, on a :

$$(-\nabla f(x))^T \cdot \nabla f(x) \leq d^T \nabla f(x).$$

La direction $d^* = -\nabla f(x)$ est appelée direction de plus forte descente.

Corollaire 1.1. [7] Le vecteur $\nabla f(x)$ est appelé direction de plus forte pente de f au point $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.6. Si x^* est un point minimum local de f , alors il n'existe aucune direction de descente pour f au point x^* .

Théorème 1.3. (Condition nécessaire du premier ordre) [11]

Soient $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$.

Si f a un minimum local en $x^* \in \Omega$, alors, quelque soit d admissible en x^* ,

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0.$$

Corollaire 1.2. (Cas du point intérieur.) [11] Soient $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$.

Si x^* minimise f localement et si x^* est un point intérieur de Ω , alors

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Dans ce cas, x^* est dit point stationnaire ou critique.

Théorème 1.4. (Condition nécessaire du second ordre) [11] Soient $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$.

f atteint un minimum local en x^* et d une direction admissible en x^* .

Si $d^T \nabla f(x^*) = 0$, alors $d^T H(x^*) \cdot d \geq 0$ où H est la matrice Hessienne (dite aussi Jacobienne) de f définie par :

$$H(x^*) = \nabla(\nabla^T f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Corollaire 1.3. (Cas du point intérieur) [11] Soient $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$. Si x^* est un point intérieur de Ω et x^* minimise f , alors :
 $\nabla f(x^*) = 0$ et $H(x^*)$ est semie définie positive.

Théorème 1.5. (Conditions suffisantes) [11] Soient $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$ et x^* un point intérieur de Ω .
 Si $\nabla f(x^*) = 0$ et $H(x^*)$ est définie positive, alors x^* est un minimum local au sens strict de f

Théorème 1.6. (Condition nécessaire et suffisante, cas convexe) [11] Soient $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe. Alors f a un minimum global en $x^* \in \Omega$

(i) si et seulement si $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$, $\forall x \in \Omega \iff d^T \nabla f(x^*) \geq 0$, quelque soit la direction admissible d

(ii) si et seulement si $\nabla f(x^*) = 0$ si x^* est un point intérieur de Ω .

Exemple 1.3. (i) $f(x) = x^3$.

On a : $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$. Les conditions nécessaires sont vérifiées, mais $x = 0$ ne minimise pas f .

(ii) $f(x) = x_1^2 - x_2^2$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$, $\nabla f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On remarque que $H(x)$ est indéfini. D'où les conditions nécessaires du second ordre ne sont pas vérifiées.

Il y a donc un point selle [17].

(iii) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$, $\nabla f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque que $H(x) > 0$. D'où l'existence d'un minimum local strict.
 f est convexe. D'où l'existence d'un minimum global au sens strict.

1.4. Optimisation linéaire

L'optimisation linéaire [17] forme une classe importante de problèmes d'optimisation avec contraintes.

1.4.1. Modélisation

Un industriel fabrique deux types de produits P_1 et P_2 à l'aide de deux matières premières M_1 et M_2 qu'il vend avec des bénéfices valant respectivement 5 et 4 (en milliers de dinars). Le produit P_1 nécessite 6 unités de M_1 et une unité de M_2 . Le produit P_2 nécessite 4 unités de M_1 et deux unités de M_2 . L'industriel ne doit pas utiliser plus de 24 unités de M_1 et 6 unités de M_2 . Combien de produits de chaque type l'industriel doit-il fabriquer pour maximiser son profit ?

Commençons par trouver le modèle mathématique du problème posé.

- (i) Choix des variables de décision :

Soient x_1 le nombre de produits P_1 et x_2 le nombre de produits P_2

- (ii) Formulation des contraintes

Etant donné les réserves de l'industriel, les contraintes suivantes devront être satisfaites :

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- (iii) Détermination de l'objectif :

La fonction objectif f correspond au bénéfice net total : $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$. On cherche donc $\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$

En résumé, le problème se modélise sous la forme d'un programme linéaire :

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2 .$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.5. Exemples

1.5.1. Optimisation sans contraintes

- (i) Cherchons le minimum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 6.$$

On sait que l'optimum se produit lorsque $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^* = \frac{1}{2}$.

On outre, on a : $f''(x) = 2 > 0$. Cet optimum est un minimum et on a :

$$f_{\min}(\frac{1}{2}) = -\frac{25}{4}$$

- (ii) Cherchons le minimum de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2.$$

Pour cela, on calcule les dérivées partielles de g .

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2(1 - x) - 400(y - x^2)x \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 200(y - x^2)$$

En imposant : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$, on aura :

$$-2(1 - x) - 400(y - x^2)x = 0 \quad \text{et} \quad 200(y - x^2) = 0$$

La deuxième équation donne $y = x^2$.

En remplaçant y par x^2 dans la première équation, on aura :

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

D'où $g_{\min} = 0$ au point $(1, 1)$

- (iii) Cherchons le minimum global de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Comme $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, alors $f_{\min} = 0$ au point $(0, 0)$.

1.5.2. Optimisation non linéaire avec contraintes

Etant donné le problème non linéaire suivant :

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

la solution de ce problème est : $(x_1, x_2) = (2, 6)$ pour laquelle $\max f(x_1, x_2) = 36$

1.5.3. Résolution du problème d'optimisation linéaire

Le problème exposé dans la section 1.4.1 est de dimension deux. Il peut donc être résolu graphiquement.

Chaque contrainte peut-être représentée par une droite.

La fonction objectif représente un ensemble de droites parallèles car elles ont le même coefficient directeur et qui vaut : $\frac{-5}{4}$.

La solution optimale représente le sommet du polygone borné, c'est-à-dire le point $(x_1 = 3, x_2 = 1, 5)$ avec un profit de 21000 dinars.

Remarque 1.7. *Ce problème peut-être résolu par la méthode de simplexe.*

2 Etude théorique des problèmes de la contrôlabilité

2.1. Introduction

La contrôlabilité étudie l'influence du contrôle sur la dynamique du système. Elle revêt une importance particulière dans la théorie mathématique de contrôle.

Son histoire a commencé dans le cas de la dimension finie avec les systèmes différentiels [50, 8]. Comme exemples typiques, on peut citer un manche de balai que l'on tient au dessus de son index, le contrôle étant la force appliquée par l'index sur ce manche ; un chariot de supermarché, le contrôle étant les forces que l'on applique sur la barre du chariot avec nos deux mains. L'état du système dans ces deux exemples est la position et la vitesse. Il n'a qu'un nombre fini de composantes, c'est pour cela qu'on dit qu'il de dimension finie.

Lorsque le système est modélisé par des équations aux dérivées partielles, on dit dans ce cas qu'il est de dimension infinie. On peut citer comme exemples, un bac avec de l'eau dedans, le contrôle dans ce cas est la force appliquée au bac ; l'eau dans les rivières, le contrôle dans ce cas est le mouvement des portes aux extrémités des biefs ; ou la conduite d'une voiture avec comme contrôle l'angle du volant, les pressions exercée sur le frein et sur l'accélérateur et, l'état est la position de la voiture sur la route. On s'intéressera à cette modélisation car le système considéré dans notre étude en fait partie.

De façon brève, le problème de la contrôlabilité est le suivant : en partant d'un état initial arbitraire, on peut atteindre par l'intermédiaire d'un contrôle dépendant du temps, appartenant à un espace fonctionnel déterminé, un état final arbitraire aussi.

Trois notions de contrôlabilité se dégagent dans la littérature : la contrôlabilité approchée (ou approximative) ; la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité à zéro (ou nulle contrôlabilité).

La contrôlabilité approchée permet de ramener le système dynamique vers un petit voisinage arbitraire de l'état final, tandis que la contrôlabilité exacte signifie que le système dynamique peut-être ramené vers un état final arbitraire. Lorsque le système est ramené à l'état d'équilibre, on dit qu'il y a contrôlabilité à zéro (ou nulle contrôlabilité).

Il est à noter que ces notions sont équivalentes dans le cas de dimension finie [12].

L'extension à la dimension infinie à connu plusieurs temps. Le premier a concerné la contrôlabilité approchée, en particulier dans le cas parabolique, qui revient essentiellement à démontrer des résultats d'unicité. La théorie de contrôlabilité exacte et de la nulle contrôlabilité se sont ensuite développées. La nulle contrôlabilité de l'équation de la chaleur a été obtenue dans les années 70' mais seulement en dimension une par l'intermédiaire de la méthode des moments [8]. Les résultats en dimension supérieure à 1 ont été obtenues dans les années 95' grâce aux inégalités de Carleman [8]. Ces années aussi ont été marquées par le point fort suivant : la condition nécessaire et suffisante d'exacte contrôlabilité de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet sur le bord donnée par (Bardos, Lebeau et Rauch) [3].

Notons que la contrôlabilité approchée a été aussi étudiée pour différents types de systèmes dynamiques semi-linéaires, voir pour cela [1, 32].

Ce chapitre rappelle les différentes notions de contrôlabilité des équations aux dérivées partielles linéaires. Nous abordons le problème de la contrôlabilité dans le cas où le contrôle est de type Dirichlet par le bord et plus précisément dans le cadre de l'équation des ondes, de l'équation de la chaleur et de l'équation des plaques vibrantes. La méthode classique de résolution de ce problème a été proposée par D.L. Russell [44]. Elle est basée sur la théorie des semi-groupes [5]. D'autres méthodes présentes dans la littérature le résolvent aussi, comme l'approche HUM [36]. Nous essayons d'en avoir un aperçu général sur ces différentes méthodes dans ce chapitre.

