République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieure et de la recherche Scientifique

Université El Hadj Lakhdar Batna

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire des Techniques Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

En Mathématiques

<u>Thème</u>

Contribution à l'étude de la dualité quasi-convexe en optimisation

Option : Analyse Mathématiques Appliquée

Par

Abdessemed Nabila

Soutenue le : 12/02/2007

Devant le jury

Mr. S. E.REBIAI	Prof	Université de Batna	*Président*
Mr. R. BENACER	Prof	Université de Batna	*Rapporteur*
Mr. K. MESSAOUDI	Prof	Université de Batna	*Examinateur*
Mr. M. ACHACHE	M.C	Université de Sétif	*Examinateur*
Mr. S. BEHLALI	M.C	Université de Biskra	*Examinateur*

Dédicaces

…… à ma famille……

Remerciements

Avant tout, je remercie **dieu** le tout puissant qui ma donné la force pour accomplir ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur le professeur **Rachid Benacer**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.

M^{er} **S.E.Rebiai**, qui me fait l'honneur de présider ce jury ;

M^{ers} **K.Messaoudi**, **M.Achache** et **S.Behlali** pour avoir accepté d'être examinateurs de ce mémoire.

Je tiens particulièrement à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

Nabila

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}^n$	L'ensemble des élément x qui contient n composants de $\mathbb{R}$.
$C \cap D$	Intersection des sous ensemble C et D.
$C \cup D$	Réunion des sous ensemble C et D.
$int(C)$	Interieure de l'ensemble C.
$\langle x, y \rangle$	Produit scalaire de deux vecteurs x et y dans $\mathbb{R}^n$.
$\sum\limits_{i=1}^{m}$	Sommation de 1 à m.
$\Vert x \Vert$	Norme d'un vecteur x dans $\mathbb{R}^n$.
$N(x, C)$	Cône normal de C au point x.
$A(m \times n)$	Matrice réelle de m lignes et n colonnes.
$d(x, A) = \inf\limits_{x \in A} \Vert x - z \Vert$	Distance d'un point x à un ensemble X de $\mathbb{R}^n$.
$\overline{A} = cl(A)$	Fermeture d'un ensemble donné A.
M^{-1}	Matrice inverse de M.
$dom\,(f)$	Domaine effectif d'une fonction f.
$\acute{e}pi\,(f)$	épigraphe de f.
$S_\alpha\,(f)$	l'ensemble de niveau.
$Conv(D) = Co(D)$	Enveloppe convexe d'un ensemble D..
f^*	Fonction conjuguée de f.
f^H	Quasi-conjuguée de f.
f^{HH}	Biquasi-conjuguée de f.
∂f	Sous différentiel de f.
$\partial^H f$	Quasi-sous différentiel de f.
f s.c.i	f est semi-continue inférieurement.
f s.c.s	f est semi-continue supérieurement.
D°	Polaire de D.
D^H	Polaire inverse de D.
D^{HH}	Bipolaire inverse de D.
Γ^U	L'ensemble des fonctions $s.c.s$ et $f(0) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Γ^L	L'ensemble des fonctions $s.c.i$ et $f(0) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} f(x)$ et $\lim_{\|x\|\mapsto+\infty} f(x) = \sup f(x)$.
$ri(D)$	interieure relatif d'un ensemble D de $\mathbb{R}^n$.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de la dualité **quasi-convexe** de trois types de problèmes d'optimisation. On utilise les concepts et les propriétés de la **quasi-convexité, quasi-conjuguée** et **quasi-sous différentiel** d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, pour étudier les conditions d'optimalité et la stabilité de la dualité de type **Fenchel.** On présente quelques exemples d'illustration et un problème d'application concret en économie.

Mots clés : Optimisation **non convexe**, Programmation **quasi convexe**, Dualité **quasi convexe**, Conditions d'optimalité.

Introduction

La dualité en optimisation convexe et non convexe a fait l'objet de plusieurs études. Citons à titre d'exemple les travaux de **Fenchel-Moreau, Rockafellar, Phan thien thach**, etc....[14] , [17] , [20]

La non convexité de la fonction objectif engendre des problèmes d'optimisation non convexe et l'étude de ces problèmes est devenue essentielle et important dans plusieurs domaines. On peut citer par exemple : problèmes de transport, de gestion, de commerce, etc...

La résolution de ces problèmes est généralement difficile, car chaque solution locale n'est pas nécessairement globale. En général en optimisation, il existe quatre types de problèmes :

- Minimisation d'une fonction convexe sur une partie compacte convexe.
- Maximisation d'une fonction convexe sur une partie compacte convexe.
- Minimisation de la différence de deux fonctions convexes (optimisation **diférence - convexe** (**D.C**)) sur une partie compacte convexe.
- Minimisation d'une fonction convexe sur un complément d'une partie compacte convexe.

L'étude de ces problèmes a été considérée par plusieurs chercheures et engendre plusieurs approches pour obtenir les problèmes duaux des programmes mathématiques donnés.

La question importante qui se pose dans la dualité quasi convexe est comment généraliser la conjuguée et le sous différentiel d'une fonction convexe pour une fonction quasi convexe, car la classe des fonctions quasi convexes est plus large que la classe des fonctions convexes.

L'objectif de notre travail est l'étude de *la dualité quasi convexe* de trois types de problèmes d'optimisation. Cette étude est basée sur les travaux de **Phan Thien Thach** [16, 17, 18, 19] , en utilisant les concepts de la quasi conjuguée et le quasi sous différentiel de la fonction objective définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, pour établir la dualité de ces trois problèmes.

La première classe des problèmes quasi convexes est :

Minimisation d'une fonction quasi convexe sur une partie convexe, compacte.

$$\min_{x \in D} f(x) \tag{1}$$

La non convexité de la fonction f entraine pour le problème **(1)** des minimums locaux mais qui ne sont pas nécessairement globaux.

Si la fonction f est convexe, fermée et propre, la condition nécessaire et suffisante pour l'optimalité de $z \in D$ est :

$$0 \in \partial f(z) + N(z, D) \tag{2}$$

où $\partial f(z)$ est l'ensemble des sous gradients de f en z et $N(z, D)$ est le cône normal de D en z.

Cette dernière condition reste valable dans le cas où l'ensemble ∂f est remplacé par l'ensemble convexe des quasi sous différentiels $\partial^H f(z)$ dans le cas où la fonction objectif est quasi convexe, c'est-à-dire **(2)** s'écrit sous la forme suivante :

$$0 \in \partial^H f(z) + N(z, D)$$

La dualité de ce problème est semblable à la dualité de **Fenchel,** pour la.minimisation d'une fonction convexe sur une partie compacte convexe.

La deuxième classe est la minimisation d'une fonction quasi convexe sur un complément d'un convexe :

$$\min_{x \notin intD} f(x),$$

et la troisième est la maximisation d'une fonction quasi convexe sur une partie compacte :

$$\max_{x \in D} f(x).$$

Ce mémoire se compose de trois chapitres structurés comme suit :

Le premier chapitre contient l'outil mathématique dont on aura besoin dans la suite. On présente des rappels sur l'analyse convexe et quasi convexe ainsi que les concepts de la programmation mathématique et les conditions d'optimalité.

Dans **le deuxième chapitre**, nous présentons les propriétés de base de la quasi-conjuguée et le quasi-sous différentiel d'une fonction quasi-convexe définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Cette présentation nous ramène à exprimer les relations entre la quasi-conjuguée et la conjuguée d'une fonction convexe, la bi-quasi-conjuguée avec l'enveloppe supérieure quasi-convexe et le quasi-sous différentiel avec le sous différentiel d'une fonction convexe.

