



Université Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd

Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique



Thèse

Préparée au sein du Laboratoire d'innovation en construction, éco-conception et génie sismique LICEGS.

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat LMD

Option : Construction mécanique

Sous le Thème

Contribution à l'analyse des structures par approche numérique en déformation

Présenté par :

CHICHOUNE Samira

Soutenue publiquement le : 26/05/2024

Devant le jury composé de :

AMEDDAH Hacene	Prof	Université de Batna2	Président
REBIAI Cherif	Prof	Université de Batna2	Rapporteur
BAHLOUL Elhachemi	MCA	Université de Batna 2	Co-Rapporteur
CHAHAOUI Oualid	Prof	Université de Khenchela	Examineur
ZIANI Rida	MCA	Université de Setif I	Examineur
GUERRAICHE Khelifa	Prof	Université de Batna 2	Examineur
ATMANI Youcef	MCB	ENSTA Dergana	Invité

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mes parents et mes frères et sœur

Ma famille

Et mes amis.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie en premier lieu Allah tout puissant qui m'a donné le courage et la volonté de pouvoir accomplir ce travail.

Je voudrais ensuite exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements à mon directeur de thèse, Professeur **Cherif REBIAI**, qui m'a dirigé durant la période de la thèse avec grande patience, et pour sa confiance, sa disponibilité pendant les quatre années de travail de thèse de doctorat. Je tiens en particulier le remercier très sincèrement pour sa motivation et son enthousiasme constants à nous faire partager ses connaissances, son expérience et ses projets.

Je remercie également à mon co-directeur de thèse, Dr **Elhachemi BAHLOUL**.

Je tiens à remercier, le Professeur **Hacene AMEDDAH**, d'avoir accepté de présider cette soutenance, ainsi que les membres de jury, Professeur **Walid CHAHAOUI** de l'Université de Khenchela, Professeur **Khelifa GUERRAICHE** de l'Université de Batna 2, et Dr. **Ridha ZIANI** de l'Université de Setif1, qui ont accepté d'être examinateurs. Je les remercie très sincèrement, et je remercie Dr. **Youcef ATMANI** de l'Ecole Nationale Supérieure des Technologies Avancées (ENSTA) de Dergana pour accepté d'être Invité à cette soutenance.

J'exprime mes vifs remerciements aux enseignants du département de Génie Mécanique de l'Université de Batna2.

Des remerciements chaleureux vont aussi aux membres du laboratoire LICEGS, en particulier Pr. **Hamoudi MAZOUZ**, Pr. **Mourad BRIOUA**, Pr. **Hacene AMEDDAH**, ainsi que mes collègues doctorants.

SOMMAIRE

ملخص.....	ii
RESUME.....	ii
ABSTRACT.....	ii
NOTATIONS.....	iii
LISTE DES FIGURES.....	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	vi
INTRODUCTION GENERALE.....	1

Chapitre 1.

GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1.1. Introduction.....	4
1.2. Généralité	4
1.3. Principe de base.....	5
1.4. Interprétation physique.....	6
1.5. Concept de la M.E.F.....	9
1.5.1. Étapes du calcul par éléments finis	10
1.5.2. Taille des éléments finis	11
1.5.3. Type d'éléments finis	11
1.5.4. Choix des éléments finis.....	12
1.5.5. Qualité d'un élément fini	12
1.6. Discrétisation d'une structure	13
1.6.1. Idéalisation et discrétisation d'une structure.....	13
1.7. Les différentes formulations de la M.E.F.....	14
1.7.1 Formulation en déplacement	14
1.7.2. Formulation "équilibre" (contraintes ou forces).....	15
1.7.3. Formulation hybride.....	15
1.7.4. Formulation mixte.....	16
1.7.5. Formulation en déformation.....	16
1.8. Choix des fonctions de déplacement et conditions de convergence.....	17
1.9. Puissance de la méthode des éléments finis.....	17
1.9.1. La topologie.....	17
1.9.2. La rhéologie.....	17

1.10. Nœuds.....	18
1.11. Construction d'un maillage d'éléments finis.....	19
1.16.1. Règles générales pour la construction des maillages.....	19
1.12. Contribution de l'approche en déformation dans l'analyse des structures.....	20
1.12.1. Procédure de la formulation des éléments à champ de déformation.....	21
1.12.1.1. Exigences et conditions de base	21
1.12.1.2. Principes de la méthode	22
1.12.1.3. Procédure de formulation	22
1.12.1.4. Ses avantages.....	24
1.12.2. Déformations imposées de quelques éléments plaques existants dans la littérature.....	24
1.13. Revues sur les éléments plaques basés sur la déformation.....	25
1.14. Conclusion.....	31

Chapitre 2.

LA THEORIE DES PLAQUES

2.1. Introduction.....	32
2.2. Equations de base d'élasticité plane	33
2.2.1. Relation déformations-déplacements (relation cinématiques)	34
2.2.2. Equations d'équilibre	34
2.2.3. Equation de compatibilité	34
2.2.4. Relation contraintes-déformations (équations constitutives)	34
2.3. Rappels sur les théories des plaques	35
2.3.1. Historique	35
2.3.2 Eléments de plaque	35
2.3.3. Formulation.....	36
2.3.4. Hypothèses pour l'étude des plaques.....	37
2.3.5. La théorie des plaques minces	37
2.3.5.1 Champs de déplacements.....	38
2.3.5.2 Expression des déformations.....	39
2.3.5.3 Relations contraintes- déformations.....	40
2.3.5.4 Relations moments – courbures.....	41

2.3.5.5 Relations contraintes – moments.....	41
2.3.5.6 Flexion des plaques sous charges latérales réparties.....	42
2.3.4.7 Conditions aux limites	44
2.3.6. Théorie des plaques épaisses.....	45
2.3.6.1 Champ de déplacements.....	46
2.3.6.2 Relations contraintes – déformations.....	46
2.3.6.3 Efforts tranchants et moments de flexion.....	47
2.3.6.4 Fonctions d'énergie	48
2.3.6.5 Conditions aux limites.....	49
2.4. Blocage en cisaillement transverse (verrouillage en CT).....	50
2.4.1. Description de l'aspect analytique du verrouillage.....	50
2.5. Problèmes d'analyse des plaques	51
2.5.1. Le problème du blocage en cisaillement dans les plaques minces	51
2.5.2. L'effet du rapport hauteur/largeur de la plaque sur la précision de l'élément.....	52
2.5.3. Le problème des singularités de contraintes aux coins de la plaque	54
2.6. Contribution des éléments rectangulaires à l'analyse des plaques	55
2.7. Conclusion.....	57

Chapitre 3.

DEVELOPPEMENT ET VALIDATION NUMERIQUE EN LINEAIRE D'UN NOUVEL ELEMENT RECTANGULAIRE A 4 NŒUDS BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION POUR L'ANALYSE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION

3.1. Introduction	58
3.2. Construction de l'élément SBPE	59
3.2.1. Définition.....	59
3.2.2. Formulation de base.....	59
3.2.3. Formulation du nouvel élément SBPE.....	61
3.3. Validation numérique en linéaire.....	63
3.3.1. Plaque carrée avec deux bords encastres et deux bords libres.....	64
3.3.2. Torsion d'une plaque carrée.....	67
3.3.3. Plaque encastree.....	68
3.3.4. Plaque encastree sous charge concentree.....	69

3.3.5. Poutre encastrée sous charge concentrée.....	71
3.3.6. Grande flèche d'une plaque encastrée.....	72
3.4. Conclusion.....	74

Chapitre 4.

FORMULATION ET VALIDATION NUMERIQUE EN LINEAIRE D'UN NOUVEL ELEMENT FINI MEMBRANAIRE BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION

4.1. Introduction	75
4.2. Considération théorique de l'élément SBEDR	76
4.2.1. Définition.....	76
4.2.2. Formulation matricielle.....	76
4.2.3. Intégration numérique	78
4.2.4. Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire [Ke].....	79
4.3. Validation numérique du nouvel élément fini en linéaire	80
4.3.1. Cas de tests numériques en linéaire	80
4.3.1.1. Poutre console élancée de Mac Neal	81
4.3.1.2. Poutre console courte d'Allman	82
4.4. Validation numérique de l'élément SBEDR en Vibration libre.....	83
4.4.1 Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire	84
4.5. Conclusion.....	85
 Conclusion générale.....	 86
Bibliographie.....	88
Annexe.....	97
Les travaux de recherches effectués	100

ملخص

تتناول هذه الأطروحة في الجزء الأول تطوير عنصر محدود جديد بسيط مستطيل مكون من أربع عقد لتحليل انحناء الصفائح الرقيقة يعتمد مجال حقل الانتقال لهذا العنصر على الوظائف المفترضة لمختلف التشوهات التي تلبي معادلات التوافق، يتمتع هذا العنصر المطور بثلاث درجات من الحرية في كل عقدة (دورتان وانزلاق واحد)، وقد اجتاز بنجاح اختبارات القياس في حالة الصفائح الرقيقة بدون ظاهرة القص العرضي (T.C). تتقارب النتائج العددية التي تم الحصول عليها باستخدام العنصر المطور نحو الحلول التحليلية والمرجعية والمضبوطة. وفي الجزء الثاني، تم تطوير عنصر محدود غشائي جديد يعتمد على صياغة التشوهات مع درجة الدوران لتحليل الاهتزازات الساكنة والحرية. يحتوي على أربع عقد وثلاث درجات من الحرية في كل عقدة (انتقالان ودوران وهمي واحد) مجال الإزاحة لهذا العنصر المحدود يلبي معادلات التوافق. تم حل العديد من الأمثلة العددية بواسطة هذا العنصر وكانت النتائج التي تم الحصول عليها تتفق بشكل جيد مع الحلول التحليلية.

الكلمات المفتاحية: مبدأ التشوه، التحليل الخطي، تحليل انحناء الصفائح، عنصر محدود غشائي، التحليل الديناميكي

RESUME

Cette thèse, dans une première partie, porte sur le développement d'un nouvel élément fini rectangulaire simple à quatre nœuds pour l'analyse en flexion de plaques minces. Le champ de déplacements de cet élément est basé sur les fonctions supposées pour les différentes déformations satisfaisant les équations de compatibilité. Cet élément développé possède trois degrés de liberté à chaque nœud (deux rotations et une translation), et a passé avec succès les tests de référence dans le cas de plaques minces sans phénomène de verrouillage en cisaillement. Les résultats numériques obtenus en utilisant l'élément développé convergent vers des solutions analytiques et de référence.

Dans une deuxième partie, un nouvel élément fini membranaire basé sur la formulation en déformations avec rotation dans le plan pour l'analyse statique et vibratoire libre a été développée. Il contient quatre nœuds et trois degrés de liberté à chaque nœud (deux translations et une rotation fictive). Le champ de déplacements de cet élément fini satisfait les équations de compatibilité. Plusieurs exemples numériques ont été résolus par cet élément et les résultats obtenus sont en bonne concordance avec les solutions analytiques.

Mots clés : Approche de déformation, Analyse linéaire, Analyse de flexion de plaque, Élément membranaire, Analyse dynamique.

ABSTRACT

This thesis in first part, deals with the development of a new simple four node rectangular finite element for bending analysis of thin plates. The displacements field of this element is based on the assumed functions for the various strains satisfying the compatibility equations. This developed element has three degrees of freedom at each node (two rotations and one translation), and it passed successfully benchmark tests in the case of thin plates without shear locking phenomena. The obtained numerical results using the developed element converge toward both analytical and reference solutions.

In second part a new membrane finite element based on the strain formulation with drilling rotation for the static and free vibration analysis has been developed. It contains four nodes and three degrees of freedom at each node (two translations and one fictive rotation). The displacements field of this finite element satisfies the compatibility equations. Several numerical examples have been resolved by this element and obtained results are in good concordance with analytical solutions.

Keywords: Strain approach, Linear analysis, Plate-bending analysis, Membrane element, Dynamic analysis.

NOTATIONS

$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[K]$	Matrice de rigidité globale
$[Q]$	Matrice de déformation
$[K_0]$	Matrice de rigidité $[K_0]$
ddl	Degrés de liberté
$[J]$	Matrice Jacobéenne
$[C]$	Matrice de Transformation
$[D]$	Matrice d'élasticité
M.E.F	Méthode des éléments finis.
$\int$	Intégrale.
$[\]$	Matrice
$[\]^T$	Matrice transposé.
$[\]^{-1}$	Matrice inverse.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes du repère global.
ξ, η	Coordonnées du repère naturel.
u, v, w	Déplacements suivant les directions x, y et z respectivement.
β_x, β_y	Rotations suivant les axes x, y respectivement.
$k_x, k_y \text{ et } k_{xy}$	Déformations directes suivant x et y respectivement.
$M_x, M_y \text{ et } M_{xy}$	Composantes de Le vecteur moment.
U	Le vecteur de déplacement nodal.
A	Le vecteur de paramètres indéterminés $\{a_i\}$

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1.

Figure 1.1	Cadre plan.....	6
Figure 1.2	Structure (Buse enterré) et sa discrétisation.....	7
Figure 1.3	Structure (Tunnel enterré) et sa discrétisation.....	8
Figure 1.4	Paroi sur colonnes.....	8
Figure 1.5	Structure type en génie civil et sa discrétisation.....	9
Figure 1.6	Maillage d'un milieu continu.....	10
Figure 1.7	Eléments finis divers (barre ; fil ; triangles et quadrilatères 2D ; tétraèdres, prisme, briques (3D) ; poutres 2D ou 3D ; plaques ; membrane ; coque mince ; coque d'épaisseur modérée variable ; coque de révolution ; solide de révolution).....	12
Figure 1.8	Nœud physique.....	18
Figure 1.9	Nœud de discrétisation.....	18
Figure 1.10	Défaut de maillage.....	19

Chapitre 2.

Figure 2.1	Corps solide soumis à des forces de volume (f_i) et de surfaces (ϕ_i).....	33
Figure 2.2	Modèle en contrainte plane (a) et modèle en déformation plane(b).....	34
Figure 2.3	Plaque en flexion.....	36
Figure 2.4	Plans de flexion de la plaque.....	37
Figure 2.5	Hypothèse des sections droites selon la théorie de Kirchhoff.....	38
Figure 2.6	Plaque mince – déplacements.....	39
Figure 2.7	Contraintes et moments de flexion dans une plaque.....	42
Figure 2.8	Forces et moments agissant sur l'élément de plaque.....	43

Figure 2.9	Hypothèse des sections droites selon la théorie de Mindlin.....	45
Figure 2.10	Plaque épaisse – déplacements et rotations.....	45

Chapitre 3.

Figure 3.1	Système de coordonnées et DDL de l'élément Plaque	59
Figure 3.2	Plaque carrée serrée soumise à (1) une charge concentrée dans l'angle libre et (2) une charge uniformément répartie.....	65
Figure 3.3	Torsion d'une plaque carrée	67
Figure 3.4	Géométrie et charges de la plaque encastrée.....	68
Figure 3.5	Plaque encastrée sous charge concentrée.....	70
Figure 3.6	Poutre encastrée.....	71
Figure 3.7	Poutre soumise au moment	72
Figure 3.8	Analyse du déplacement d'une poutre encastrée sous contrainte de moment	73

Chapitre 4.

Figure 4.1	Elément SBEDR avec rotation dans le plan.....	76
Figure 4.2	Poutre console élancée de Mac-Neal soumise à (1) cisaillement pur et (2)...	81
Figure 4.3	flexion pure	83
Figure 4.4	Poutre console d'Allman	84

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 2.

Tableau 2.1	Conditions aux limites plaque Kirchhoff	44
Tableau 2.2	Conditions aux limites plaque Mindlin.....	50
Tableau 2.3	Interpolations des déplacements (W , β_x et β_y) et des déformations ($\{\kappa\}$ et $\{\gamma\}$).....	51

Chapitre 3.

Tableau 3.1	Plaque carrée avec deux bords serrés et deux bords libres- premier cas $V=0,3$; $E=3600$; $P=100$; $L=10$; $e=0,4$	65
Tableau 3.2	Plaque carrée avec deux arêtes serrées et deux arêtes libres- premier cas $V=0$; $E=3600$; $P=100$; $L=10$; $e=0,4$	66
Tableau 3.3	Plaque carrée avec deux bords encastres et deux bords libres-deuxième cas $V=0$; $E=1000$; $q=1$; $L=1$; $e=0,1$	66
Tableau 3.4	Plaque carrée avec deux bords encastres et deux bords libres-deuxième cas $V=0,3$; $E=3600$; $q=0,9$; $L=10$; $e=0,4$	66
Tableau 3.5	Torsion dans une plaque : déplacements.....	67
Tableau 3.6	Résultats du cas de plaque encastree (a).....	69
Tableau 3.7	Résultats du cas de plaque encastree(b).....	69
Tableau 3.8	Résultats du cas de plaque encastree(c).....	69
Tableau 3.9	Déplacement transversal normalisé de la pointe en plaque encastree (maillage régulier).....	70
Tableau 3.10	Déplacement transversal normalisé de la pointe en plaque encastree (maille déformée)	71
Tableau 3.11	Déplacement vertical de la poutre encastree sous charge Concentrée	72

Chapitre 4.

Tableau 4.1	Déflexion Normalisée de la poutre console élancée de MacNeal (cisaillement pure).....	82
Tableau 4.2	Déflexion Normalisée pour la poutre console élancée de MacNeal (flexion pure).....	82
Tableau 4.3	Déplacement vertical au point A.....	83
Tableau 4.4	Valeurs propres de la poutre cantilever "déformation plane".....	84

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Les éléments plaques sont des éléments avec trois nœuds, quatre nœuds ou plus formulés dans l'espace bidimensionnel. Ils sont utilisés pour modéliser des structures d'une épaisseur spécifiée qui présentent des efforts appliqués perpendiculairement à cette épaisseur.

Les plaques de formes diverses sont couramment utilisées comme systèmes structurels ou composants structurels. Le plus souvent, les plaques à modéliser font partie des systèmes des constructions ; génie civil, aéronautique, navales, et sont souvent utilisées en association avec des poutres et des colonnes. En général, il y a suffisamment de place pour une variation de géométrie, d'épaisseur et de chargement, et par conséquent, l'analyse de structures plaques et aussi complexes et présente souvent des difficultés considérables.

Il est largement admis qu'une structure doit être correctement analysée pour déterminer les charges de travail, ainsi qu'au stade de la rupture. Au moyen d'une analyse élastique, on est en mesure de déterminer les contraintes et les déformations qui se produisent sous les charges de travail, en des points sélectionnés d'une structure. Si les contraintes déterminées restent inférieures aux contraintes admissibles, l'expérience montre qu'une structure ne risque pas de se briser. Une analyse élastique précise est également nécessaire pour les considérations de fatigue et le contrôle de la fissuration dans les structures c'est-à-dire que les contraintes doivent être maintenues en dessous de certains niveaux afin d'éviter la fatigue ou les fissures excessives. Une analyse élastique précise est la condition préalable à l'établissement de telles lignes directrices.

Concernant le modèle éléments finis, et plus précisément les plaques, deux principales types de plaques auxquels la recherche en éléments finis jusqu'à un temps récent continue de faire appel :

- Les éléments plaques minces de différentes formes avec ou sans degrés de liberté additionnels.
- Les éléments plaques épaisses de différentes formes avec ou sans degrés de liberté additionnels.

But du Travail de thèse

En général l'objectif principal pour développer un élément plaque ou de membrane c'est d'améliorer la précision élémentaire en calcul de la flexion des plaques ou de structure, et de minimiser son cout (temps de calcul). Le deuxième objectif c'est d'avoir un élément de plaque idéal pour les jumeler avec l'élément de membrane en vue de construire un élément coque.

Dans cette thèse la précision élémentaire en calcul est visée. Le deuxième objectif est la formulation d'un nouvel élément coque qui sera porté comme perspective.

Objectif de la thèse

Ce travail entre dans le cadre général du développement et de la validation d'éléments finis de type plaques minces et éléments membranaires efficaces pour le calcul des structures.

Pour l'analyse des plaques minces en flexion, les éléments à modèles en déplacement présentent des problèmes de convergence et de blocage en C.T, et nécessitent un nombre d'éléments plus grand en maillage contrairement aux éléments basés sur l'approche en déformation qui ont montrés une très bonne efficacité dans le calcul et maillage moins raffiné. Dans ce contexte, nous proposons dans ce travail de thèse :

- Le développement d'un élément fini plaque rectangulaire qui, à pour but d'améliorer l'analyse en termes de résultats et de temps de calcul pour l'analyse linéaire des plaques, nommé **SBPE** (Strain Based Plate Element), et qui possède quatre nœuds de coin avec trois degrés de liberté en chaque nœud adapté à l'analyse des problèmes classiques de la flexion des plaques.

- Formulation et validation d'un nouvel élément fini de membrane en utilisant l'approche en déformation pour les analyses statiques et dynamiques, Cet élément appelé **SBEDR** (Strain Based Element with Drilling Rotation), les performances de l'élément développé ont été évaluées à l'aide d'une série de tests numériques rigoureux tirés de la littérature. Les résultats obtenus démontrent une convergence et une précision remarquables de l'élément, en particulier dans les cas de flexion pure et de cisaillement pure dans les cas linéaire. La concordance remarquable entre les résultats de l'élément et les solutions analytiques dans tous les tests effectués confirme son efficacité dans l'analyse linéaire et dynamique des structures.

Plan de la thèse

La thèse est divisée en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une présentation générale de la méthode des éléments finis (MEF). Après avoir exposé les bases de cette méthode, ensuite une revue de littérature sur les éléments plaques basés sur l'approche en déformation a été décrite aussi dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre présente une présentation théorique complète des plaques, en se basant sur les cas des plaques minces et épaisses, nous abordons ensuite la question de l'application des conditions aux limites sur ces plaques. Nous avons conclu le chapitre avec les problèmes courants liés à l'analyse des plaques.

Dans **le troisième chapitre** le développement, la formulation et la validation du nouvel élément fini **SBPE** à quatre nœuds basés sur l'approche en déformation est présenté. Cet élément qui vérifie les équations de compatibilité comme condition a été validé pour l'analyse linéaire des plaques minces. La performance et la robustesse de l'élément **SBPE** ont été montrées à travers une série de tests réputés sévères pour la validation. Les résultats du nouvel élément sont en bon accord aussi avec des résultats analytiques dans tous les tests.

Dans **le quatrième chapitre** on procédé à la formulation et la validation d'un nouvel élément membranaire basé sur l'approche en déformation nommé **SBEDR**. On a montré la bonne convergence ainsi que la bonne précision de l'élément développé à travers une série d'exemples numériques choisis dans la littérature. Les résultats du l'élément sont en bon accord aussi avec celles des résultats analytiques dans tous les tests, ce qui montre son efficacité dans l'analyse linéaire et dynamique des structures.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Chapitre 1. GENERALITE SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1.1. Introduction

Les plaques minces constituent un élément essentiel dans de nombreuses applications d'ingénierie, des structures d'avions et d'automobiles aux ponts et aux appareils électroniques miniaturisés. L'analyse précise du comportement de ces plaques est essentielle pour garantir la sécurité et l'efficacité de ces structures. La méthode des éléments finis est un outil puissant pour atteindre cet objectif.

Cependant, l'efficacité de cette méthode dépend largement du type d'élément fini utilisé. Dans ce chapitre, nous concentrerons sur l'approche déformationnelle pour construire des éléments finis. Cette approche se distingue par sa capacité à représenter avec précision le comportement des structures, même dans des cas de charge complexes.

Nous commencerons par présenter les principes fondamentaux de la méthode des éléments finis, puis nous passerons en revue les différents types d'éléments finis, en nous concentrant sur leurs caractéristiques et leurs avantages.

Une revue de la littérature sur la méthode de déformation et les aspects qui contribuent à la compréhension de cette méthode constitue la matière première de ce chapitre.

Ce chapitre résulte d'une synthèse de références suivantes : [1], [2], [3].

1.2. Généralité

Dans le domaine du calcul des constructions, les connaissances fondamentales sont représentées par les théories de la mécanique des matériaux :

Elasticité, plasticité, viscoélasticité, etc. éventuellement appliquées à des structures diverses : poutres, plaques, coques, etc. Il y a une trentaine d'années, on admettait que les équations générales de ces théories étaient in-intégrables et ne pouvaient servir à rien dans la pratique du métier d'ingénieur.

A l'heure actuelle, chacun est convaincu que ces diverses théories sont très importantes, aux yeux de l'ingénieur, pour l'appréciation correcte du comportement des constructions, et des matériaux les composants, en service ou jusqu'au stade de ruine. Il en résulte que l'objectif actuel de la mécanique des matériaux est de fournir un modèle mathématique et des méthodes d'intégration qui permettent de calculer effectivement les contraintes, les déformations et les déplacements dans une structure en équilibre, quelles que soient les sollicitations extérieures

(Forces, températures, etc.), quel que soit le comportement du matériau qui compose la structure (élastique, plastique, etc.).

On peut généraliser encore l'objectif déjà très ambitieux qui vient d'être énoncé en y incluant le comportement des structures sous l'effet de sollicitations dynamiques, le calcul des charges critiques des structures par bifurcation de l'équilibre ou par divergence, etc.

En employant la technique des éléments finis, il est possible de résoudre effectivement tous ces problèmes dont il était quasiment impensable de s'occuper il y a seulement vingt à trente ans. C'est dire l'extraordinaire puissance de cette nouvelle méthode. Elle a pris son envol vers les années 1955-1956 ; elle a d'abord été comprise et appliquée physiquement à la résolution des problèmes de structure de difficulté croissante : ossatures en barres, élasticité linéaire plane, flexion des plaques minces, coques minces de révolution, etc. en même temps que la méthode en question permet en fait la résolution numérique approchée de tout problème de physique. C'est ainsi qu'on l'applique à la solution de plusieurs problèmes en mécanique.

Actuellement, cette méthode en est à un point de développement tel qu'elle permet de palier à une étonnante complexité. Elle est d'emploi certainement quotidien dans bien des bureaux d'études (sur tout aux Etats-Unis) et fait l'Object d'études et de développements approfondis dans toutes les universités et centres de recherche. Son développement est de plus parallèle à celui des ordinateurs ; cette technique conduisant à traiter simultanément une grande masse de chiffres, sa puissance et son efficacité sont directement liés aux caractéristiques semblables des calculatrices électroniques.

1.3. Principe de base

La M.E.F est une méthode numérique permet de résoudre approximativement des complexités de terrain pouvant être exprimés sous forme variationnelle. Cette technique est une extension de la méthode RAYLEIGH-RITZ : au lieu d'appliquer cette dernière à l'ensemble du domaine d'étude du domaine étudié, la M.E.F l'applique à des zones petites du domaine, en incluant des juxtapositions pour reconstruire le domaine complet. C'est l'idée principale de cette méthode, une idée simple et universelle, tant ses avantages et sa puissance sautent aux yeux : Dans les sous-régions du domaine segmenté on peut évidemment choisir des fonctions beaucoup plus simples pour approximer le domaine souhaité que celles utilisées pour décrire le domaine complet ; grâce à la subdivision du **domaine** on peut facilement s'adapter à la forme complexe de ce dernier, notamment son contour ; ainsi, nous éliminons certaines des principales

difficultés de la méthode RAYLEICH-RITZ, à savoir le choix de la fonction qui décrit le champ complet et le respect des conditions aux limites.