2.2. Contrôlabilité des équations aux dérivées partielles linéaires

2.2.1. Contrôlabilité par le bord de l'équation des ondes

Formulation du problème

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de classe C^2 , $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω , Γ_0 un sous-ensemble non vide de Γ . Soit $T > 0$ et considérons le système non homogène suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ u = 0 & \text{sur } (\Gamma - \Gamma_0) \times (0, T) \\ u(., 0) = u^0, u'(. , 0) = u^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans (2.1), $u = u(x, t)$ est la fonction d'état et $g = g(x, t)$ est la fonction contrôle qui agit sur Γ_0 . On vise à changer la dynamique du système en agissant sur Γ_0 .

Existence et unicité des solutions

Le théorème suivant est la conséquence des résultats classiques sur l'existence et l'unicité des solutions des équations d'évolution non homogènes.

Théorème 2.1. [36, 40] *Pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et tout $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$, le système (2.1) admet une solution unique au sens de la transposition $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega))$*

Remarque 2.1. *L'équation des ondes est réversible dans le temps. Par conséquent, on peut résoudre (2.1) pour $t \in (0, T)$ en considérant les données initiales en $t = 0$.*

Notions de contrôlabilité

Soit $T > 0$. Pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on définit l'ensemble des états atteignables à l'instant T par :

$$R(T; (u^0, u^1)) = \{(u(T), u'(T)) : u \text{ solution de (2.1) avec } g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))\}.$$

D'après [53], $R(T; (u^0, u^1))$ est un sous-ensemble convexe de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Définissons dans ce qui suit, les différentes notions de contrôlabilité.

Définition 2.1. [53] *Le système (2.1) est approximativement contrôlable au temps T , si pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $R(T; (u^0, u^1))$ est dense dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.*

Définition 2.2. [53] *Le système (2.1) est exactement contrôlable au temps T , si pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $R(T; (u^0, u^1))$ coïncide avec $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.*

Définition 2.3. [53] *Le système (2.1) est contrôlable à zéro au temps T si pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $R(T; (u^0, u^1))$ contient l'élément $(0, 0)$.*

Remarque 2.2. [53] *Dans les définitions de la contrôlabilité approchée et de la contrôlabilité exacte, il est suffisant de considérer le cas $(u^0, u^1) = (0, 0)$ puisque $R(T; (u^0, u^1)) = R(T; (0, 0)) + S(T)(u^0, u^1)$, où $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe d'isométries généré par l'équation des ondes dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ avec des conditions aux frontières non homogènes de type Dirichlet. De plus, et compte tenu de la réversibilité du système, on a :*

Proposition 2.1. [53] *Le système (2.1) est exactement contrôlable si et seulement s'il est contrôlable à zéro.*

la proposition précédente garantit que le système (2.1) est exactement contrôlable si et seulement si, pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ telle que la solution u de (2.1) satisfait :

$$u(., T) = u'(., T) = 0 \quad (2.2)$$

Remarque 2.3. [38] *Le système (2.1) est hyperbolique. En conséquence, la vitesse de propagation des ondes est finie et donc la contrôlabilité à zéro ne peut avoir lieu si le temps de contrôlabilité T est très petit ou si le support Γ_0 du contrôle ne vérifie pas de précises propriétés géométriques.*

Définition 2.4. [53] *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$ et $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$. Le triplet (Ω, Γ_0, T) satisfait la condition géométrique de contrôle au temps T si et seulement si tout rayon évoluant dans Ω à vitesse égale à 1 et se réfléchissant sur $\partial\Omega$ en vérifiant les lois de l'optique géométrique, rencontre Γ_0 en un temps inférieur à T . On note $(\Omega, \Gamma_0, T) \in GCC$ pour signaler que le triplet satisfait cette condition géométrique de contrôle.*

Remarque 2.4. *La méthode des multiplicateurs utilisée dans [36] conduit au support Γ_0 défini par :*

$$\Gamma_0(x_0) = \{x \in \Gamma = \partial\Omega, (x - x_0)\nu \geq 0\} \quad (2.3)$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ où ν désigne la normale extérieure à Ω .

Dans ce cas la GCC a lieu si et seulement si $T > T(x^0)$ défini par $T(x^0) = 2R(x^0)$ où $R(x^0)$ désigne le rayon de la plus petite boule centrée en x^0 et contenant Ω supposé étoilé.

2.2.2. Contrôlabilité à zéro par le bord de l'équation des ondes

Le théorème suivant résout le problème de la contrôlabilité à zéro de type Dirichlet par le bord de l'équation des ondes.

Théorème 2.2. (Théorème de contrôlabilité à zéro) [53] *Soient T, Γ_0 et Ω tels que $(\Omega, \Gamma_0, T) \in GCC$. Alors pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe une fonction contrôle $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ telle que la solution u de (2.1) soit au repos à l'instant T , c'est-à-dire vérifie la propriété (2.2).*

Ce résultat peut-être obtenu dans le cadre de la remarque (2.4), par l'approche exposée dans [53, 38] qui ramène ce problème de contrôlabilité à zéro à celui d'un

problème de contrôle optimal.

On introduit le problème homogène (dit adjoint) suivant :

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \phi(., 0) = \phi^0, \quad \phi'(. , 0) = \phi^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

et ce, pour toute donnée initiale $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Multipliant l'équation en u par ϕ et celle de ϕ par u , intégrant sur $\Omega \times (0, T)$ et supposant (2.2), on obtient formellement que g est un contrôle pour (2.1) si et seulement si

$$\int_{\Gamma_0} \int_0^T g(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, t) dt d\sigma + \int_{\Omega} y^0 \phi^1 dx - \langle y^1, \phi^0 \rangle = 0 \quad (2.5)$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit de dualité entre les espaces $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

La caractérisation obtenue conduit à introduire la fonctionnelle

$J : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \int_0^T \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 dt d\sigma + \int_{\Omega} u^0 \phi^1 dx - \langle u^1, \phi^0 \rangle \quad (2.6)$$

Théorème 2.3. *Sous les conditions du théorème (2.2), la fonction J possède un unique minimum $(\hat{\phi}(0), \hat{\phi}(1)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. De plus si $\hat{\phi}$ est la solution de (2.4) associée à ce minimum, alors :*

$$g(x, t) = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Gamma_0 \times (0, T). \quad (2.7)$$

C'est le contrôle de norme L^2 – minimale pour (2.1).

Le théorème qu'on vient d'énoncer se déduit de la coercivité de J dont l'énoncé est ainsi : il existe une constante strictement positive K dépendante de Γ_0 et T telle que :

$$\|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq K(\Gamma_0, T) \int_{\Gamma_0} \int_0^T \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \quad (2.8)$$

$\forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Le terme de gauche de (2.8) est équivalent à l'énergie du système :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) dx \quad \forall t > 0 \quad (2.9)$$

constante sur toutes les trajectoires (on dit que le système (2.4) est conservatif) sur toutes les trajectoires :

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\phi^1|^2 + |\nabla \phi^0|^2) dx \quad \forall t > 0 \quad (2.10)$$

L'inégalité (2.8) est appelée l'inégalité inverse pour le problème adjoint (2.4).

Dans le cas unidimensionnel, la démonstration de cette inégalité repose sur la décomposition de la solution ϕ en termes de série de Fourier, voir pour cela [53]. Dans le cas général, la technique des multiplicateurs permet de l'obtenir, voir pour cela [36].

Remarque 2.5. *La régularité $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ est une conséquence de l'inégalité directe : pour tout $T > 0$ et tout $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, il existe une constante K positive telle que*

$$\int_{\Gamma_0} \int_0^T \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 dt d\sigma \leq K \cdot E(0) \quad (2.11)$$

$$\forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Elle s'obtient par la méthode des multiplicateurs [36].

2.2.3. Contrôlabilité approchée par le bord de l'équation des ondes

On s'intéresse dans cette section à la contrôlabilité approchée du système (2.1).

Soient $\epsilon > 0$ et $(u^0, u^1), (z^0, z^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. On cherche une fonction de contrôle $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ telle que la solution u de (2.1) satisfasse :

$$\|(u(T), u'(T)) - (z^0, z^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq \epsilon \quad (2.12)$$

D'après la remarque (2.2), il est suffisant d'étudier le cas $(u^0, u^1) = (0, 0)$.

Une approche variationnelle a été proposée dans [53] pour la résolution de ce problème. Elle se base sur la définition de la fonctionnelle

$$J_{\epsilon} : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J_\epsilon(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \int_0^T \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 dt dx + \langle (\phi^0, \phi^1), (z^0, z^1) \rangle + \epsilon \|(\phi^0, \phi^1)\| \quad (2.13)$$

où ϕ est la solution de (2.4) avec (ϕ^0, ϕ^1) comme conditions initiales.

le théorème suivant résout le problème.

Théorème 2.4. [53] Soient $\epsilon > 0, (z^0, z^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Supposons que $(\hat{\phi}(0), \hat{\phi}(1)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est le minimiseur de J_ϵ . Si $\hat{\phi}$ est la solution correspondante de (2.4) avec $(\hat{\phi}(0), \hat{\phi}(1))$ comme conditions initiales, alors :

$$g = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_0 \times (0, T)} \quad (2.14)$$

est un contrôle approché qui ramène la solution de (2.1) de l'état initial $(u^0, u^1) = (0, 0)$ à l'état final $(u(T), u'(T))$ tel que (2.12) est satisfaite.

2.2.4. Contrôlabilité par le bord de l'équation de la chaleur

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, Γ_0 un sous-ensemble non vide de Γ .