Au **troisiéme chapitre**, on commence par la classification des problèmes quasi-convexes, puis à l'aide des notions des quasi-conjuguées et quasi-sous différentiels, on présente les conditions d'optimalité en fonction des polaires et la dualité des trois types de problèmes quasi-convexes avec quelques exemples d'illustrations. On termine ce chapitre par l'étude d'un problème d'application concret en économie.

Chapitre 1

Présentation des notions élémentaires

Afin de rendre facile la compréhension de ce mémoire, nous avons besoin de rappeler quelques notions et propriétés d'analyse convexe et quasi-convexe qui sont utile pour la suite et elles sont données sous une forme beaucoup plus adéquate que possible.

Le premier paragraphe est consacré aux rappels de quelques notions de base telles que :
Les ensembles convexes, les fonctions convexes et quasi convexes, la conjuguée d'une fonction convexe, et le théorème de *Hann-Bannach.*
Le second paragraphe concerne les propriétés fondamentales du sous différentiel d'une fonction convexe.

Le dernier paragraphe est destiné à la présentation des résultats d'existence, d'unicité et des conditions d'optimalité qui sont utilisées tout au long de ce travail.

1.1 Eléments d'analyse convexe

Définition 1.1. [12] *Un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si,*

$$\forall x, y \in C \ : [x, y] = \{(1-t)\,x + ty, t \in [0,1]\} \subseteq C$$

Définition 1.2. **[12]** *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe de S, notée $Co(S)$ est l'ensemble des combinaisons convexes finies d'éléments de S c-à-d*

$$Co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i : \lambda_i \in \mathbb{R}^+, x^i \in S \ \forall i = 1, 2, ..., n \ et \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

De plus, c'est le plus petit convexe qui contient S.

Définition 1.3. **[12]** Un sous ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est dit affine si :

$$\forall x, \ y \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda) + \lambda \in S.$$

On dit aussi que S est une variété affine(ou linéaire).

Définition 1.4 **[12]** Soit S une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une partie affine unique $F \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant S appelée enveloppe affine de S et notée $aff(S)$, c'est la plus petite partie affine de $\mathbb{R}^n$ contenant S.

$$aff(S) = F = \cap \{F_s : S \subset F_s \text{ et } F_s \text{ affine}\}.$$

Théorème 1.1. **[12]** Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$ alors :

$$aff(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \, x_i \in S, \, \forall \ i = \overline{1, n} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Définition 1.5. **[12]** Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. L'intérieure de C est défini par :

$$int(C) = \{x \in C : \exists \varepsilon > 0, \ x + \varepsilon B \subseteq C\}$$

où B est la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.6. **[12]** L'intérieure relatif d'un ensemble C non vide de $\mathbb{R}^n$, noté $ri(C)$ est défini comme l'intérieure de C vu comme sous ensemble de $aff(C)$. Ce dernier étant muni de la topologie induite

$$ri(C) = \{x \in aff(C) : \exists \varepsilon > 0, \ (x + \varepsilon B) \cap aff(C) \subseteq C\}$$

Définition 1.7. **[2]** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction donnée.

1. *L'ensemble*
$$epi\,(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f\,(x) \leq \alpha\}$$
est appelé épigraphe de f.

2. *L'ensemble*
$$\begin{aligned} dom\,(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : f\,(x) < +\infty\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha \in \mathbb{R}, (x, \alpha) \in epi\,(f)\} \end{aligned}$$
est appelé domaine effectif de f *(la projection de* $epi(f)$ *sur* $\mathbb{R}^n$*).*

3. *Si* $dom\,(f) \neq \emptyset$ *et* $f\,(x) > -\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *on dit que* f *est propre.*

4. *L'ensemble*
$$S_\alpha\,(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f\,(x) \leq \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$
est appelé ensemble tranche (ensemble de niveau inférieure).

Proposition 1.1. **[12]** *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. f *est convexe*
2. $f((1-t)\,x + ty) \leq (1-t)\,f\,(x) + tf(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,1]$
3. $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x^i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f\,(x^i)\ \ \forall \lambda_i \geq 0\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\ , \forall x^i \in \mathbb{R}^n\ , \forall m \in \mathbb{N}$
4. $epi(f)$ *est un ensemble convexe sur* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque 1.1. f est dite strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$si l'une des deux inégalités précédentes 2) ou 3) sont strictes dès que $x \neq y$, avec $t \in \left]0,1\right[$.

Définition 1.8. **[9]** *Soit* $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *où* C *est un convexe de* $\mathbb{R}^n$*. On dit que :*

1. f *est quasi-convexe(q.c) sur* C *si :*
$$\forall x, y \in C\ , \forall t \in [0,1] \quad f((1-t)\,x + ty) \leq \max\{f\,(x)\,, f(y)\}$$

2. *f est strictement quasi convexe (s.q.c) si l'inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $t \in]0,1[$.*

Définition 1.9. [12]

1. *f convexe $\Rightarrow$ f quasi-convexe et f strictement convexe $\Longrightarrow$ f strictement quasi-convexe.*

2. f strictement quasi-convexe $\Longrightarrow$ *f quasi-convexe et f quasi-convexe $\Longrightarrow$ $(-f)$ est quasi-concave.*

Théorème 1.2. [9] *Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,où C est un convexe de $\mathbb{R}^n$, alors :*

f est quasi-convexe sur C si et seulement si, $S_\alpha(f) = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$ est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve :

Supposons que f est quasi convexe sur $\mathbb{R}^n$ et montrons que $S_\alpha(f)$ est un convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Prenons $x, y \in S_\alpha(f)$ on a :

$$\forall t \in [0,1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

alors : $tx + (1-t)y \in S_\alpha(f)$ donc $S_\alpha(f)$ est convexe.

Supposons que $S_\alpha(f)$ est convexe, pour tout
$\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\alpha_0 = \max\{f(x), f(y)\},$$

alors $x \in S_{\alpha_0}(f)$ et $y \in S_{\alpha_0}(f)$ résulte que $tx + (1-t)y \in S_{\alpha_0}(f)$ $\forall t \in [0,1]$ donc f est quasi convexe sur C. ■

1.1.1 Propriétés des fonctions quasi-convexes

1. L'épigraphe d'une fonction quasi convexe n'est pas convexe.
2. Si $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions quasi convexes, de $\mathbb{R}^n$ à valeur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors

$\sup_{i\in I} f_i$ est quasi convexe car

$$S_\alpha\left(\sup_{i\in I} f_i\right) = \underset{i\in I}{\cap} S_\alpha(f_i) \text{ (l'intersection des ensembles convexes est convexe.)}$$

3. la somme de deux fonctions quasi convexes à valeur dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ n'est pas quasi convexe.

Exemple 1.1. Soit $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ telles que :

$$f_1(x) = x$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 1, & \text{si} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

alors f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes ce qui impliquent que f_1, f_2 sont quasi-convexes tandis que $f_1 + f_2$ ne l'est pas.

Définition 1.10. [13]

1. *Une fonction f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en $x^* \in \mathbb{R}^n$ si :*

$$\forall (x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \to x^* \Longrightarrow f(x^*) \leq \lim_n \inf_{k\geq n} f(x_k)$$

ou encore d'une maniére equivalente si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } f(x) \geq f(x^*) - \varepsilon \text{ dés que } \| x - x^* \| \leq \delta.$$

2. *f est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) en x^* si $(-f)$ est(s.c.i) en x^*.*
3. *f est dite continue en x^* si et seulement si elle est à la fois (s.c.i) et (s.c.s) en x^*.*

Définition 1.11. [13] *On dit que f est propre* si $dom f \neq \varnothing$ et $f(x) > -\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.12. [15] *On désigne par $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions convexes, semi-continues inférieurements et propres sur $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.13. [15] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. *On considère l'ensemble des fonctions s.c.i majorées par* f

$$F = \left\{ g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} : g \ s.c.i \text{ et } g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Alors $F \neq \emptyset$, *et contient au moins la fonction identiquement égale à* $-\infty$. *La fonction* $\sup_{f \in \Gamma_0} g$ *est la plus grande fonction s.c.i majorée par* f et dans ce cas $g \in F$, *est appelée la régularisée de* f *et on la note* $\overline{f}$.