Par la suite, ces idées générales de base seront appliquées au calcul des structures, ce qui permet de les visualiser et d'en faire saisir le sens physique.

1.4. Interprétation physique

L'interprétation physique consiste à considérer une structure comme formée d'ensembles de composants ou d'éléments structuraux individuels (c'est-à-dire des éléments finis). La structure est subdivisée en un nombre limité de tels éléments, reliés par un nombre limité de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments, nœuds. Ces conditions stipulent uniquement que les paramètres des différents champs au niveau du nœud commun sont égaux. Les paramètres sont les valeurs locales du champ cherché aux nœuds considérés, à savoir, le plus souvent, des déplacements, des déformations ou des intensités d'états d'autocontrainte.

Ces notions s'appliquent naturellement à une structure formée de barres, par exemple le cadre plan figure1-1. Les éléments de cette structure sont les barres ; elles ont un caractère unidimensionnel, c'est-à-dire que leurs caractéristiques mécaniques peuvent s'exprimer en fonction d'une seule variable, au sens de la résistance des matériaux. Les nœuds sont les points de jonction des barres. Cette ossature peut se résoudre par les méthodes classiques des forces ou des déplacements ; dans cette dernière par exemple, les paramètres du champ inconnu des déplacements sont les trois composantes u , v , Θ_z du déplacement des nœuds ; on sait qu'on les détermine par un système d'équations qui physiquement, exprime l'équilibre de ces nœuds.

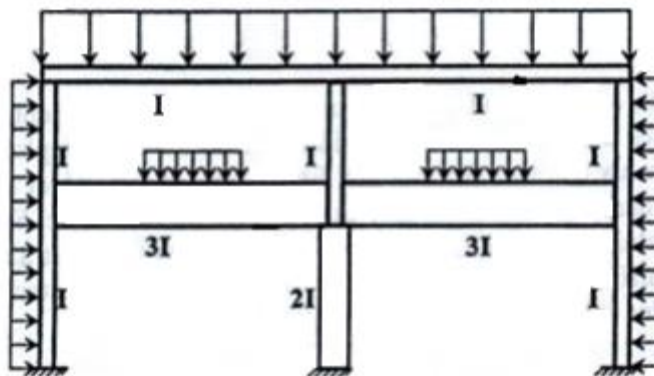


Figure1.1. cadre plan

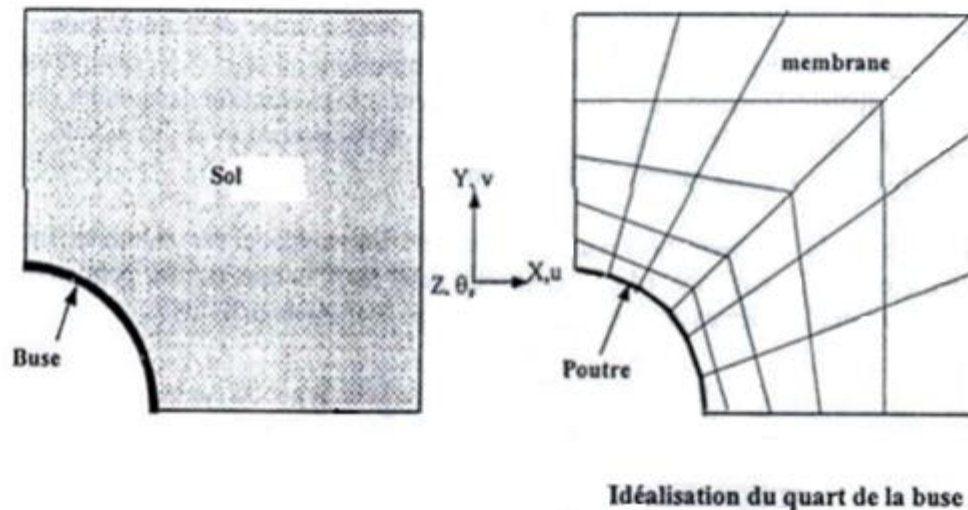


Figure 1.2. Structure (Buse enterré) et sa discrétisation

La méthode des éléments finis apporte une importante extension à ces notions classiques par l'introduction d'éléments structuraux à deux et à trois dimensions, destinés à représenter des corps continus ainsi, la partie sol du buse enterré de la figure 1.2 est idéalisée par un assemblage d'éléments plans quadrangulaire, L'approximation faite entre la structure réelle et son idéalisation est de nature physique : un système structural modifié est substitué à la structure réelle ; mais il n'y a pas d'approximation dans le calcul de la structure idéalisée, ce qui distingue la méthode des éléments finis de celle des différences finies, où les équations exactes du système physique réel sont résolues par des méthodes mathématiques approchées.

La représentation d'un continu par des éléments structuraux assemblés n'est pas une idée nouvelle (approximation des plaques par des grilles de poutres, etc.) ; l'idée nouvelle est l'élément fini à deux ou trois dimensions, permettant de reproduire exactement les mêmes propriétés physiques que le continu qu'il divise.

L'analyse de structures complexes pose plusieurs défis aux ingénieurs. Traditionnellement, on découpe chaque structure en composants plus **simples** qui sont analysés indépendamment les uns des autres (découplage structure-fonction). Cette approche est souvent discutable. On essaie donc parfois d'analyser l'ensemble de la structure d'un seul coup en utilisant la méthode des éléments finis, aussi complexe soit-elle. Ce dernier divise la structure en composants de base et l'ensemble est calculé en une seule fois. Les avantages sont nombreux :

- Moins de simplifications
- Les interactions entre les composants seront bien prises.
- Mieux évaluer visuellement la structure

- Détection de tout incident.
- Conception moins couteuse

Cependant, dans la discrétisation de structures complexes, la compatibilité entre unités est souvent un problème difficile. Cette compatibilité est nécessaire pour garantir la convergence, même si les tests peuvent être légèrement assouplis en raison des correctifs. De tels problèmes de compatibilité surviennent lors de la combinaison d'éléments solides et structuraux (qui peuvent inclure des éléments de membrane et de poutre) ; les inconnues nodales des membranes sont les deux traductions U et V , qui sont incompatibles avec les inconnues nodales des poutres, dont les inconnues nodales sont autres que in en plus de U et V , la rotation Θ_z est également incluse. Des difficultés de même nature sont rencontrées aux intersections de coques ou de structures pliées, aux nœuds reliant les poutres et les raidisseurs à la coque. L'idée nouvelle de la représentation d'un continu est l'assemblage des éléments finis à caractère uni, bi et tridimensionnel (de type différent) deux ou trois dimensions, permettant de reproduire exactement les mêmes propriétés physiques que le continu qu'il divise.

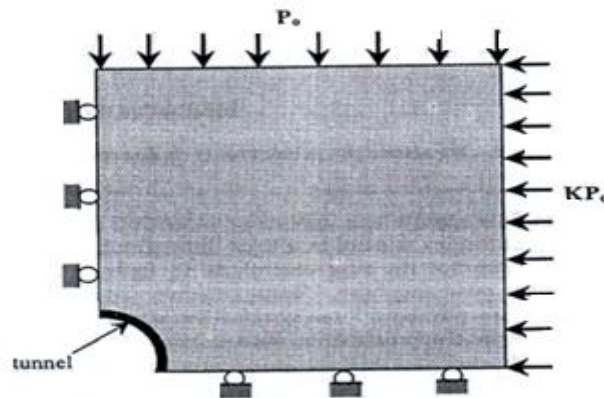


Figure 1.3 : Structure (Tunnel enterré) et sa discrétisation

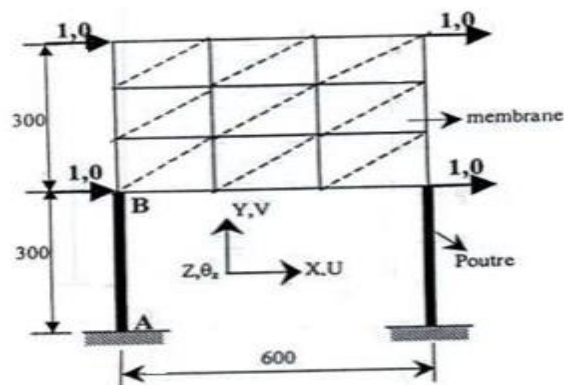


Figure 1.4 paroi sur colonnes

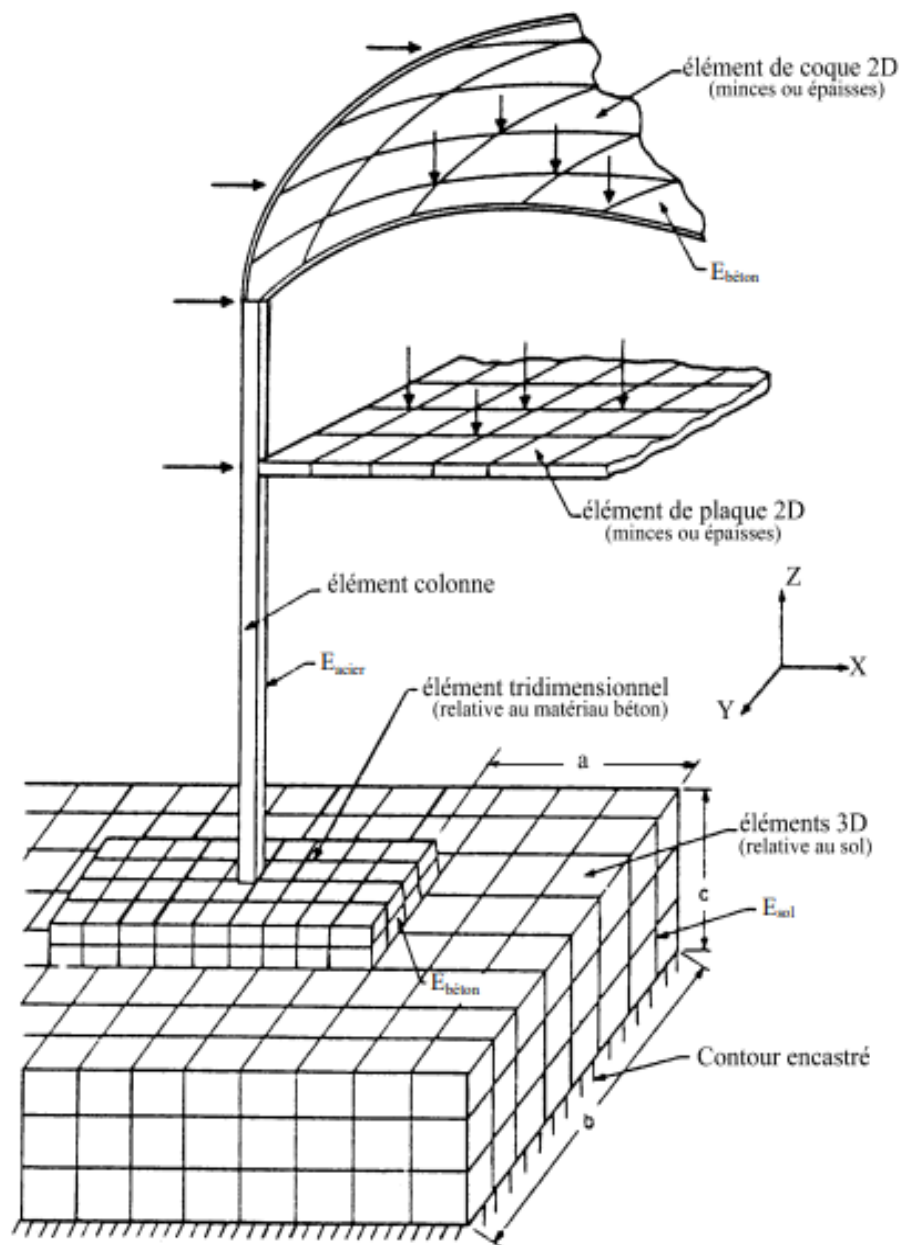


Figure 1.5 structure type en génie civil et sa discrétisation

1.5. Concept de la M.E.F

La méthode M.E.F consiste à mailler un domaine structural comme par exemple (figure 1.5) par un ensemble de mailles appelées éléments. Les nœuds sont les coins de ces éléments inters reliés par des lignes nodales.

Un champ de déplacements est attribué en dedans de chaque élément ce qui signifie une approximation qui s'appelle interpolation et qui s'exprime par la suite en fonction des inconnues nodales.

Le comportement flexionnel, membrane ou ensemble de l'élément est défini par ces variables nodales ainsi l'assemblage montre comment se comporte la structure.

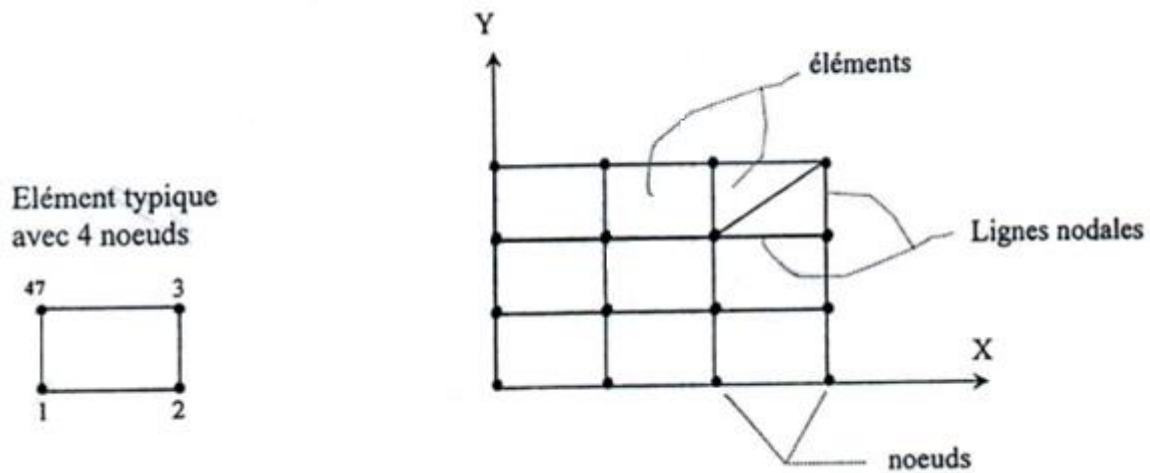


Figure 1.6 : Maillage d'un milieu continu.

Ce problème dépendra alors du maillage et il sera réduit d'un problème complexe à un nombre de problèmes plus simples.

Dans la méthode M.E.F on définit une fonction d'interpolation pour chaque élément. Ensuite nous devons résoudre les équations obtenues à cause de l'assemblage de tous ces éléments et qui définissent les inconnues cherchées comme déplacements, contraintes etc.

1.5.1. Étapes du calcul par éléments finis

Les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes.

1. Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage).
2. Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[ke]$ reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{ue\}$ et les forces $\{fe\}$ appliquées aux nœuds :

$$[ke] \{ue\} = \{fe\} \quad (1.1)$$

3. Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K] \{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.

4. Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites.

5. Résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds.

6. Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations, déplacements et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

1.5.2. Taille des éléments finis

En général, plus le maillage est fin plus les résultats obtenus sont meilleurs, mais en même temps un grand effort de programmation est requis. Le nombre d'éléments utilisés sera en fonction du type de la structure à analyser, généralement dans les régions où les contraintes varient rapidement les éléments requis sont plus importants que dans les régions où elles varient graduellement. Cependant pour les éléments complexes, les maillages grossiers donneront des résultats aussi bons que ceux des maillages fins ayant des éléments simples.

1.5.3. Type d'éléments finis

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement : ils sont groupés en quatre classes [4] :

- 1- les contraintes planes ; les déformations planes ; axisymétriques (problème à deux dimensions).
- 2- la flexion des plaques.
- 3- les coques.
- 4- l'analyse des solides tridimensionnels.

Les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées :

- ✓ **Les éléments unidimensionnels (1D)** : Sont utilisés de façon individuelle ou associée à des plaques pour modéliser les raidisseurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe.
- ✓ **Les éléments bidimensionnels (2D)** : Élasticité plane : (déformation ou contrainte Plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- ✓ **Les éléments tridimensionnels (3D)** : élément de volume, ou coques épaisses .
- ✓ **Les éléments axisymétriques** : qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique.

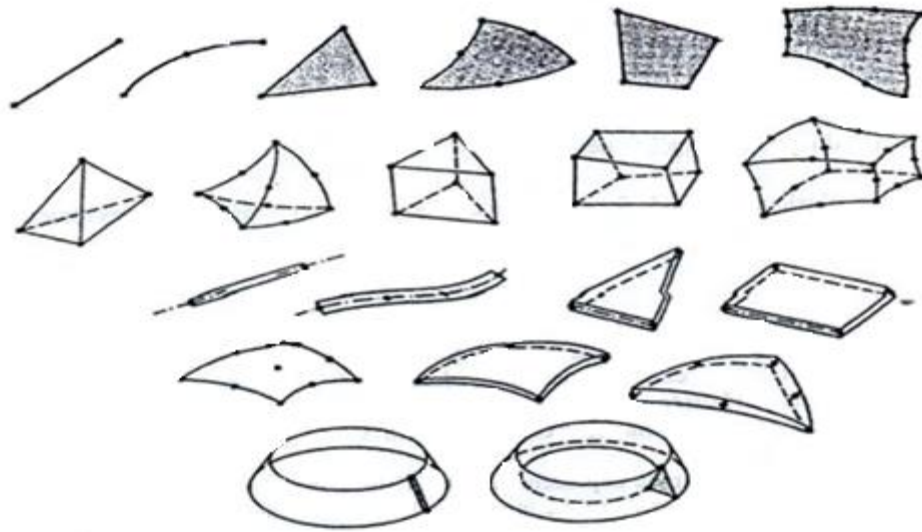


Figure 1.7 : Eléments finis divers (barre ; fil ; triangles et quadrilatères 2D ; tétraèdres, prisme, briques (3D) ; poutres 2D ou 3D ; plaques ; membrane ; coque mince ; coque d'épaisseur modérée variable ; coque de révolution ; solide de révolution).

1.5.5. Choix des éléments finis

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles [5] :

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte, ...) ;
- Convergence (critères et taux) ;
- Degré (des divers champs) ;
- Nœuds et inconnues aux divers nœuds ;
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres ;
- Performances et limitations.

1.5.6. Qualité d'un élément fini

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes :

- Aucun défaut de base.
- Convergence rapide.
- Bonne précision.
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable.
- Vecteurs forces consistants.
- souplesse d'emploi.
- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles.

- Dérivation théorique simple et claire.
- Programmation claire et efficace.

1.6. Discrétisation d'une structure

1.6.1. Idéalisation et discrétisation d'une structure

Etablissement d'un modèle numérique de calcul s'appelle idéalisation et discrétisation d'une structure.

L'idéalisation consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des matériaux ; c'est à ce stade que s'opère l'option fondamentale du choix de la théorie d'une part et des équations constitutives décrivant le matériau d'autre part ; l'ingénieur prend ici ses responsabilités quant à la validité des hypothèses qu'il adopte pour calculer son ouvrage.

Pratiquement, cette idéalisation consiste :

- Au point de vue topologique, à ramener la structure à sa géométrie en choisissant des axes (barres), et des plans (parois ou plaques), des surfaces (coques), après avoir éliminé certains détails (petits goussets, faibles excentricités, etc.), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie, à définir les conditions d'appui et les charges,
- Au point de vue rhéologique, à choisir la loi constitutive du matériau, et à déterminer les constantes qui définissent cette loi.

Il faut noter que l'idéalisation et les options qu'elle implique sont indépendantes de la méthode de calcul utilisée pour résoudre effectivement le problème.

La discrétisation est l'ensemble des opérations préparatoires à la résolution effective de la structure principalement idéalisée. Ainsi, lorsqu'on recourt à la méthode des forces pour résoudre un cadre, on choisit des coupures et des inconnues hyperstatiques. Dans le cas de la méthode des éléments finis, on doit d'une part découper fictivement la structure en éléments simples et d'autre part choisir le type de ces éléments.

Pratiquement, la subdivision en éléments finis est guidée essentiellement par la topologie, à savoir par les discontinuités (trous, variations d'épaisseur, d'inertie ou de matériaux, etc.), les conditions d'appui et éventuellement de chargement, les zones à fortes variations des contraintes ou des déplacements (découpage plus fin), etc. La rhéologie intervient dans ce sens qu'elle impose de calculer les propriétés des éléments selon les lois constitutives du (ou des) matériau(x) composant la structure.

La solution obtenue dépend du type et de la forme des éléments utilisés dans la discrétisation en utilisant n'importe quelle M.E.F. Dans de nombreux cas, un seul type d'élément est requis pour modéliser le problème. Par exemple, dans le cas de plaques avec raidisseurs, des éléments de poutre et de plaque sont utilisés pour la discrétisation. De plus, la grille peut être grossière ou fine. Le choix dépend de la géométrie de la structure et de certaines caractéristiques locales (telles que les concentrations de contraintes). La sélection d'un maillage adapté à une structure particulière doit être basée autant que possible sur les résultats expérimentaux antérieurs. Si cela n'est pas possible, différentes configurations de réseau doivent être étudiées pour tester la vitesse de convergence. De plus, le type d'éléments utilisés dans la modélisation a un impact considérable sur la précision de la solution.

1.7. Les diverses formulations de la M.E.F

De manière générale le principe de toute méthode de maillage, consiste à modifier un milieu (structure) continu contenant un nombre infini d'état de déformation ou de tension par un milieu idéal ne comportant qu'un nombre limité d'état de déformation ou de tension. La méthode des éléments finis utilise la même approche que le procédé Rayleigh Ritz. Quelques sous-régions sont appelées « éléments finis » et leurs formes géométriques et leurs fonctions structurelles sont relativement simples. Les estimations de solutions (déplacements et/ou contraintes) seront définies en réduisant le nombre de motifs à des fonctions simples, non pas pour la structure entière mais pour chaque élément. Leur sélection comme composants les plus essentiels du comportement structurel a été effectuée. Les paramètres qui représentent l'intensité de chaque mode ne sont pas facilement disponibles et un nombre limité de modes sont transmis entre chaque élément pour créer une structure idéalisée. Trouver les inconnues qui doivent être résolues pour rendre l'énergie minimale est l'objectif principal du problème mathématique, en tenant compte des conditions aux limites. En élasticité linéaire, l'énergie de déformation s'exprime comme une expression quadratique de forces généralisées, et la recherche du minimum se réduit à la résolution d'équations algébriques linéaires. Il existe de multiples variantes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures.

1.7.1 Formulation en déplacement

L'approximation est faite dans une formulation qui assure l'intégrabilité du champ de déplacement au sein de l'élément. Il est censé être « cinématiquement acceptable ». Il convient de noter que cela est une réalité lorsque le champ de déformation est extrait d'un champ de déplacement essentiellement continu et potentiellement différentiable.

Le modèle est considéré comme co-déformable ou compatible si le champ de déplacement est vérifié au niveau des surfaces de séparation des éléments. La preuve de continuité peut être établie en examinant les variables nodales ou en diminuant la somme des moyennes de déplacement de part et d'autre de leur surface de séparation. C'est Fraeijns de Veubeke [6] qui ont proposé cette dernière solution. Pour assurer la continuité du champ de déplacement à l'interface, ils suggèrent d'ajouter des quantités supplémentaires aux degrés de liberté classiques.

Il ya un autre modèle dit sur-conforme ou sur-compatible ou l'on satisfait plus que les équations de compatibilité. Généralement, dans ces modèles, la continuité au nœud est assurée. Le principe variationnel utilisé dans la formulation de type déplacement, est la variation de l'énergie totale / aux déplacements.

1.7.2. Formulation “équilibre” (contraintes ou forces)

Cette technique se rapproche du champ de tension tout en garantissant que les équations d'équilibre sont satisfaites au sein des éléments. Le composant est considéré comme « statiquement acceptable » dans ce scénario. Ceci est réalisé automatiquement en déduisant le champ de tension d'un champ de fonction de tension continu et dérivable. Si l'équation de la tension superficielle est vérifiée à l'interface entre les composants, le modèle sera considéré comme co-diffusif. Le principe variationnel est caractérisé par l'ajustement de l'énergie totale à diverses contraintes. Généralement, la solution dans cette formulation est déterminée en approximant à la fois le champ de contraintes internes et les déplacements sur la frontière de l'élément. Un principe variationnel est le terme utilisé pour décrire ce type d'énergie potentielle.

1.7.3. Méthode hybride

Généralement, la solution dans cette formulation est déterminée en approximant à la fois le champ de contraintes internes et les déplacements sur la frontière de l'élément. Le principe variationnel est le terme utilisé pour décrire ce type d'énergie potentielle.

La terminologie utilisée [7] désigne par « hybrides » les approches où les champs sont discrétisés indépendamment à l'intérieur d'un élément et sur sa frontière. Deux approches principales existent pour développer les éléments finis hybrides :

1. Approche hybride primaire:

- ✓ La première, qui porte le nom d'approche hybride primale, introduite par Jones [8], consiste à choisir des éléments vérifiant, à priori, les conditions de compatibilité en volume
- ✓ Les conditions de continuité des déplacements entre les éléments aux frontières sont ensuite rajoutées à la fonctionnelle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange.

- ✓ Ces multiplicateurs, représentant physiquement les tractions de surface sur les frontières, sont discrétisés de manière indépendante sur chaque face de la frontière de l'élément.
- ✓ Cette approche conduit généralement à une continuité faible des déplacements aux travers des frontières des éléments.

2. Approche hybride duale:

- ✓ Introduite par Pian [9], elle nécessite une discrétisation des champs de contraintes vérifiant à priori les conditions d'équilibre de volume à l'intérieur des éléments.
- ✓ Les conditions de continuité des champs de traction de surface sont injectées a posteriori dans la fonctionnelle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange.
- ✓ Ces multiplicateurs représentent physiquement les champs de déplacement aux frontières des éléments.
- ✓ Dans cette approche, des discrétisations secondaires définissent le champ des déplacements des bords de l'élément.

1.7.4. Formulation mixte

Nous définissons cette technique que c'est la solution en termes d'approximation de deux ou plusieurs champs indépendants, incluant les déplacements et les contraintes. Cette formulation peut être étendue à n'importe quel élément ; elle préserve généralement les paramètres inconnus de tous les champs sous forme de DDL, mais son développement peut prendre du temps et être coûteux. Néanmoins, cela peut donner d'excellents résultats. De manière générale, le principe fonctionnel de Reissner est au cœur du principe variationnel.