On regarde le contrôle $g \in L^2(\Gamma_0 \times]0, T]) = L^2(0, T; U)$ avec $U = L^2(\Gamma_0)$ telle que la solution $u \in C^0([0, T], E)$ où $E = H^{-1}(\Omega)$ du système :

$$\begin{cases} u' - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ u = 0 & \text{sur } (\Gamma - \Gamma_0) \times (0, T) \\ u(., 0) = u^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

satisfait $\|(u(T) - u_T)\|_E \leq \epsilon$ pour la contrôlabilité approchée et $u(T) = 0$ pour la contrôlabilité à zéro.

Dans le cas unidimensionnel où $\Omega = (0, L)$, les théorèmes suivants résolvent les deux problèmes.

Théorème 2.5. (Contrôlabilité approchée) [8] Le système (2.15) est approximativement contrôlable pour tout $T > 0$.

Théorème 2.6. (Nulle contrôlabilité) [8, 43, 44] Pour tout $u^0 \in L^2(\Omega)$ et $T > 0$, il

existe un contrôle $g \in L^2(0, T)$ telle que la solution u de (2.15) satisfasse $u(T) = 0$.

Remarque 2.6. (i) Dans le cas unidimensionnel, la démonstration du théorème précédent est faite à l'aide de la théorie des moments.

(ii) Le cas où la dimension est supérieure à 1 nécessite un outil supplémentaire : les inégalités de Carleman. Le lecteur pourra consulter les ouvrages [53, 8].

2.2.5. Contrôlabilité exacte par le bord de l'équation des plaques vibrantes

Formulation du problème

On considère un domaine borné lipschitzien Ω de $\mathbb{R}^n$, T un réel strictement positif et Γ_0 une partie non vide de $\Gamma = \partial\Omega$. Nous considérons l'équation des plaques vibrantes dans $\Omega \times (0, T)$, avec un contrôle de type Dirichlet agissant sur la partie Γ_0 . Autrement dit, le système suivant :

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } (\Gamma - \Gamma_0) \times (0, T) \\ u(., 0) = u^0, \quad u'(., 0) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

Ici, u est la fonction état, g est la fonction contrôle, u^0 et u^1 sont les données initiales. D'après [36], on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Proposition 2.2. Pour tout $u^0 \in L^2(\Omega)$, $u^1 \in H^{-2}(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$, il existe une solution unique u du problème (2.16) avec $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-2}(\Omega))$

On peut maintenant formuler le problème de la contrôlabilité exacte (avec Γ_0 et T fixés).

Etant donné $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ (a priori quelconque).

Etant donné $(z^0, z^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ (a priori quelconque).

Peut-on trouver $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ telle que la solution u de (2.16) vérifie la propriété :

$$u(., T) = z^0, \quad u'(., T) = z^1?$$

Le problème (2.16) est linéaire et d'autre part il est réversible en temps. Alors résoudre le problème de la contrôlabilité exacte équivaut à résoudre le problème de la contrôlabilité à zéro suivant :

Etant donné $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$, peut-on trouver $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ telle que la solution u de (2.16) soit au repos à l'instant T , c'est-à-dire vérifie la

propriété

$$u(., T) = 0 \quad , \quad u'(., T) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (2.17)$$

On utilise pour la résolution de ce problème l'approche HUM introduite par J-L. Lions dans [36].

Avant de voir les propriétés de cette approche, on a besoin d'élucider le principe physique suivant :

Conformément à l'intuition, les solutions de l'équation des plaques vibrantes se propagent à haute fréquence, le long des rayons de l'optique géométrique.

Il est donc intuitif que, dans le cas où la zone de contrôle ne "rencontre pas tous les rayons", l'équation des plaques vibrantes ne pourra être contrôlée exactement et réciproquement.

Définition 2.5. [38] *On dira que le triplet (Ω, Γ_0, T) satisfait la condition géométrique de contrôle (GCC) si tout rayon parcouru à vitesse égale à 1 dans Ω et suivant les lois de l'optique géométrique entre dans Γ_0 en un temps $t < T$.*

On note $(\Omega, \Gamma_0, T) \in GCC$ pour signaler que le triplet satisfait cette condition d'optique géométrique.

Remarque 2.7. *La méthode des multiplicateurs utilisée dans [36] conduit au support Γ_0 défini par :*

$$\Gamma_0(x^0) = \{x \in \Gamma, (x - x^0)\nu \geq 0\} \quad (2.18)$$

pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^n$ où ν désigne la normale extérieure à Ω .

Dans ce cas la GCC a lieu si et seulement si $T > T(x^0)$ défini par $T(x^0) = \frac{R(x^0)}{\lambda_0}$ où $R(x^0)$ désigne le rayon de la plus petite boule centrée en x^0 et contenant Ω , supposé étoilé et λ_0 la première valeur propre du problème

$$\begin{cases} \Delta^2 w = -\lambda_0^2 \Delta w & \text{dans} \quad \Omega \\ w \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Théorème 2.7. (Contrôlabilité à zéro de l'équation des plaques vibrantes) [36]

Soient T, Γ_0 et Ω tels que $(\Omega, \Gamma_0, T) \in GCC$.

Alors pour tout $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$, il existe une fonction contrôle $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ telle que la solution u de (2.16) soit au repos à l'instant T , c'est-à-dire vérifie (2.17).

Démonstration. On résout le système

$$\begin{cases} \Phi'' + \Delta^2 \phi = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \Phi(., 0) = \Phi^0, \quad \Phi'(., 0) = \Phi^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

où $\Phi^0, \Phi^1 \in D(\Omega)$.

Le système (2.19) admet une solution unique avec $\Phi \in C([0, T]; H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$.

De plus, l'énergie du système définie par :

$$E(\Phi, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\Phi'|^2 + |\Delta \Phi|^2) dx \quad \forall t > 0 \quad (2.20)$$

est constante (le système (2.19) est conservatif) sur toutes les trajectoires :

$$E(\phi, t) = E(\phi, 0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\Phi^1|^2 + |\Delta \Phi^0|^2) dx \quad \forall t > 0 \quad (2.21)$$

Dans [36], J.L. Lions a établi l'inégalité directe :

$$\int_{\Gamma_0} \int_0^T |\Delta \Phi|^2 dt d\sigma \leq C_0 E(\Phi, 0) \quad (2.22)$$

où C_0 est une constante positive, et pour $T > T(x^0)$ l'inégalité inverse :

$$\int_{\Gamma_0} \int_0^T |\Delta \Phi|^2 dt d\sigma \geq C(T, \Gamma_0) E(\Phi, 0) \quad (2.23)$$

où $C(T, \Gamma_0) = \frac{4}{R(x^0)}(T - T(x^0))$

D'après (2.22), on a en particulier $\Delta \Phi \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$

On considère ensuite le système rétrograde suivant :

$$\begin{cases} \Psi'' + \Delta^2 \Psi = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \Delta \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } (\Gamma - \Gamma_0) \times (0, T) \\ \Psi(., T) = 0, \quad \Psi'(., T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.24)$$

Le changement de t en $(T - t)$ nous permet d'appliquer la proposition (2.2) qui

dit que (2.24) admet une solution unique $\Psi \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-2}(\Omega))$

Donc $\Psi(0)$ est bien défini dans $L^2(\Omega)$ et $\Psi'(0)$ est bien défini dans $H^{-2}(\Omega)$ et ceci pour chaque choix de (Φ^0, Φ^1) .

Si on trouve $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} \Psi(0) = u^0 \\ \Psi'(0) = u^1 \end{cases}$$

on aura résolu le problème de la contrôlabilité à zéro de (2.16) avec $g = \Delta\Phi$ et $u = \Psi$.

Pour $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on définit l'opérateur Λ par :

$$\Lambda\{\Phi^0, \Phi^1\} = \{u^1, -u^0\}, \quad (2.25)$$

qui vérifie $\langle \Lambda(\Phi^0, \Phi^1), (\Phi^0, \Phi^1) \rangle = \int_{\Gamma_0} \int_0^T |\Delta\phi|^2 dt d\sigma$.

D'après [36], Λ est un isomorphisme de $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Comme conséquence, $\forall (u^0, u^1)$, tels que $(u^1, -u^0) \in H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe un unique $(\Phi^0, \Phi^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, tel que $\Lambda(\Phi^0, \Phi^1) = (u^1, -u^0)$.

D'où la résolution du problème de la contrôlabilité à zéro de (2.16). $\square$

Remarque 2.8. (i) Dans [51], il a été prouvé que le problème de la contrôlabilité à zéro du système (2.16) a lieu dans l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ pour tout $T > 0$.

(ii) D'après [36], le contrôle $g(x, t) = \Delta\Phi(x, t)$ est le contrôle de norme L^2 -minimale pour (2.16).

3 Méthodes déterministes et perfectionnistes

3.1. Introduction

L'approximation numérique du problème de la contrôlabilité exacte avec un contrôle de type Dirichlet sur la frontière a été initiée par les travaux de Roland Glowinski et collaborateurs [18, 21] dans le cadre de l'équation des ondes et ce à travers l'implémentation numérique de la méthode d'unicité hilbertienne (de l'anglais HUM : Hilbert Uniqueness Method) de J.L. Lions. Cette méthode repose sur la résolution numérique de l'équation

$$\Lambda\{\Psi^0, \Psi^1\} = \{u^1, -u^0\}, \quad (3.1)$$

où u^0 et u^1 sont les conditions initiales du système et Λ un isomorphisme entre l'espace de Hilbert F et son dual F' .

Ces travaux ont été ensuite repris, notamment par le groupe de Enrique Zuazua (voir [52] et ses références).