Remarque 1.2. *Si* f *est convexe,* $\overline{f}$ *est appelée fermeture de* f.

Définition 1.14. [15] *Une fonction convexe* f *est dite fermée si*

$$f = \overline{f}$$

Définition 1.15. [1] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction. La transformée de* ***Legendre-Fenchel*** *où la conjuguée (polaire) de* f *notée* f^* *est la fonction définie comme suit :*

$$\forall x^* \in \mathbb{R}^n, \ f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \ \}$$

Proposition 1.2. [15] *Si* f *est convexe, la fonction* f^**est appelée transformation de* ***Fenchel*** *et on a l'inégalité suivante :*

$$\forall x, x^* \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, x^* \rangle \leq \ f(x) + f(x^*)$$

La fonction conjuguée de f^* *(*biconjuguée de f) *qui sera notée* f^{**}, *est définie par :*

$$f^{**}(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \} .$$

Et nous avons toujours : $f^{**}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3. [15] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} : f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ *,on dit que* f *est fermée si et seulement si*

$$f^{**} = f.$$

La fonction f^{**} est appelée aussi la fermeture de f.

Proposition 1.3. [15] *Soit f une fonction convexe et fermée. Alors f^{*}l'est aussi, de plus*

$$f^{**} = f.$$

Définition 1.16. [12] *Un sous ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est appelé un cône si :*

$$\forall x \in A,\ \forall \alpha > \ 0 :\ \alpha x \in A,\ \text{c.à.d}\ \mathbb{R}_{+}^{*} A \subset A.$$

Définition 1.17. [12] *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble et $a \in A$, le cône normal de A en a, est l'ensemble*

$$N(a, A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x - a \rangle \leq 0,\ \forall x \in A\}$$

Définition 1.18. [15] *Un hyperplan est un ensemble de la forme :*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire continue définie sur $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.4. [12] *Soit A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ non vides tels que :*

1) *A et B sont convexes et $A \cap B = \emptyset$.*

2) *Aoù B est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Alors, il existe un hyperplan $H = \{f = \alpha\}$ qui sépare A et B au sens large c.à.d

$$\begin{aligned} \langle f, x \rangle &\leq \alpha, \forall x \in A \\ \langle f, x \rangle &\geq \alpha, \forall x \in B. \end{aligned}$$

Théorème 1.5. [12] *Soit A et B deux sous ensembles convexes non vides de $\mathbb{R}^n$disjoints. Si A et B sont fermés et B est compact, alors il existe un hyperplan H qui sépare strictement A et B c.à.d*

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0, \quad \langle f, x \rangle \leq \alpha - \varepsilon,\ \forall x \in A \\ \langle f, x \rangle \geq \alpha - \varepsilon,\ \forall x \in B. \end{aligned}$$

Définition 1.19. [17] *Soit* $D \subseteq \mathbb{R}^n$, *le polaire de* D *est l'ensemble* $D^\circ \subset \mathbb{R}^n$ *défini par :*

$$D^\circ = \{y \in R^n : \langle y, x \rangle \leq 1, \quad \forall x \in D\}.$$

Définition 1.20. [17] *Soient* D_1, D_2 *deux ensembles convexes, fermés et* $0 \in D_1 \cap D_2$, *alors :*

$$D_1 \subseteq D_2 \Leftrightarrow D_2^\circ \subseteq D_1^\circ.$$

Définition 1.21. [17] *Soit* D *un ensemble convexe, fermé et* $0 \in D$ *alors :* $(D^\circ)^\circ = D$

Définition 1.22. [16] *Soit* D *un ensemble convexe fermé dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $0 \notin D$. *Le polaire inverse de* D *noté* D^H *est défini par :*

$$D^H = \{y \in R^n : \langle y, x \rangle \geq 1, \quad \forall x \in D\}.$$

Théorème 1.6. [16] *Pour tout ensemble convexe, fermé tel que* $0 \notin D$, *on a :*

$$D^{HH} = cl\,\{tx : x \in D, \quad t \geq 1\}.$$

Remarque 1.3. *Le polaire inverse défini auparavant est un ensemble convexe fermé ne contenant pas zéro.*

1.2 Sous différentiel d'une fonction convexe

Définition 1.23. [2] *Soit* f *une fonction convexe de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* $g \in \mathbb{R}^n$ *est un sous-gradient de* f *en* x^* *si* $x^* \in dom\,(f)$ *et si*

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle x - x^*, g \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

L'ensemble $\partial f(x^*)$ *de tous les sous-gradients de* f *en* x^* *est dit le sous-différentiel de* f *en* x^*.

1.2.1 Propriétés des sous différentiels

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe alors, on a :*

1. $x^* \notin dom f \Rightarrow \partial f(x^*) = \emptyset$;
2. $g \in \partial f(x^*) \Leftrightarrow f(x) + f(x^*) = \langle g, x^* \rangle$;
3. f *continue en* $x^* \Rightarrow \partial f(x^*) \neq \emptyset$. *(la réciproque est fausse) ;*
4. f *convexe,sci et propre* $\Rightarrow \partial f(x^*) \neq \emptyset \ \forall x^* \in ri(dom f)$;
5. *Si* f *est convexe et* $\partial f(x^*) \neq \emptyset \Rightarrow f$ *est sci en* x^*;
6. $g \in \partial f(x^*) \Leftrightarrow x^* \in \partial f^*(g.)$. *la réciproque est vraie si* f *est sci en* x^*;
7. *Le sous différentiel d'une fonction* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est une partie convexe fermée de* $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.4. Si f est différentiable en x^*, alors

$$\partial f(x^*) = \{\nabla f(x^*)\}.$$

1.3 Programmation mathématique

Une programmation mathématique est un problème d'optimisation (P) défini comme suit :

$$\min_{x \in C} f(x). \tag{P}$$

Si $C = \mathbb{R}^n$, on dit que (P) est un problème sans contraintes. Si

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., n\}$$

où f, $g_i (i = 1, ..., n)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction f est appelée **fonction objectif** et C l'ensemble des contraintes. Dans ce cas le problème (P) s'appelle un problème d'optimisation sous contraintes .

Définition 1.24. **[13]** *On appelle solution optimale(ou optimum globale) de* (P) *une solution qui minimise* $f(x)$ *sur l'ensemble* C, c.à.d $f(x^*) = \min_{x \in C} f(x)$.

Définition 1.25. [15] *On dit que le problème* (P) *admet une solution locale* x^**s'il existe un voisinage* $V(x^*)$ *de* x^**dans* C *tel que :*

$$\forall x \in V(x^*) \ : f(x) \geq f(x^*).$$

Définition 1.26. [13] *On dit qu'un problème d'optimisation est convexe (resp non convexe) s'il consiste à minimiser une fonction convexe (resp maximiser une fonction concave) sur un domaine convexe.*

Théorème 1.7. [13] *Pour un problème d'optimisation convexe , tout optimum locale est un optimum globale.*

Théorème 1.8. [18] *(**Weirstrass** : résultat d'existence). Si* C *est un compact non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et si* f *est continue sur* C*, alors le problème* (P) *admet au moins une solution optimale.*

Théorème 1.9. [1] *Si* f *est continue et coercive c.à.d* $\lim f(x) = +\infty$ *si* $\|x\| \to +\infty$ *et si* C *est fermé non vide, alors le problème* (P) *admet au moins une solution optimale.*

Théorème1.10. [1] *(résultat d'unicitè). Si* f *est strictement convexe sur le convexe* C *de* R^n *et si le problème* (P) *admet une solution optimale, alors cette solution est unique.*

Théorème 1.11. [14] *Soit* (P) *un programme convexe arbitraire et soit* I *l'ensemble des indices* $i \neq 0$ *tel que* f_i *n'est pas affine. Supposons que la valeur optimale n'est pas* $-\infty$ *et* (P) *posséde au moins une solution admissible sur* $ri(C)$*, alors les vecteurs de **Kuhn-tucker** existent pour* (P).