1.7.5. Formulation en déformation

Il s'agit d'une formulation qui rapproche, le champ de déformation (méthode de déformation), afin que les équations de compatibilité et les équations d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacement est dérivé du champ de déformation continue et dérivable. Le principe variationnel utilisé est la variation de l'énergie potentielle totale par rapport au déplacement. Pour minimiser la contribution de l'énergie de déformation à l'énergie potentielle, nous devons essayer de rendre la variation de déformation aussi petite que possible. En effet, l'expression de l'énergie de déformation est constituée du carré et du produit de déformation, et en imposant un changement local sur la distribution régulière initiale, cela augmente la valeur du carré lorsqu'il est intégré sur la surface de l'élément.

Les équations déformation-déplacement sont couplées de telle manière que certaines déformations sont fonction de multiples déplacements, donc si les déplacements sont indépendants les uns des autres, les déformations ne seront pas indépendantes les unes des autres.

Les deux critères de convergence sont directement liés à la déformation, ils sont donc plus faciles à satisfaire à l'aide d'une fonction de déformation qu'une fonction de déplacement inspirée de la pyramide de Pascal (cas général). Un autre avantage du choix des déformations plutôt que des contraintes est que la fonction de déplacement peut être obtenue par simple intégration de la relation déformation-déplacement. Une fois les variables cinématiques (déplacements et rotations) obtenues, nous pouvons déterminer la matrice de rigidité de base.

1.8. Choix des fonctions de déplacement et conditions de convergence

Le nombre total de constantes requises pour les différents champs de déplacement est le même que le nombre total de ddl unitaires. Cependant, en fonction de la nature du problème à analyser, il peut être opportun de choisir des constantes proportionnelles à différents champs de déplacement. On dit que la convergence existe si, le maillage est plus dense, le calcul par MEF se rapproche d'une solution exacte. Malheureusement, dans la plupart des cas, les éléments finis sont utilisés spécialement car on n'a pas de solution exacte. Malgré ces difficultés, les mathématiciens ont obtenu certains résultats.

1.9. Puissance de la méthode des éléments finis

La souplesse d'adaptation de la méthode des éléments finis aux problèmes pratiques demeure l'avantage principal de cette méthode; alors que d'autres méthodes échappent aux solutions mathématiques exactes à cause de la complexité de :

1.9.1. La topologie

- Forme géométrique compliqués et irrégulière (bords courbés, trous...etc.)
- Conditions aux limites statiques et cinématiques difficiles à exprimer (bords libres, appuis ponctuels,...)
- Sollicitations complexes (forces concentrées, champ thermique...)

1.9.2. La rhéologie

Matériaux anisotropes ou présence de plusieurs matériaux de caractéristiques différentes dans une même structure.

La M.E.F permet de surmonter tout ou en partie ces difficultés car elle est capable de les exprimer ou de s'y adapter.

Dans un autre ordre d'idées, on peut dire à présent que la MEF permet de résoudre pratiquement tous les problèmes de structures de l'ingénieur mécanicien, génie civil, ou autre inclu dans ce qui suit :

- Analyses linéaires ;
- Analyses statiques, dynamiques ;

➤ Structures 1D, 2D, 3D;

De plus, dans des domaines les plus compliqués tels que :

- Non linéaire géométrique.
- Elastoplasticité, la viscoplasticité, etc.....
- Les corps avec non continuité :
 - Rupture
 - Etc.....

1.10. Nœuds

Les nœuds jouent, dans la méthode des éléments finis, un rôle essentiel. Ils assurent, entre autres la transmission des déplacements et peuvent, selon les inconnues transmises, être de nature diverse (par exemple, pour les poutres : articulation, nœuds rigide, etc.).

On distingue deux types de nœuds :

- Nœud physique
- Nœud de discrétisation

Les nœuds physiques correspondent à des singularités physiques telles que les points de jonction entre deux poutres.



Figure 1.8 Nœud physique

Les nœuds de discrétisation correspondent à des points arbitraires choisis dans le volume de la structure pour définir le maillage.

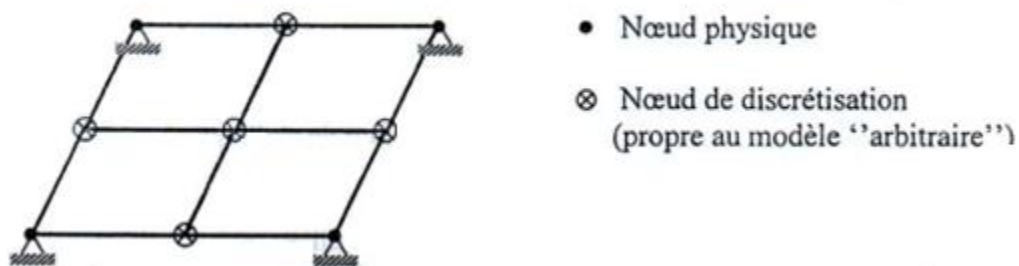


Figure 1.9 Nœud de discrétisation

1.11. Construction d'un maillage d'éléments finis

Le terme ‘‘ Maillage’’ signifie un découpage géométrique ou (grille). On constate directement que les frontières courbes ne peuvent être exactement modélisées et il existe donc une ‘‘évaluation (Approximation) géométrique’’

- Approximation sur volume
- Approximation sur surface

Pour éviter tout défaut de maillage, la discrétisation se fait tout en réunie les sous domaines de la structure sans qu'il y ait :

- ni empiètement
- ni défaut

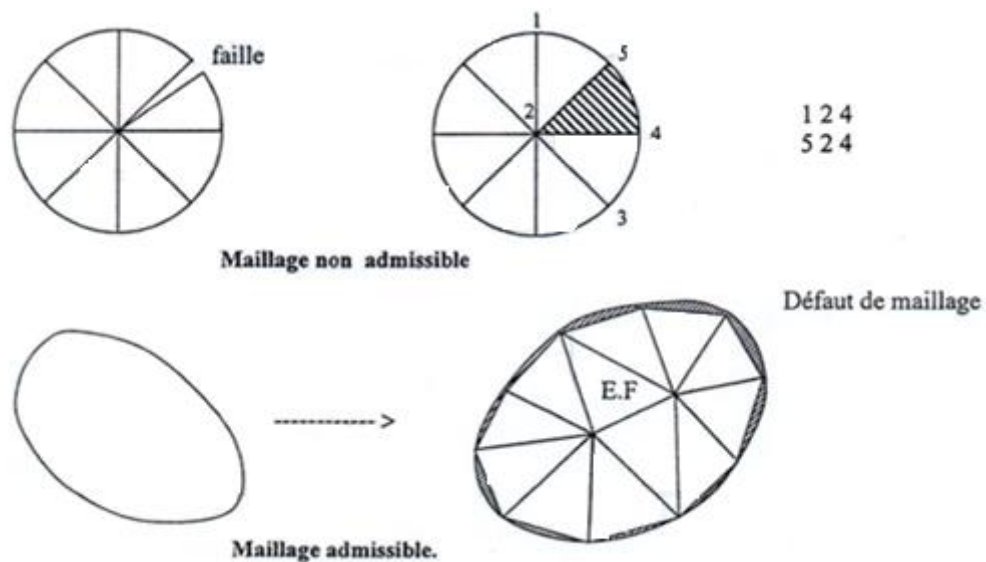


Figure1.10 : défaut de maillage

1.11.1. Règles générales pour la construction des maillages

Il n y a aucune méthode systématique qui nous permet de déterminer le meilleur maillage, néanmoins il existe des règles générales à respecter:

Prise en compte des symétries, des géométries, des conditions limites, et des chargements.

1.12. Contribution de l'approche en déformation dans l'analyse des structures

Les éléments basés sur la déformation ont de très nombreuses applications, à commencer par les structures courbes, telles que : coques cylindriques, arcs, hémisphères, etc. Comme on peut les retrouver dans les structures planes minces et épaisses, plaque, murs, etc.

Le but recherché le plus souvent en choisissant un élément basé sur la déformation parmi d'autres est le gain appréciable en matière du nombre d'éléments, et ce, pour un même nombre de nœuds. D'autres applications visent plutôt une augmentation de la fiabilité des éléments. Pour les structures telles que les poutres à parois minces, l'élément utilisé permet d'approcher les solutions analytiques, tout en utilisant un nombre minimum d'éléments. Dans ce cas on emploie des éléments membranaires basé sur ce modèle, ce qui permet d'améliorer les points faibles de l'élément traditionnel basé sur les déplacements, pour un même nombre de nœuds, à savoir la sur rigidité et la linéarité à la flexion. L'utilisation de ce modèle peut améliorer plusieurs propriétés. Plusieurs investigations ont d'ailleurs été effectuées dans ce sens. Les conditions d'équilibre et de compatibilité peuvent être satisfaites selon le type d'élément utilisé. Ce dernier variera en fonction des géométries des structures.

Les éléments finis basés sur les déformations ont été appliqués à de nombreuses applications d'ingénierie du monde réel problèmes, démontrant leur applicabilité pratique dans divers domaines de l'ingénierie et industrie. Ces éléments sont couramment utilisés dans les logiciels d'analyse par éléments finis (FEA) pour simulations structurelles et mécaniques.

Voici quelques exemples d'applications concrètes :

Génie aérospatial : Analyse des panneaux d'aile et des sections de fuselage de l'avion, modélisation des composants satellites et des panneaux solaires, analyse structurelle de trains d'atterrissage d'avions.

Génie civil : Analyse des ponts, y compris les composants du tablier et des poutres, évaluation de grandes dalles de béton dans des bâtiments, et évaluation des murs de soutènement et des barrages.

Génie mécanique : Conception et analyse de composants de machines tels que des boîtes de vitesses et des châssis, simulation de châssis et de structures de carrosserie automobiles, analyse des contraintes des récipients sous pression et des pipelines.

Génie maritime : Analyse structurelle des coques et cloisons de navires, évaluation des plates-formes offshore et des composants des plates-formes pétrolières.

Génie électrique : Modélisation de circuits imprimés (PCB) et de boîtiers électroniques, analyse de l'intégrité structurelle des transformateurs et composants électriques.

Science des matériaux : Étude du comportement des matériaux dans diverses conditions de chargement, étude des composites et stratifiés pour applications aérospatiales et automobiles.

Biomécanique : Simulation du comportement osseux et articulaire dans les études orthopédiques, analyse des prothèses et des implants.

Produits de consommation : Évaluation des biens de consommation tels que les appareils électroménagers, l'électronique et les équipements sportifs équipement.

Secteur de l'énergie : Évaluation des structures de pales d'éoliennes, analyse des composants du réacteur nucléaire.

Génie de l'environnement : Modélisation de structures environnementales comme des réservoirs de traitement d'eau, analyse des fondations des installations d'énergies renouvelables.

Ce ne sont là que quelques exemples de la façon dont les éléments finis basés sur les déformations sont appliqué à des problèmes d'ingénierie du monde réel dans diverses industries. Ingénieurs et les analystes utilisent la FEA pour évaluer l'intégrité structurelle, optimiser les conceptions, prédire les performances, et garantir la sécurité et la fiabilité d'une large gamme de produits et de systèmes. La polyvalence et la praticité de ces éléments en font des outils précieux dans le domaine d'analyse technique.

1.12.1. Procédure de la formulation des éléments à champ de déformation

Pour les éléments finis basés sur l'approche en déformation, le champ des déplacements contient deux composantes. La première représente les déplacements des modes rigides et la deuxième est due aux déformations imposées dans l'élément qui sont représentées par des fonctions indépendantes des différentes composantes de la déformation.

Avec le développement continu de l'approche en déformation beaucoup de chercheurs ont travaillé pour développer des éléments d'ordre supérieurs, des éléments nécessitant uniquement les degrés de liberté essentiels, beaucoup d'éléments finis d'élasticité plane et des éléments de coques. Nous citons entre autres [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17]

1.12.1.1. Exigences et conditions de base

- Calcul exact des termes représentant les modes de corps rigides,
- Choix des termes du champ des déformations de sorte que les conditions de compatibilité cinématique soient vérifiées,

- Dédution des composantes du champ des déplacements par intégration des fonctions du champ de déformations, ce qui rend plus riche les polynômes (ordre supérieur) constituant le champ des déplacements,
- Application du principe des travaux virtuel (PTV),
- Recherche de satisfaction du critère de complétude au niveau du champ de déformations.

1.12.1.2. Principes de la méthode

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le champ des déformations en considérant l'élément cinématiquement admissible ; c'est-à-dire la continuité et l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

La démarche à ce niveau consiste à choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du champ de déformations (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure. Puis, le champ des déplacements est déduit par intégration du champ des déformations. Il est, ensuite, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels.

En considérant la continuité du champ de déplacement dans toute la structure, l'assemblage des fonctionnelles, ainsi obtenues au niveau élémentaire, conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle dans la structure dans sa globalité.

1.12.1.3. Procédure de formulation

Pour illustrer la procédure de développement des éléments finis à modèle en déformation, nous prenons un exemple simple d'un élément rectangulaire de membrane d'élasticité plane. Cet élément est constitué de quatre nœuds. Chacun de ses nœuds possède deux degrés de liberté. Donc les champs de déplacement, possèdent 08 constantes indépendantes ($a_1, \dots, a_8$).

En élasticité plane, les relations entre les déformations et les déplacements sont établies comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2)$$

Le choix des fonctions d'interpolation est établi en deux étapes :

- La première, permettant de représenter les modes de corps rigides (MCR)
- La seconde, permettant de représenter les modes supérieurs, particulièrement ceux donnant des états de déformations homogènes.

Pour les modes de corps rigides, les fonctions d'interpolation des déplacements doivent permettre à l'élément de subir un mouvement sans déformation interne.

Ce critère est essentiel, puisque :

- D'une part, il permet de représenter la réalité du comportement des structures,
- Et d'autre part, il évite la lenteur dans la convergence vers la solution exacte qui se produit s'il n'est pas respecté

Pour ce faire, dans cette étape de formulation, on annule les trois déformations des équations (1.1) et on intègre les équations différentielles qui en résultent.

On obtient ainsi, les expressions du champ des déplacements correspondant au mode de corps rigide (MCR).

$$U_R = a_1 - a_3 y \quad V_R = a_2 + a_3 x \quad (1.3)$$

Dans la deuxième étape, on répartit les paramètres restants (ceux non utilisés pour le mode de corps rigide) dans les fonctions d'interpolation des déformations de manière à satisfaire l'équation générale de compatibilité des déformations pour l'élasticité plane.

Pour le cas de notre exemple, les champs de déformation pour les modes supérieurs sont établis à partir du triangle de Pascal. Ceux-ci se présentent comme suit :

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5 y \quad \varepsilon_y = a_6 + a_7 x \quad \gamma_{xy} = a_8 \quad (1.4)$$

Ce champ se caractérise par :

- L'existence d'états de déformations constantes qui assurent la convergence lorsqu'on raffine le maillage, représentés par les constantes a_4, a_6, a_8
- La satisfaction de l'équation générale de compatibilité des déformations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.5)$$

L'intégration des équations (1.4) nous donne le champ des déplacements aux modes supérieurs.

$$\begin{cases} U_S = a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \\ V_S = a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} \end{cases} \quad (1.6)$$

Le champ de déplacement final est obtenu en additionnant les relations (1.3) et (1.6)

$$\begin{cases} U = U_R + U_S = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \\ V = V_R + V_S = a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} \end{cases}, \quad (1.7)$$

Une fois le champ des déplacements défini, le reste des étapes de formulation pour la construction de la matrice de rigidité élémentaire, d'assemblage et de résolution sont similaires que ceux de l'approche en déplacement.

1.12.1.4. Ses avantages

- Facilité de la mise en œuvre, au même titre que le modèle en déplacement,
- Satisfaction absolue des critères de convergence liés aux déformations : mode de corps rigide et mode de déformation constante,
- pour un même élément fini, obtention de champ de déplacement plus riche et avec des polynômes ayant des termes d'ordre élevé, comparativement à ceux résultant du modèle en déplacement,
- Meilleure précision dans l'approximation des déformations et des contraintes que celle du modèle en déplacement ou ces variables sont obtenues par dérivation du champ de déplacement provoquant ainsi une dégradation de leur approximation,

1.12.2. Déformations imposées de quelques éléments plaques existants dans la littérature

- ✓ Pour un élément hexaédrique simple à huit nœuds et à trois degrés de liberté par nœuds (u, v, w) :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_7 + a_8 y + a_9 z + a_{10} yz \\ \varepsilon_y = a_{11} + a_{12} x + a_{13} z + a_{14} xz \\ \varepsilon_z = a_{15} + a_{16} x + a_{17} y + a_{18} xy \\ \gamma_y = a_{19} + a_{20} x + a_{22} x - a_{10} x^2 \\ \gamma_{xz} = a_{21} + a_{22} y + a_{24} y - a_{14} y^2 \\ \gamma_{xy} = a_{23} + a_{24} z + a_{20} z - a_{18} z^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

Les composantes normales du champ de déformation ε_{yy} , ε_{xx} , ε_{zz} de cet élément sont découplés, par contre les composantes de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} , γ_{xy} sont couplées entre eux et aux composantes normales de déformation pour vérifier les équations de compatibilité. Une matrice d'élasticité modifiée est utilisée pour l'obtention de la matrice de rigidité de cet élément. La modification des constantes élastiques vise à adoucir la matrice de rigidité dans le but de représenter exactement le comportement réel des plaques en flexion qu'elles soient minces ou épaisses. Cet élément est numériquement plus performant que celui du modèle en déplacement.

Pour les deux éléments plaque de type Reissner-Mindlin contenant les trois degrés de liberté par nœud (W , β_x et β_y), il s'agit des éléments à quatre nœuds de forme rectangulaire SBRP [18]

et triangulaire Pep43 [19]. Les fonctions des déformations imposées sont données respectivement :

✓ Pour l'élément **SBRP** [18]:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x = a_4 + a_5 y \\ k_y = a_6 + a_7 x \\ k_{xy} = a_8 \\ \gamma_{xy} = a_9 + a_{10} y - (a_7 y^2) \\ \gamma_{yz} = a_{11} + a_{12} x - (a_5 x^2) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

✓ Pour l'élément **Pep43** [19]:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x = a_4 + a_5 y + a_9 \frac{y}{2} \\ k_y = a_6 + a_7 x + a_{10} \frac{x}{2} \\ k_{xy} = a_8 + a_9 x + a_{10} y \\ \gamma_{xy} = a_{11} - (a_7 y^2) \\ \gamma_{yz} = a_{12} - (a_5 x^2) \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Pour les deux éléments (SBRP, Pep43), on remarque que les courbures (κ_x , κ_y et κ_{xy}) sont couplées avec les déformations du cisaillement transversal (γ_{xz} et γ_{yz}) qui contiennent des termes quadratiques.

1.13. Revues sur les éléments plaques basés sur la déformation

L'approche par la déformation a vu le jour en 1971 à l'Université de Cardiff au Royaume-Uni, motivée par le besoin de développer des éléments performants avec un nombre réduit de nœuds. Ce défi a abouti à l'une des approches les plus populaires en génie mécanique. Les pionniers furent Ashwell et al [20, 21]. Qui dans des études mono et bidimensionnelles sur des structures courbes, circulaires et en coque, ont pu utiliser des fonctions de déformation indépendantes pour développer des éléments peu nombreux et performants. Sabir et Ashwell [10, 22] ont, quant à eux, démontré l'efficacité de l'approche par la déformation à travers des tests sur les oscillations libres dans le plan des anneaux circulaires. Les années qui ont suivi ont été marquées par une multitude de recherches visant à développer des éléments finis adaptés à l'analyse des plaques minces, tout en respectant les conditions de Kirchhoff. De nombreux autres scientifiques ont aussi apporté leur contribution à ce domaine en développant des éléments similaires, permettant d'obtenir des solutions numériques des problèmes de plaques minces en accord avec les hypothèses de Kirchhoff.

Les éléments de type Kirchhoff ont fait leur apparition dans les travaux de G.Dhatt, Batoz et d'autres chercheurs. Ces éléments discrétisent l'hypothèse de Kirchhoff, que ce soit en un point précis, le long des bords d'un élément ou sur toute sa surface.

L'énergie de cisaillement transverse est négligée et l'hypothèse de Kirchhoff est introduite de manière discrète [23] (en un point particulier, sur les bords d'un élément ou sur sa surface). De nombreux chercheurs ont également contribué à ce type d'éléments [24]. De nombreux éléments de plaque ont été développés. [25,26] ont élaboré l'élément de flexion de plaque triangulaire en divisant le triangle principal en trois sous-triangles [27]. Ils ont développé un élément de flexion de plaque triangulaire en utilisant des fonctions de forme basées sur les coordonnées. L'élément de plaque non conforme ne réussit pas le test pour certains modèles de maillage, et l'élément conforme est coûteux en raison du schéma d'intégration numérique requis pour déterminer la matrice de rigidité de l'élément. Batoz et al. (1980) ont développé plusieurs éléments de flexion de plaque triangulaires efficaces pour l'analyse des plaques et des coques. Ces éléments ont deux degrés de liberté en rotation et un degré de liberté en translation à chaque nœud pour un total de 9 degrés de liberté. Les tentatives antérieures d'élaborer des éléments quadrilatère mince impliqués combinant quatre éléments triangulaire de plaque [28].

Batoz et Tahar (1982) Ont mis au point un élément de quatre nœuds quadrilatère basé sur la théorie discrète Kirchhoff. La base de la formulation de cet élément a été la discret Kirchhoff triangulaire (DKT) élément développé plus tôt [29]. La plaque quadrilatère flexion élément (DKQ) formulée par [28]. Et l'élément triangulaire de flexion de plaque (DKT) formulé par [29], sont basés sur les hypothèses de Kirchhoff discrète, dans laquelle la déformation de cisaillement transversal est négligée. Ils ont considéré que la déformation de cisaillement transversal est présente dans l'élément développement initial, puis ils ont supprimé le terme cisaillement transversal de contrainte en appliquant des contraintes discrètes Kirchhoff. [29] Ont mené plusieurs tests sur ces éléments.

Les éléments de plaque basés sur la théorie de Reissner-Mindlin sont décrits par [23], [30], et [31]. Pour les éléments avec cisaillement transversal (comme DST, DSQ et Q4G), une approche courante pour éviter le phénomène de blocage dû à une surestimation de la rigidité, particulièrement lorsque l'épaisseur de la plaque est très faible, consiste à établir des champs de cisaillement constants et des substituts sur les bords des éléments. Les éléments de plaque avec cisaillement transversal utilisent cette technique pour prévenir le blocage. Ce blocage provient du fait que l'énergie élastique du cisaillement est proportionnelle à h (où h représente

l'épaisseur de la plaque), tandis que l'énergie élastique de flexion est proportionnelle à h^3 . Lorsque l'épaisseur devient très faible par rapport à une longueur caractéristique (c'est-à-dire, lorsque le rapport h/L est inférieur à $1/20$), certaines fonctions de forme peuvent entraîner une minimisation de l'énergie de cisaillement, ce qui peut à son tour provoquer une mauvaise estimation des modes de flexion pure, où la flèche n'est plus correctement calculée.

Belarbi M.T. et Charif A, en 1999 développement d'un nouvel élément hexaédrique simple « SBH8 » basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses [17]. Le nouvel élément hexaédrique simple a huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud (U , V et W) basé sur le modèle en déformation, cet élément est numériquement plus performant que le modèle de déplacement. Sa précision est évaluée à travers une série de cas de-tests standards ou non standards relatifs aux problèmes de plaques mince et épaisses.

En effet, l'approche en déformation a été étendue pour l'analyse statique des plaques par le développement d'un élément fini triangulaire à trois nœuds nommé **SBTP** [32], en 2005, Belounar et Guenfoud [33] ont développé un élément de plaque basé sur le modèle en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin. Cette avancée a été une étape importante, car cet élément nommé **SBRP** s'est avéré être plus efficace numériquement que son équivalent le **R4** basé sur les déplacements, et un élément fini triangulaire à trois nœuds de coin et un nœud interne [34]. Ces éléments possèdent les trois ddl essentiels (W , β_x et β_y) et ils sont basés sur la théorie de Reissner Mindlin qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse. Pour les trois éléments, les fonctions imposées de déformations (courbures) κ_x et κ_y varient linéairement par contre κ_{xy} est constante et les déformations de cisaillement transverse γ_{xz} et γ_{yz} contiennent des termes quadratiques. En plus, il existe un couplage entre les déformations de flexion (κ_x et κ_y) et celle de cisaillement (γ_{xz} et γ_{yz}).

Un peu plus loin Himeur et Guenfoud [35] ont contribué par un autre type d'élément à trois nœuds essentiels basé sur la déformation et la théorie de Kirchhoff. Cette méthode novatrice dans laquelle la technique de condensation statique a été utilisée, incorpore un nœud quatrième fictif, utilise l'intégration analytique pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Le but de l'élément est la prédiction du comportement linéaire des plaques minces.

Plus tard Belounar et Guerraiche [36], ont introduit un nouvel élément fini tridimensionnel basé sur l'approche des déformations pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques, repose sur des hypothèses fonctionnelles pour les différentes déformations, respectant les équations de compatibilité. De plus, une technique de condensation statique est appliquée au nœud interne a

été évaluée à travers divers problèmes liés à la flexion, tant pour les plaques épaisses ou minces en analyse linéaire.

De manière similaire, Abderahmani et al [37] ont développé un élément fini rectangulaire pour la même analyse présentant un comportement élastique linéaire. La matrice de rigidité de cet élément est intégrée analytiquement. Ensuite, les fonctions de déplacements obtenues ont été utilisées pour créer un élément secteur. En 2018, une autre contribution [38] qui présente un autre modèle numérique à trois nœuds basé sur la théorie de Reissner-Mindlin. Cet élément a été employé pour l'analyse des vibrations libres des plaques.

Parallèlement, autres modèles numériques [39], Belounar Abderahim et al, ont été développés en se basant sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin. Ces modèles ont été conçus pour l'analyse linéaire, les vibrations libres et le flambage des plaques de faibles épaisseurs.

Dans le but de déterminer la méthode la plus efficace pour analyser les problèmes de flexion de plaques épaisses et minces, une nouvelle contribution a été présentée par Guerraiche et Belounar [40], les analyses linéaires réalisées avec cet élément développé ont montré une excellente performance pour un ensemble de problèmes, Cette approche repose sur un nouveau modèle tridimensionnel solide basé sur l'approche des déformations. Une matrice d'élasticité modifiée est utilisée pour répondre aux exigences de base de la théorie des plaques, tout en satisfaisant les conditions de compatibilité et les équations d'équilibre, et les résultats de plusieurs exemples liés à l'épaisseur et au pliage des plaques minces en analyse linéaire sont utilisés pour démontrer l'efficacité de cette approche par Belounar Abderahim et al [41], en effectuant une transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires. Ce modèle a été spécifiquement conçu pour l'analyse de plaques minces de forme circulaire, et aussi dans une étude comparative de l'impact du cisaillement transversal sur la flexion des plaques, Abderrahmani, Maalem et leurs collègues [42] ont présenté leur élément fini rectangulaire appelé **SBRPK** (Strain-Based Rectangular Plate -Kirchhoff's Theory), utilisé dans l'analyse numérique de plaques minces courbes. Ce modèle est basé sur l'approche de déformation et dispose de quatre nœuds avec trois degrés de liberté pour chaque nœud (w , θ_x , θ_y). Ils ont réalisé des applications numériques impliquant différents cas de chargement et conditions aux limites pour étudier en détail son comportement.