Ce chapitre s'articule de la manière suivante. la section 3.2 décrit les méthodes déterministes et perfectionnistes de l'approximation numérique du contrôle exact par le bord de l'équation des ondes dans le cas bidimensionnel. La section 3.3 traite l'approximation numérique de la contrôlabilité nulle par le bord de l'équation de la chaleur dans le cas unidimensionnel. Ensuite, à partir de la section 3.4, on aborde l'approximation du contrôle exact par le bord de l'équation de la poutre vibrante. La section 3.4.1 expose le problème. La section 3.4.2 donne la formulation du problème. La section 3.4.3 décrit la méthode HUM qui permet de déterminer le contrôle de façon implicite et qui ramène le système considéré au repos au temps T . La section 3.4.4 présente la méthode de résolution. La section 3.4.5 dévoile la méthode déterministe permettant de calculer numériquement le contrôle de Dirichlet avec une estimation de l'erreur d'état final. La section 3.5 illustre à travers un exemple le calcul explicite du contrôle et le calcul de l'erreur d'état final. Enfin, la section 3.6 expose la métaheuristique PSO servant à l'amélioration de la valeur de l'erreur d'état final avec en prime l'absence de comparaison entre cette métaheuristique et d'autres métaheurstiques comme ABC, FWA ainsi que FPA.

3.2. Approximation de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes

Cette section résume l'étude de la résolution explicite du problème de la contrôlabilité exacte du système (2.1) définie dans le chapitre 2. La résolution passe par l'implémentation numérique de la méthode HUM, présentée dans [18, 21]. Elle repose sur la résolution numérique de l'équation (3.1).

La méthode décrite combine des schémas explicites pour la discrétisation en temps et par des approximations, par différences ou éléments finis de Lagrange, pour la discrétisation en espace. Le problème de la contrôlabilité exacte frontière est ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire pour une matrice symétrique et semi-définie positive. La méthode déterministe utilisée pour sa résolution est l'algorithme du gradient conjugué.

Il est montré dans [18, 21] que les méthodes d'approximation traditionnelles, qui y sont décrites conduisent à des problèmes approchés qui ne sont pas uniformément bien posés; ceci a pour effet de produire des solutions approchées de plus en plus oscillantes lorsque les pas discrétisation en espace et en temps, h et Δt , convergent vers zéro; de plus le nombre d'itérations du gradient conjugué nécessaires pour obtenir la solution approchée augmente rapidement avec h . Dans [18, 21], les difficultés numériques citées sont surmontées par l'intermédiaire d'une régularisation biharmonique à la Tychonov, où $\epsilon = 0(h^2)$ pour le paramètre de régularisation. Cet ordre de grandeur est obtenu par des arguments de type couche limite. Les résultats obtenus dans [18, 21] sont de très bonne qualité, même lorsque les données initiales ne sont pas régulières. Ceci nous amène à dire que cette technique est une méthode perfectionniste puisqu'elle a permis d'améliorer les résultats.

Dans [23], la régularisation de maillage (un algorithme à deux grilles), où les fonctions de base sont d'ordre élevés a été également introduite pour éliminer les oscillations numériques. Les méthodes numériques présentes dans [23] fournissent une alternative simple et efficace au processus de régularisation de Tychonov. Les résultats expérimentaux effectués sur le même exemple montrent bien l'amélioration des précédents résultats.

Dans [22], une alternative à la méthodologie décrite dans [18, 21] pour le même problème a été présentée. Basée sur l'analyse spectrale, celle-ci fournit une nouvelle approche pour éliminer les oscillations parasites mentionnées ci-dessus. Cette approche permet d'obtenir un problème uniformément bien posé, par la prise de données initiales dans un espace de type différences ou éléments finis. Les essais numériques avec le même exemple présentés dans [22] montrent que les approximations obtenues sont d'ordre optimaux par rapport aux pas de discrétisation en espace et en temps.

En général, les solutions du problème de la contrôlabilité exacte frontière de

l'équation des ondes lorsqu'elles existent ne sont pas uniques. Cependant, il est prouvé dans [36] que la méthode HUM fournit un unique contrôle de norme L^2 – minimale.

Dans [25], cette caractérisation a été exploitée pour l'étude du même problème. Une fois le problème de minimisation discrétisé, deux méthodes de résolution sont alors présentées. La première résout le problème d'optimisation quadratique contraint obtenu par une méthode itérative tels que BICG, SYMMQL ou CGNR. Quant à la deuxième, elle transforme d'abord le problème d'optimisation contraint en un problème d'optimisation non contraint résolu par la méthode du gradient conjugué. Les propriétés de convergence de cette approche sont illustrées à travers des calculs expérimentaux, pris avec le même exemple des références [18, 21].

Il est prouvé dans [25], que pour des contrôles de Dirichlet de norme L^2 – minimale, les résultats convergent sans avoir besoin d'introduire la régularisation biharmonique de Tychonov. De plus pour le cas générique de contrôle de type Dirichlet non régulier, la convergence par rapport à la norme L^2 est aussi démontrée numériquement.

L'une des forces de cette approche est sa flexibilité de pouvoir traiter d'autres types de contrôles.

On peut dire que l'approche déterministe proposée dans [25] a permis d'améliorer les résultats trouvés dans [18, 21] et [22] car elle a fourni des approximations convergentes contrairement aux méthodes existantes qui produisent des approximations divergentes à moins qu'elles ne soient régulées d'une certaine manière.

On peut dire que dans ce genre de modèle, l'approximation du contrôle est délicate dans la mesure où l'utilisation des schémas numériques convergents usuels conduit, pour une large classe de données initiales, à une suites de contrôles $(g_h)_h$ indicée par le paramètre d'approximation h non uniformément bornée par rapport à h : précisément la norme L^2 de g_h diverge exponentiellement. Ces schémas ne sont pas donc uniformément contrôlables. En d'autres termes, le contrôle HUM discrétisé ne converge pas vers le contrôle HUM du système continu.

En fait, il est bien connu que la discrétisation de l'équation des ondes engendre des modes parasites haute fréquence (non présent au niveau continu) qui induisent une divergence des contrôles approchés pour le problème de la contrôlabilité exacte. D'où la non-commutation entre approximation numérique et contrôlabilité exacte depuis les travaux de Roland Glowinski et collaborateurs déjà cités. Elle est due aux hautes fréquences qui ne peuvent être observées par la zone Γ_0 , support du contrôle en temps uniforme.

Il est à noter que le spectre numérique associé à ces schémas, présente au moins un point d'accumulation. D'où la nécessité d'introduire des schémas numériques uniformément contrôlables efficaces, c'est-à-dire qui assurent d'une part une vitesse

de convergence de la norme $\|g_h\|_{L^2}$ conforme au degré d'approximation, et d'autre part conduisent à une condition de stabilité raisonnable.

La question d'uniforme contrôlabilité d'une famille d'approximation d'un contrôle discret a été étudiée par Enrique Zuazua et ses collaborateurs dans [52] et ses références pour différentes méthodes de discrétisation sur une liste d'exemples. L'analyse principalement au niveau semi-discret de ces méthodes de type multi-grille, élément fini mixte ou bien encore la régularisation de Tychonov, met en évidence le rôle des hautes fréquences. Aussi, la technique de filtrage numérique de Fourier présentée dans [53] dans le cas unidimensionnel sert aussi à éliminer les hautes fréquences. Enfin, une autre possibilité exploitée dans [38] consiste à redresser le spectre pour les hautes fréquences et ainsi éliminer tout point d'accumulation. Basée sur la discrétisation aux différences finies usuelle, le schéma produit un contrôle discret uniformément borné et convergent vers le contrôle continu. Cette possibilité s'est attelée au schéma à trois points centré en dimension 1 et au schéma à cinq points en dimension 2.

3.3. Approximation de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

La convergence des schémas numériques pour les problèmes de contrôle associés aux équations paraboliques, a été beaucoup étudiée dans la littérature dans le contexte du contrôle optimal, voir pour cela [31, 42] mais peu traitée dans le contexte de la contrôlabilité. On peut citer comme travail entrant dans le cadre du système (2.15) du chapitre 2, [10].

L'étude présentée dans [53] montre que la question de la contrôlabilité uniforme est assurée dans ce cas contrairement au cas de l'équation des ondes. D'où la commutation entre approximation numérique et contrôlabilité à zéro. En d'autres termes, le contrôle discrétisé converge vers le contrôle du système continu. Voir [37] pour plus de précisions. D'après [33], ceci est dû aux propriétés dissipatives du système parabolique : les termes parasites de fréquences élevées sont en effet atténués et ainsi l'on peut obtenir de bonnes propriétés sur les contrôles. L'analyse théorique qui prouve cette propriété a été traitée dans [33].

3.4. Approximation du contrôle exact par le bord de l'équation de la poutre vibrante

3.4.1. Exposé du problème

On présente dans cette section le travail fait dans [30]. Il consiste à approximer numériquement le contrôle exact par le bord du système (2.16) du chapitre 2,

et ce dans le cas unidimensionnel. Plus précisément, on étudie l'approximation numérique du problème de la contrôlabilité exacte frontière de l'équation de la poutre vibrante, lorsque le contrôle est de type Dirichlet.

Notre étude se base sur l'implémentation numérique de la méthode HUM. Elle consiste à résoudre numériquement l'équation (3.1), où $u^0 \in L^2(\Omega)$ et $u^1 \in H^{-2}(\Omega)$.