1.4 Conditions d'optimalité

Définition 1.27. [12] *Soit* C *une partie non vide de* $\mathbb{R}^n$*et* $x \in C$*, l'ensemble*

$$T(C, x) = \{d \in \mathbb{R}^n, \exists \bar{\alpha} > 0 : x + \alpha d \in C \text{ pour } 0 < \alpha < \bar{\alpha}\}$$

est appelé cône tangent à C *en* x*, qu'on appelle aussi le cône des directions admissibles pour* C *en* x.

Théorème 1.12. **[12]** *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable, alors*

1. *Si* $x^* \in C$ *est une solution optimale du problème* (P) *alors :*

$$\forall d \in T(C, x^*) \ : \langle \nabla f(x^*), d \rangle \geq 0.$$

2. *Si* f *et* g_i *sont des fonctions convexes alors* $x^* \in C$ *est une solution optimale de* (P) *si et seulement si*

$$\forall d \in T(C, x^*) : \langle \nabla f(x^*), d \rangle \geq 0.$$

Définition 1.28. **[13]** (Condition de **Slater**)
Si g_i *est convexe pour tout* $i = 1, ..., n$, *alors la condition :*

$$\exists x_0 \in C : g_i(x_0) < 0 \text{ pour tout } i = 1, .., n$$

est appelée la condition de ***Slater***.

Lemme 1.1. **[13]** *Soit* $x \in C$, *si la condition de* ***Slater*** *est vérifiée alors :*

$$T(C, x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0, i \in I(x)\} \tag{1}$$

Définition 1.29. **[13]** *On dit que* C *est régulière si la condition de* ***Slater*** *est vérifiée.*
Corrolaire 1.1. **[1]** *Soit* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe continue et définie sur un espace normé* X *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $[f < 0] \neq \emptyset$ *et soit* $D = [f \leq 0]$, *alors pour tout* $x \in D$ *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $l \in N_D(x)$,
2. *Il existe* $\lambda \geq 0$ *tel que :* $l \in \lambda \partial f(x)$ *et* $\lambda f(x) = 0$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'optimalité globale du problème de type (P) sous les conditions suivantes :
1. la fonction objectif f est convexe

2. l'ensemble des contraintes $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., n\}$ est convexe.

Théorème 1.13. **[1]** (**Kuhn-Tucker**) *On suppose que C est régulière alors une condition nécessaire et suffisante pour que $x^* \in C$ soit un optimum global du problème convexe de type (P) est qu'ils*
*existent des nombres $\lambda_i \geq 0\,(i = 1, ..., n)$ appelés multiplicateur de **Kuhn-Tucker**, tels que :*

$$\begin{cases} 0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial g_i(x^*) \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \; i = 1, ..., n \end{cases}$$

Chapitre 2

Quasi-conjuguée et Quasi-sous différentiel d'une fonction quasi-convexe

Nous étudions dans ce chapitre la quasi-conjuguée et le quasi-sous différentiel d'une fonction quasi-convexe. Les résultats principaux de cette étude seront utilisés dans le chapitre suivant.

En premier lieu, on commence par la présentation des définitions et quelques propriétés de la quasi-conjuguée d'une fonction quasi-convexe et la bi-quasi conjuguée. On exprime la relation entre la conjuguée d'une fonction convexe et la quasi-conjuguée d'une fonction quasi-convexe, puis on étudie le lien entre l'enveloppe supérieure quasi-convexe et la bi-quasi-conjuguée. Dans le dernier paragraphe, on présente quelques notions du quasi-sous différentiel.

2.1 Quasi-conjuguée d'une fonction quasi-convexe

Définition 2.1. [18] *Soit $f : R^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. La quasi-conjuguée de la fonction f est définie par :*

$$f^H(v) = \begin{cases} -\inf\limits_x \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\}, & \text{si} \quad v \neq 0 \\ -\sup\limits_x \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}, & \text{si} \quad v = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.

Si $v \neq 0$ on a : $f^H(v) = -\inf\limits_x \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} \geq -\sup\limits_x \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = f^H(0)$

$$\text{Donc } f^H(0) = \min\left\{f^H(v) : v \in \mathbb{R}^n\right\} \text{ c.à.d } f^H \text{possède un minimum en } 0. \tag{2.2}$$

Exemple 2.1. Soit la fonction f définie par :

1. $f(x) = \|x\|^2$

$$\begin{aligned} \text{si } v \neq 0 \ f^H(v) &= -\inf\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} \\ &= -\inf\{\|x\|^2 : \langle v, x\rangle \geq 1\} \\ &= \sup\{-\|x\|^2 : \langle v, x\rangle \geq 1\} \end{aligned}$$

On a :

$$1 \leq \langle v, x\rangle \leq \|v\|\|x\| \Longrightarrow -\|x\|^2 \leq -\frac{1}{\|v\|^2} \Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{-\|x\|^2\right\} = -\frac{1}{\|v\|^2}$$

Si $v = 0$

$$\begin{aligned} f^H(0) &= -\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = -\sup\left\{\|x\|^2 : x \in \mathbb{R}^n\right\} = -\infty \\ \text{Donc } f^H(v) &= \begin{cases} \frac{-1}{\|v\|^2} \text{ si } v \neq 0 \\ -\infty \text{ si } v = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. $f(x) = C$ =Constant.

$f^H(v) = -\inf\limits_x \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} = -\inf\limits_x \{c : \langle v, x\rangle \geq 1\}$

$$= \sup_x \{-c : \langle v, x \rangle \geq 1\} = -c$$

Donc $f^H(v) = -c$.

Proposition 2.1. *La fonction f^H est quasi-convexe et vérifie les propriétés suivantes :*

1. $(tf)^H = tf^H$;
2. $(f+\alpha)^H = f^H - \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $f^H(v) \geq f^H(tv), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0,1]$

Preuve :

On montre que f^H est quasi-convexe. Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que :

$$1 \leq \langle v_1, x \rangle \leq \langle v_2, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

On a :

$$\begin{aligned} f^H(tv_1 + (1-t)v_2) &= -\inf_x \ \{f(x) \ : \ \langle tv_1 + (1-t)v_2, x \rangle \geq 1\} \\ &= -\inf_x \{f(x) : t\langle v_1, x \rangle + (1-t)\langle v_2, x \rangle \geq 1\} \end{aligned}$$

L'ensemble $\{f(x) : \langle v_1, x \rangle \geq 1\} \subset \{f(x) : \langle v_2, x \rangle \geq 1\}$ donc

$$\inf \{f(x) : \langle v_1, x \rangle \geq 1\} \geq \inf \{f(x) : \langle v_2, x \rangle \geq 1\}$$

D'où $f^H(v_1) \leq f^H(v_2)$

Ce qui revient à dire que :

$$\max\left\{f^H(v_1), f^H(v_2)\right\} = f^H(v_2) \tag{2}$$

D'après l'hypothèse(1), on a :

$$\begin{aligned} 1 \quad &\leq \quad \langle v_1, x\rangle \leq t\langle v_1, x\rangle + (1-t)\langle v_2, x\rangle \leq \langle v_2, x\rangle \\ &\text{et } \left\{f(x) : t\langle v_1, x\rangle + (1-t)\langle v_2, x\rangle \geq 1\right\} \subset \left\{f(x) : \langle v_2, x\rangle \geq 1\right\} \end{aligned}$$

Donc

$$-\inf\left\{f(x) : t\langle v_1, x\rangle + (1-t)\langle v_2, x\rangle \geq 1\right\} \leq -\inf\left\{f(x) : \langle v_2, x\rangle \geq 1\right\}$$

D'où

$$f^H(tv_1 + (1-t)v_2) \leq f^H(v_2) = \max\left\{f^H(v_1), f^H(v_2)\right\}$$

Pour $v_1 = 0$,$v_2 = 0$, $t \in [0,1]$, $f^H(tv_1 + (1-t)v_2) \leq \max\left\{f^H(v_1), f^H(v_2)\right\}$ est vérifiée.