Belounar A. et al [43] ont formulé un élément quadrilatère destiné à étudier les vibrations libres des plaques en flexion. Cet élément présente l'avantage d'être exempt de verrouillage de

cisaillement transversal, offrant ainsi une grande précision et une insensibilité aux conditions aux limites.

Messai et al [44] ont proposé un élément fini tridimensionnel avec neuf nœuds basé sur la déformation. Cet élément est implémenté dans le logiciel ABAQUS et permet d'analyser le comportement statique et les vibrations libres des plaques lors la flexion. De plus, un autre type tridimensionnel d'éléments finis a été développé [45] pour l'analyse statique des structures circulaires. Ce nouvel élément a été formulé en utilisant les champs de déplacement des éléments Belarbi et Charif [17], cet élément est numériquement plus efficace que le modèle de déplacement. Sa précision est évaluée à travers une série de critères standards ou non standards liés aux problèmes de plaques minces et épaisses.

Simultanément les vibrations statiques et libres liées à la flexion de structures de plaques minces, Boussem et Belounar A ont proposé une nouveau modèle a été formulé en utilisant à la fois les hypothèses de la théorie de Kirchhoff et l'approche en déformation [46]. L'élément présente la particularité de n'avoir qu'un déplacement transversal et deux rotations normales à chacun des quatre coins. Les fonctions de déformation supposées d'ordre supérieur, garantissent la satisfaction des équations de compatibilité. Les fonctions de déplacement de cet élément sont aussi obtenues par intégration des fonctions de déformation supposées, et elles représentent de manière exacte les modes du corps rigide. Plusieurs tests numériques ont été réalisés pour évaluer les performances de ce nouvel élément, et il été démontré qu'une grande précision de la solution, en particulier pour des maillages grossiers de structure à été obtenue.

Plus tard Faïçal Boussem et al [47] ont formulé un nouvel élément fini quadrilatère composé de quatre nœuds et douze degrés de liberté, dédié à l'analyse des vibrations libres. Cet élément innovant repose sur des fonctions supposées du champ de déformation, garantissant la satisfaction de l'équation de compatibilité. Plusieurs tests numériques ont été réalisés pour évaluer les performances de cet élément, en utilisant des maillages réguliers et déformés. De plus, une étude avec paramètres a été entamée pour analyser l'impact des charges biaxiales sur les fréquences propres des plaques carrées soumises à différentes conditions aux limites. L'élément formulé a réussi à surmonter le problème de verrouillage en cisaillement et a réussi les tests de patch. Les résultats obtenus à partir de cet élément ont montré une grande précision et une convergence rapide, avec des fréquences propres en excellent accord avec les solutions analytiques et d'autres solutions numériques disponibles. Cet élément, simple dans sa formulation, s'est avéré adapté aux situations impliquant des plaques minces ou épaisses avec une précision suffisante. De plus, en imposant des conditions de compatibilité et des modes de

corps rigides, cet élément fini a été enrichi de termes d'ordre supérieur pour le champ de déplacement, ce qui peut améliorer ses performances.

Dans une autre étude, Faïçal Boussem, et al [48] ont présenté une extension de l'élément fini quadrilatère récemment développé pour analyser les vibrations libres de plaques en interaction avec l'air ou un fluide. Cet élément à quatre nœuds est basé sur l'approche de déformation et la théorie des plaques de Reissner-Mindlin. Il contient les trois degrés de liberté externes essentiels à chacun des quatre coins de la plaque. Les fonctions supposées du champ de déformation utilisées dans cet élément satisfont aux équations de compatibilité. Les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences propres et les modes associés ont été calculées pour des plaques rectangulaires simplement supportées, des plaques carrées en porte-à-faux, et des plaques partiellement immergées dans l'eau. Les fréquences obtenues par cet élément ont montré une excellente précision par rapport aux solutions numériques, analytiques ou expérimentales existantes.

Enfin, une autre avancée Belounar A et leurs collègues a été réalisée en introduisant un nouvel modèle numérique basé sur la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre et utilisant l'approche basée sur les déformations pour l'analyse des réponses statiques et des vibrations libres des plaques composites stratifiées [49]. Ce modèle ayant cinq ddl par nœud, incorpore des termes d'ordre supérieur dans ses fonctions de déplacement, satisfaisant ainsi les modes de corps rigides et les équations de compatibilité. Sa performance a été évaluée en l'appliquant à des plaques composites stratifiées sandwich et symétriques/antisymétriques présentant diverses caractéristiques géométriques, conditions aux limites, rapports côté/épaisseur, séquences d'empilement, angles d'orientation des fibres et types de charges. Les résultats obtenus ont été comparés aux solutions analytiques et numériques existantes, démontrant une excellente précision et efficacité de prédiction de la flexion et des vibrations libres des plaques composites stratifiées. De plus, cet élément s'est avéré exempt de verrouillage par cisaillement, ce qui constitue un avantage significatif par rapport aux méthodes traditionnelles.

Il est important de noter que ces développements ont considérablement enrichi le domaine de la modélisation numérique des plaques et ont permis d'obtenir des solutions plus précises pour une gamme étendue de problèmes liés aux plaques minces et épaisses.

1.14. Conclusion :

En conclusion, ce chapitre passe en littérature les différents types d'éléments finis de plaques développés au cours des années dernières, les méthodes utilisées et les performances de ces éléments et techniques. La grande diversité des résultats obtenus montre que l'approche par déformation est très bonne pour le calcul des structures, cela nous encourage à développer de nouveaux éléments plus efficaces et plus précis.

CHAPITRE 2

LA THEORIE DES PLAQUES

Chapitre 2. LA THEORIE DES PLAQUES

2.1. Introduction

Les plaques représentent des composants structuraux largement répandus dans les domaines de la mécanique et du génie civil. Leur utilisation est fréquente dans diverses structures industrielles, et elles présentent des caractéristiques particulières en termes de calcul et de modélisation. Ces éléments structuraux se distinguent par le fait qu'une de leurs dimensions est relativement petite par rapport aux autres.

Ce chapitre est consacré, en premier à un rappel sur la théorie des plaques minces en flexion, en se concentrant sur les matériaux isotropes et homogènes. Nous aborderons les relations de déformation-déplacement, les équations de mouvement, les lois de comportement, et les conditions aux limites. Ces expressions de relations obtenues serviront à savoir comment prédire le comment se comporte une plaque élastique mince ou épaisse.

De plus, nous avons exploré la flexion des plaques sous charges latérales réparties, fournissant un aperçu des conditions aux limites pour les plaques, comprenant les configurations libres, simplement appuyées et encastrées.

Pour compléter notre analyse des plaques minces, nous avons introduit la théorie des plaques épaisses ou théorie de Mindlin, en tant qu'extension de la théorie des poutres de Timoshenko aux plaques. Nous avons détaillé les champs de déplacement, les relations contraintes-déformations, les efforts tranchants et les moments de flexion selon cette théorie. Nous avons également présenté les fonctions d'énergie et les conditions aux limites correspondantes, mettant en évidence les différences avec la théorie des plaques minces.

Ce chapitre offre une base solide pour la compréhension de l'analyse des plaques minces et épaisses. Il fournit un cadre théorique complet pour des études futures dans l'analyse des structures.

Ce chapitre résulte d'une synthèse des références suivantes : [50], [51], [52], [53], [54], [55] et [56].

2.2. Equations de base d'élasticité plane

Pour résoudre le problème d'élasticité des solides on doit déterminer, en un point spécifique $N(x, y, z)$, les champs inconnus nodaux. Ces champs inconnus de déplacements u_i et de contraintes σ_{ij} résultant des forces appliquées, à la fois en volume (f_i) et en surface (ϕ_i), comme illustré dans la figure 2.1. Cette problématique gouverne le phénomène de déformation des corps solides, régissant les équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. Ces équations, dérivées de la théorie de l'élasticité, sont cruciales pour obtenir les déplacements, les déformations et les contraintes à tout point de la structure, sous des charges et des conditions d'appui spécifiées.

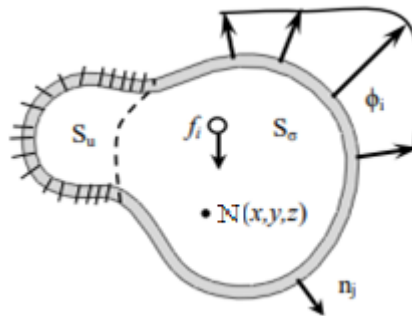


Figure 2.1. Solide élastique soumis à des forces de surfaces (ϕ_i) et de volume (f_i).

Les équations aux dérivées partielles, accompagnées de conditions aux limites régissent le processus de déformation des corps solides. Les équations de champ pour la théorie de l'élasticité plane (élasticité 2D) sont énoncées ci-dessous. L'état plan de contrainte (figure 2.2a) et de déformation (figure 2.2b), pour les problèmes en élasticité 2D sont envisagés. Le premier défini comme une approximation adaptée aux plaques minces sollicitées dans leur plan (xy) par des forces de surface et de volume, avec l'axe z perpendiculaire au plan de la plaque (hypothèse $\sigma_z=0$). Le deuxième modèle est celui de la déformation plane (figure 2.2b), applicable à un solide lorsque la dimension suivant l'axe z est considérable par rapport aux autres dimensions (du plan xy), et soumis à des forces (de surface et de volume) ayant des composantes nulles suivant z (hypothèse $\epsilon_z=0$).

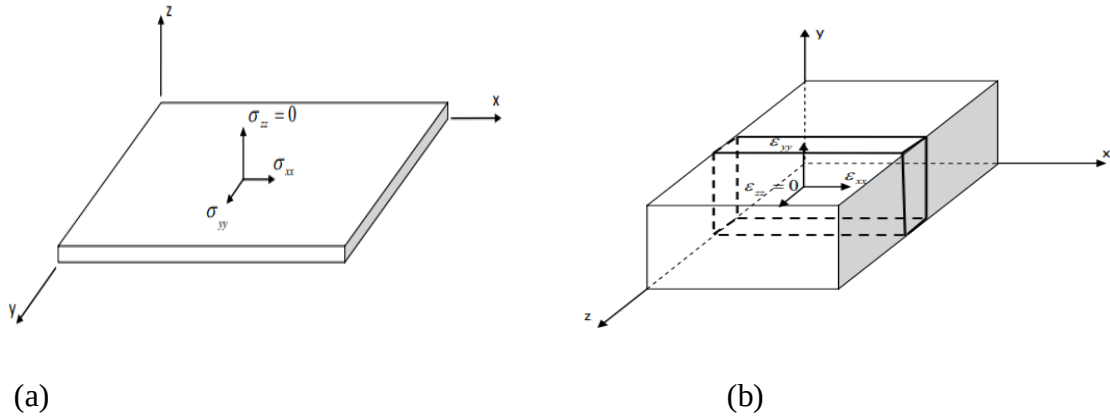


Figure (2.2) Modèle état plan de contrainte (a) et de déformation (b)

2.2.1. Relation entre déformations et déplacements (relations cinématiques) :

En élasticité linéaire on a les relations:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.1)$$

2.2.2. Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \quad (2.2)$$

2.2.3. Equation de compatibilité

En élasticité 2D, les six équations de compatibilités en élasticité 3D se réduisent à une seule équation :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.3)$$

L'équation de compatibilité est la condition d'intégrabilité des déformations qui assure l'unicité des déplacements.

2.2.4. Relation contraintes-déformations (équations constitutives)

En ce qui concerne les matériaux isotropes présentant un comportement élastique linéaire, les relations d'élasticité (loi de Hooke) sont formulées comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_y \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sous forme matricielle l'équation 2.4 peut s'écrire comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.6)$$

Pour le cas état plan déformation :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

Pour le cas en contrainte plane :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu^2)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.8)$$

2.3. Rappels sur les théories des plaques

2.3.1. Historique :

L'évolution de la théorie des plaques est marquée par une histoire riche, avec d'illustres contributions de mathématiciens et de scientifiques renommés. L'exploration des vibrations libres a constitué le point de départ de l'étude du comportement des plaques, initiée par Leonard Euler en 1776 et approfondie par Jacob Bernoulli. En 1811, le célèbre mathématicien Joseph-Louis Lagrange a développé une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre pour décrire les vibrations des plaques. D'autres scientifiques éminents tels que Siméon Denis Poisson et Claude-Louis Navier ont également contribué au développement de la théorie des plaques. En 1890, le physicien allemand Gustav Robert Kirchhoff a publié une thèse importante sur la théorie des plaques minces. L'éminent mathématicien anglais Augustus Edward Hough Love a utilisé en 1888 les hypothèses de Kirchhoff pour établir une théorie des plaques minces. Les déformations causées par les forces de cisaillement transverse ont été prises en compte de manière rigoureuse dans une théorie des plaques introduite par Reissner (1945) et, de manière légèrement différente, par Mindlin (1951).

2.3.2 Eléments de plaque

Une plaque est un cas particulier où une dimension (l'épaisseur) est très petite par rapport aux autres dimensions. De plus, le terme " plaque " signifie implicitement qu'elle n'est pas chargée dans son plan et qu'elle travaille essentiellement en flexion ; on fait la distinction entre "un plan" et "une plaque" pour indiquer les efforts de membrane ou de flexion.

Pour étudier ce type de structures, on pose les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur h est très petite par rapport aux autres dimensions,
- Le chargement est perpendiculaire au plan de la plaque,
- La contrainte perpendiculaire σ_z est négligée,
- La conservation de la section droite par rapport à la fibre neutre (en général, à mi-épaisseur) est respectée.

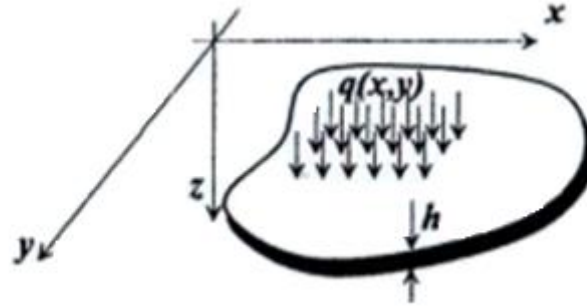


Figure 2.3. Plaque en flexion

2.3.3. Formulation

Les relations entre les rotations autour des deux axes x et y (Θ_x et Θ_y), et les pentes dans les deux directions β_x et β_y (figure 2.4) sont données par:

$$\begin{aligned}\beta_x &= \theta_y \\ \beta_y &= -\theta_x\end{aligned}\tag{2.9}$$

L'hypothèse de la section droite implique une variation linéaire du déplacement sur l'épaisseur de la plaque.

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= z \times \beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z \times \beta_y(x, y)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Cette expression permet de découpler les fonctions de déplacement (u, v) de celui de la flèche (w).

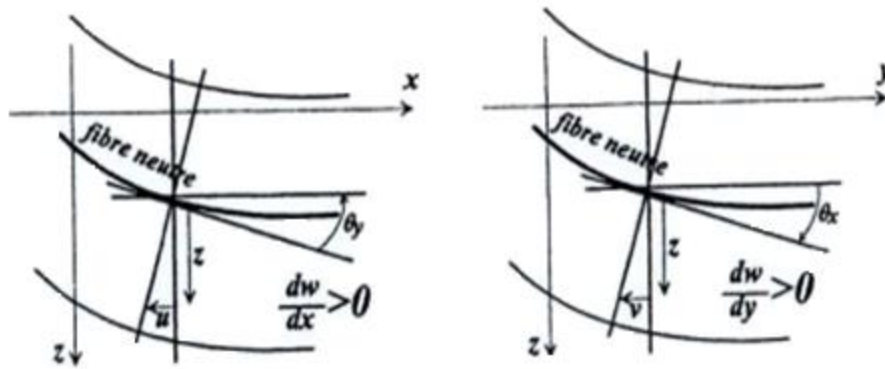


Figure 2.4. Plans de flexion de la plaque.

2.3.4. Hypothèses pour l'étude des plaques:

La modélisation des plaques adopte les hypothèses fondamentales suivantes :

Hypothèse des sections droites (ou planes) : Les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée demeurent alignés sur une droite dans la configuration déformée. Les déplacements u et v (selon x et y) en tout point varient de manière linéaire en z , tandis que le déplacement transversal w (selon z) dépend uniquement de x et y .

Hypothèse d'une déformation transversale nulle ($\epsilon_z=0$) : On suppose que la déformation dans la direction transversale à la plaque est négligeable.

Hypothèse des contraintes planes : Les contraintes normales au plan de la plaque sont considérées comme négligeables par rapport aux contraintes présentes dans le plan de la plaque ($\sigma_z=0$).

Ces hypothèses sont cruciales pour établir les fondements de la théorie des plaques, fournissant ainsi une base simplifiée mais robuste pour ce type d'analyse du comportement.

Il existe deux théories pour traiter les plaques selon le cas de l'épaisseur (prise en compte du cisaillement transverse) :

2.3.5. La théorie des plaques minces

Également connue sous le nom de théorie de Kirchhoff ou Love-Kirchhoff, repose sur l'hypothèse de négligence des déformations causées par les cisaillements transversaux. Selon cette théorie, les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent alignés sur la normale à la surface moyenne déformée. Elle est considérée comme

applicable lorsque la dimension caractéristique L de la plaque est significativement plus grande que son épaisseur h , c'est-à-dire lorsque $L > 20 h$.

Cette approche simplificatrice permet de modéliser efficacement le comportement des plaques minces dans des situations où les effets des cisaillements transversaux peuvent être négligés. Il est important de noter que l'applicabilité de cette théorie dépend de la relation spécifique entre la dimension caractéristique L et l'épaisseur h de la plaque.

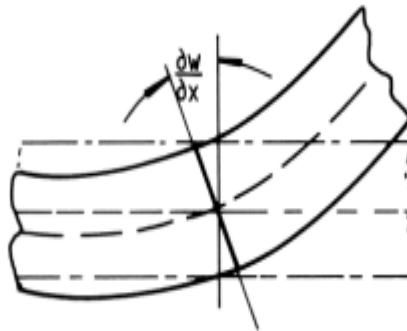


Figure 2.5 Hypothèse des sections droites selon la théorie de Kirchhoff [55]

2.3.5.1 Champs de déplacements

Les trois composantes de déplacements pour cette théorie mince sont données par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

w étant le déplacement transversal.

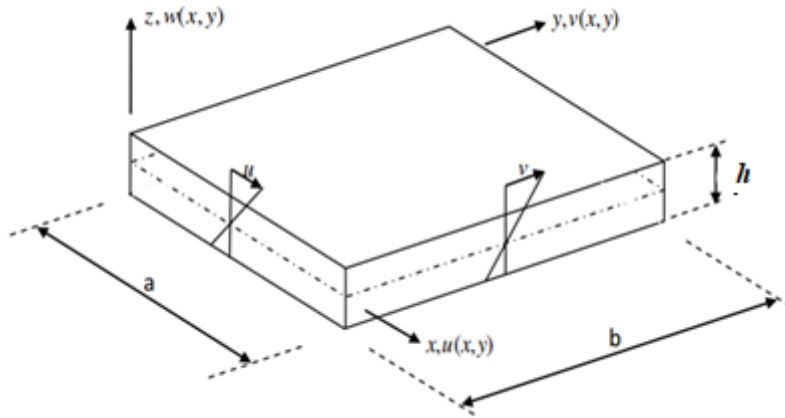


Figure 2.6 Plaque mince – déplacements [53]

2.3.5.2 Expression des déformations :

Les déformations de la plaque mince ont pour expressions :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

Les équations (2.12)- (2.14) peuvent s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\{\varepsilon\} = z\{x\} \quad (2.15)$$

Avec

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Et :

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

$\{\varepsilon\}$ étant le vecteur de déformation en flexion et $\{\chi\}$ le vecteur de courbures, dont les deux premières composantes représentent les courbures principales de la plaque dans les directions x et y et la troisième correspond à la courbure croisée engendrée par la torsion de la plaque.

2.3.5.3 Relations contraintes- déformations :

D'après la loi Hooke, les contraintes dans un matériau linéaire et isotrope sont déterminées par :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.18)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\gamma_{xy} = G\gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.20)$$

G : étant le module de cisaillement transverse:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.21)$$

Les équations (2.18)-(2.20) peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (2.22)$$

Avec :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Où σ est le vecteur des contraintes, et $[H]$, la matrice d'élasticité dans le cas de contraintes planes définie par :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Et $\{\varepsilon\}$, déjà défini dans (2.16).

2.3.5.4 Relations moments – courbures

Les moments de flexion par unité de longueur dans la plaque sont calculés par intégration des contraintes sur l'épaisseur.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (2.25)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (2.26)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.27)$$

En injectant (2.18)-(2.20) dans (2.25)-(2.27), on obtient les équations:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.28)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.29)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.30)$$

Avec :

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.31)$$

Qui peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\{M_f\} = [H_f]\{x\} \quad (2.32)$$

Avec :

$$\{M_f\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

$$[H_f] = \frac{h^3}{12} [H] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Et $\{x\}$ déjà défini dans (2.17).

2.3.5.5 Relations contraintes – moments

En examinant les équations (2.18)-(2.20) et (2.28)-(2.30), nous pouvons conclure que :

$$\sigma_x = \frac{12zM_x}{h^3} \quad (2.35)$$

$$\sigma_y = \frac{12zM_y}{h^3} \quad (2.36)$$

$$\tau_{xy} = \frac{12zM_{xy}}{h^3} \quad (2.37)$$

Ce qui donne pour les fibres extrêmes de la plaque ($z = \pm \frac{h}{2}$):

$$\sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^2} \quad (2.38)$$

$$\sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^2} \quad (2.39)$$

$$\tau_{xy} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2} \quad (2.40)$$

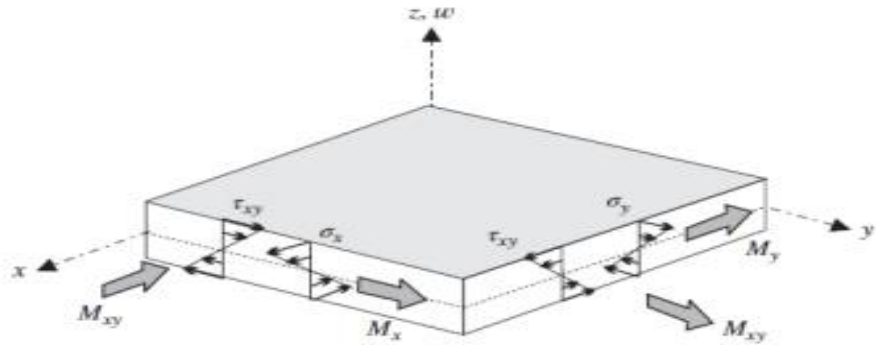


Figure 2.7 Contraintes et moments de flexion dans une plaque

2.3.5.6. Flexion des plaques sous charges latérales réparties

Considérons un élément de plaque rectangulaire d'épaisseur h constante, de longueur dx et de largeur dy , les axes Ox et Oy sont choisis pour contenir la surface moyenne supposée initialement horizontale.

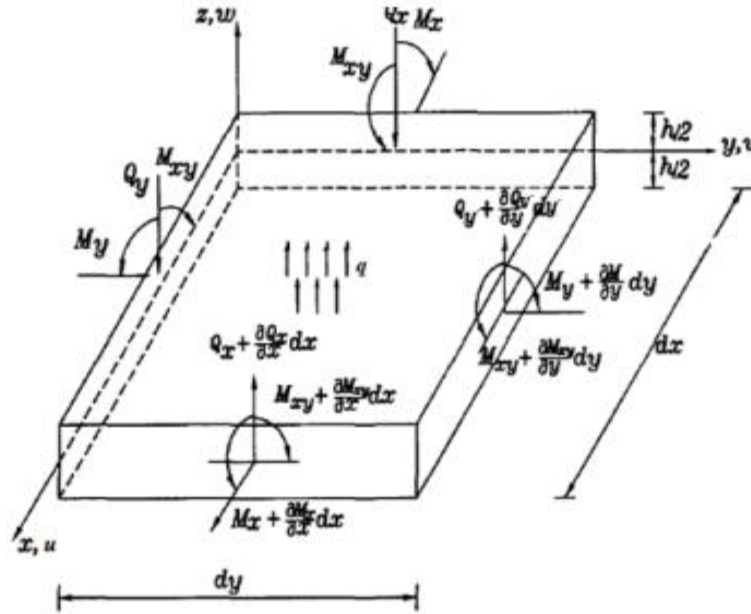


Figure 2.8 : Forces et moments agissant sur l'élément de plaque

Q_x, Q_y : les efforts tranchants.

M_x, M_y : les moments de flexion

M_{xy} : le moment de torsion.

$q = (x, y)$: l'effort extérieur transversal appliqué à la plaque par unité de surface. En étudiant l'équilibre de l'élément de plaque sous q , on aura :

Après sommation des efforts par rapport à l'axe z :

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0 \quad (2.41)$$

D'où après simplification:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad (2.42)$$

Après sommation des moments par rapport à l'axe y :

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_x dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - M_{xy} dx + Q_x dx dy = 0 \quad (2.43)$$

D'où après simplification:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (2.44)$$

Par la même façon, l'équilibre suivant l'axe x , donne :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (2.45)$$

En reportant (2.44) et (2.45) dans (2.42), on déduit :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (2.46)$$

En substituant (2.28)-(2.30) dans (2.46), on obtient

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.47)$$

2.3.5.7 Conditions aux limites

La solution des équations définissant u , v et w exige une attention particulière aux conditions aux limites. Les conditions aux limites dans le contexte des plaques, comprennent les configurations suivantes : libre (F), simplement appuyé (S), et encasté (C). Nous considérons seulement les plaques rectangulaires dont les bords sont parallèles aux axes x et y , les déplacements u et v chacun doivent être au moins spécifiés le long d'une des frontières de la plaque. Nous pouvons écrire les conditions aux limites selon le type de frontière:

$$(i) \text{ Bord encastre:} \quad w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.48)$$

$$(ii) \text{ Bord simplement appuyé:} \quad w = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.49)$$

$$(iii) \text{ Bord libre :} \quad w = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = 0 \quad (2.50)$$

Nous résumons alors les C.L dans le tableau suivant :

Bord encasté (C)	$w = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$
Bord appuyé (S)	$w = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$
Bord libre (F)	$w = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = 0$

Tableau 2.1. Conditions aux limites plaque Kirchhoff.

2.3.6. Théorie des plaques épaisses :

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de satisfaire les hypothèses de Kirchhoff, la théorie de Mindlin (ou Reissner-Mindlin) est utilisée en tant qu'extension de la théorie des poutres de Timoshenko aux plaques. Elle est applicable lorsque $4h \leq L \leq 20h$, où h est l'épaisseur et L est une dimension caractéristique de la plaque.

La théorie de Mindlin, développée par Mindlin, prend en compte les déformations résultant de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation. Cette approche plus détaillée du problème des plaques repose également sur une cinématique différente de la déformation, entraînant ainsi une autre expression des conditions aux limites.