On commence par caractériser, dans un premier temps la solution de l'équation (3.1) par un principe de minimisation, puis par la proposition d'une méthode déterministe servant à sa résolution. Cette dernière s'appuie sur [6] et qui stipule que la connaissance du comportement asymptotique du contrôle est utile pour son calcul. C'est cette idée qui va être exploitée pour la proposition de cette méthode.

Dans un deuxième temps, on utilise la propriété de minimisation pour déterminer des formules explicites pour Ψ^0 et Ψ^1 et par conséquent l'approximation du contrôle qui ramène le système considéré au repos au temps T avec une estimation de l'erreur d'état final.

A travers un exemple particulier, on présente les graphes du contrôle approximé, de la fonction coût, de l'erreur d'état final et l'amélioration de cette dernière par l'utilisation de la métaheuristique PSO.

3.4.2. Formulation du problème

soient T un nombre strictement positif, u^0, u^1 deux fonctions définies sur $\Omega =]0, L[$, $\Sigma = \{0, L\} \times]0, T[$, $Q =]0, L[\times]0, T[$ et $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$.

Le problème de la contrôlabilité exacte de l'équation de la poutre vibrante par un contrôle de type Dirichlet par le bord est définie comme suit.

Trouver une fonction de contrôle g définie sur Σ telle que u satisfait

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u^0(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x, T) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad u(L, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = g(t) & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.2)$$

La première équation dans (3.2) représente les vibrations d'une poutre. Elle modélise le mouvement vertical d'une poutre mince et horizontale avec de petits déplacements par rapport à la position de repos. Elle n'est ni hyperbolique, ni parabolique. Son étude entre dans le cadre de la dynamique des structures, voir pour cela [14].

$u(x, t)$ est le déplacement du point x de la poutre à l'instant t .

$u^0(x)$ et $u^1(x)$ représentent, respectivement, la position initiale et la vitesse initiale de la poutre.

$u(x, T) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, T) = 0$ sont les conditions finales de (3.2).

L'état final $(0, 0)$ s'appelle l'état d'équilibre du système (3.2).

Les conditions aux limites veulent dire que la poutre est encastree aux deux extrémités.

Notons qu'une étude théorique entrant dans le cadre de la contrôlabilité à zéro interne a été présentée dans [39] où la poutre est libre à une extrémité et encastree à l'autre. Concernant l'étude pratique, voir [35].

On sait d'après le théorème (2.7) du chapitre 2, que le système (3.2) admet une solution (u, g) . De plus le contrôle g est l'unique contrôle de norme L^2 – minimale.

Notre travail consiste à déterminer numériquement le contrôle de Dirichlet. Pour cela, on considère le contrôle trouvé implicitement par l'approche HUM et on développe quelques techniques qui permettent son calcul de manière à ramener le système (3.2) à l'état d'équilibre à l'instant T avec une estimation de l'erreur d'état final

$$\|\xi\|^2 = \|u(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.3)$$

3.4.3. Choix du contrôle

On rappelle brièvement à travers l'approche HUM, comment le contrôle qui ramène le système (3.2) à l'état d'équilibre au temps T est déterminé ?

Soit $F = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Alors $F' = H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pour $\{\Psi^0, \Psi^1\} \in F$, on résout le système :

$$\begin{cases} \Psi_{tt} + \Psi_{xxxx} = 0 & \text{dans } Q \\ \Psi(x, 0) = \Psi^0(x) \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = \Psi^1(x) & \text{dans } \Omega \\ \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

On résout ensuite le système rétrograde en Θ :

$$\begin{cases} \Theta_{tt} + \Theta_{xxxx} = 0 & \text{dans } Q \\ \Theta(x, T) = \frac{\partial \Theta}{\partial t}(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

On définit implicitement un opérateur linéaire Λ par :

$$\Lambda\{\Psi^0, \Psi^1\} = \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial t}(x, 0), -\Theta(x, 0) \right\}.$$

Donc, pour Ψ^0, Ψ^1 et T choisis. Si l'on peut résoudre l'équation (3.1), alors il est possible d'obtenir le contrôle explicitement.

L'unique contrôle de norme L^2 – minimale est obtenu en posant $g = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$.

Il a été prouvé dans [36] que Λ est un isomorphisme de F vers F' . Par conséquent, pour tout u^0, u^1 , tel que $\{u^1, -u^0\} \in F'$, l'équation (3.1) possède une solution unique $\{\Psi^0, \Psi^1\} \in F$.

Le système en Θ est en fait l'unique u et l'état $\{0, 0\}$ est atteint à l'instant T .

3.4.4. Présentation de la méthode de résolution

Caractérisation de la solution

Le problème (3.1) peut-être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Psi \in F \text{ tel que} \\ \langle \Lambda \Psi, \hat{\Psi} \rangle = \langle \{u^1, -u^0\}, \hat{\Psi} \rangle, \forall \hat{\Psi} \in F \end{cases} \quad (3.4)$$

où $\Psi = \{\Psi^0, \Psi^1\}$; $\hat{\Psi} = \{\hat{\Psi}^0, \hat{\Psi}^1\}$, $F = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $F' = H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre F et F' .

La fonctionnelle $\langle \Lambda \cdot, \cdot \rangle$ est continue, symétrique et coercive. Ces propriétés, d'après [45], permettent de caractériser la solution de (3.4) par le principe de minimisation suivant :

Proposition 3.1. *La solution $\Psi \in F$ de (3.4) (et par conséquent de (3.1)) réalise le minimum de la fonctionnelle quadratique :*

$$J(\Psi) = \frac{1}{2} \langle \Lambda \Psi, \Psi \rangle - \langle \{u^1, -u^0\}, \Psi \rangle \quad (3.5)$$

et réciproquement.

Démonstration. Le problème (3.5) est un cas particulier du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in V \text{ tel que} \\ a(v, w) = L(w), \forall w \in V \end{cases} \quad (3.6)$$

où dans (3.6)

(i) V est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(., .)$, la norme correspondante est $\|.\|$.

(ii) $a : V \times V \longrightarrow \mathfrak{R}$ est bilinéaire, continue, symétrique et coercive.

(iii) $L : V \longrightarrow \mathfrak{R}$ est linéaire continue.

Avec les hypothèses ci-dessus, et d'après [45], (3.6) possède une solution unique et cette solution réalise le minimum dans V de la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v); \forall v \in V \text{ et réciproquement.}$$

Donc, pour que la proposition soit satisfaite, il suffit de prendre dans [45],

$$V = F; a(., .) = \langle \Lambda., . \rangle \text{ et } L : \hat{\Psi} \longrightarrow \langle \{u^1, -u^0\}, \hat{\Psi} \rangle \quad \square$$

Démarche de résolution

D'après la proposition (3.1), résoudre l'équation (3.1) équivaut à résoudre le problème de minimisation

$$\inf_{\{\Psi^0, \Psi^1\} \in F} J(\{\Psi^0, \Psi^1\}) \quad (3.7)$$

où

$$J(\{\Psi^0, \Psi^1\}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial^2 \Psi(L, t)}{\partial x^2} \right]^2 dt - \int_{\Omega} [\Psi^0 u^1 - \Psi^1 u^0] dx. \quad (3.8)$$

Soit $\{\Psi_T^0, \Psi_T^1\}$ la solution de (3.7). On va transformer la fonctionnelle (3.8) par l'introduction d'un facteur T comme suit :

$$T.J(\{\Psi^0, \Psi^1\}) = \frac{T}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial^2 \Psi(L, t)}{\partial x^2} \right]^2 dt - \int_{\Omega} [u^1 T \Psi^0 - u^0 T \Psi^1] dx.$$

Soit

$\Phi = T.\Psi$, où Φ est la solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0 & \text{dans } Q \\ \Phi(x, 0) = \Phi^0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0) = \Phi^1 & \text{dans } \Omega \\ \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

$$T.J(\{\Psi^0, \Psi^1\}) = \frac{1}{2T} \int_0^T \left[\frac{\partial^2 \Phi(L, t)}{\partial x^2} \right]^2 dt - \int_{\Omega} [u^1 \Phi^0 - u^0 \Phi^1] dx = J(\{\Phi^0, \Phi^1\}). \quad (3.9)$$

Le problème (3.7) devient :

$$\inf J(\{\Phi^0, \Phi^1\}). \quad (3.10)$$

En supposant que la solution de (3.10) est $\{\phi_T^0, \phi_T^1\}$, alors on aura

$$\Phi_T^0 = T \cdot \Psi_T^0 \quad \text{et} \quad \Phi_T^1 = T \cdot \Psi_T^1.$$

En Considérant

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_T^0 \\ \Phi^1 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_T^1, \end{aligned}$$

alors, d'après [6], il est possible de déterminer explicitement (Φ^0, Φ^1) .

Cette approche conduira à des approximations numériques très utiles pour les calculs. De ce fait, il sera donc possible d'évaluer les calculs de Ψ_T^0 et Ψ_T^1 en utilisant :

$$\begin{aligned} \Psi_T^0 &= \frac{1}{T} \Phi^0 \\ \Psi_T^1 &= \frac{1}{T} \Phi^1. \end{aligned}$$

3.4.5. Méthode déterministe de résolution

Notons par $\omega_j(x)$ les fonctions propres orthonormées et par λ_j^2 les valeurs propres de l'opérateur $\frac{d^4}{dx^4}$ avec la condition de Dirichlet homogène. Considérons (3.10) et voyons ce que vaut $\lim_{T \rightarrow +\infty} J(\{\Phi^0, \Phi^1\})$.