1. Si $v \neq 0$

$(tf)^H(v) = -\inf\limits_x\left\{tf(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} = -t\inf\limits_x\left\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} = tf^H(v)$.

Si $v = 0$

$(tf)^H(0) = -\sup\limits_x\left\{tf(x) : x \in \mathbb{R}^n\right\} = -t\sup\limits_x\left\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\right\} = tf^H(0)$

2. Si $v \neq 0$

$$\begin{aligned} (f+\alpha)^H(v) &= -\inf_x\left\{(f+\alpha)(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \\ &= -\inf_x\left\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} - \alpha \\ &= f^H(v) - \alpha \end{aligned}$$

Si $v = 0$

$(f+\alpha)^H(0) = -\sup\limits_x\left\{(f+\alpha)(x) : x \in \mathbb{R}^n\right\} = -\sup\limits_x\left\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\right\} - \alpha$

3. On montre que $f^H(v) \geq f^H(tv) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$,$\forall t \in [0,1]$

On a :

$$f^H(0) = \min\left\{f^H(v) : v \in \mathbb{R}^n\right\} \Rightarrow f^H(0) \leq f^H(v) \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Pour $t = 0 \;\; f^H(v) \geq f^H(0) \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n$

Evidemment pour $v = 0$ on a :

$$f^H(0) \geq f^H(0)$$

Pour $v \neq 0$ et $t \in \left]0, 1\right]$ on a :

$\{f(x) : t\langle v, x\rangle \geq 1\} \subset \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\}$ ce qui montre que :

$$\inf\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} \leq \inf\{f(x) : t\langle v, x\rangle \geq 1\} \quad \text{donc} \quad f^H(v) \geq f^H(tv). \;\; \blacksquare$$

Définition 2.2. [18] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Le conjuguée de la fonction f^H noté par f^{HH} est appelé la bi-quasi conjuguée de f définie par :*

$$f^{HH}(x) = \begin{cases} -\inf\left\{f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -\sup\left\{f^H(v) : v \in \mathbb{R}^n\right\} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Théorème 2.1. [18] *La fonction f^{HH} est quasi-convexe.*

Preuve : les mêmes étapes de la preuve précédente

2.1.1 Les propriétés de la quasi-conjuguée

Définition 2.3. [18] *On dit que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ atteint sa valeur maximale à l'infini si :*

$$f(x_n) \longrightarrow \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \; \textit{pour toute suite} \; \{x_n\} \; \textit{telle que} : \|x_n\| \to +\infty.$$

Théorème 2.2. [16]

Soit $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction.

1. *f est continue en 0 et $f(0)=\inf\{f(x): x\in\mathbb{R}^n\}$ alors f^Hatteint sa valeur maximale à l'infini.*
2. *f atteint sa valeur maximale à l'infini, alors f^H est continue en 0 et*

$$f^H(0)=\inf\left\{f^H(v): v\in\mathbb{R}^n\right\}$$

Preuve :

1. Supposons que f est continue en 0 et $f(0)=\inf\{f(x): x\in\mathbb{R}^n\}$ alors :

$$\begin{aligned}
\sup_{v\in\mathbb{R}^n} f^H(v) &= \sup_{v\in\mathbb{R}^n} -\inf_x\{f(x):\langle v,x\rangle\geq 1\}\\
&= \sup_x \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\{-f(x):\langle v,x\rangle\geq 1\}\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n\diagup\{0\}} -f(x) = -\inf_{x\in\mathbb{R}^n\diagup\{0\}} f(x)\\
&= -\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = -f(0)
\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n} f^H(v) = -f(0) \tag{2.4}$$

Soit $\{v_n\}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que :$\|v_n\|\to+\infty$ $(n\to+\infty)$ alors :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\leq f\left(\frac{v_n}{\|v_n\|^2}\right)\Rightarrow f^H(v_n) = -\inf\{f(x):\langle v_n,x\rangle\geq 1\}\geq -f\left(\frac{v_n}{\|v_n\|^2}\right)$$

On a $\|\frac{v_n}{\|v_n\|^2}\| = \frac{1}{\|v_n\|}\to 0\,(n\to+\infty)$ implique que :

$$\liminf f^H(v_n)\geq \liminf -f\left(\frac{v_n}{\|v_n\|^2}\right) = -\limsup f\left(\frac{v_n}{\|v_n\|^2}\right) = -f(0)$$

Mais $-f(0)=\sup\limits_{v\in\mathbb{R}^n} f^H(v)$ donc $f^H(v)\leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f^H(v_n)$ $\forall v\in\mathbb{R}^n$.

2. Supposons que $f(x_n)\to\sup\{f(x): x\in\mathbb{R}^n\}$ $\forall x_n: \|x_n\|\to+\infty\,(n\to+\infty)$ et montrons que f^H est continue en 0

Supposons que $\{v_n\}\subset\mathbb{R}^n$ tel que : $v_n\to 0\,(n\to+\infty)$

Pour tout n, il existe un point x_n tel que :

$$\langle v_n, x_n \rangle \geq 1 \tag{2.5}$$

$$f(x_n) \leq \inf \{f(x) : \langle v_n, x \rangle \geq 1\} + \frac{1}{n} \tag{2.6}$$

Comme $v_n \to 0\,(n \to +\infty)$ d'après(2.5), on a :$\|x_n\| \to +\infty$ $(n \to +\infty)$
En plus : $f(x_n) \to \sup \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ d'après(2.6), on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mid \inf \{f(x) : \langle v_n, x \rangle \geq 1\} - f(x_n) \mid = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned} \lim f^H(v_n) &= \lim_n - \inf_x \{f(x) : \langle x, v_n \rangle \geq 1\} = \lim_n -f(x_n) \\ &= -\lim f(x_n) = -\sup \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = f^H(0) \end{aligned}$$

Donc f^H est continue en 0.
Reste à démontrer que $f^H(0) = \min \left\{ f^H(v) : v \in \mathbb{R}^n \right\}$. On a :

$$\begin{aligned} f^H(v) = -\inf \{f(x) : \langle v, x \rangle \geq 1\} &\geq -\inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \\ &\geq -\sup \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = f^H(0) \end{aligned}$$

Alors :

$$f^H(v) \geq f^H(0) \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Donc $f^H(0) = \min \left\{ f^H(v) : v \in \mathbb{R}^n \right\} \left(f^H \text{ possède un minimum au point } 0 \right)$ ■

Théorème 2.3. [18]

1. *Si* f *est* s.c.i *et atteint sa valeur maximale à l'infini, alors* f^H *est* s.c.s.
2. *Si* f *est* s.c.s, *alors* f^H*est* s.c.i.