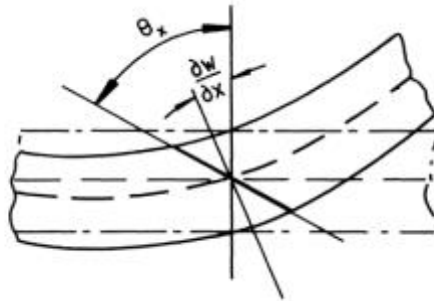


Figure 2.9. Hypothèse des sections droites selon la théorie de Mindlin [55]

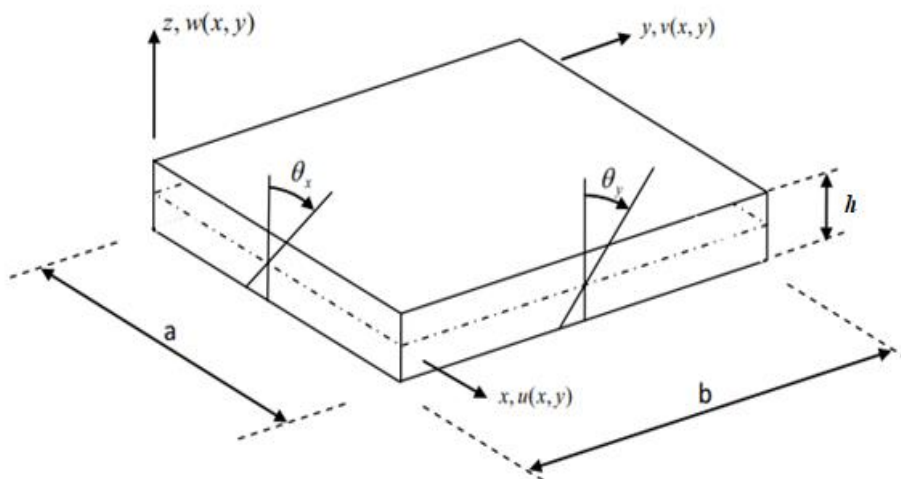


Figure 2.10. Plaque épaisse – déplacements et rotations [53]

2.3.6.1 Champ de déplacements:

Dans cette théorie de Reissner-Mindlin les composants des champs de déplacement sont définis comme :

$$u(x, y, z, t) = z\theta_x(x, y, t) \quad (2.51)$$

$$v(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \quad (2.52)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.53)$$

Où : θ_x et θ_y sont les rotations de la normale à la surface de la plaque par rapport aux axes y et x , respectivement.

u et v sont des translations dans le plan de la plaque,

w est le déplacement transverse,

Et t représente la variable temps,

2.3.6.2 Relations contraintes – déformations:

Les expressions linéaires des déformations sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w \quad (2.56)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2.57)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.58)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.59)$$

Les déformations relatives à la flexion sont :

$$\{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = z\{x\} \quad (2.60)$$

Celles relatives au cisaillement :

$$\{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

L'hypothèse de contrainte plane permet de déduire :

Pour la flexion :

$$\{\sigma_f\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H]\{\varepsilon_f\} = z[H]\{x\} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

Pour le cisaillement :

$$\{\sigma_c\} = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [H_\tau]\{\varepsilon_c\} \quad (2.63)$$

2.3.6.3. Efforts tranchants et moments de flexion:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad (2.64)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (2.65)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz \quad (2.66)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz \quad (2.67)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.68)$$

En tenant compte de (2.62) dans (2.65)-(2.68) et après intégration, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.69)$$

Ou :

$$\{M_f\} = [H_f]\{x\} \quad (2.70)$$

Avec :

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

2.3.6.4. Fonctions d'énergie:

La somme des énergies de flexion et de cisaillement représente l'énergie de déformation élastique donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int \{\epsilon_f\}^T \{\sigma_f\} dV + \frac{k}{2} \int \{\epsilon_c\}^T \{\sigma_c\} dV \quad (2.72)$$

K : facteur correctif de cisaillement, généralement pris égal à 5/6.

$$U = \frac{1}{2} \int \{\epsilon_f\}^T [H] \{\epsilon_f\} dV + \frac{k}{2} \int \{\epsilon_c\}^T [H_\tau] \{\epsilon_c\} dV \quad (2.73)$$

Soit, en tenant compte de (2.60) et après intégration sur l'épaisseur :

$$U = \frac{1}{2} \int \{x\}^T [H_f] \{x\} dS + \frac{k}{2} \int \{\epsilon_c\}^T [H_c] \{\epsilon_c\} dV \quad (2.74)$$

Avec :

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$[H_f] = h[H_\tau] = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

L'énergie cinétique de la plaque s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (2.77)$$

En substituant u et v à partir de (2.51) et (2.52) dans (2.77) et en intégrant sur l'épaisseur h de la plaque, on obtient finalement :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho(h\dot{w}^2 + \frac{h^3}{12}\dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12}\dot{\theta}_y^2) dS \quad (2.78)$$

2.3.6.5. Conditions aux limites :

Les conditions de bords : libre, simplement appuyé ou encastré sont considérées.

(i) Bord libre (F: free) : dans la théorie des plaques de Mindlin, le long d'un bord libre, la force de cisaillement Q_n , le moment de flexion M_n et le moment de torsion M_{nt} doivent tous disparaître :

$$Q_n = 0, M_n = 0 \text{ et } M_{nt} = 0 \quad (2-79)$$

(ii) Bord simplement appuyé (S: simply supported) : dans la théorie des plaques de Mindlin, il existe deux manières possibles de prendre en compte une condition de bord simplement appuyé :

(a) Dans la première, le déplacement latéral w , le moment fléchissant M_n et la rotation de la normale au plan médian θ_t , dans le plan tz tangent à la frontière de la plaque s'annulent tous, c'est-à-dire

$$w = 0, M_n = 0 \text{ et } \theta_t = 0 \quad (2.80)$$

Cette condition implique qu'il existe des moments de torsion le long du bord de la plaque.

(b) Pour l'autre condition d'appui simple, le déplacement latéral w , le moment fléchissant M_n et le moment de torsion, s'annulent tous, c'est-à-dire :

$$w = 0, M_n = 0 \text{ et } M_{nt} = 0 \quad (2-81)$$

(iii) Bord encastré (C: clamped) : dans la théorie des plaques de Mindlin, le long d'un bord encastré, le déplacement latéral w , et les rotations θ_n et θ_t , doivent tous disparaître :

$$w = \theta_n = \theta_t = 0 \quad (2-82)$$

Nous résumons alors les conditions aux limites dans le tableau suivant :

Bord encastré	$w = \theta_n = \theta_t = 0$
Bord appuyé	$w = 0, \quad M_n = 0 \text{ et } \theta_t = 0, M_{nt} = 0$
Bord libre	$Q_n = 0, \quad M_n = 0 \text{ et } M_{nt} = 0$

Tableau 2.2. Conditions aux limites plaque Mindlin.

2.4. Blocage en cisaillement transverse (verrouillage en CT)

Le blocage en CT (locking) est un phénomène selon lequel l'élément fini dévient sur-rigide (overstiff), lorsque le rapport d'épaisseur (L/h) approche une valeur limite. Le blocage en cisaillement est associé au développement d'une déformation de cisaillement transverse fictive.

2.4.1. Description de l'aspect analytique du verrouillage

La description analytique du mécanisme de blocage en CT est décrite à travers l'élément plaque rectangulaire Mindlin classique à quatre nœuds avec 12 ddl basé sur le modèle en déplacement. La représentation des courbures de flexion $\{\kappa\}$ et des déformations de CT $\{\gamma\}$ en termes des 12 paramètres ($a_1, a_2, \dots, a_{12}$) est donnée dans le tableau ci-dessous [51]. La vérification des différents modes de déformations constantes (flexion pure $\{\kappa\}=\text{cste}, \{\gamma\}=0$) et (cisaillement pur $\{\gamma\}=\text{cste}, \{\kappa\}=0$) est illustrée comme suit :

✓ Déformations de CT γ_{xz}, γ_{yz} constantes sont exactement représentées par $a_2 + a_5$ et $a_3 + a_9$ respectivement.

✓ Pour les déformations de flexion $\{\kappa\}$: κ_x est mal représenté à cause de la présence du terme ξ au niveau de γ_{xz} dans la colonne 6.

κ_y est mal représenté à cause de la présence du terme η au niveau de γ_{yz} dans la colonne 11. κ_{xy} est mal représenté à cause de la présence des termes η et ξ au niveau de γ_{xz} et γ_{yz} respectivement dans les colonnes 7 et 10.

On ne constate que la présence de ces termes indésirables (courbures constantes avec cisaillement non nul) qui cause le blocage en CT de l'élément **R4** (intégré exactement).

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Interpolation bilinéaire	W	1	ξ	η	$\xi\eta$								
	β_x					1	ξ	η	$\xi\eta$				
	β_y									1	ξ	η	$\xi\eta$
Courbures de flexion	k_x						1		η				
	k_y											1	ξ
	k_{xy}							1	ξ		1		η
Déformation de CT	γ_{xz}		1		η	1	ξ	η	$\xi\eta$				
	γ_{yz}			1	ξ					1	ξ	η	$\xi\eta$

Tableau 2.3. Interpolations des déplacements (W, β_x et β_y) et des déformations ($\{\kappa\}$ et $\{\gamma\}$) [51]

2.5. Problèmes d'analyse des plaques

2.5.1. Le problème du blocage en cisaillement dans les plaques

La méthode des éléments finis est une technique numérique utilisée pour approximer des solutions à problèmes d'ingénierie complexes, y compris l'analyse de structures comme les plaques minces.

Un problème courant pouvant survenir lors de l'analyse par éléments finis de plaques minces est connu sous le nom de "cisaillement verrouillage." Ce phénomène se produit lorsque le modèle d'éléments finis n'est pas capable de déterminer avec précision capturé les déformations causées par les forces de cisaillement dans les structures minces, conduisant à des résultats.

Pour atténuer le verrouillage par cisaillement dans l'analyse par éléments finis des plaques minces, plusieurs techniques et des éléments ont été développés. L'une d'elles est l'utilisation d'éléments d'ordre supérieur, en particulier : éléments de plaque d'ordre supérieur.

Voici comment la méthode des éléments finis, en particulier les éléments d'ordre supérieur, peut résoudre le problème du cisaillement verrouillage:

1. Éléments d'ordre supérieur : éléments finis linéaires standards (par exemple, quadrilatère à 4 nœuds éléments) souffrent souvent de blocage en cisaillement dans les structures minces car ils ne sont pas capables de capturer avec précision les déformations de flexion et de cisaillement. Éléments d'ordre supérieur, tels que 8-éléments quadrilatéraux à nœuds ou à 9 nœuds, ont plus de degrés de liberté et peuvent mieux représentent le comportement en flexion et en cisaillement de plaques minces. Ces éléments comprennent des fonctions d'interpolation qui améliorent la précision de l'analyse.

2. Intégration réduite : une autre technique utilisée pour lutter contre le blocage par cisaillement est la réduction l'intégration. Au lieu d'intégrer la matrice de rigidité sur l'ensemble de l'élément, on réduit l'intégration l'évalue à moins de points d'intégration. Cela peut aider à atténuer le blocage par cisaillement dans certains cas, mais peut nécessiter une mise en œuvre minutieuse pour éviter d'autres problèmes numériques.

3. Formulations mixtes : dans certains cas, des formulations mixtes par éléments finis, telles que Les théories des plaques de Reissner-Mindlin ou de Kirchhoff-Love peuvent être utilisées. Ces formulations séparent les comportements de flexion et de membrane de la plaque, permettant une modélisation plus précise de plaques minces sans problèmes de verrouillage en cisaillement.

4. Éléments dépendants de l'épaisseur : certaines formulations d'éléments finis permettent la modélisation plaques de différentes épaisseurs. Cela peut être particulièrement utile lorsqu'il s'agit de plaques qui présentent des variations d'épaisseur.

5. Intégration réduite sélective : cette technique consiste à utiliser une intégration réduite pour certains termes de la matrice de rigidité (par exemple, termes de cisaillement) tout en utilisant une intégration complète pour d'autres (par exemple, termes pliants).

Cela peut constituer un compromis efficace entre précision et stabilité.

Il est important de noter que le choix du type d'élément et de la technique numérique dépend sur le problème spécifique et le logiciel utilisé. Les ingénieurs et les analystes ont souvent besoin considérer les compromis entre précision et efficacité de calcul lorsque sélectionner l'approche appropriée pour résoudre le problème du verrouillage par cisaillement dans l'analyse des plaques minces.

2.5.2. L'effet du rapport hauteur/largeur de la plaque sur la précision de l'élément :

Le rapport hauteur/largeur d'une plaque, qui est le rapport entre sa dimension la plus longue et sa dimension la plus courte, peut avoir un impact sur la précision de l'analyse par éléments finis utilisant des éléments rectangulaires.

Lorsqu'il s'agit d'éléments rectangulaires dans l'analyse par éléments finis, en particulier pour les éléments minces plaques, le rapport hauteur/largeur peut affecter la précision des résultats pour diverses raisons :

1. Verrouillage par cisaillement : Comme mentionné précédemment, le verrouillage par cisaillement est un phénomène qui peut se produire lorsque en utilisant des éléments rectangulaires linéaires standards pour les structures minces, surtout si le rapport hauteur/largeur est haut.

Dans les cas où le rapport hauteur/largeur est important (la plaque est longue et étroite), la norme les éléments rectangulaires peuvent avoir du mal à capturer avec précision les déformations de flexion et de cisaillement, conduisant à des résultats inexacts.

2. Densité du maillage: les plaques à rapport d'aspect plus élevé peuvent nécessiter un maillage plus fin pour capturer avec précision la répartition des contraintes et des déformations. Si le maillage n'est pas assez dense, l'élément fini l'analyse peut manquer des effets locaux importants, conduisant à des résultats moins précis.

3. Effets de courbure : dans les plaques présentant des rapports d'aspect élevés, une courbure importante peut se développer le long de la surface sur les bords les plus courts.

Les éléments rectangulaires linéaires standards peuvent ne pas être en mesure de représenter cette courbure, ce qui entraîne des inexactitudes dans les calculs de contraintes et de déformations.

4. Formes de mode : Pour certains modes de vibration ou de déformation, des rapports d'aspect élevés peuvent conduire à différentes formes de mode qui pourraient ne pas être bien capturées par de simples éléments rectangulaires.

Pour améliorer la précision lors du traitement de plaques à rapport d'aspect élevé, plusieurs stratégies peuvent être employées :

- **Éléments d'ordre supérieur :** comme mentionné précédemment, les éléments rectangulaires d'ordre supérieur (avec plus de nœuds) peuvent aider à atténuer certains des problèmes de précision liés au verrouillage par cisaillement et effets de courbure.
- **Affinement du maillage :** l'utilisation d'un maillage plus fin avec des éléments plus petits peut améliorer la précision, mais cela se fait au prix d'une augmentation des ressources informatiques.
- **Éléments anisotropes :** certains logiciels d'éléments finis permettent l'utilisation d'éléments anisotropes qui peut être adapté au rapport hauteur/largeur de la structure. Ces éléments peuvent apporter davantage des résultats précis pour les structures aux proportions extrêmes.
- **Théories avancées des plaques :** envisagez d'utiliser des théories des plaques plus avancées comme celles de Reissner-Mindlin ou Kirchhoff-Love, qui peuvent offrir

une meilleure précision dans certaines situations par rapport aux hypothèses simples de la théorie classique des plaques.

La précision des éléments finis rectangulaires dans l'analyse des plaques minces peut être affectée par le rapport hauteur/largeur de la plaque. Pour les plaques à rapport d'aspect élevé, problèmes de précision comme un verrouillage en cisaillement et une représentation inadéquate de la courbure pourraient survenir. En utilisant éléments d'ordre supérieur, affinant le maillage et considérant des plaques plus avancées

Les théories sont des stratégies qui peuvent être utilisées pour améliorer la précision des structures avec rapports d'aspect variables.

2.5.3. Le problème des singularités de contraintes aux coins de la plaque :

Les éléments finis rectangulaires, comme les éléments quadrilatères standards à 4 nœuds, peuvent avoir des difficultés dans la gestion précise des singularités de contrainte aux coins d'une plaque. Insistez souvent sur les singularités se produisent aux coins, aux bords et à d'autres endroits avec des changements brusques de géométrie ou de limite conditions. Les limites des éléments rectangulaires dans le traitement des singularités de contrainte sont en raison de leur incapacité à capter certaines variations de stress.

Voici quelques raisons pour lesquelles les éléments rectangulaires luttent contre les singularités de contrainte au niveau de la plaque coins :

Limitations des fonctions de forme : les éléments rectangulaires standard utilisent des fonctions de forme qui sont généralement linéaires ou bilinéaires, qui ne sont pas idéales pour capturer les changements rapides de contrainte à proximité singularités. Les concentrations de contraintes aux coins ont souvent une singularité de racine carrée, ce qui ne peut pas être représenté avec précision par des fonctions de forme linéaires.

Densité de maillage inadéquate : Même avec un maillage fin, les éléments rectangulaires peuvent ne pas fournir résultats suffisamment précis à proximité des singularités de contrainte. Des concentrations de contraintes peuvent se produire sur une période très petite région, et le maillage d'éléments finis peut devoir être extrêmement dense pour capturer efficacement ces variations.

Verrouillage en cisaillement : les éléments rectangulaires peuvent souffrir de problèmes de verrouillage en cisaillement dans les plaques minces, ce qui peut compliquer encore davantage la représentation précise des singularités de contrainte.

Pour remédier à ces limitations et améliorer la gestion des singularités de contraintes, plusieurs des approches peuvent être adoptées :

- 1. Éléments d'ordre supérieur** : utilisation d'éléments quadrilatères d'ordre supérieur, tels que 8 nœuds ou 9 nœuds, peuvent améliorer la représentation des gradients de contraintes et contribuer à atténuer les effets des singularités de contrainte.
- 2. Éléments enrichis** : éléments enrichis ou modifiés, tels que l'utilisation de singuliers ou de coins éléments, ont été développés spécifiquement pour gérer plus précisément les singularités de contrainte. Ces éléments introduisent des fonctions de forme supplémentaires ou des fonctions d'enrichissement pour capturer le comportement de singularité.
- 3. Éléments finis mixtes** : dans certains cas, formulations d'éléments finis mixtes ou spécialités les théories des plaques peuvent fournir de meilleurs résultats à proximité des singularités de contrainte. Ces formulations séparent le comportement de la plaque en différents composants, permettant une analyse plus précise représentation des variations de contraintes.
- 4. Raffinement adaptatif du maillage** : les techniques de raffinement adaptatif du maillage peuvent affiner automatiquement le maillage à proximité des zones présentant des singularités de contrainte. Cela peut être une manière informatiquement efficace de capturer les variations de contraintes sans affiner excessivement l'ensemble du maillage.
- 5. Utilisation d'autres types d'éléments** : en fonction du problème spécifique, d'autres types d'éléments tels que des éléments triangulaires ou des formes d'éléments singuliers spécialisées pourraient être plus adaptés à capturer les singularités de contrainte.

Les éléments finis rectangulaires standards peuvent avoir des limites en termes de précision. Gérer les singularités de contrainte au niveau des coins des plaques en raison de leurs limitations de fonction de forme et exigences de densité de maillage. Pour résoudre ce problème, les ingénieurs et les analystes se tournent souvent vers des éléments d'ordre, éléments enrichis, théories spécialisées, raffinement adaptatif du maillage, ou types d'éléments alternatifs pour obtenir des résultats plus précis dans les régions soumises à des contraintes singularités. Le choix de la méthode dépend du problème spécifique et des disponibilités ressources informatiques.

2.6. Contribution des éléments rectangulaires à l'analyse des plaques

Dans le cadre de l'analyse par éléments finis pour les plaques minces, un élément rectangulaire à 4 nœuds représente généralement une forme quadrilatérale simple avec quatre nœuds. Ses apports et la nouveauté peut être comprise comme suit :

1. Modélisation de plaques minces : La principale contribution d'un élément rectangulaire à 4 nœuds est son aptitude à la modélisation de plaques minces. Les plaques minces ont un rapport hauteur/largeur élevé (longueur /épaisseur), et les éléments rectangulaires sont souvent choisis pour leur simplicité et leur efficacité dans discrétiser de telles géométries.

2. Simplicité et efficacité : L'un des principaux avantages de l'élément rectangulaire à 4 nœuds est sa simplicité en termes de formulation d'éléments et d'efficacité de calcul. Cette simplicité peut en faire un choix intéressant pour l'analyse rapide des structures de plaques minces.

3. Analyse de flexion : L'élément est spécifiquement conçu pour l'analyse de flexion de plaques minces. Il peut capturer le comportement en flexion des plaques sous charges, ce qui en fait un outil précieux dans ingénierie des structures et mécanique.

4. Compatibilité avec les logiciels courants : de nombreux progiciels d'analyse par éléments finis prendre en charge les éléments rectangulaires à 4 nœuds, les rendant accessibles et largement utilisés en ingénierie pratique.

5. Hypothèse élastique linéaire : généralement, les éléments rectangulaires à 4 nœuds sont formulés sur la base sur des hypothèses d'élasticité linéaire, qui conviennent à de nombreuses applications d'ingénierie. Cela signifie qu'ils supposent des relations contrainte-déformation linéaires au sein de l'élément.

Cependant, il est essentiel de noter qu'il existe des limites et des défis associés à l'utilisation d'Éléments rectangulaires à 4 nœuds pour l'analyse des plaques minces :

. **Verrouillage en cisaillement :** comme nous l'avons mentionné précédentes, les éléments rectangulaires à 4 nœuds peuvent souffrir des problèmes de verrouillage en cisaillement dans les plaques minces, conduisant à des résultats inexacts, en particulier lorsque le rapport hauteur/largeur est élevé. Il s'agit d'une limitation bien connue.

. **Précision pour les géométries complexes:** pour les plaques aux formes ou aux limites complexes dans certaines conditions un simple élément rectangulaire à 4 nœuds peut ne pas fournir une précision suffisante. Dans certains cas, des éléments d'ordre supérieur ou des formulations plus spécialisées peuvent être nécessaires.

. **Gestion des singularités de contrainte:** les éléments rectangulaires à 4 nœuds peuvent avoir du mal à gérer les singularités de contrainte aux coins des plaques, comme indiqué précédemment.

L'élément rectangulaire à 4 nœuds pour l'analyse des plaques minces contribue en offrant un moyen simple et efficace de modéliser le comportement en flexion de plaques minces. Sa nouveauté réside dans son adéquation à cette tâche spécifique. Cependant, les utilisateurs doivent être conscients de ses limitations, notamment en ce qui concerne le verrouillage en cisaillement et les singularités de contrainte, et envisager d'autres types d'éléments ou des améliorations pour obtenir des résultats plus précis dans certaines situations.

2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, deux fondamentales théories de la flexion des plaques sont présentées : la théorie des plaques minces de Kirchhoff et celle épaisses de Mindlin. Nous exposons la manière d'appliquer les conditions aux limites pour les cas courants de bords tels que libre, simplement appuyé ou encasté. Ces résultats seront exploités dans le troisième chapitre pour établir une formulation par la M.E.F de la flexion des plaques selon la théorie de Kirchhoff.

CHAPITRE 3

**DEVELOPPEMENT ET VALIDATION
NUMERIQUE EN LINEAIRE D'UN NOUVEL
ELEMENT RECTANGULAIRE A 4 NŒUDS BASE
SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION POUR
L'ANALYSE DES PLAQUES MINCES EN
FLEXION.**

Chapitre 3. DEVELOPPEMENT ET VALIDATION NUMERIQUE EN LINEAIRE D'UN NOUVEL ELEMENT RECTANGULAIRE A 4 NŒUDS BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION POUR L'ANALYSE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION.

3.1. Introduction

La méthode des éléments finis constitue depuis longtemps un domaine de recherche fertile. Il a aussi été de plus en plus utilisé comme outil de recherche pour l'expérimentation numérique [57, 58, 59]. Les plaques sont les structures les plus critiques dans de nombreuses applications d'ingénierie.

L'analyse de ces structures par les méthodes des éléments finis présente un intérêt constant aux communautés scientifiques et techniques. Face à la difficulté rencontrée dans l'analyse des plaques, de nombreux chercheurs ont étudié de nombreux modèles éléments finis capables de résoudre ces problèmes. Des travaux de recherche considérables sur l'analyse des plaques sont toujours en cours [60,61-62].

Les premiers modèles développés sont des plaques basées sur la théorie de Kirchhoff (épaisseur plaques), qui néglige les effets du cisaillement transversal et exige que les deux déflexions et rotations doivent être continues entre les éléments (continuité C1) [56]. Plus tard, de nombreux éléments ont été développés pour les plaques épaisses Reissner – Mindlin théories [63, 64,65], et pour l'analyse des vibrations libres et forcées [66,67]. Un autre type des plaques utilisées dans la littérature est celles basées sur l'approche en déformation, dans laquelle peu de contributions peuvent être trouvées [33, 42,68]. Presque tous ces éléments finis basés sur l'approche en déformation et la théorie de Kirchhoff ou Reissner-Mindlin sont présenté uniquement pour l'analyse linéaire de flexion des plaques. Par contre beaucoup de chercheurs ont également développé des éléments tridimensionnels solides basés sur la déformation pour l'analyse de flexion linéaire de plaques épaisses et minces [17,36]. Par rapport à l'approche originale de déplacement, l'approche de déformation présente plusieurs avantages y compris l'efficacité et la précision des calculs, comme cela a été démontré récemment dans les références [69-72] [40,41]. En effet les motivations de la formulation de nouveaux éléments finis basés sur l'approche en déformation. Le succès de cette variété de

formulation en termes de précision et de convergence et les avantages de cette approche ont motivé ce travail.

Dans ce chapitre, un nouvel élément rectangulaire basé sur l'approche en déformation et la théorie de Kirchhoff, pour l'analyse des plaques minces en flexion est développé. Cet élément développé noté **SBPE** (Strain Based Plate Element) est composé de quatre nœuds avec trois degrés de liberté en chacun des nœuds. Pour chaque application, un code informatique est développé qui permet la solution de problèmes pratiques. Cet élément doit avoir certaines exigences : bonne réponse linéaire et absence de phénomènes de blocage en cisaillement.

3.2. Construction de l'élément SBPE

3.2.1. Définition :

L'élément développé est à base de l'approche en déformation et la théorie de Kirchhoff pour l'analyse des plaques minces en flexion nommé **SBPE** (Strain Based Plate Element). Il est composé de quatre nœuds et trois degrés de liberté à chacun des nœuds (2 rotations et 1 translation).