Soit

$$u^0 = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 \omega_j, \quad u^1 = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^1 \omega_j$$

où $u_j^0 = (u^0, \omega_j)$ et $u_j^1 = (u^1, \omega_j)$.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^0 \Phi^1 dx &= \sum_j (u^0, \omega_j) (\Phi^1, \omega_j) \\ \int_{\Omega} u^1 \Phi^0 dx &= \sum_j (u^1, \omega_j) (\Phi^0, \omega_j). \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\Phi(x, t) = \sum_j \Phi_j(t) \omega_j(x),$$

où

$$\Phi_j(t) = (\Phi^0, \omega_j) \cos(\lambda_j t) + \frac{1}{\lambda_j} (\Phi^1, \omega_j) \sin(\lambda_j t).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_0^T \left[\frac{\partial^2 \Phi(L, t)}{\partial x^2} \right]^2 dt &= \frac{1}{2T} \int_0^T \left[\sum_{j,l} \Phi_j(t) \cdot \Phi_l(t) \frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \omega_l(L)}{dx^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,l} \frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \omega_l(L)}{dx^2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \Phi_j(t) \cdot \Phi_l(t) dt \right]. \end{aligned}$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \int_0^T \Phi_j(t) \cdot \Phi_l(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ (\Phi^0, \omega_j) \cos(\lambda_j t) + (\Phi^1, \omega_j) \frac{\sin(\lambda_j t)}{\lambda_j} \right\} \left\{ (\Phi^0, \omega_l) \cos(\lambda_l t) + (\Phi^1, \omega_l) \frac{\sin(\lambda_l t)}{\lambda_l} \right\} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [(\Phi^0, \omega_j)(\Phi^0, \omega_l) \cos(\lambda_j t) \cos(\lambda_l t)] dt + \frac{1}{T} \int_0^T \left[(\Phi^0, \omega_j)(\Phi^1, \omega_l) \cos(\lambda_j t) \frac{\sin(\lambda_l t)}{\lambda_l} \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \left[(\Phi^1, \omega_j)(\Phi^0, \omega_l) \cos(\lambda_l t) \frac{\sin(\lambda_j t)}{\lambda_j} \right] dt + \frac{1}{T} \int_0^T \left[(\Phi^1, \omega_j)(\Phi^1, \omega_l) \frac{\sin(\lambda_j t) \cdot \sin(\lambda_l t)}{\lambda_j \cdot \lambda_l} \right] dt \end{aligned}$$

Pour $j \neq l$, un calcul donne

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Phi_j(t) \cdot \Phi_l(t) dt \longrightarrow 0 \text{ quand } T \longrightarrow \infty.$$

et pour $j = l$, on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Phi_j(t) \cdot \Phi_l(t) dt \longrightarrow \left[\frac{1}{2} (\Phi^0, \omega_j)^2 + \frac{1}{2\lambda_j^2} (\Phi^1, \omega_j)^2 \right] \text{ quand } T \longrightarrow \infty.$$

Finalement

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Phi_j(t) \cdot \Phi_l(t) dt \longrightarrow \delta_{jl} \left[\frac{1}{2} (\Phi^0, \omega_j)^2 + \frac{1}{2\lambda_j^2} (\Phi^1, \omega_j)^2 \right] \text{ quand } T \longrightarrow \infty,$$

où $\delta_{jl} = 1$ si $j = l$ et $\delta_{jl} = 0$ si $j \neq l$, et alors

$$\frac{1}{2T} \int_0^T \left[\frac{\partial^2 \Phi(L, t)}{\partial x^2} \right]^2 dt \longrightarrow \frac{1}{4} \sum_j \left[(\Phi^0, \omega_j)^2 + \frac{1}{\lambda_j^2} (\Phi^1, \omega_j)^2 \right] \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2.$$

Le problème initial (3.10) est maintenant transformé à un problème de minimisation

par rapport à Φ^0 et Φ^1 de

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \sum_j \left[(\Phi^0, \omega_j)^2 + \frac{1}{\lambda_j^2} (\Phi^1, \omega_j)^2 \right] \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2 - \int_{\Omega} (u^1 \Phi^0 - u^0 \phi^1) dx \\
 &= \sum_j \left[\frac{1}{4} (\Phi^0, \omega_j)^2 \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2 - u_j^1 (\phi^0, \omega_j) \right] \\
 &+ \sum_j \left[\frac{1}{4\lambda_j^2} (\Phi^1, \omega_j)^2 \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2 + u_j^0 (\Phi^1, \omega_j) \right] \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, on constate que le premier terme ne dépend pas de Φ^1 et que le second terme ne dépend pas de Φ^0 . Par conséquent, la minimisation de (3.11) conduira à la minimisation de

$$\frac{1}{4} (\Phi^0, \omega_j)^2 \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2 - u_j^1 (\Phi^0, \omega_j) \text{ par rapport à } \Phi^0$$

et

$$\frac{1}{4\lambda_j^2} (\Phi^1, \omega_j)^2 \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2 + u_j^0 (\Phi^1, \omega_j) \text{ par rapport à } \Phi^1.$$

Le minimum est donné par

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (\Phi^0, \omega_j) \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2 - u_j^1 = 0 \\
 & \frac{1}{2\lambda_j^2} (\Phi^1, \omega_j) \left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2 + u_j^0 = 0.
 \end{aligned}$$

Finalement, quand $T \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \Phi^0 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (u^1, \omega_j) \cdot \omega_j}{\left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2} \\
 \Phi^1 &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j^2 (u^0, \omega_j) \cdot \omega_j}{\left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2}
 \end{aligned}$$

On déduit les approximations suivantes :

$$\Psi_T^0 = \frac{2}{T} \sum_{j=1}^n \frac{(u^1, \omega_j) \cdot \omega_j}{\left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2} \quad (3.12)$$

$$\Psi_T^1 = \frac{-2}{T} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^2(u^0, \omega_j) \cdot \omega_j}{\left[\frac{d^2 \omega_j(L)}{dx^2} \right]^2} \quad (3.13)$$

Les expressions (3.12) et (3.13) sont des formules explicites.

3.5. Essais numériques

dans cette section, on considère le système (3.2) afin de déterminer les graphes du contrôle explicite, de la fonction coût et de l'erreur d'état final (3.3) à l'instant $t = T$ avec les conditions initiales $u^0(x) = Ax(1+x)$; $u^1(x) = (1+A)u^0(x)$. A est un coefficient choisi pour des considérations numériques.

D'après l'approche HUM, le contrôle ramenant le système (3.2) à l'état d'équilibre au temps T est donné par $g^* = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$, où Ψ est la solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \Psi(x,t)}{\partial x^4} = 0 & \text{dans } Q \\ \Psi(x,0) = \Psi_T^0, \quad \frac{\partial \Psi(x,0)}{\partial t} = \Psi_T^1 & \text{dans } \Omega \\ \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \quad (3.14)$$

et Ψ_T^0, Ψ_T^1 sont les conditions initiales données par les formules (3.12) et (3.13).

On utilise l'algorithme suivant pour l'implémentation numérique.

-
- 1 : Choix des conditions initiales u^0 et u^1 .
 - 2 : Choix de n .
 - 3 : Calcul des formules explicites Ψ_T^0 et Ψ_T^1 par l'utilisation des formules (3.12) et (3.13).
 - 4 : Résolution numérique du système (3.14).
 - 5 : Calcul explicite du contrôle g^* .
 - 6 : Calcul de la fonction coût $\|g^*\|^2$.
 - 7 : Résolution numérique du système (3.2) en remplaçant le contrôle par son approximant g^* .
 - 8 : Calcul de l'erreur d'état final $\|\xi\|^2$.
- Retour au pas 2.
-

Remarque 3.1. La méthode numérique d'intégration des systèmes (3.2) et (3.14) est basée sur la méthode des différences finies symétriques (ou centrées), voir [19].

Comme les solutions de ces systèmes sont fonctions des variables indépendantes x et t , on subdivise le plan $]0, L[\times]0, T[$ en un ensemble de rectangles égaux, de côtés $dx = h$ et $dt = k$. Les calculs sont effectués suivant un maillage obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacés.

L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud de coordonnées (x_j, t_n) où $x_j = j \cdot h, 0 \leq j \leq N$ avec $h = \frac{L}{N}$; N entier strictement positif et $t_n = n \cdot k, 0 \leq n \leq M$ avec $k = \frac{T}{M}$; M entier strictement positif.

Ce schéma conduit à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est penta-diagonale symétrique positive.

La condition de stabilité de Von-Neumann pour ce schéma explicite est :

$$V.N.S = \frac{k^2}{h^4} \leq \frac{1}{4}.$$

On a utilisé 50 points de discrétisation pour l'espace. Pour le temps, on a utilisé un schéma aux différences finies symétriques explicite avec un $V.N.S = 0,0625$.

On a introduit une nouvelle approche pour déterminer une approximation du contrôle qui ramène le système (3.2) à l'état d'équilibre au temps T avec une estimation de l'erreur d'état final. Une attention particulière est portée vers un système qui n'est ni hyperbolique ni parabolique. Il est dit système de Petrowsky.

Notre travail présente une nouvelle approche pour l'approximation numérique de la contrôlabilité exacte frontière.

On a les graphes suivants pour $L = 1, n = 4$ et $T = 1$.

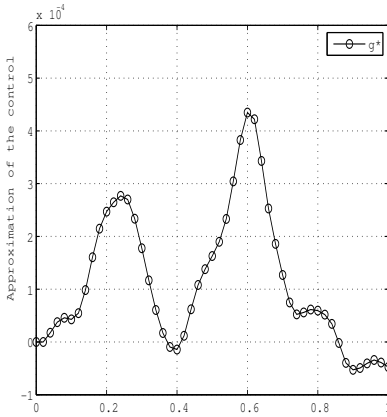


Figure 3.1 – La forme du contrôle approximé g^* conduisant le système (3.2) à l'état d'équilibre.