Preuve :

1. Supposons que $\{v_n\} \to \overline{v}$. On démontre que $\limsup f^H(v_n) \leq f^H(\overline{v})$

$\forall n$, $\exists x_n$ tel que :

$$\begin{aligned}\langle v_n, x_n\rangle &\geq 1\\ f^H(v_n) &= -\inf\{f(x) : \langle v_n, x\rangle \geq 1\} = -f(x_n)\end{aligned}$$

Pour toute sous suite $\{x_{n_s}\} \subset \{x_n\}$ telle que :$\|x_{n_s}\| \to +\infty$ on a :

$$\begin{aligned}\lim f^H(v_{n_s}) &= \lim -f(x_{n_s}) = -\lim f(x_{n_s})\\ &= -\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = f^H(0) \leq f^H(\overline{v})\end{aligned}$$

Donc $\lim f^H(v_{n_s}) \leq f^H(\overline{v})$

D'autre part, pour toute sous suite $\{x_{n_s}\} \to \overline{x}$ on a :

$$\langle \overline{x}, \overline{v}\rangle \geq 1$$

Et comme f est *s.c.i* on a :

$$\begin{aligned}f(\overline{x}) &\leq \liminf f(x_{n_s}) \Rightarrow -\liminf f(x_{n_s}) \leq -f(\overline{x})\\ &\Rightarrow \limsup -f(x_{n_s}) \leq -f(\overline{x})\end{aligned}$$

Mais $\limsup -f(x_{n_s}) = \limsup f^H(v_{n_s}) \leq -f(\overline{x}) \leq f^H(\overline{v})$

Donc, il résulte que : $\limsup f^H(v_{n_s}) \leq f^H(\overline{v})$. Cette dernière inégalité signifie que f^H est *s.c.s.*

2. (Voir le théorème 3.3 [18]) ■

2.2 Relation entre la quasi-conjuguée et la conjuguée d'une fonction

On utilise maintenant les propriétés de la conjuguée, pour présenter quelques relations entre la quasi-conjuguée et la conjuguée d'une fonction f.

Théorème 2.4. [16]

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction on a :*

$$f^H(y) \leq f^*(y) - 1, \ \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{2.7}$$

2. *Si* f *est une fonction convexe finie, alors on a :*

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \begin{array}{c} f^H(y) = f^*(t_0 y) - t_0 = \inf\limits_{t \geq 0} \{f^*(ty) - t\} \\ \text{où bien } \ f^H(y) = f^*(y) = \infty \end{array} \tag{2.8}$$

Preuve :

1. On a :

$$\begin{aligned} f^H(y) &= -\inf_x \{f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\} = \sup_x \{-f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\} \\ &= \sup_x \inf_{t \geq 0} \{t(\langle y, x\rangle - 1) - f(x)\} = \sup_x \inf_{t \geq 0} \{t\langle y, x\rangle - t - f(x)\} \\ &\leq \inf_{t \geq 0} \sup_x \{t\langle y, x\rangle - t - f(x)\} \leq \sup_x \{\langle y, x\rangle - 1 - f(x)\} \\ &\qquad = \sup_x \{\langle y, x\rangle - f(x)\} - 1 = f^*(y) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad f^H(y) \leq f^*(y) - 1 \ \ \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

2. f convexe finie. La quasi-conjuguée et la conjuguée sont égales

$$f^H(y) = f^*(y) = +\infty$$

D'après(2.7), on a :
Si $f^H(y) = +\infty$, alors $f^*(y) = +\infty$.
Supposons que :

$$\begin{aligned} f^H(y) &< +\infty \Leftrightarrow -\inf\{f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\} < +\infty \\ &\Leftrightarrow \inf\{f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\} > -\infty \end{aligned}$$

Alors (d'après le théorème(1.9)), il existe $t_0 \geq 0$ tel que :

$$f^H(y) = -\inf_x\{f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\} = \sup_x\{-f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f^*(t_0 y) - t_0 &= \sup_x\{t_0\langle y, x\rangle - t_0 - f(x)\} = \sup_x \inf_{t\geq 0}\{t\langle y, x\rangle - t - f(x)\} \\ &= \inf_{t\geq 0}\sup_x\{\langle ty, x\rangle - f(x) - t\} = \inf_{t\geq 0}\{f^*(ty) - t\} \end{aligned}$$

Donc $f^H(y) = f^*(t_0 y) - t_0 = \inf_{t\geq 0}\{f^*(ty) - t\}$. ■

2.3 Relation entre la bi-quasi conjuguée et l'enveloppe supérieure d'une fonction quasi-convexe

Dans cette partie on introduit le concept de l'enveloppe supérieure d'une fonction quasi-convexe pour déterminer la relation de ce dernier avec la bi-quasi-conjuguée.

Définition 2.4. [18] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Une fonction h est dite l'enveloppe supérieure quasi-convexe de f si :*

$$\{x : h(x) < \alpha\} = conv\{x : f(x) < \alpha\} \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \tag{2.9}$$

Proposition 2.2. [18] *Pour toute fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, *l'enveloppe supérieure quasi-convexe de* f *existe toujours et unique.*

.

Preuve :

Pour toute α, on a : $\{x : \ f(x) < \alpha\} = \underset{\beta \prec \alpha}{\cup} \{x : f(x) \ < \beta\}$, alors :

$$conv\,\{x : f(x) < \alpha\} = \underset{\beta<\alpha}{\cup} conv\,\{x : f(x) < \beta\} \tag{2.10}$$

On obtient la fonction $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ par la définition suivante :

$$h(x) = \inf \left\{ \gamma : x \in \underset{\beta<\gamma}{\cup} conv\,\{x : f(x) < \beta\} \right\} \tag{2.11}$$

Supposons que $\overline{x} \in \{x : h(x) < \alpha\}$ donc $h(\overline{x}) < \alpha$

D'après(2.11), il existe $\gamma < \alpha$ tel que : $\overline{x} \in \underset{\beta \prec \alpha}{\cup} conv\,\{x : f(x < \beta)\}$

Comme $\gamma < \alpha$, d'après (2.10) on a : $\overline{x} \in conv\,\{x : f(x) < \alpha\}$.

Unicité :

Supposons que h et g sont des enveloppes supérieures quasi-convexes de f.

D'après(2.9), on a :

$$\{x : h(x) < \alpha\} = \{x : g(x) < \alpha\} = conv\,\{x : f(x) < \alpha\}, \ \forall \alpha$$

Ce qui implique que $h(x) = g(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ c.à.d $h = g$. ■

Proposition 2.3. [16] *L'enveloppe supérieure quasi-convexe de la fonction* f *est la plus grande fonction quasi-convexe majorée par* f.

Théorème 2.5. [16] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction telle que* $f \in \Gamma^U$ *alors, la bi-quasi-conjuguée coincide avec l'enveloppe supérieure quasi-convexe de* f *c.à.d*

$$\left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\} = conv\,\{x : f(x) < \alpha\} \tag{2.12}$$

Pour demontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. [18] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction quelconque. Alors on a :*

$$f^{HH}(0) = \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\right\} \tag{2.13a}$$
$$= \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\} \tag{2.13b}$$

$$f^{HH}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\} \tag{2.13c}$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$

$$\begin{aligned} f^{HH}(x) &= -\inf_v \left\{f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} = -\inf_v \left\{-\inf_z \{f(z) : \langle v, z\rangle \geq 1\} : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \\ &= \sup_v \left\{\inf_z \{f(z) : \langle v, z\rangle \geq 1\} : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \leq \sup_v \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} = f(x) \end{aligned}$$

Donc $f^{HH}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$.