3.2.2. Formulation de base

Considérons une plaque avec 4 nœuds et trois ddl (W , β_x et β_y) à chacun des quatre nœuds, comme le montre la fig.3.1

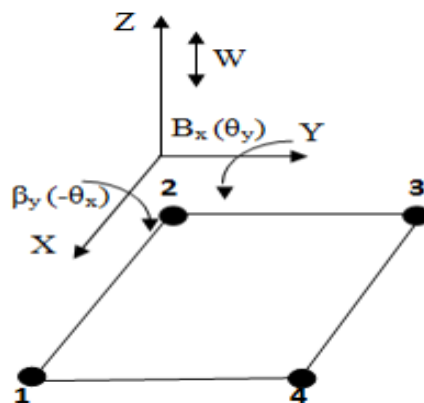


Fig.3.1 - Élément Plaque : Système de coordonnées et DDL

Selon la théorie des plaques minces, les déplacements de la plaque sont déterminés sans ambiguïté dès lors que l'on connaît la déflexion (w) en tout point.

Les principes de base de cette théorie sont donc :

- Le seul champ $W(x, y)$ peut définir le comportement de la plaque.
- Les rotations sont données par:

$$\begin{aligned}\beta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y \\ \beta_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x\end{aligned}\tag{3.1}$$

- Les déplacements sont donnés par :

$$\begin{aligned}U(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.2}$$

- Les trois composantes de déformation de l'élément sont:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}\tag{3.3}$$

- Les courbures de flexion sont les suivantes :

$$\varepsilon = \left\{ \begin{aligned} k_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ k_y &= \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ k_{xy} &= \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}\tag{3.4}$$

- Pour les plaques minces, les équations de la relation contrainte-déformation pour un matériau isotrope sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Avec M est le vecteur moment, E est le module de Young, h est l'épaisseur de la plaque et ν est le coefficient de Poisson.

3.2.3. Formulation du nouvel élément SBPE

- Les trois composantes de la déformation de cet élément sont données par l'équation cinématique :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Ces déformations données par l'équation (3.6) doivent satisfaire les équations de compatibilité données par :

$$\frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial k_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial k_y}{\partial x} \quad (3.7)$$

Si ces déformations données par l'équation (3.6) sont égales à zéro, et après leur intégration, on obtient les expressions suivantes :

$$W = a_1 - a_2 x - a_3 y, \quad \beta_x = a_2 + a_3 x, \quad \beta_y = a_3 \quad (3.8)$$

Les termes de l'équation (3.8) sont ceux qui représentent les modes de corps rigides. L'élément actuel a quatre nœuds et trois ddl par nœud (W, β_x , β_y).

Ainsi, le champ de déplacement doit contenir douze constantes indépendantes. Trois d'entre elles (a_1, a_2, a_3) sont déjà utilisées pour la représentation des composants du corps rigide, il reste donc neuf constantes ($a_4, a_5 \dots a_{12}$) pour exprimer le déplacement dû à la déformation de l'élément. Celles-ci sont réparties comme suit :

$$\begin{aligned} k_x &= -2a_4 - 6a_5xy - 2a_6x - 2a_9y - 6a_{10}x \\ k_y &= -2a_6 - 2a_7(y+1) - 2a_8x - 6a_{11}yx \\ k_{xy} &= -6a_5x^2 - 4a_8y - 4a_9x - 6a_{11}y^2 - 2a_{12} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les expressions (3.9) sont assimilées aux équations en termes de W , β_x , β_y de l'équation (3.6) et les équations résultantes sont intégrées, pour donner :

$$\begin{aligned} W &= a_4x^2 + a_5x^3y + a_6\left(\frac{x^3}{3} + y^2\right) + a_7\left(\frac{y^3}{3} + y^2\right) + a_8xy^2 \\ &\quad + a_9x^2y + a_{10}x^3 + a_{11}xy^3 + a_{12}xy \\ \beta_x &= -2a_4x - 3a_5x^2y - a_6x^2 - a_8y^2 - 3a_{10}x^2 - a_{11}y^3 - a_{12}y \\ \beta_y &= -a_5x^3 - 2a_6y - a_7(y^2 + 2y) - 2a_8xy - a_9x^2 - 3a_{11}xy^2 - a_{12}x \end{aligned} \quad (3.10)$$

En additionnant les équations (3.8) et (3.10) nous obtenons les fonctions de déplacement finales:

$$\begin{aligned} W &= a_1 - a_2x - a_3y + a_4x^2 + a_5x^3y + a_6\left(\frac{x^3}{3} + y^2\right) + a_7\left(\frac{y^3}{3} + y^2\right) + a_8xy^2 \\ &\quad + a_9x^2y + a_{10}x^3 + a_{11}xy^3 + a_{12}xy \\ \beta_x &= a_2 - 2a_4x - 3a_5x^2y - a_6x^2 - a_8y^2 - 2a_9xy - 3a_{10}x^2 - a_{11}y^3 - a_{12}y \\ \beta_y &= a_3 - a_5x^3 - 2a_6y - a_7(y^2 + 2y) - 2a_8xy - a_9x^2 - 3a_{11}xy^2 - a_{12}x \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sous forme matricielle ces fonctions de déplacement du **SBPE** données par l'équation (.311) peuvent être écrites comme :

$$\{U\} = [C]\{A\} \quad (3.12)$$

Où U est le vecteur de déplacement nodal, A est le vecteur de paramètres indéterminés $\{a_i\} = 1 \dots 12$ et la matrice de transformation $[C]_{12 \times 12}$ est donnée en annexe.

La matrice de rigidité $[K^e]$ peut être calculée à partir de l'expression bien connue :

$$[K^e] = [C]^T \left(\int \int [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^T [K_0] [C]^{-1} \quad (3.13)$$

Le déterminant de la matrice jacobéenne soit donné par :

$$\int \int dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det |J| d\xi d\eta \quad (3.14)$$

La matrice $[K_0]$ est évaluée numériquement, par :

$$[K^e] = [C]^{-T} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D] [Q] \det[J] d\xi d\eta \right) [C]^{-1} \quad (3.15)$$

Où la matrice de déformation $[Q]$ est donnée en annexe.

3.3. Validation numérique en linéaire :

Le présent modèle a été mis en test dans une série d'exemples standards. L'élément développé est comparé à des solutions analytiques et à des éléments sélectionnés suivants de la littérature :

R4 : élément bilinéaire rectangulaire (à champs de déplacement) avec 12 ddl. C'est un élément simple pour l'analyse des structures épaisses. Il est largement utilisé dans les logiciels de simulation par éléments finis.

Elément de la réf [73]: Analyse de la flexion de la plaque par la méthode des cellules.

L'élément **de De Rosa et Francios (1990)** est un élément quadrangulaire à quatre nœuds, utilisé pour l'analyse de la flexion des plaques. Il s'agit d'un élément de type "shell" conforme, ce qui signifie qu'il peut représenter des géométries complexes avec précision.

Elément dans la réf [74]: élément fini rectangulaire pour plaques plates moyennement épaisses.

L'élément de Yuan et Miller (1988) est un élément quadrangulaire à huit nœuds, utilisé pour l'analyse des plaques plates moyennement épaisses par la méthode des éléments finis. Il s'agit d'un élément de type "shell" conforme, ce qui signifie qu'il peut représenter des géométries complexes avec précision.

NC4B-2 et NC6B-2 : éléments de calcul de plaques de transition non conformes avec des nœuds médians variables [75]

- ✓ **NC4B-2**: L'élément NC4B-2 est un élément quadrangulaire à six nœuds, avec quatre nœuds aux coins et deux nœuds médians sur les côtés opposés. Cet élément est utilisé pour le calcul des plaques de transition non conformes. Les nœuds médians permettent de capturer la courbure de la plaque de transition avec plus de précision.

- ✓ **NC6B-2:** L'élément NC6B-2 est un élément quadrangulaire à huit nœuds, avec quatre nœuds aux coins et quatre nœuds médians sur les côtés. Les coordonnées des huit nœuds.

ACM : Cet élément est communément appelé : plaque Adini-Clough-Melosh (élément non conforme basé sur le déplacement) avec 12 ddl [76].

L'élément ACM (Adini-Clough-Melosh) est un élément quadrangulaire non conforme à 12 degrés de liberté (ddl) couramment utilisé pour l'analyse par éléments finis des plaques. Il est basé sur une approche de déplacement et permet de représenter des géométries complexes avec précision.

SBH8 : élément solide avec 24 ddl à champs de déformation [17].

L'élément SBH8 est un élément volumique quadrangulaire à 24 degrés de liberté (ddl) utilisé pour l'analyse par éléments finis des solides. Il est basé sur une approche de déformation et permet de représenter des géométries complexes avec précision.

MITC4 : élément quadratique mixte de flexion, car il utilise un mélange d'approximations linéaires et quadratiques pour décrire le comportement de flexion. Il fournit des résultats précis, même dans les cas où la déformation est importante [77].

L'élément MITC4 (Mixed Isoparametric Quadrilateral with 4 Nodes) est un élément quadrangulaire à quatre nœuds, utilisé pour l'analyse par éléments finis des problèmes de flexion de plaques. Il utilise une approche mixte pour décrire le comportement de flexion, en combinant des approximations linéaires et quadratiques.

Q4 : élément rectangle à quatre nœuds, avec 8ddl. Est un élément simple et efficace pour l'analyse des structures planes. Il est largement utilisé dans les logiciels de simulation par éléments finis, notamment pour les problèmes de flexion et de cisaillement.

3.3.1. Plaque carrée avec deux bords encastres et deux bords libres

Ce problème classique, est traité par de nombreux auteurs [33], [73] et il est relatif à une plaque carrée avec deux bords libres et deux bords encastres. Deux conditions de charge différentes sont étudiées. Le premier est la charge concentrée dans le coin libre et la seconde est la charge uniformément répartie Fig.3.2.

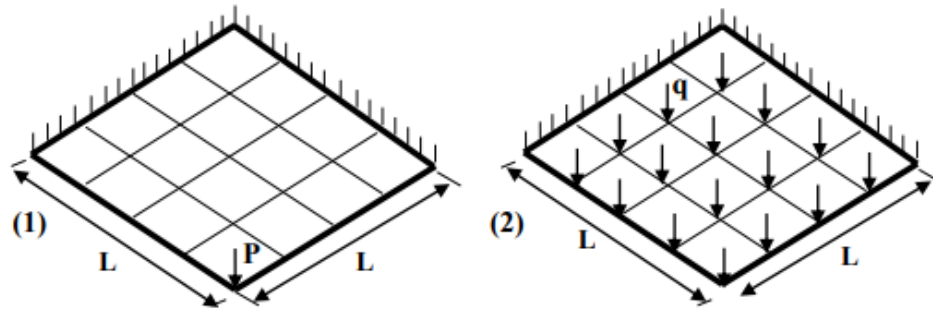


Figure.3.2.Plaque carrée encastree soumise à : (1) une charge concentrée dans l'extrémité libre et (2) une charge uniformément répartie.

Pour le premier cas, les résultats du tableau (3.1) montrent le déplacement maximal obtenu à l'aide de l'élément **SBPE** développé et de trois autres modèles d'éléments finis ; deux modèles de déplacement et le troisième est un élément hexaèdre basé sur la déformation pour la flexion de plaques minces et épaisses [17].

Les résultats du déplacement pour le premier cas sont énumérés dans les tableaux 3.1 et 3.2, mais pour le second cas, ils sont représentés dans les tableaux 3.3 et 3.4.

D'après les résultats, nous pouvons voir que le modèle développé converge à la solution de référence tirée de [73] et qu'il est plus précis que les autres modèles. On peut voir aussi que l'élément développé est très proche de la solution de référence pour un maillage grossier contrairement à d'autres modèles qui convergent après un maillage plus fin.

Maillage	W_{max}			
	R4	ACM	SBH8[17]	SBPE
2X2	6.73	134.70	30.29	134.67
4X4	24.81	138.10	114.65	138.11
6X6	45.64	138.56	134.21	138.60
8X8	64.40	138.76	138.54	138.78
9X9	72.50	138.76	139.44	138.82
Solution de référence [73]	139.07			

Tableau 3.1. Plaque carrée avec deux bords encastrés et deux bords libres - premier cas $\nu = 0,3$; $E = 3600$; $P = 100$; $L=10$; $e=0,4$

Maillage	$W_{\max}$			
	R4	ACM	SBH8[17]	SBPE
2X2	5.22	122.30	24.51	122.27
4X4	19.54	124.79	99.63	124.75
6X6	36.67	125.17	119.52	125.15
8X8	52.77	125.29	124.37	125.30
9X9	59.91	125.29	125.41	125.33
solution de référence [73] 125.52				

Tableau 3.2. Plaque carrée avec deux bords encastres et deux bords libres - premier cas $v=0$; $E = 3600$; $P = 100$; $L=10$; $e=0,4$

Maillage	$W_{\max}$			
	R4	ACM	SBH8[17]	SBPE
2X2	0.0991	4.3410	0.121	4.306
4X4	0.223	0.450	0.430	0.449
6X6	0.307	0.452	0.451	0.448
8X8	0.357	0.454	0.453	0.446
9X9	0.351	0.449	0.456	0.447
solution de référence [73] 0.434				

Tableau 3.3. Plaque carrée avec deux bords encastres et deux bords libres - deuxième cas $V=0$; $E = 1000$; $q=1$; $L = 1$; $e=0,1$

Maillage	$W_{\max}$			
	R4	ACM	SBH8[17]	SBPE
2X2	0.95	21.57	3.77	21.05
4X4	3.03	19.49	14.85	19.24
6X6	5.53	19.04	17.85	18.89
8X8	7.88	18.91	18.48	18.76
9X9	8.93	18.82	18.57	18.73
solution de référence [73] 18.64				

Tableau 3.4. Plaque carrée avec deux bords encastres et deux bords libres-deuxième cas $V=0,3$; $E = 3600$; $q = 0,9$; $L=10$; $e=0,4$

3.3.2. Torsion d'une plaque carrée

Dans ce test une plaque est soumise à une torsion pure. Le même exemple a été traité dans la référence [74] dans laquelle plusieurs éléments sont utilisés pour représenter le comportement réel de torsion des plaques. La plaque est simplement appuyée aux trois coins ($w = 0$) et soumise à une charge transversale au quatrième coin (B) de 5 lb, comme le montre la figure (3.3). Le module de Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de la plaque sont respectivement de 10000 lb, 0,3 et 1 in.

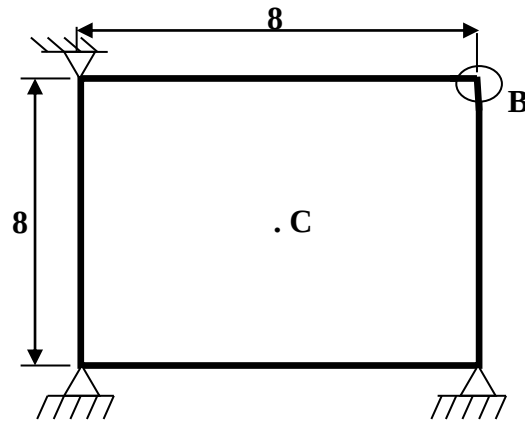


Figure.3.3. Torsion d'une plaque carrée

Les résultats de la déflexion aux points B et C sont présentés dans le tableau 3.5.

Il est clairement visible que le modèle **SBPE** développé est supérieur aux deux autres modèles, et donne exactement la solution exacte.

Type d'élément	Torsion	
	Point B	Point C (Center)
ACM [78] (8 X 8)	0.24972	0.06244
SBPE (1 X 1)	0.24960	/
SBPE (2 X 2)	0.24960	0.06240
Ref [74] (1 X 1)	0.24960	/
Ref [74] (2 X 2)	0.24960	0.06240
Exact (théorie de la plaque mince)	0.24960	0.06240

Tableau 3.5. Déplacements d'une plaque en torsion

3.3.3. Plaque encastree

Pour cet essai, nous considérons une plaque encastree sous trois types de charges : deux charges unitaires et une charge uniformément répartie, toutes appliquées sur les bords libres comme illustré sur les Fig. 3.4. Les caractéristiques mécaniques de la plaque pour les deux cas (a) et (b) sont le module de Young $E = 1000$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,0$ et l'épaisseur de la plaque $e = 0,1$, par contre pour le cas (c) le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

Les résultats pour la plaque encastree fig.3.4 (a, b) sont présentés dans les tableaux 3.6 et 3.7, W1 et W2 indiquant les déplacements verticaux aux deux nœuds chargés, et ceux de la figure 3.4 (c) sont présentés dans le tableau 3.8.

D'après les résultats, nous pouvons voir clairement que l'élément développé **SBPE** donne les meilleurs résultats et ceci on utilisant la quadrature de Gauss 3x3 dans tous les cas d'essai. L'élément ACM est meilleur que les autres éléments dans tous les tests, mais il est moins précis que **SBPE**.

L'élément de réf [73] n'atteint pas la solution exacte pour un maillage grossier, mais il converge vers une solution affinée.

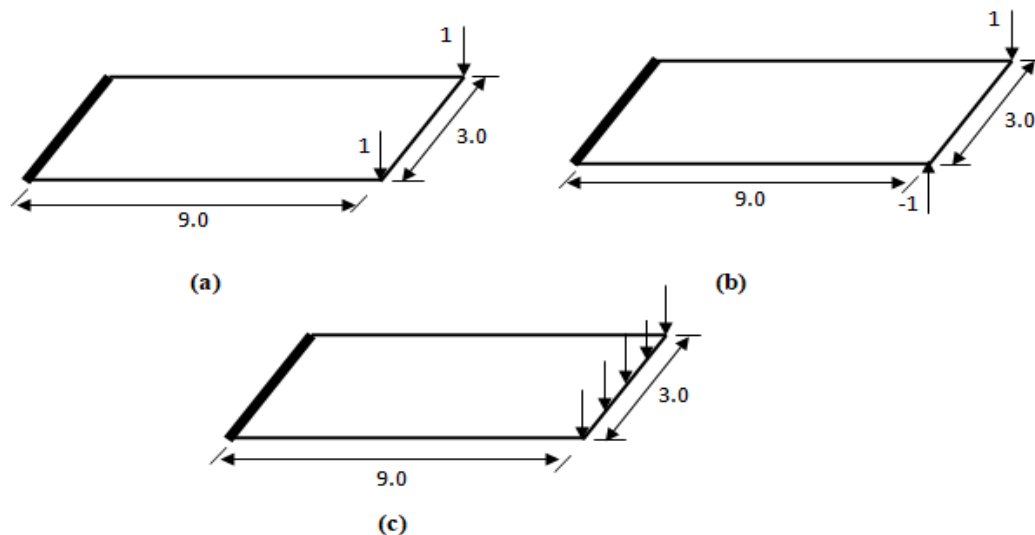


Figure.3.4. Géométrie et charges de la plaque encastree

Maillage	Éléments	Déplacement	
		W1	W2
4x1	NC4B-2 [75]	1919.07	1919.07
	NC5B-2 [75]	1939.77	1935.00
	NC6B-2 [75]	1940.45	1935.00
	ACM	1943.99	1943.99
	SBPE	1944.00	1944.00
36x12	Ref [73]	1948.67	1948.67
Théorie des poutres		1944	

Tableau 3. 6. Résultats du cas de plaque (a)

Maillage	Éléments	Déplacement	
		W1	W2
4x1	NC4B-2 [75]	-78.38	78.38
	NC5B-2 [75]	-98.98	+90.95
	NC6B-2 [75]	-95.56	+87.55
	ACM	-101.62	+101.62
	SBPE	-96.49	+96.49
36x12	Ref [73]	-96.91	+96.91

Tableau 3. 7. Résultats du cas de plaque (b)

Maillage	$W_{\max}$		
	Ref [73]	ACM	SBPE
3x3	2052.0	1944.72	1944.66
9x3	1956.0	1944.82	1944.79
Théorie des poutres	1944		

Tableau 3.8. Résultats du cas de plaque (c)

3.3.4. Plaque encastree sous charge concentrée

Dans cet essai traité dans la référence [58], une plaque encastree soumise à la charge transversale $P=1$ à l'extrémité libre, a été analysée comme dans la figure 3.5. Les maillages

réguliers et déformés sont considérés pour ce test. L'effet de cisaillement est inclus dans cet exemple. La géométrie est la suivante :

Décrit par : la longueur de la plaque encastrée $L=10$, l'épaisseur $h=0,1$ et la largeur $b=1$. Les caractéristiques mécaniques sont $E=2,1 \times 10^6$ et le coefficient de Poisson $\nu=0$.

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux 3.9 et 3.10 et montrent la bonne concordance avec la théorie des poutres. Par rapport à l'élément de la réf [58], on peut distinguer que le **SBPE** donne la solution exacte avec un seul maillage, il est donc plus convergent et plus précis que l'autre modèle.

Les résultats obtenus à l'aide de maillages déformés montrent que le **SBPE** est insensible à la configuration de distorsion de maillage, et donne également de très bons résultats.

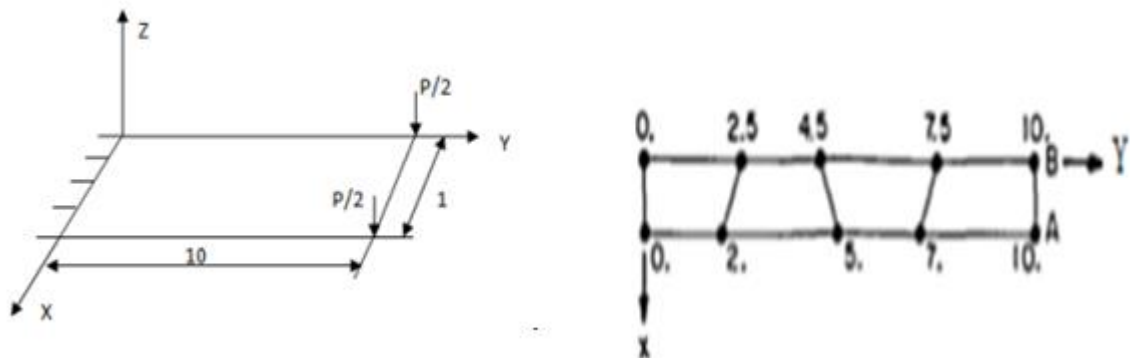


Figure.3.5 Plaque encastrée sous charge concentrée

Maillage	SBPE	Ref [58]
1×1	1.000	0.750
4×1	1.000	0.984
$W_{\text{théorie des poutres}} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{AG} = 1,9047$		

Tableau 3. 9. Déplacement transversal normalisé de l'extrémité de la plaque encastrée (maillage régulier).

Éléments	Épaisseur =0.1	
	W_A	W_B
SBPE	0.994	0.985
Ref [58]	0.996	0.989

Tableau 3.10. Déplacement transversal normalisé de l'extrémité de la plaque encastree (maillage déformé)

3.3.5. Poutre encastree sous charge concentrée

Une poutre encastree comme le montre la figure 3.6 est soumise à une charge concentrée à l'extrémité libre. Cet exemple a été traité pour la première fois dans [17]. Plusieurs rapports d'aspect de la longueur (L) à l'épaisseur (h) de la poutre encastree sont pris en compte ($L/h=1-100$).

Le déplacement au bord de la poutre encastree soumise à une force est présenté dans le tableau 3.11. Le maillage 5x2 est utilisé pour ce test numérique.

Les résultats acquis dans le table 3.11 annonce le meilleur comportement du **SBPE** et sa relative insensibilité au rapport L/h . En termes de résultats il très bon pour l'analyse des plaques minces, et il est bon pour les plaques moyennement épaisses mais il diverge pour les plaques très épaisses.

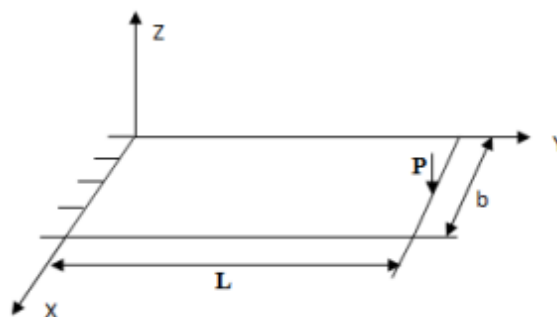


Figure.3.6 Poutre encastree ($L=10$, $b=1$, $h=0.1$, $E=2.1 \times 10^6$, $\nu=0$, $p=0.1$)

L/h	SBH8 [17]	R4	SBPE	solution exacte
1	5.3×10^{-7}	5.3×10^{-7}	0.33×10^{-7}	5.3×10^{-7}
2	3.1×10^{-6}	3.0×10^{-6}	2.66×10^{-6}	3.1×10^{-6}
3	9.6×10^{-6}	9.2×10^{-6}	8.99×10^{-6}	9.6×10^{-6}
4	2.2×10^{-5}	2.1×10^{-5}	2.13×10^{-5}	2.2×10^{-5}
5	4.3×10^{-5}	3.9×10^{-5}	4.16×10^{-5}	4.3×10^{-5}
10	3.3×10^{-4}	2.4×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}
100	0.33254	0.00783	0.33326	0.3333

Tableau 3.11. Déplacement vertical de la poutre encastrée sous charge concentrée

3.3.6. Grande déflexion d'une console encastrée

Ce test a été présenté par Bath et al. [77] et il est relatif à une plaque console en porte-à-faux fixée à l'extrémité comme le montre la Fig. 3.7. La console est soumise à une force appliquée à l'extrémité libre. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont les suivantes :

$L=12$, $b=1$, $h=1$, $E=1800$, $V=0$.

Le déplacement à l'extrémité de la poutre est calculé. Un même maillage (2x1) que celui du test est pris dans cet exemple.

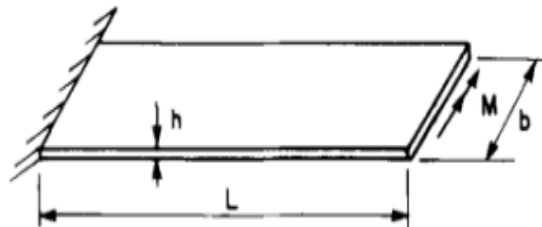


Figure. 3.7. Poutre soumise au moment

Nous avons évalué les performances de l'élément proposé à l'aide de ce test numérique et comparé ces résultats avec ceux de l'élément MITC4 [77] et avec la solution analytique.

Les résultats du déplacement sont présentés dans les figures 3.9 et montrent que le **SBPE** développé est en bon concordance avec l'élément MITC4 et avec la solution analytique.