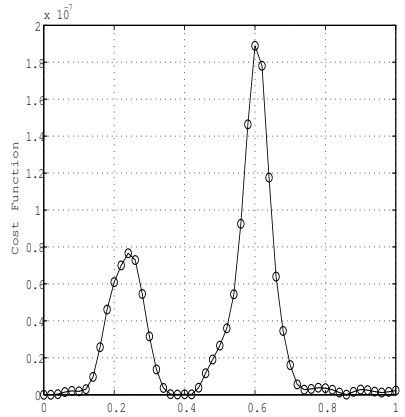


Figure 3.2 – Illustration de la fonction coût obtenue par l'unique contrôle de norme L^2 – minimale.

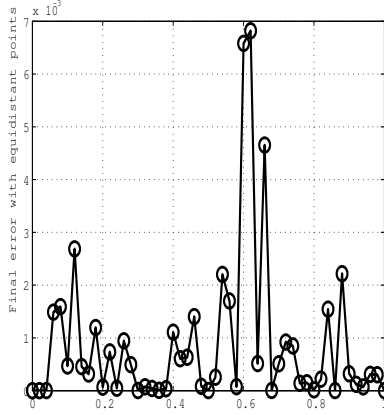


Figure 3.3 – Estimation de l’erreur d’état final de façon à ce que le système (3.2) soit à l’état d’équilibre avec des points choisis comme étant équidistants.

Remarque 3.2. Les résultats obtenus sont satisfaisants bien que de nombreuses approximations aient été faites (aspect asymptotique, troncature, etc.).

Cependant, on pense que l’accroissement de la valeur de n augmente l’efficacité des formules (3.12) et (3.13) et permet de rendre l’erreur d’état final (3.3) proche de zéro.

Dans cette perspective, on essaye dans la section suivante d’améliorer le résultat de l’erreur d’état final de sorte que le contrôle ramène le système (3.2) au repos au temps T .

3.6. Amélioration de l’erreur d’état final

Dans cette section, le calcul de l’erreur d’état final sera amélioré, en le rendant aussi petit que possible.

le problème considéré consiste à minimiser (3.3) par la métaheuristique PSO et ce par le choix du même exemple traité dans la section 3.5.

Cette méthode est une bonne démarche pour améliorer la valeur de l’erreur d’état final.

3.6.1. Optimisation par essaim de particules

L’algorithme d’optimisation par essaim de particules (de l’anglais PSO : Particle Swarm Optimization) est une méthode non déterministe (stochastique) qui peut-être utilisée pour résoudre des problèmes d’optimisation difficiles. Elle a été proposée par Kennedy et Eberhart [29] en 1995 et développée dans [16].

Cette méthode est inspirée du comportement social d'animaux évoluant en essaim, comme les vols groupés d'oiseaux [26] et les bancs de poissons [41].

En effet, on peut observer chez ces individus originellement disposés de façon aléatoire et homogène, que nous appellerons dès lors des particules, des dynamiques de déplacement relativement complexes, alors que du point individuel, chaque particule a une intelligence limitée et une connaissance seulement locale de sa situation dans l'essaim. Une particule dans l'essaim n'a pour connaissance que la position et la vitesse de son entourage (voisinage). Chaque particule utilise donc, non seulement sa propre mémoire, mais aussi l'information locale sur son entourage pour décider de son propre déplacement. A partir de ces informations, des comportements telles que, "aller à la même vitesse que les autres", "se déplacer dans la même direction" ou encore "rester proche de son voisinage" suffisent à maintenir la cohésion de l'essaim, et qui permettent la mise en œuvre de comportements collectifs complexes et adaptatifs. L'intelligence globale de l'essaim est donc la conséquence directe des interactions locales entre les différentes particules de l'essaim. La performance du système entier est supérieure à la somme des performances de ses parties.

Ces comportements socio-psychologiques ont inspiré Kennedy et Eberhart pour créer cette approche non déterministe. Un essaim de particules, qui sont des solutions potentielles (optimums locaux) au problème d'optimisation, survole l'espace de recherche, en quête de l'optimum global. Le déplacement d'une particule est influencé par les trois composantes suivantes :

- Une composante physique : la particule tend à suivre sa direction de déplacement ;
- Une composante cognitive : la particule tend à se déplacer vers le meilleur site par lequel elle est déjà passée ;
- Une composante sociale : la particule tend à se fier à l'expérience de ses congénères et, ainsi à se diriger vers le meilleur site déjà atteint par ses voisins.

Nous présentons ci-dessous, les principales étapes de cet algorithme de base dans un espace de recherche de dimension M .

La particule j de l'essaim est modélisée par son vecteur position $Y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jM})$ et par son vecteur vitesse $V_j = (v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jM})$. Cette particule garde en mémoire la meilleure position par laquelle elle est déjà passée, que l'on note $P_j = (p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jM})$, appelée (pbest). L'indice j varie de 1 à s ; où s désigne la taille de l'essaim. La meilleure position atteinte par toutes les particules de l'essaim est notée (sbest). Il s'agit de la meilleure valeur parmi l'ensemble des valeurs (pbest).

Le système suivant montre le déplacement de chaque particule j :

$$\begin{aligned} v_{jl}^{k+1} = w_{jl}v_{jl}^k &+ c_1r_1^k[(pbest)_{jl}^k - x_{jl}^k] \\ &+ c_2r_2^k[(sbest)_{jl}^k - x_{jl}^k] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$x_{jl}^{k+1} = v_{jl}^{k+1} + x_{jl}^k, \quad (3.16)$$

où $v_{jl}^{k+1}, x_{jl}^{k+1}$ sont respectivement la vitesse et la position de la particule j à l'itération $k + 1$.

w_{jl} est le coefficient d'inertie dont la valeur est comprise entre 0,9 et 1,2.

c_1 et c_2 sont deux paramètres situés dans l'intervalle $[2, 4]$ appelés coefficients d'accélération.

r_1^k, r_2^k sont deux nombres aléatoires uniformément répartis dans l'intervalle $[0, 1]$.

Le double indice dans les équations (3.15) et (3.16) signifie que le premier concerne la particule j et le second, la dimension l .

$w_{jl}v_{jl}^k$ correspond à la composante physique du déplacement. Le paramètre w_{jl} contrôle l'influence de la direction de déplacement sur le déplacement futur.

$c_1r_1^k[(pbest)_{jl}^k - x_{jl}^k]$ correspond à la composante cognitive du déplacement, où c_1 contrôle le comportement cognitif de la particule.

$c_2r_2^k[(sbest)_{jl}^k - x_{jl}^k]$ correspond à la composante sociale du déplacement, où c_2 contrôle l'aptitude sociale de la particule.

PSO est un algorithme à population. Il commence par une initialisation aléatoire de l'essaim dans l'espace de recherche. A chaque itération de l'algorithme, la particule est déplacée suivant les équations (3.15) et (3.16). Une fois le déplacement des particules effectué, les nouvelles positions sont évaluées. Les (pbest) ainsi que les (sbest) sont alors mis à jour. Cette procédure est présentée dans l'algorithme PSO de base ci-dessous.

Optimisation par Essaim de Particules.

1 : Choisir la dimension M et la taille s de l'essaim.

2 : Mettre le nombre d'itérations k à zero.

3 : Evaluer, pour chaque particule, le vecteur vitesse par l'utilisation de l'équation (3.15), où pbest et sbest sont mis à jour.

4 : Déplacer chaque particule vers sa nouvelle position, d'après l'équation (3.16).

5 : Mettre $k = k + 1$.

6 : Aller à l'étape 2, et répéter l'opération jusqu'au critère d'arrêt.

Remarque 3.3. Il est commun de fixer un nombre maximum d'évaluations de la fonction objectif ou un nombre maximum d'itérations comme critère d'arrêt.

Remarque 3.4. Cette section était le sujet d'une communication personnelle intitulée "Particle Swarm Optimization to Improve the Final State Error of the Exact Boundary Controllability", présentée à la sixième Conférence Internationale sur les Métaheuristiques et le Calcul Bio-Inspiré qui s'est déroulée à Marrakech (Maroc) du 27 au 31 octobre 2016.

La figure 3.4 ci-dessous montre l'amélioration de l'erreur d'état final.

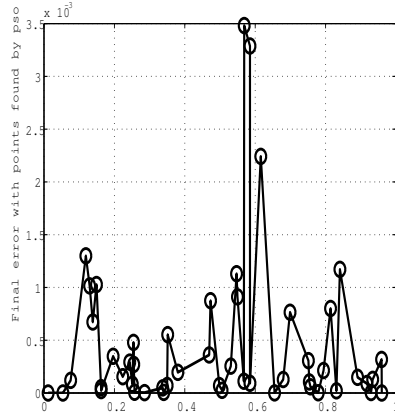


Figure 3.4 – Estimation de l'erreur d'état final de façon à ce que le système (3.2) soit à l'état d'équilibre avec des points choisis par PSO.

3.6.2. Discussion

La figure 3.4 illustre bien la diminution du calcul de l'erreur d'état final en comparaison avec la figure 3.3 de la section 3.5.

On peut dire que l'algorithme PSO a amélioré la valeur de l'erreur d'état final et de ce fait cette approche non déterministe a perfectionné la méthode des différences finies symétriques, considérée à juste titre comme une méthode déterministe.