D'après la définition(2.3), on a :

$$\begin{aligned} f^{HH}(0) &= -\sup_v \left\{f^H(v) : v \in \mathbb{R}^n\right\} = -\sup_v \left\{-\inf_x \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\}\right\} \\ &= \inf_v \inf_x \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} = \inf_x \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\} \end{aligned} \tag{2.14}$$

D'après (2.13c), il résulte :

$$\inf_x \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\} \geq \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\right\}$$

$$\text{donc} \quad f^{HH}(0) \geq \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\} \tag{2.15}$$

On a :

$$\begin{aligned} f^{HH}(0) &= \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n\right\} \leq \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\right\} \\ \text{donc} \quad f^{HH}(0) &\leq \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\right\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

D'après (2.1),(2.15),(2.1), on a :

$$f^{HH}(0) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\} = \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\right\}$$

Démonstration du théorème :

D'après le lemme précédent et $f(0) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\}$ on a :

$$\{x : f(x) < \alpha\} \subseteq \left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\} \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$$

En plus, f^{HH} est quasi-convexe, l'ensemble $\left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\}$ est convexe

Donc $conv\{x : f(x) < \alpha\} \subseteq \left\{x : f^{HH}(x < \alpha)\right\}$

Reste à démontrer l'inclution inverse c.à.d $\left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\} \subseteq \{x : f(x) < \alpha\}$.

Supposons que $x \notin conv\{x : f(x) < \alpha\}$, comme $conv\{x : f(x) < \alpha\}$ un ensemble convexe ouvert on a :

$$f^{HH}(0) = \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n\right\} = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = f(0)$$

Si $f(0) \geq \alpha$ c-à-d $\left(f^{HH}(x) \geq \alpha\right)$ alors l'ensemble $\left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\} = \emptyset$

Donc $x \notin \left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\}$.

Maintenant si $f(0) < \alpha$ c'est-à-dire $0 \in \{x : f(x) < \alpha\} \subseteq conv\{x : f(x) < \alpha\}$

Puisque $\overline{x} \notin conv\{x : f(x) < \alpha\}$ alors, il existe un hyperplan écrit sous la forme :

$\{x : \langle \overline{v}, x\rangle = 1\}$ qui sépare $\overline{x}$ et $conv\{x : f(x) < \alpha\}$ où $\overline{v}$ satisfait :

$$\langle \overline{v}, \overline{x}\rangle \geq 1 \tag{2.17}$$

$$\langle \overline{v}, x\rangle < 1 \quad \forall x \in conv\{x : f(x) < \alpha\} \tag{2.18}$$

D'après(2.18) on a $\inf\{f(x) : \langle \overline{v}, x\rangle \geq 1\} \geq \alpha$. Alors

$$f^{HH}(\overline{x}) = -\inf\left\{f^{H}(v) : \langle v, \overline{x}\rangle \geq 1\right\} \geq -f^{H}(\overline{v}) = \inf\{f(x) : \langle \overline{v}, x\rangle \geq 1\} \geq \alpha$$

Ce qui implique que $\overline{x} \notin \left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\}$

Donc$\left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\} \subseteq conv\,\{x : f(x) < \alpha\}$
Finalement on a :$\left\{x : f^{HH}(x) < \alpha\right\} = conv\,\{x : f(x) < \alpha\} \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. ■

Théorème 2.6. [18] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Si $f \in \Gamma^L$, alors f^{HH} est l'enveloppe supérieure quasi-convexe de f et*

$$\left\{x : f^{HH}(x) \leq \alpha\right\} = conv\,\{x : f(x) \leq \alpha\} \tag{2.19}$$

Preuve :

On

$$f^{HH}(0) = \inf\left\{f^{HH}(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\right\} = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}\} = f(0)$$

$$\text{et } \{x : f(x) \leq \alpha\} \subset \left\{x : f^{HH}(x) \leq \alpha\right\} \quad \forall \alpha$$

L'ensemble $\left\{x : f^{HH}(x) \leq \alpha\right\}$ est un convexe,ce qui implique que :
$conv\,\{x : f(x) \leq \alpha\} \subset \left\{x : f^{HH}(x) \leq \alpha\right\}$.
Reste à démontrer l'inclusion inverse.
Soit $x \notin conv\,\{x : f(x) \leq \alpha\}$. L'ensemble$\{x : f(x) \leq \alpha\}$ est compacte, alors $conv\,\{x : f(x) \leq \alpha\}$ est fermé donc il existe un vecteur x^*tel que :

$$\langle x^*, x\rangle \geq 1 \tag{2.20}$$

$$\langle x^*, y\rangle < 1 \quad \forall y : f(y) \leq \alpha \tag{2.21}$$

On a (2.21) implique que $\inf\{f(y) : \langle x^*, y\rangle \geq 1\} > \alpha$, alors

$$f^{HH}(x) = -\inf\left\{f^{H}(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \geq -f^{H}(y) = \inf\{f(y) : \langle x^*, y\rangle \geq 1\} > \alpha$$

Donc $\left\{x : f^{HH}(x) \leq \alpha\right\} = conv\,\{x : f(x) \leq \alpha\}$
Soit h une fonction quasi-convexe majorée par f . Pour toute α on a :

$$\{x : f(x) \leq \alpha\} \subset \{x : h(x) \leq \alpha\}$$

Et comme $\{x : h(x) \leq \alpha\}$ est un ensemble convexe ,

Donc $conv\{x : f(x) \leq \alpha\} \subset \{x : h(x) \leq \alpha\}$

mais $conv\{x : f(x) \leq \alpha\} = \left\{x : f^{HH}(x) \leq \alpha\right\}$ alors $h(x) \leq f^{HH}(x)$ donc f^{HH} la plus grande fonction quasi- convexe majorée par f (f^{HH} l'enveloppe supérieure quasi-convexe de f). ■

Corollaire 2.1. [16] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi-convexe. Si $f \in \Gamma^U \cup \Gamma^L$ alors $f^{HH} = f$.*

2.4 Quasi-sous différentiel d'une fonction quasi-convexe

Définition 2.5. [16] *On dit que f est quasi sous différentiel au point $x \in \mathbb{R}^n$, s'il existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que :*

$$\langle v, x\rangle = 1 \text{ et } f^H(v) \leq -f(x) \tag{2.22}$$

Où v est le vecteur quasi sous différentiel de f en x et $\partial^H f(x)$ est l'ensemble des vecteurs quasi-sous différentiel de f en x.

Remarque 2.2. [16]

1. *Si $\partial^H f(x) \neq \emptyset$, on dit que f est quasi-sous différentiable en x.*
2. *Si $\partial^H f(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que f est quasi-sous différentiable sur R^n.*
3. $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $f^H(v) = -\inf\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\}$

$$= \sup\{-f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} \geq -f(x)$$

Donc

$$f^H(v) \geq -f(x) \quad ,\forall x : \langle v, x\rangle \geq 1 \tag{2.23}$$

D'après(2.22) et(2.23) on a :

$$v \in \partial^H f(x) \Leftrightarrow \langle v, x\rangle = 1 \text{ et } f^H(v) = -f(x)\,. \tag{2.24}$$

Théorème 2.7. *Si f^H est quasi-convexe et $\partial^H f(x) \neq \emptyset$, alors $\partial^H f(x)$ est convexe.*

Preuve :

On a : $\partial^H f(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists v \in \partial^H f(x) : \langle v, x\rangle = 1$ et $f^H(y) = -f(x)$

On montre que

$$\begin{aligned} \partial^H f(x) \text{ est convexe } &\Leftrightarrow \forall t \in [0,1], \forall v_1, v_2 \in \partial^H f(x) \quad tv_1 + (1-t) v_2 \in \partial^H f(x) \\ &\Leftrightarrow \langle tv_1 + (1-t) v_2, x\rangle = 1 \text{ et } f^H(tv_1 + (1-t) v_2) = -f(x) \end{aligned}$$

On a : $\langle tv_1 + (1-t) v_2, x\rangle = \langle tv_1, x\rangle + \langle (1-t) v_2, x\rangle = t\langle v_1, x\rangle + (1-t)\langle v_2, x\rangle$
$= t+1-t = 1$ ($v_1, v_2 \in \partial^H f(x)$).