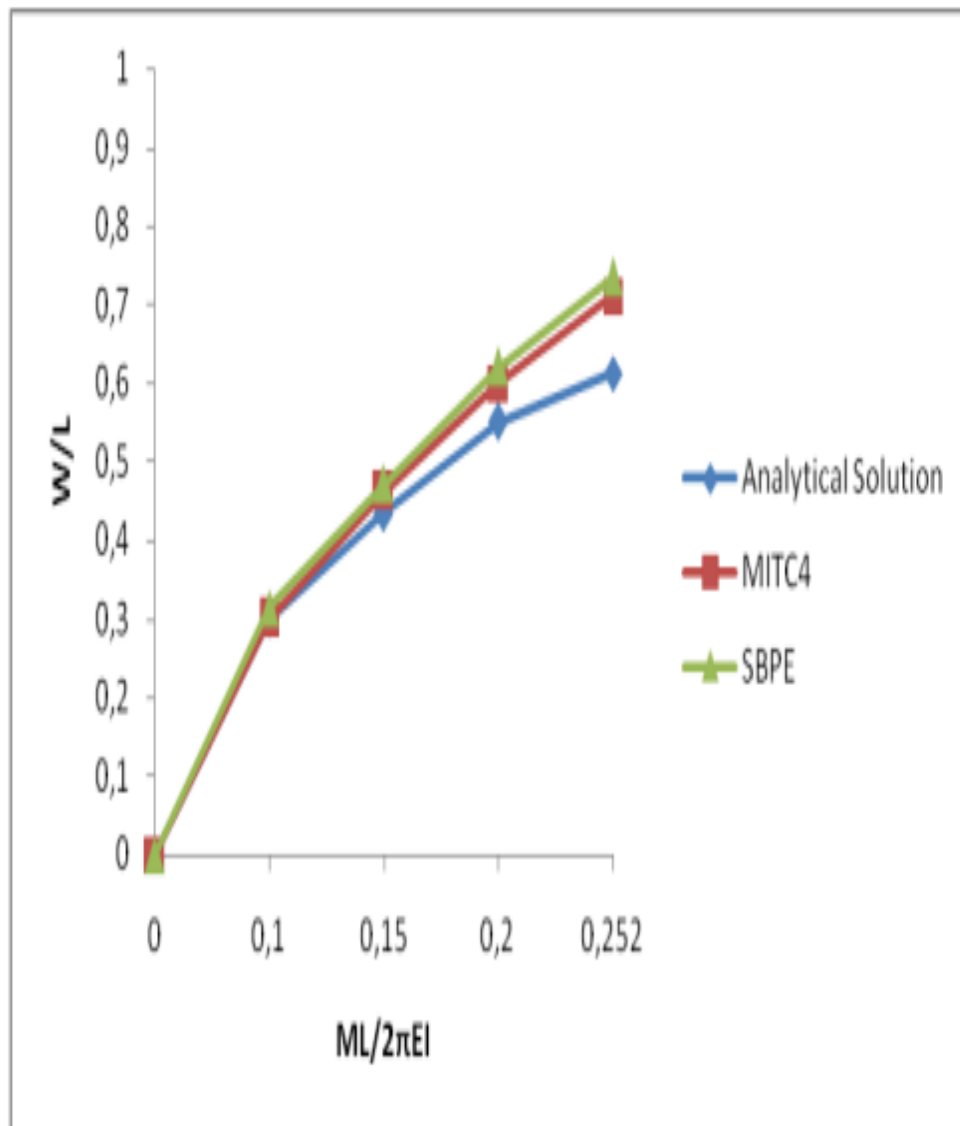


Figure.3.8. Analyse du déplacement d'une poutre encastree sous contrainte de moment

3.4. Conclusion

Le **SBPE** développé est un élément fini rectangulaire à 4 nœuds, basé sur l'approche en déformation, il est développé pour l'analyse de flexion des plaques en calcul quasi linéaire. Cet élément est simple et direct avec seulement des degrés de liberté essentiels, et contient des fonctions polynomiales d'ordre supérieur, alors en termes de calcul, il peut être moins cher que d'autres éléments, et il est conçu de telle sorte qu'il traite les problèmes du verrouillage en cisaillements transverse. Enfin, des comparaisons ont été faites avec d'autres éléments finis, notamment ACM, SBH8, MITC4 et Q4, mettant en évidence les domaines d'application spécifiques et les avantages relatifs de chaque élément fini dans l'analyse de flexion des plaques.

Résultats numériques obtenus en utilisant cet élément, s'accordent bien avec celles des solutions théoriques, et montrent que cet élément est plus précis que les autres éléments. Comparé à d'autres modèles, les résultats montrent que le **SBPE** a une précision numérique plus élevée et plus efficace. Cet élément a un taux de convergence assez rapide vers les solutions de référence pour tous les tests, alors ses performances ont été démontrées.

En perspective, l'extension de cet élément développé à d'autres analyses permettra être explorée dans des études ultérieures.

CHAPITRE 4

**FORMULATION ET VALIDATION NUMERIQUE
EN LINEAIRE ET DYNAMIQUE D'UN NOUVEL
ELEMENT FINI MEMBRANAIRE BASE SUR
L'APPROCHE EN DEFORMATION.**

Chapitre 4. FORMULATION ET VALIDATION NUMERIQUE EN LINEAIRE ET DYNAMIQUE D'UN NOUVEL ELEMENT FINI MEMBRANAIRE BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION.

4.1. Introduction :

Les éléments de membrane à faible ordre basés sur des modèles classiques de déplacement, tels que le quadrilatère Q4, ont des limites dans le calcul de flexion. Des efforts ont été déployés pour améliorer ou formuler des éléments plus robustes. Différentes méthodes et techniques ont été utilisées pour développer ces éléments, y compris les contraintes hybrides (Pian et Sumihara, [78]; Xie et Zhou, [79]; Sze, [80]), les contraintes supposées ou renforcées (Li et Huang, [81]; Piltner et Taylor, [82]), les quasi-conformes (Wang et al, [83]; Xia et al. [84]), les éléments de conformité généralisés et les coordonnées quadrilatérales (Chen et al. [85]; Li et Huang, [81]; Cen et al, [86]). D'autres formulations ont également été proposées pour développer des éléments membranaires robustes à rotation dans le plan, telles que (Allman, [87]) (Kugler et al. [88]) (Cen et al. [89]) (Zouari et al, [90]).

En outre, les éléments de membrane pour les structures planes (x, y) sont établis avec simplicité, Sabir a mis au point des éléments avec des déformations élastiques [13,15, 91], tandis que Belarbi, Maalam, Hamadi et al [92, 93, 94], ils ont proposé des nouveaux éléments avec rotation dans le plan. Récemment, Rezaiee-Pajand et al [95–98], ils ont mené des études dans ce contexte et ont proposé des éléments d'ordre supérieur qui sont fondés sur l'approche en déformation. Cette méthode a également été appliquée en vue de formuler des éléments finis robustes avec différentes géométries pour les analyses statiques et dynamiques [99, 100,101].

Dans ce chapitre, un élément fini de membrane est formulé en utilisant l'approche de déformation pour les analyses statique et dynamique. Cet élément appelé **SBEDR** (Strain Based Element with Drilling Rotation) possède deux degrés de liberté (u et v) et un ddl de rotation aux quatre nœuds d'angle. Les trois déformations (ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy}) se sont enrichies d'une variation linéaire, quadratique et cubique en termes de x et y, ce qui a permis d'améliorer encore la convergence des résultats. Il est testé et comparé avec d'autres éléments et solutions théoriques au moyen de plusieurs tests numériques d'analyses statiques et dynamiques qui confirment les performances du présent élément.

4.2. Considération théorique de l'élément SBEDR

4.2.1. Définition

L'élément présenté dans ce chapitre est basé sur l'approche en déformation, contrairement à l'approche en déplacement classique. Il s'agit d'un élément membranaire rectangulaire à quatre nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (deux translations (u , v) et une rotation θ dans le plan). Sa conception repose sur des fonctions d'approximation des différentes composantes de déformation, tout en respectant l'équation de compatibilité. Cet élément, nommé **SBEDR** offre une représentation exacte des mouvements du corps rigide.

4.2.2. Formulation matricielle

La géométrie de l'élément **SBEDR**, ainsi que les variables cinématiques nodales associées, sont illustrées schématiquement sur la figure 4.1. Les dimensions de l'élément dans les directions x et y sont représentées respectivement par a et b . À chaque nœud i , trois degrés de liberté (ddl) sont attribués : les translations u et v , et la rotation θ dans le plan.

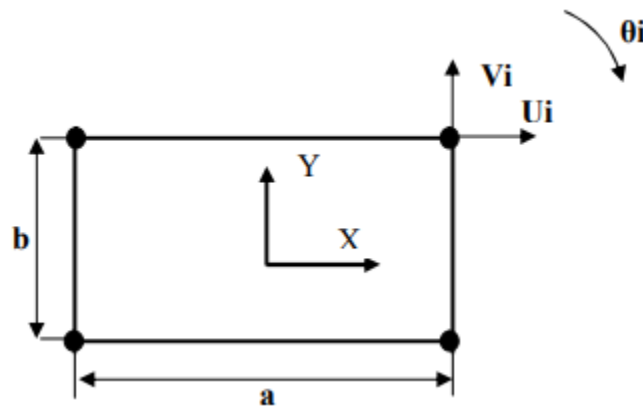


Figure 4.1 : Élément **SBEDR** avec rotation dans le plan

Les trois composantes de la déformation sont données par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Les composantes de déformation exprimées dans l'équation (4.1) ne peuvent être considérées comme indépendantes. En effet, elles dépendent de deux déplacements, U et V. Par conséquent, la déformation doit respecter une équation supplémentaire appelée équation de compatibilité. Cette équation peut être obtenue en éliminant U et V de l'équation (4.1), ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.2)$$

Avec tous les trois déformations données par l'équation (4.1) sont égales à zéro, nous devons intégrer ces équations pour obtenir les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} U &= a_1 - a_3 y \\ V &= a_2 + a_3 x \\ \theta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \theta &= a_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'équation (4.3) définit les trois composantes des déplacements du corps rigide. Cet élément développé est de forme rectangulaire avec quatre nœuds, et chaque nœud possède trois degrés de liberté (U, V, θ). Par conséquent, le champ de déplacement doit contenir 12 constantes indépendantes. Après avoir utilisé trois constantes (a_1 , a_2 , a_3) pour représenter les composantes du corps rigide, il reste neuf constantes (a_4 , a_5 , ..., a_{12}) pour exprimer le déplacement dû à la déformation de l'élément. Ces constantes sont réparties entre les déformations comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_6 y + a_7 x + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8 x + a_9 y - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \\ \gamma_{xy} &= 2a_5(y + 2) + 2a_6 x + 2a_7 x + 2a_8 y + a_9 y + 2a_{12} x \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les déformations exprimées dans les équations (4.4) respectent effectivement l'équation de compatibilité (4.2). En substituant les expressions des équations (4.4) dans les équations (4.1) en termes de U et V, et en intégrant les équations résultantes, on obtient :

$$\begin{aligned} U &= a_4 x + a_5(y + y^2) + a_6 xy + a_7 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} + a_{10}(xy^2) + a_{11} x^2 y^3 \\ V &= a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7(y + x^2) + a_8 xy - a_{10}((x^2 y)) - a_{11} x^3 y^2 + a_{12} x^2 \\ \theta &= -a_9 y - 2a_{10}(xy) - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les fonctions finales de déplacement sont obtenues en additionnant les équations (4.3) et (4.5) pour obtenir

$$\begin{aligned} U &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5(y + y^2) + a_6xy + a_7\left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) + a_8\frac{y^2}{2} + a_9\frac{y^2}{2} + a_{10}(xy^2) + a_{11}x^2y^3 \\ V &= a_2 + a_3x + a_5x + a_6\frac{x^2}{2} + a_7(y + x^2) + a_8xy - a_{10}((x^2y)) - a_{11}x^3y^2 + a_{12}x^2 \\ \theta &= a_3 - 2a_5y + a_7x - a_9y - 2a_{10}(xy) - 3a_{11}x^2y^2 + a_{12}x \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les fonctions de déplacement de l'élément développé **SBEDR** données par l'équation (4.6) peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\{U\} = [C]\{A\} \quad (4.7)$$

Où U est le vecteur de déplacement nodal, A est le vecteur des paramètres constants $\{A_i\}=1,\dots,12$ et la matrice [C] 12×12 de transformation est donnée :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & (y + y^2) & xy & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) & \frac{y^2}{2} & \frac{y^2}{2} & (xy^2) & x^2y^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & x & \frac{x^2}{2} & (y + x^2) & xy & 0 & (xy^2) & x^2y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2y & 0 & x & 0 & -y & -2xy & 3x^2y^2 & x \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Où x_i et y_i sont les coordonnées des nœuds i ($i=1,4$), et la matrice [C] est donnée par :

$$[C] = [[C1][C2][C3][C4]]^T. \quad (4.9)$$

4.2.3. Intégration numérique

L'utilisation de l'intégration analytique pour la construction de la matrice de rigidité des éléments à modèles de déformations, notamment pour les éléments de membrane, était jusqu'à récemment dominante. L'intégration numérique, quant à elle, vise à pallier plusieurs limitations, parmi lesquelles :

- L'évaluation directe des caractéristiques des éléments courbes et complexes est possible grâce à l'intégration numérique.
- La description simultanée de la géométrie et de la variation des déplacements par les mêmes fonctions de forme réduit l'effort de programmation.
- La présence de bords courbes nécessite des maillages fins dans les zones où les côtés sont courbes. Cependant, dans certains cas, l'utilisation d'un nombre réduit d'éléments complexes

peut s'avérer inadéquate pour représenter correctement toutes les géométries d'un problème particulier.

Il est donc nécessaire de choisir une formule d'intégration et de définir un réseau de points d'intégration dans l'élément, en fonction de sa forme et du degré d'interpolation de l'élément fini. L'ensemble constitue le schéma d'intégration. Dans le domaine des éléments en forme de ligne, de quadrilatère et d'hexaèdre, l'intégration numérique de Gauss est la plus répandue car elle minimise le volume des calculs. Il est important de rappeler qu'une intégration de Gauss d'ordre n_G (n_G points dans une direction) intègre exactement un polynôme de degré $2n_G-1$. Ici dans la construction de l'élément **SBEDR** on a utilisé le concept d'intégration numérique, avec la quadrature de Gauss.

4.2.4. Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$

La matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ peut être calculée par la formule :

$$[K^e] = [C^{-1}]^T (\iint [Q]^T [D] [Q] dx dy) [C]^{-1} = [C^{-1}]^T [K_0] [C]^{-1} \quad (4.10)$$

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Le déterminant de la matrice Jacobéenne est également essentiel, car il intervient dans la transformation d'intégrale. En passant aux variables locales, on obtient :

$$\iint dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det[J] d\xi d\eta \quad (4.12)$$

En pratique, les équations (4.10) sont résolues numériquement en utilisant la quadrature de Gauss. Cette approche permet d'obtenir une évaluation numérique de la matrice $[K_0]$. Étant donné que la matrice $[C]$ de l'élément développé n'est pas singulière, son inverse existe et peut également être évalué numériquement. Par conséquent, la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ peut être obtenue par la formule suivante :

$$[K^e] = [C^{-1}]^T \left(\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [Q]^T [D] [Q] \det[J] d\xi d\eta \right) [C]^{-1} \quad (4.13)$$

Pour les problèmes en contrainte plane la matrice d'élasticité D s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Pour les problèmes en déformation plane la matrice d'élasticité D s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Équations (4.4) peuvent être écrites sous la forme matricielle par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q][A] \quad (4.16)$$

Où chacun des ε et γ correspond respectivement à la déformation normale et de cisaillement et $[Q]$ la matrice de déformation donnée par :

$$[Q] = [L][C] \quad (4.17)$$

Où $[L]$ est l'opérateur différentiel et la matrice de transformation $[C]$ sont donnés dans l'annexe.

Ainsi la matrice de déformation est donnée par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & x & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 2y & -x^2 & -2x^3y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2x & 0 & 2y & 2y & 2(y-x) & 0 & 2x \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

4.3. Validation numérique du nouvel élément fini en linéaire

4.3.1. Cas de tests numériques en linéaire

Divers exemples de problèmes d'élasticité plane sont présentés pour valider le niveau de précision et l'efficacité des calculs obtenus avec l'élément développé **SBEDR**. Le comportement de l'élément proposé est numériquement étudié ici par comparaison avec:

Q8: élément quadrilatère à 8 nœuds avec 16 degrés de liberté.

LST (T6): élément triangulaire avec déformation linéaire avec six nœuds et 12 ddl.

SBRIEIR: élément à modèle en déformation rectangulaire à 4 nœuds avec rotation dans le plan avec 12 ddl [13]

Formulation type Mixed : éléments avec rotation dans le plan [102].

Kugler: élément avec rotation dans le plan [88].

SBRIE and **SBRIE1:** éléments à modèles en déformation, rectangulaires à 8 ddl et 4 nœuds [103].

4.3.1.1. Poutre console élancée de Mac Neal

Le problème d'une poutre console élancée Figure 4.2 a été traité par Mac-Neal et Harder [104].

La poutre est soumise à une force concentrée à l'extrémité libre ($P = 1$) et à un moment de flexion pure ($M = 10$). Elle a un module de Young $E = 10^7$, le coefficient de poisson $\nu = 0,3$, et une épaisseur $t = 0,1$.

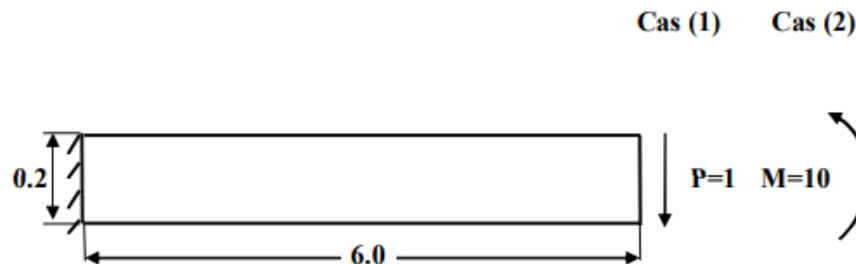


Figure 4.2 : Poutre console élancée de Mac-Neal soumise à (1) cisaillement pur et (2) flexion pure

Maillage	LST(T6)	Q8	SBRIE	SBRIE1	SBRIEIR	SBEDR
6 x 1	0.9830	0.9868	0.9035	0.9035	0.9035	0.9851
12 x1	0.9930	0.9933	0.9083	0.9083	0.9083	1.000
Solution de reference 1,000 (0.1081)						

Tableau 4.1 : Déflexion Normalisée de la poutre console élancée de MacNeal (cisaillement pure).

Charge cas (2): moment de flexion pure M=10						
Maillage	LST(T6)	Q8	SBRIE	SBRIE1	SBRIEIR	SBEDR
6 x 1	0.9932	0.9919	0.91	0.91	0.91	1.000
12 x1	0.9967	0.9962	0.91	0.91	0.91	1.000
Solution de reference 1,000 (0.270)						

Tableau 4.2 : Déflexion Normalisée pour la poutre console élancée de MacNeal (flexion pure)

Les résultats de la déflexion normalisée à l'extrémité libre présentés dans les tableaux (4.1) et (4.2) montrent que:

- L'élément développé converge bien à la solution de référence dans les deux problèmes (cisaillement et de flexion).
- Le **SBEDR** est plus économique que le Q8 et le T6 car il utilise moins de ddl.
- Le **SBEDR** est plus précis que les autres modèles numériques.

4.3.1.2. Poutre console courte d'Allman

Ce test est un outil de validation des éléments 2D dans les problèmes dominés par la flexion. La poutre console courte est soumise à une charge verticale uniforme (résultante W) comme représentée sur la Figure (4.3), le maillage est pris 4X1.

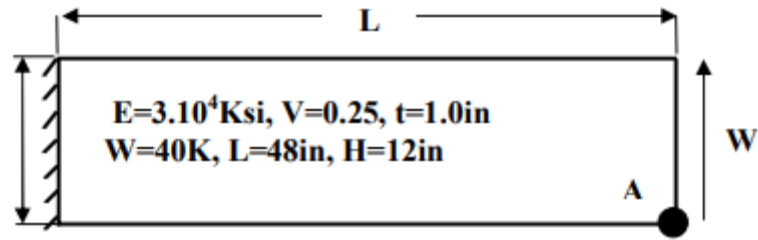


Figure 4.3: Poutre console d'Allman

Déplacement Normalisé au point A						
Maillage	Q8	LST(T6)	SBRIE	ALLMAN	SBRIEIR	SBEDR
4x1	0.3495	0.3480	0.3293	0.3027	0.3300	0.3277
Solution de référence [105]		1,000 (0.3553)				

Tableau 4.3 : Déplacement vertical au point A

Les résultats présentés dans le tableau 4.3 montrent la bonne exactitude de l'élément développé comparativement avec la solution de référence.

4.4. Validation numérique de l'élément **SBEDR** en Vibration libre

Pour un solide élastique en vibration libre l'équation est

$$[K_m]\{X\} - \omega^2 [M_m]\{X\} = 0 \quad (4.19)$$

Avec $[K_m]$ la rigidité du système, $[M_m]$ la matrice des masses globale, $\{X\}$ l'amplitude de déplacement, et ω^2 la fréquence angulaire.

Qui, bien que cette équation n'étant plus sous sa forme standard, elle peut facilement être convertie en cette forme standard. Dans ce cas la matrice de masse globale $[M_m]$ peut être concentrée ou consistante.

Dans ce paragraphe nous procédons à la validation de l'élément **SBEDR** en vibrations libres

Pour cela on choisi les tests ci-dessous pour la validation.

4.4.1 Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire

Cet exemple traité par [106] représente un problème d'une poutre en porte à faux figure (4.4), la longueur dans la direction x est 4.0 et suivant y est de 1.0 avec une section transversale de 1.0 et une rigidité à la flexion de 0.08333. Le coefficient de poisson est $\nu=0.3$ pour le maillage (3×1 et 5×1), et le module de Young est pris $E=1.0$. Le problème est en déformation plane avec masse concentrée. La masse par unité de surface est $\rho = 1$.

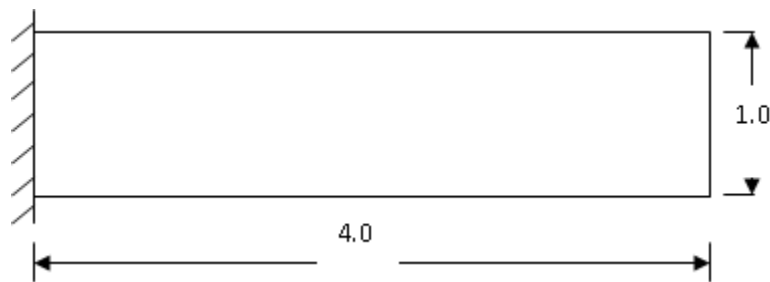


Figure 4.4 : Géométrie et maillage de la poutre.

Les résultats des valeurs propres sont illustrés dans le tableau (4.4). La fréquence fondamentale ω_1 et la fréquence axiale ω_2 sont calculées et comparés avec l'élément SBRIE. Les résultats obtenus par l'élément **SBEDR** montrent que les valeurs des fréquences sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément SBRIE et avec celles de la solution analytique.

Fréquences		SBRIE	SBEDR
Maillage 3×1	ω_1	0.065	0.066
	ω_2	0.414	0.412
Maillage 5×1	ω_1	0.0593	0.0592
	ω_2	0.391	0.392
Solution exacte	ω_1	$1.875^4 \times EI / \rho AL^4 = 0.063$	
	ω_2	$\pi / 2L \sqrt{E / \rho} = 0.393$	

Tableau 4.4 : Valeurs propres de la poutre cantilever "déformation plane"

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu développer un nouvel élément avec rotation dans le plan nommé **SBEDR**, et le valider en analyses linéaire et en vibrations libres. A travers plusieurs tests numériques réputés sévères nous avons constaté que l'élément **SBEDR** développé est robuste et converge bien à toutes les solutions numériques envisagées.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

L'objectif de ce travail est de développer deux éléments finis idéaux et performants pour le calcul structural, en vue d'enrichir la bibliothèque des éléments finis. Dans le présent travail, deux types d'éléments finis basés sur l'approche en déformation ont été formulés et validés à travers des tests standards. Le premier est un élément plaque pour l'analyse des plaques minces en flexion et le deuxième élément est membranaire pour analyse statique et dynamique

Dans ce travail, une revue de littérature relative aux éléments finis à modèle en déformation, a été fournie. Une analyse bibliographique sur le développement des éléments finis, des types de différents éléments disponibles et de leurs applications dans l'analyse des plaques minces ont été fournies.

En premier, un nouvel élément Plaque a été développé pour l'analyse de plaques minces en flexion. Cet élément, nommé en abrégé **SBPE** (Strain Based Plate Element) possède quatre nœuds avec trois degrés de liberté à chaque nœud (deux rotations et une translation) basé sur l'approche en déformation et la théorie de Kirchhoff pour l'analyse linéaire. C'est un élément simple qui n'a que 12 degrés de liberté et contient des fonctions polynomiales d'ordre élevé.

En comparant les performances de l'élément SBPE avec d'autres éléments, comme ACM, SBH8, MITC4, Q4 et Ref [73], les résultats ont montré que l'élément **SBPE** admet une grande précision et une vitesse élevée dans la résolution des problèmes de flexion des plaques minces. Le développement de l'élément SBPE est d'une grande importance dans le domaine de l'analyse des plaques minces, fournissant un outil précis et facile à utiliser pour analyser un large éventail de problèmes d'ingénierie. L'élément **SBPE** présente plusieurs avantages par rapport aux éléments de la littérature, notamment :

- Une meilleure précision dans les cas de petites déformations.
- Une facilité de formulation mathématique.
- Une grande flexibilité pour l'analyse de diverses structures minces.

En second, un élément de membrane nommé **SBEDR** (Strain Based Element with Drilling Rotation) en utilisant l'approche en déformation pour l'analyse statique et dynamique des structures bidimensionnelles a été développé. Cet élément possède deux degrés de liberté

(u et v) et un ddl de rotation sur chacun des quatre nœuds de coin. Les trois déformations (ε_x , ε_y , γ_{xy}) se sont enrichies d'une variation linéaire, quadratique et cubique en termes de x et y , ce qui a permis d'améliorer encore la convergence des résultats. Il est testé et comparé avec d'autres éléments et avec d'autres solutions théoriques au moyen de plusieurs tests numériques d'analyses statiques et dynamiques. Les résultats confirment les bonnes performances de cet élément développé, en analyses linéaire et dynamique. A travers ces plusieurs tests numériques réputés sévères, nous avons constaté que l'élément **SBEDR** développé est robuste et converge bien à toutes les solutions numériques envisagées.

En perspective, l'élément **SBPE** sera jumeler avec un élément de membrane **SBEDR** pour former un élément coque à facette plane qui peut être utilisé pour analyser des coques de formes complexes ou pour analyser des problèmes de flexion et de déformation non linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Belarbi. M. T, introduction aux éléments finis, cours et applications partie 2, polycopie 008-00035(Université de Biskra)
- [2] Rebiai. Cherif, contribution de l'approche en déformation pour l'analyse linéaire et non linéaire de structures. Thèse de doctorat science. Université de Biskra.2013
- [3] Kenneth H. Huebner and Ernest A. Thornton, Finite Element Method for Engineers ,Vol8 p,499 ,2019
- [4] Batoz J. L. et Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, Vol. 1 : Solides élastiques, Eds. Hermès, Paris, 1990
- [5] François. Frey, et Jarostove. Jirousek, « Analyse des structures et milieu continu par la méthode des éléments finis », volume 6, Presses polytechniques, édition 2001.
- [6] Fraeijns de Veubeke, B., Displacements and equilibrium models in the finite elements method. In O. C. Zienkiewicz et G. S. Holister, éditeurs : Stress analysis, chapitre 9. John Wiley & Sons, London, 1965.
- [7] Pian, T. H. H., Reactions and remarks on hybrid and mixed finite element methods. In S. N. Atluri, R. H. Gallagher et O. C. Zienkiewicz, éditeurs :Hybrid and mixed finite element methods, chapitre 29. John Wiley & Sons, Ltd, 1983.
- [8] Jones, R. E., A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis.AIAA Journal, 2:821.826, 1964.
- [9] Pian, T. H. H., Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. AIAA Journal, 2:1333.1336, 1964.
- [10] Ashwell D.G. and Sabir A.B, Limitations of certain curved finite elements when applied to arches, IJMS Vol. 13, pp. 133-139, 1971.
- [11] Sabir A.B. Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions. The mathematics of finite elements and applications II. Editor J.R.Whiteemen, Chapter 34, 411-421 Academic Press, 1975.
- [12] Sabir A.B, Ashwell D.G. Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells, the mathematics of finite elements and application III, Editor J.R.Whiteemen, Academic Press, 1978.