Dans le résultat expérimental, il y a l'absence de comparaison entre la valeur de l'erreur d'état final déterminée par l'algorithme PSO, avec celles qui seraient déterminées par d'autres algorithmes comme ABC, FWA, ainsi que FPA.

Conclusion Générale

L'implémentation numérique de la méthode d'unicité hilbertienne a permis de proposer, dans un premier temps, une méthode déterministe pour l'approximation du contrôle par le bord, de type Dirichlet, de l'équation de la poutre vibrante, avec une estimation de l'erreur d'état final.

Dans un deuxième temps, l'utilisation de l'algorithme d'optimisation par essaim de particules a permis aussi de calculer la valeur de l'erreur d'état final. Les résultats montrent l'amélioration du calcul de l'erreur d'état final dans le second cas comparativement au premier.

La méthode non déterministe (stochastique) est donc considérée à juste titre comme une méthode perfectionniste, puisqu'elle a servi à améliorer le calcul de l'erreur d'état final.

Dans le futur, deux directions de travail sont envisageables. La première consistera à étudier la comparaison entre la valeur de l'erreur d'état final fournie par l'algorithme d'optimisation par essaim de particules avec celles qui seraient calculées par les méthodes non déterministes (stochastiques) comme l'algorithme des colonies d'abeilles artificielles, l'algorithme du feu d'artifices, ainsi que l'algorithme de pollinisation des fleurs, et ce dans le cadre de l'approximation numérique du contrôle exact par le bord, de type Dirichlet, de l'équation de la poutre vibrante.

La deuxième consistera à étudier la même problématique dans le cas bidimensionnel, la possibilité d'étendre l'analyse à d'autres types de contrôles frontières et à d'autres types de modèles.

Bibliographie

- [1] U. Arora and N. Sukavanam. Approximate controllability of non densely defined semilinear control system with non local conditions. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 17(1) (2017) 5-18
- [2] J. Baranger. *Analyse Numérique*. Hermann, Paris, 1991.
- [3] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30 :1024-1065, 1992.
- [4] A. Benabdallah, F. Boyer, M. G. Burgos and G. Olive. Sharp estimates of the one-dimensional boundary control cost for parabolic systems and application to the N-dimensional boundary null controllability in cylindrical domains. *SIAM Journal. Control and Optimization* 52 (5), (2014), 2970-3001
- [5] A. Benabdallah. *Equations aux Dérivées Partielles et Semigroupes*, CMI, Aix-Marseille Université, Master 2-Maths-TE-UE3-1-2018.
- [6] A. Bensoussan. On the general theory of exact controllability for skew symmetric operators. *Acta Applicandae Mathematicae* 20 (3), (1990), 197-229.
- [7] M. Bierlaire. *Introduction à l'optimisation différentiable*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2006
- [8] F. Boyer. *Controllability of PDES : Old and New*. Master 2. Mathematics and Applications. Université Paul sabatier-Toulouse 3, 2018.
- [9] S. P. Bradley, A. C. Hax and T. L. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley, 1977.
- [10] C. Carthel, R. Glowinski and J. L. Lions. On exact and approximate boundary controllability for the heat equation : A numerical approach. *Journal of optimization, Theory and Applications* 82 (3), (1994) 429-484.
- [11] E. K. P. Chong and S. H. Zak. *An Introduction to Optimization*, Second Edition, Wiley-Intersciences Series in Discrete Mathematics and Optimization, 2001.
- [12] Y. Chitour, G. Mazanti and M. Sigalotti. *Approximate and Exact Controllability of Linear Difference Equations*, 2017. hal-01575576v2.
- [13] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, paris, 1994.
- [14] R. W. Clough and J. Penzien. *Dynamique des structures, tome 1 : Principes fondamentaux*, 1980.
- [15] A. Colomi, M. Dorigo and V. Maniezzo. *Distributed Optimization by Ant Colonies*. Proceedings of the first European Conference on Artificial Life, 1992, pp. 134-142 Elsever Publishing.

- [16] T. Cristian. The particle swarm optimization algorithm : convergence, analysis and parameter selection. *Information Processing Letters* 85 (6), (2003), 317-325.
- [17] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extension*, Princeton University Press, 1963.
- [18] E. Dean, R. Glowinski and C. H. Li. Supercomputer solutions of partial differential equation problems in computational fluid dynamics and in control. *Computer Physics Communications* 53 (1-3) 401-439, 1989
- [19] P. Duchateau and D. W. Zachmann. *Schaum's of theory and problems for partial differential equations*. McGraw Hill, New York, 1986.
- [20] P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright. *Practical Optimization* Press Inc, 1981
- [21] R. Glowinski, C. H. Li and J. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation(I) Dirichlet controls : Description of the numerical methods. *Japan Journal of Applied Mathematics* 7 (1) 1-76, 1990.
- [22] R. Glowinski and C. H. Li. On the numerical implementation of the Hilbert uniqueness method for the exact boundary controllability of the wave equation. *C.R.acad.Sci.Paris, série I Math* 311 (2) (1990), 135-142.
- [23] R. Glowinski. Ensuring well-posedness by analogy ; stockes problem and boundary control for the wave equation. *Journal of Computational Physics* 103 (2) (1992), 189-221.
- [24] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Serach, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.
- [25] M. Gunzburger, L. Hou and L. A. Ju. Numerical method for exact boundary controllability problems for the wave equation. *Journal Computers and Mathematics with Applications* 51 (5) (2006), 721-750.
- [26] F. Heppner and U. Grenander. *A stochastic nonlinear odel for coordinated bird flocks*. AAAS Publication, Washington, DC, 1990.
- [27] J. Holland. *Genetic Algorithms and the Optimal allocation of trials*. *SIAM Journal of Computing* Vol.2, pp.88-105, 1973.
- [28] D. Karaboga and B. Basturk. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization : artificial bee colony (ABC) algorithm. *J. Glob. Optim* (2007) 39 : 459-471.
- [29] J. Kennedy and R.C. Eberhart. Particle Swarm Optimization. In : *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942-1948 (1995).
- [30] A. Khernane. Numerical Approximation of the Exact Control for the Vibrating Rod with Improvement of the Final Error by patricle swarm Optimization. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 20(2) (2020) 179-190.

- [31] G. Knowles (1982). Finite element approximation of parabolic time optimal control problems. *SIAM.J.Cont.Optim.* 29, 414-427.
- [32] S. Kumar. Approximate controllability of non local impulsive fractional order semilinear time varying delay systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 16(4) (2016) 420-430.
- [33] S. Labbe. Modélisation et Simulation de Quelques systèmes non Linéaires et Linéaires. Habilitation à Diriger des recherches en Sciences. Spécialité : mathématiques. Université Paris 11, 2006.
- [34] P. Lascaux and R. Theodor. Analyse Numérique matricielle appliquée à l'Art de l'Ingénieur. Masson, Paris, 1987.
- [35] X.D. Li. Observation et commande de quelques systèmes à paramètres distribués, université Claude Bernard-Lyon I, 2009. Français. NNT : 2009LYO10316, tel-00456850v2.
- [36] J. L. Lions. Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, volume 1, Masson. Paris, 1988.
- [37] A. Lopez and E. Zuazua.(1997). Some new results related to the null controllability of the 1D heat equation, *Seminaire EDP*, 1997-1998, Ecole Polytechnique, Paris
- [38] A. Munch. Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle et d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques. Habilitation à Diriger des recherches. Université de Franche-Comté, U.F.R des Sciences et Techniques, 2008.
- [39] C. Prieur. Contrôlabilité et Stabilisation optimales en dimension finie ou infinie. Habilitation à diriger des recherches. Université Paul Sabatier, Toulouse, 2009.
- [40] J. P. Puel. Contrôle et Equations aux Dérivées Partielles. Laboratoire de Mathématiques de Versailles, Université de Versailles St Quentin, 2003.
- [41] C. W. Reynolds. Flocks, herds and schools : A distributed behavioral model. *Computer Graphics*, 21(4) : 25-34, 1987.
- [42] T. Roubicek.(1992). A stable approximation of a constrained optimal control problem for continuous casting. *Num.Funct.Anal.Optim.* 13, 487-494.
- [43] D.L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Appli. Math.*, 52, 189-221.
- [44] D.L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions. *SIAM Review* 20 (4) (1978), 639-739.
- [45] M. Sibony and J.C. Mardon. Analyse Numérique II. Approximations et Equations Différentielles. Paris, 1982.
- [46] Y. Tan, Y. Shi and K.C. Tan. Fireworks Algorithm for Optimization. *ICSI, Part I, LNCS 6145*, pp. 355-364, 2010.

- [47] Y. Tan. Fireworks Algorithm. A Novel Swarm Intelligence Optimization Method, Springer 2015.
- [48] X. S. Yang. Engineering Optimization. An Introduction with Metaheuristic Applications. John Wiley & Sons, 2010.
- [49] X. S. Yang. Flower Pollination Algorithm for Global Optimization, in : Unconventional Computation. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7445, pp. 240-249 (2012).
- [50] J. Zabczyk. Mathematical Control Theory. An Introduction. Birkhauser, Boston, 2008.
- [51] E. Zuazua. Contrôlabilité exacte d'un modèle de plaques vibrantes en un temps arbitrairement petit. C.R.acad.Sci.Paris, série I Math 304 (7) (1987), 173-176.
- [52] E. Zuazua. Propagation, observation, control and numerical approximations of waves approximated by finite difference methods. SIAM Review, 47, 197-243, 2005.
- [53] E. Zuazua. Controllability of Partial Differential Equations. 3rd Cycle. Castro Urdiales (Espagne), 2006, pp.311 cel-00392196.