- [13] Sabir A.B. A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Chap 9 in Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering. Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, 17-25, 1985.
- [14] Sabir A.B, Ramadhani F. A shallow shell finite element for general shell analysis, Variational Methods in Engineering Proceeding of the 2nd International Conference, University of Southampton England, 1985.
- [15] Sabir A.B, Salhi H.Y. A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res. Mechanica 19, 1-16, 1986.
- [16] Belarbi M.T, Charif .A. Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan. Revue européenne des éléments finis. 7, 439-458, 1998.
- [17] Belarbi M.T, Charif .A. Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses. Revue européenne des éléments finis. 8, 135-157, 1999.
- [18] Belounar. L and Guenfoud. M, A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, Thin-Walled Structures, vol. 43, pp. 47–63, 2005.
- [19] Himeur. M, Benmarce. A and Guenfoud. M, A new finite element based on the strain approach with transverse shear effect, Structural Engineering Mechanics, vol. 49, pp. 793– 810, 2014.
- [20] Ashwell D.G., Sabir A.B. and Roberts T.M., Further studies in the application of curved finite elements to circular arches. IJMS Vol 13, 1971
- [21] Sabir A.B. and Ashwell D.G., A comparaison of curved beam finite elements when used in vibration problems. Journal of sound and vibration, Vol 18, N°11, 1971
- [22] Ashwell D.G. and Sabir A.B., A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, IJMS, Vol.14, pp.171-183, 1972.
- [23] Batoz . L., Dhatt .G." Modélisation des structures par éléments finis", vol. 2, 1990. Hermès, Paris. Poutres et Plaques.
- [24] Bathe K. J., Finite element procedures. Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [25] Hrabok M. M., And Hrudey T. H., A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements, Computers and Structures, Vol. 19, No. 3, pp. 475-495, 1984.

- [26] Clough R. W. AND Tocher J. L., « Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending », Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanic, WPAFB, Ohio, pp. 515-545,1965.
- [27] Bazelet, G. P., Cheung Y. K., Irons B. M. and Zinnkiewicz, O. C., « Triangular Elements in Plate Bending, Confirming and Non – Confirming Solutions », Proc. 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, pp. 547-576, Wright Patterson AF Base, Ohio, 1966
- [28] Batoz J.-L., Bathe K. J. and Hol . W., A Study of Three-Noded Triangular Plate Bending Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15, 1771- 1812, 1980.
- [29] Batoz J.-L. et Tahar M. B., Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, 1655- 1677, 1982.
- [30] Bathe K.J et Dvorkine .N. "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", International Journal for Numerical Methods in Engineering 21, 367-383, 1985.
- [31] Ziekiewicz O.C. " la méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur " Edition, Paris, 1973
- [32] Belounar. L, Analyse du comportement des plaques par éléments finis -Eléments de plaque à champ de déformation-, Thèse de Doctorat d'état, Université de Biskra, 119 pages, 2005.
- [33] Belounar. L, Guenfoud. M. A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending. Thin-Walled Structures 43:47-63, 2005.
- [34] Himeur. M., Benmarce .A. and Guenfoud. M., A new finite element based on the strain approach with transverse shear effect, Structural Engineering Mechanics, vol. 49, pp. 793– 810, 2014.
- [35] Himeur. M, Guenfoud M., Bending Triangular Finite Element with a Fictitious Fourth Node Based on the Strain Approach,|| European Journal of Computational Mechanics, 20(7–8), pp. 455–485. 2011
- [36] Belounar. L, Guerraiche. K. A new strain based brick element for plate bending. Alexandria Engineering Journal, 53 : 95–105, 2014
- [37] Abderrahmani. S, T. Maalem, D. Hamadi, On Improved Thin Plate Bending Rectangular Finite Element Based on the Strain Approach,|| International Journal of Engineering Research in Africa, 27, pp. 76–86. 2016

- [38] Abderrahmani Sifeddine, Mallem Toufik,b and HamadiA Djamal, ,The Transverse Shear Effect of a New Plate Bending Finite Element Based on the Strain Approach, International Journal of Engineering Research in Africa, Vol. 35, pp 1-10 /www.scientific.net/JERA.35.1 Accepted: 2017-11-15 ,2018 Trans Tech Publications Ltd, 2018
- [39] Belounar Abderahim , Sadok Benmebarek, Mohamed Nabil Houhou , Lamine Belounar, Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strainbased Reissner–Mindlin elements, International Journal of Advanced Structural Engineering11:211–230, 2019
- [40] Guerraiche K, Belounar L, A new eight nodes brick finite element based on the strain approach, Journal of Solid Mechanics, 10 (1), 186-199. 2018
- [41] Belounar A, Benmebarek S, Belounar L. Strain based triangular finite element for plate bending analysis. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 27, 620-632. 2018.
- [42] Abderrahmani. S, T. Maalem, A. Zatar, D. Hamadi. A New Strain Based Sector Finite Element for Plate Bending Problems,|| International Journal of Engineering Research in Africa, 31, pp. 1–13, 2017
- [43] Belounar Abderahim, Benmebarek Sadok , Houhou Mohamed Nabil, Belounar Lamine, Free Vibration with Mindlin Plate Finite Element Based on the Strain Approach, The Institution of Engineers (India) 2020.
- [44] Messai Abderraouf, Belounar Lamine and Merzouki Tarek, Static and free vibration of plates with a strainbased brick element, European Journal of Computational Mechanics, DOI: 10.1080/17797179..1560845. 2018
- [45] Khiouani, H. E., Belounar, L, Houhou, M. N. A New Three-Dimensional Sector Element for Circular Curved Structures Analysis, Journal of Solid Mechanics, 12(1), pp. 165–174, 2020.
- [46] Boussem, F., L. Belounar, A Plate Bending Kirchhoff Element Based on Assumed Strain Functions, Journal of Solid Mechanics Vol. 12, No. 4 pp. 935-952 DOI: 10.22034/jsm.2020.1901430.1601. 2020
- [47] Boussem Faïçal , Abderahim Belounar, Belounar Lamine, Assumed strain finite element for natural frequencies of bending plates, World Journal of Engineering, .emerald.com. 2022
- [48] Boussem F, Belounar A, Belounar L, Fortas L. Strain-Based Mindlin Finite Element for Vibration Analysis of Rectangular Plates Coupled with a Fluid,Romanian Journal of Acoustics and Vibration,.rjav.sra.ro. 2022

- [49] Belounar Abderahim, Belounar Lamine, and Tati Abdelouahab. An Assumed Strain Finite Element for Composite Plates Analysis, International Journal of Computational Methods, World Scientific, 2023.
- [50] Ansel C. U., Stresses in beams, plates, and shells, 3rd edition, Taylor & Francis Group, LLC, 2010
- [51] Batoz J.L. et Dhett G., Modélisation des structures par éléments finis, Volume 2, poutres plaques, Hermès, 1990.
- [52] Belounar Abderahim, Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l'analyse des structures, Thèse de Doctorat LMD en Génie Civil, Université de Biskra, 144 pages, 2019.
- [53] Cazenave M., Méthode des éléments finis- Approche pratique en mécanique des structures, 2e édition, Dunod, 2013
- [54] Craveur J.C, Modélisation des éléments finis - Cours et exercices corrigés, 3eme édition, Dunod, 2008
- [55] Huang H-C., Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells Theory, Software and Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989
- [56] Timoshenko, S and S.woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGrawHill, London. 1999.
- [57] Pourdarbani, Razieh and Tarighi, Javad, Choosing the Proper Material to Optimize the Front Axle of the Tractor Mf285 Using Finite Element. Emirates Journal for Engineering Research, Vol. 24: Iss. 2, 2019.
- [58] Dvorkin, E.N. and Bathe, K, A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. Engineering Computations, Vol. 1 No. 1, pp. 77-88. 1984.
- [59] Paulino, G.H., Le, C.H. A modified Q4/Q4 element for topology optimization. Struct Multidisc Optim , 37, 255–264, 2009.
- [60] Liew. K. M, Wang. J, Ng. T. Y and Tan. M. J. Free vibration and buckling analyses of shear deformable plates based on FSDT meshfree method, Journal of Sound and Vibration, vol. 276, pp. 997–1017, 2004.
- [61] Mackerle. J. Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements: a bibliography (1992–1995), Engineering Computations, vol. 14, pp. 347–440, 1997.

- [62] Liew .K. M, Xiang .Y and Kitipornchai. S. Research on thick plate vibration: a literature survey, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 180, pp. 163–176, 1995.
- [63] Mindlin. R. D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18 pp. 31–38, 1951.
- [64] Reissner. E, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. A68– 77, 1945.
- [65] Wang, C. M., Lim, G. T., Reddy, J. N, Lee, K. H., Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories, *Engineering Structures*, vol. 23, pp. 838–849, 2001.
- [66] Reddy J.N., Phan N.D., Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory, *Journal of Sound and Vibration*, 98(2): 157-170, 1985.
- [67] Bahrami. M.R, Hatami. S. Free and Forced Transverse Vibration Analysis of Moderately Thick Orthotropic Plates Using Spectral Finite Element Method, *Journal of Solid Mechanics*, 2016, 8(4) : 895-915.
- [68] Hamadi. D. Abderrahmani, S. Maalam. T. On Improved Thin Plate Bending Rectangular Finite Element Based on the Strain Approach. *International Journal of Engineering Research in Africa*, 27:76-86, 2016.
- [69] Rebiai, C. and Belounar, L. A New Strain Based Rectangular Finite Element with Drilling Rotation for Linear and Nonlinear Analysis. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 13, pp. 72-81, 2013.
- [70] Rebiai, C. and Belounar, L. An Effective Quadri-lateral Membrane Finite Element Based on the Strain Approach. *Measurement*, 50, pp. 263-269, 2014.
- [71] Rebiai, C., Saidani, N. and Bahloul, E. A New Finite Element Based on the Strain Approach for Linear and Dynamic Analysis. *Research Journal of Applied Science, Engineering and Technology*, 11, pp. 639-644, 2015.
- [72] Rebiai Cherif. Finite element analysis of 2-D structures by new strain based triangular element, *Journal of Mechanics*. Cambridge University, Volume 35 issue 3, pp: 305-313, 2019.
- [73] De Rosa. M. A and Francios. C. Plate bending analysis by the cell method: numerical comparisons with finite element methods. *Computers & structures*, 31, 731-735. 1990.

- [74] Yuan. Fuh-Gwo and Miller. Robert .E. A rectangular finite element for moderately thick flat plates. *Computers & structures*, 1988, 30, 6, 1375- 1387
- [75] Choi Chang-Koon and Park Yong-Myung. Nonconforming Transition Plate Bending Elements With Variable Mide-Side Nodes. *Computers & structures*, 32: 295-304. 1989.
- [76] Clough. R. W. and Tocher. J. L.. Finite element stiffness matrices for-analysis of plate bending. *Proc. 1st. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*. (Edited by 1. S. Przemieniecki et al.) WrightPatterson A..F. B., Ohio., pp. 515-545, 1965.
- [77] Bathe Klaus-Jurgen. A Formulation of general Shell of Tensorial Componentst elements-the use of mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22 : 697-722, 1986.
- [78] Pain T.H, and Sumihara K., Rational approach for assumed stress finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp.1685-1695, 1984.
- [79] Xie X., and Zhou, T., Optimization of stress modes by energy compatibility for 4-node hybrid quadrilaterals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.59, No.2, pp. 293-313, 2004.
- [80] Sze K.Y., On immunizing five beta hybrid stress element models from (trapezoidal locking in practical analyses). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.47, No.4, pp.907-920, 2000
- [81] Li G., and Huang L.H., A-node plane parameterized element based on quadrilateral area coordinate, *Engineering Mechanics*, Vol. 31,No.7,pp.15-21,2014.
- [82] Piltner R., Taylor R.L., A symptomatic construction of B-BAR functions for linear and non-linear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.44, No.5, pp.615-639, 1999.
- [83] Wang C.Z., Zhang X., and Hu P., Quadrilateral 4-node quasi-conforming plane element with internal parameters. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 46, No.6, pp. 971-976, 2014.
- [84] Xie Y., Zheng G., and Hu P., Incompatible modes with Cartesian coordinates and application in quadrilateral finite element formulation, *Computational and applied Mathematics*, Vol.36, No.2, pp. 859-875, 2017.
- [85] Chen X.M., Cen S., Long Y.Q., and Yaob Z.H., Membrane elements insensitive to

- distortion using the quadrilateral area coordinate method. *Computers, Structures*, Vol. 82, No.1, pp. 35-54, 2004.
- [86] Cen S., Zhou P.L, Li C.F., and Wu C.J., An unsymmetric 4-node, 8-DOF plane membrane element perfectly breaking through Mac Neal's theorem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 103, No. 7, pp.469-500,2015.
 - [87] Allman D.J., Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 2645-2655, 1988.
 - [88] Kugler S., Fotiu P.,and Murin J., A highly efficient membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Acta Mechanica*, Vol. 213,pp. 323-348,2010.
 - [89] Cen S., Zhou M.J., and Fu X.R., A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions, *Computer Struct*, Vol. 89, Nos.5-6, pp. 517-528, 2011.
 - [90] Zouari W., Hammadi F., and Ayad R., Quadrilateral membrane finite elements with rotational DOFs for the analysis of geometrically linear and nonlinear plan problems, *Computers and Structures* ,Vol. 173,pp. 139-149,2016.
 - [91] Sabir, A. B., A new class of Finite Elements for plane elasticity problems, *CAFEM 7th, International Conference of Structural Mechanics In Reactor Technology*, Chicago, 1983.
 - [92] Belarbi, M. T., and Maalam, T., On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 14, pp. 985-997, 2005.
 - [93] Hamadi, D., Ayoub, A., and Maalem, T., A new strain-based finite element for plane elasticity problems, *Engineering Computations*, vol. 33, pp.562-579, 2016.
 - [94] Himeur, M., Zergua, A., and Guenfoud, M., A Finite Element Based on the Strain Approach Using Airy's Function, *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 40, pp. 719–733, 2015.
 - [95] Rezaiee-Pajand, M., Gharaei-Moghaddam, N., and Ramezani, M., A New Higher-Order Strain-Based Plane Element, *Scientia Iranica*, 26(0), pp. 2258–2275, 2019
 - [96] Rezaiee-Pajand, M., and Yaghoobi, M., Formulating an Effective Generalized Four-Sided Element, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 36, pp. 141–155, 2012.
 - [97] Rezaiee-Pajand, M., Gharaei-Moghaddam, N., and Ramezani, M., Two Triangular

-
- Membrane Elements Based on Strain, *International Journal of Applied Mechanics*, 11(1), 2019.
- [98] Rezaiee-Pajand, M., Ramezani, M., and Gharaei-Moghaddam, N., Using Higher-Order Strain Interpolation Function to Improve the Accuracy of Structural Responses, *International Journal of Applied Mechanics*, 12(3), 2020.
- [99] Bouzidi, L., Belounar, L., and Guerraiche, K., Presentation of a new membrane strain-based finite element for static and dynamic analysis, *International Journal of Structural Engineering*, vol. 10, no. 1, pp. 40–60. doi: 10.1504/IJSTRUCTE.2019.101431, 2019.
- [100] Fortas, L., Belounar, L., and Merzouki, T., Formulation of a new finite element based on assumed strains for membrane structures, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, vol. 11, pp. 9–18. doi: 10.1007/s40091-019-00251-9, 2019.
- [101] Belounar, L., Messai, A., Merzouki, T., and Fortas, L., A Comparative Study of Membrane Finite Elements Based on the Strain Approach, *Academic Journal of Civil Engineering*, 34(1), pp. 66–72, 2016.
- [102] Ibrahimogovic A., Taylor. R.L, W ilson E.L. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30, 445–457 ,1990.
- [103] Sabir, A. B., and Sfindji, A., Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite Elements. *Thin-Walled Structures*, vol. 21, pp. 225-232, 1995.
- [104] Mac-Neal R.H, Harder R.L, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element in Analysis and Design* 11, 3–20, 1985.
- [105] Timoshenko S, Goodier J.N, *Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1951.
- [106] Smith I.M, Griffith D.V. *Programming the Finite Element Method*, 4th ed., John Wiley & Sons, Ltd, UK, 2004.

Annexe

Les composantes de la matrice [C] de dimensions [12×12] de l'élément **SBPE** sont:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & x_i^2 & x_i^3 y_i & \frac{1}{3}x_i^3 + y_i^2 & \frac{1}{3}y_i^3 + y_i^2 & x_i y_i^2 & x_i^2 y_i & x_i^3 & x_i y_i^3 & x_i y_i \\ 0 & 1 & 0 & -2x_i & -3x_i^2 y_i & -x_i^2 & 0 & -y_i^2 & -2x_i y_i & -3x_i^2 & -y_i^3 & -y_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_i^3 & -2y_i & -(y_i^2 + 2y_i) & -2x_i y_i & -x_i^2 & 0 & -3x_i y_i^2 & -x_i \end{bmatrix}$$

Où x_i et y_i sont les coordonnées du nœud I ($i=1, 4$), la matrice [C] est donnée par :

$$[C] = [[C1][C2][C3][C4]]^T$$

La matrice de déformation est donnée par :

$$[Q] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6xy & 2x & 0 & 0 & 2y & 6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2(y+1) & 2x & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6x^2 & 0 & 0 & 4y & 4x & 0 & 6y^2 & 2 \end{bmatrix}$$

Les composantes de la matrice [C] de dimensions [12×12] de l'élément **SBEDR** sont:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & (y+y^2) & xy & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) & \frac{y^2}{2} & \frac{y^2}{2} & (xy^2) & x^2 y^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & x & \frac{x^2}{2} & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) & \frac{y^2}{2} & \frac{y^2}{2} & (xy^2) & x^2 y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2y & 0 & (y+x^2) & xy & 0 & -2xy & 3x^2 y^2 & x \end{bmatrix}$$

Où x_i et y_i sont les coordonnées des nœuds i ($i=1,4$), et la matrice [C] est donnée par :

$$[C] = [[C1][C2][C3][C4]]^T$$

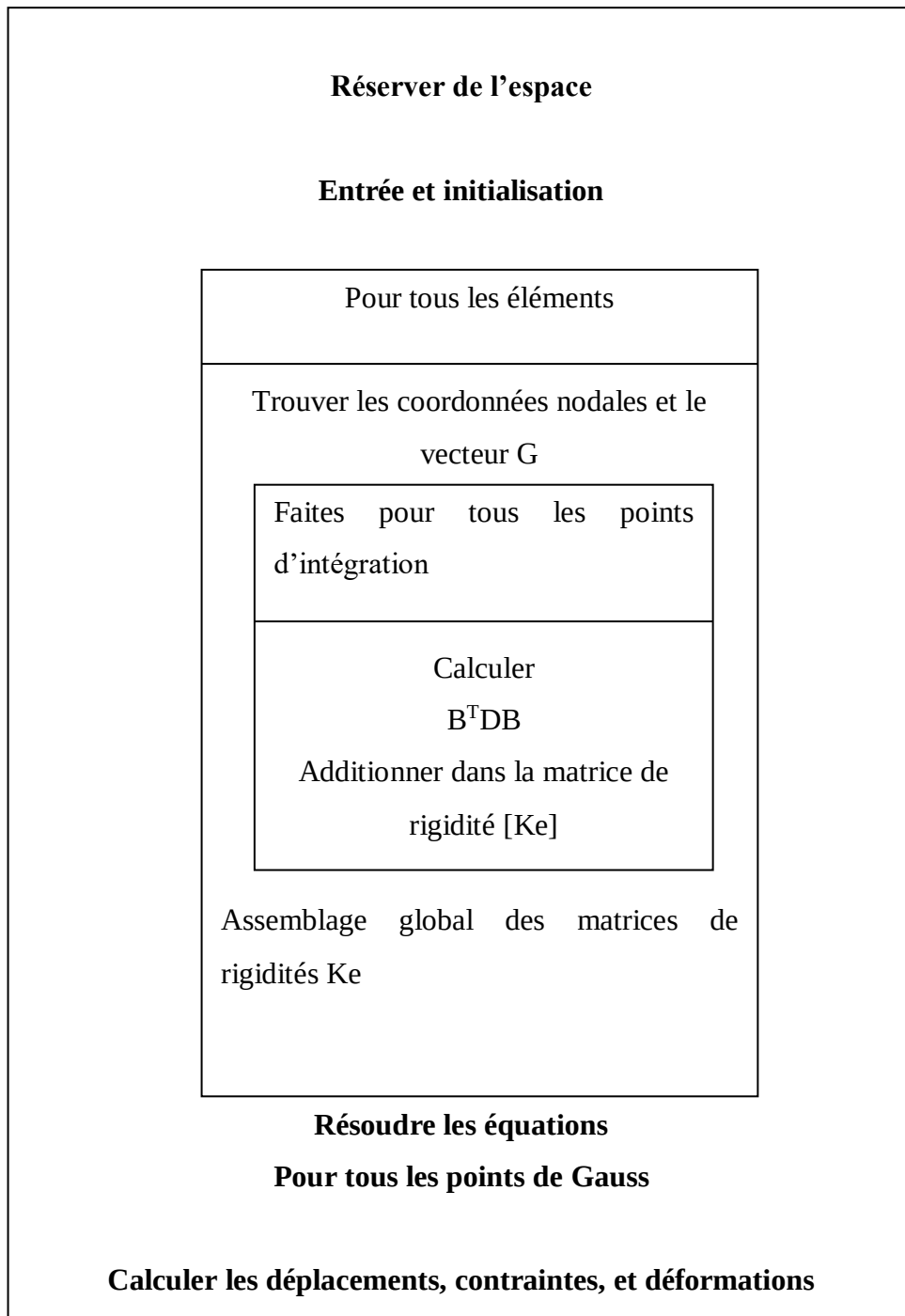
L'opérateur différentiel et

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

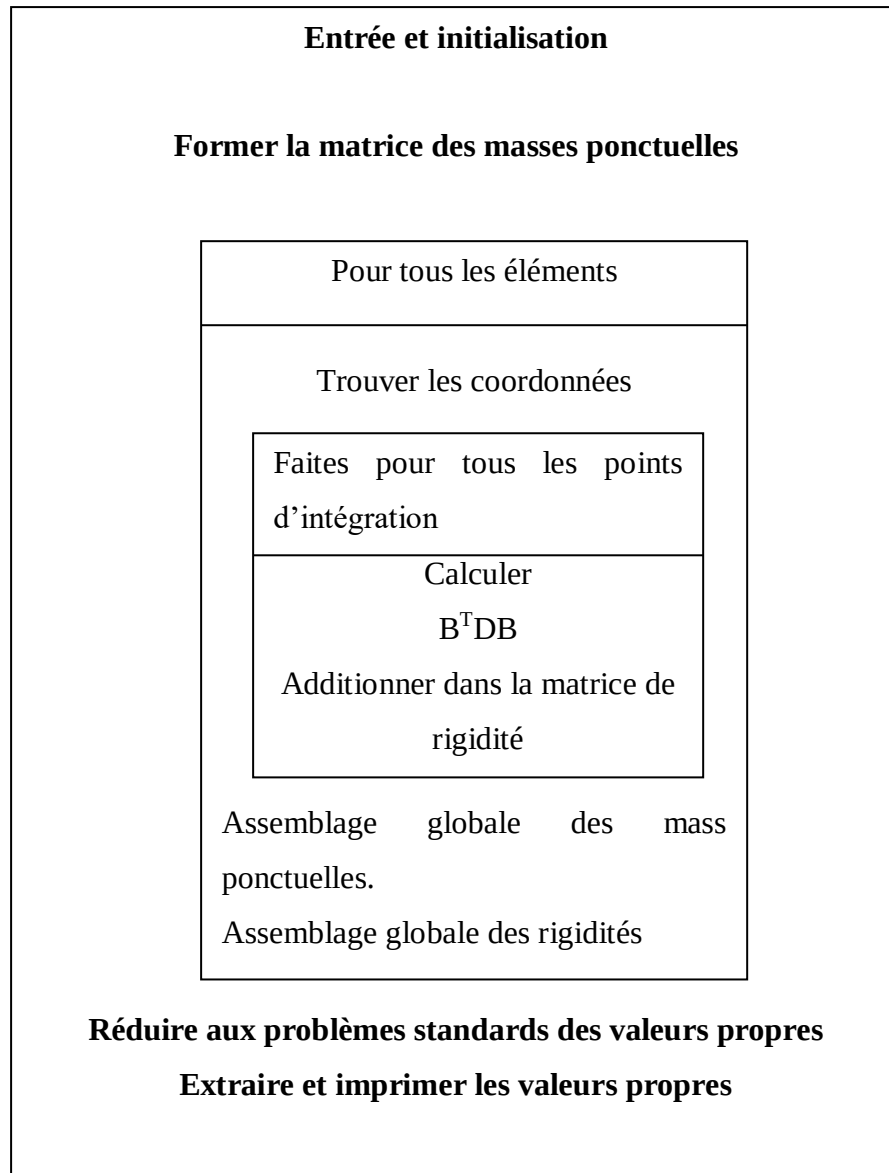
La matrice de déformation est donnée par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & x & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 2y & -x^2 & -2x^3 y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2x & 0 & 2y & 2y & 2(y-x) & 0 & 2x \end{bmatrix}$$

Organigramme du programme de l'élément Plaque (Elément SBPE).



Organigramme du programme de vibration libre d'un solide rectangulaire (Elément SBEDR).



Les travaux de recherches effectués

1-Article: intitulée "ANALYSIS OF THIN PLATES IN BENDING BY NEW RECTANGULAR STRAIN BASED ELEMENT.," Emirates Journal for Engineering Research: Vol. 28: Iss. 3, Article 4. (2023).

2-Une présentation en 7ème conférence internationale de recherches scientifiques en ADANA, TURQUIE intitulée: AN EFFECTIVE STRAIN BASED SOLID ELEMENT FOR LINEAR ANALYSIS, Septembre 7-8, 2021.

3- Une présentation en la première conférence nationale de génie mécanique à l'univ-batna2 « NCME'23 » intitulée : ANALYSIS OF THIN PLATES IN BENDING BY STRAIN BASED APPROCH, Mai 10, 2023.