Supposons que

$$1 \leq \langle v_1, x\rangle \leq \langle v_2, x\rangle \text{ alors } \langle tv_1, x\rangle \leq \langle tv_2, x\rangle \ \forall t \geq 0$$

$$\text{Donc } \langle tv_1 - tv_2 + v_2, x\rangle \leq \langle v_2, x\rangle \tag{*}$$

D'autre part, on a :

$$f^H(tv_1 + (1-t) v_2) = -\inf\{f(x) : \langle tv_1 + (1-t) v_2, x\rangle \geq 1\}$$

D'après(2.1), on a : $f^H(tv_1 + (1-t) v_2) \geq -f(x)$.

Reste à démontrer l'inégalité inverse

$$\begin{aligned} \text{L'ensemble } \{f(x) : \langle tv_1 + (1-t) v_2, x\rangle \geq 1\} &\subseteq \{f(x) : \langle v_2, x\rangle \geq 1\} \\ \text{Implique que } \inf\{f(x) : \langle tv_1 + (1-t) v_2, x\rangle \geq 1\} &\geq \inf\{f(x) : \langle v_2, x\rangle \geq 1\} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f^H(tv_1 + (1-t) v_2) \leq f^H(v_2) = -\inf\{f(x) : \langle v_2, x\rangle \geq 1\} = -f(x)$$

Car $v_2 \in \partial^H f(x)$, finalement il résulte que $\partial^H f(x)$ est convexe .■

Définition 2.7. [19] *Le vecteur v est appelé quasi-sous différentiel de f en x si :*

$$f(y) > f(x) \Rightarrow \langle v, y\rangle > \langle v, x\rangle \tag{2.25a}$$

$$\langle v, x\rangle = 1 \tag{2.25b}$$

2.4.1 Propriétés des quasi-sous différentiels

Théorème 2.8. [16] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On a :*

$$\partial^H (\max \{f(.), \alpha\}) = \partial^H f(x) \quad \forall \alpha < f(x) \tag{2.26}$$

Preuve :

Soit $y \in \partial^H f(x)$, implique que : $\langle y, x \rangle = 1$ et $-f(x) = f^H(y)$

$$= -\inf \{f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1\}$$

Pour tout $\alpha \;<\; f(x) = \inf \{f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1\}$, ona :

$$f(z) = \max \{f(z), \alpha\} \forall z : \langle y, z \rangle \geq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (\max \{f(.), \alpha\})^H (y) &= -\inf \{\max \{f(.), \alpha\} : \langle y, . \rangle \geq 1\} \\ &= -\inf \{f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1\} = f^H(y) \end{aligned}$$

Ce qui implique que $y \in \partial^H (\max \{f(.), \alpha\})$.

Soit $y \in \partial^H (\max \{f(.), \alpha\})$ alors

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle = 1 \quad \text{et} \quad -f(x) &= (\max \{f(.), \alpha\})^H (y) \\ &= -\inf \{\max \{f(z), \alpha\} : \langle y, z \rangle \geq 1\} \\ &= -\inf \{f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1\} \end{aligned}$$

Ce qui résulte à : $\max (f(z), \alpha) \geq f(x) \quad \forall z : \langle y, z \rangle \geq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(z) \geq f(x) \;\; \forall z : \langle y, z \rangle \geq 1 \Rightarrow -f(x) &= -\inf \{f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1\} \\ &= f^H(y) \Rightarrow y \in \partial^H f(x) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\partial^H (\max \{f(.), \alpha\}) = \partial^H f(x) \;\; \forall \alpha < f(x) \qquad \blacksquare$$

Théorème 2.9. [16] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est une fonction quasi-sous différentiable en x alors, $f^{HH}(x) = f(x)$.*

Preuve :

Soit $y \in \partial^H f(x) \Leftrightarrow \langle y, x\rangle = 1$ et $f^H(y) = -f(x)$

On a :

$$f^H(y) \geq \inf\left\{f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\}$$

$$\text{Donc} \quad f(x) = -f^H(y) \leq -\inf\left\{f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} = f^{HH}(x) \tag{2.27}$$

En plus

$$\begin{aligned} f^{HH}(x) &= -\inf_v \left\{f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} = -\inf_v \left\{-\inf_z \{f(z) : \langle v, z\rangle \geq 1\} : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \\ &= \sup_v \left\{\inf_z \{f(z) : \langle v, z\rangle \geq 1\} : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \\ &\leq \sup_v \{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} = f(x) \end{aligned} \tag{2.28}$$

D'après(2.27) et(2.28) on a :$f^{HH}(x) = f(x)$. ■

Théorème 2.10. **[16]** *Soit $f \in \Gamma^U$. Pour toute x : $f(x) > f(0)$, si $f^{HH}(x) = f(x)$ alors f est quasi-sous différentiable en x.*

Preuve :

Posons $\alpha = f^{HH}(x) = f(x) > f(0)$ et $G = \left\{z : f^{HH}(z) < \alpha\right\}$, $Q = \{z : f(z) < \alpha\}$
Comme f^{HH} est la plus grande fonction quasi-convexe majorée par f, l'ensemble G est un convexe ouvert qui contient Q.
$x \notin G$, d'après le théorème(1.2) de séparation $(H.B)$, il existe une forme linéaire $\langle y, .\rangle$ qui sépare x et G :

$$\langle y, x\rangle > \langle y, z\rangle \quad \forall z \in G$$

Si $0 \in Q \subseteq G$ on a :$\langle y, x\rangle > 0$,
Supposons que $\langle y, x\rangle = 1$ donc $\langle y, z\rangle < 1$ pour tout $z \in G$ on a alors

$$\langle y, z\rangle \geq 1 \Rightarrow z \notin G \Rightarrow z \notin Q$$

Ce qui implique $f(z) \geq \alpha \geq f(x)$ donc

$$\inf\{f(z) : \langle y, z\rangle \geq 1\} = f(x) \Leftrightarrow f^H(y) = -f(x)$$

Il revient que : $y \in \partial^H f(x)$ équivalent à f est quasi-sous différentiable en x. $\blacksquare$

Corollaire 2.3. [16] *Soit f une fonction semi-continue supérieure(s.c.s), quasi-convexe. Alors f est quasi-sous différentiable en $\{x : f(x) > f(0)\}$.*

Preuve :

Posons $g(x) = \max\{f(x), f(0)\}$ on a : $g \in \Gamma^U$ et g est quasi-convexe alors, $g^{HH} = g$ d'après le théorème (2.11), $\partial^H g(x) \neq \emptyset$ $\forall x : g(x) > g(0)$

donc $\partial^H g(x) = \partial^H f(x)$ $\forall x : f(x) > f(0)$

Ce qui implique que f est quasi-sous différentiable en $\{x : f(x) > f(0)\}$ $\blacksquare$.

2.5 Relation entre le quasi-sous différentiel et le sous différentiel d'une fonction convexe

Nous étudions dans ce paragraphe la relation entre le quasi-sous différentiel et le sous-différentiel d'une fonction convexe.

Théorème 2.11. [16]

1. *Si f est une fonction convexe finie, alors pour toute $x \in R^n$ tel que :$f(x) > f(0)$ on a :*

$$\partial^H f(x) \subseteq \bigcup_{t \succ 0} t\partial f(x) \tag{2.29}$$

2. *Si f convexe, semi continue inférieurement et $0 \in int(domf)$ alors, pour toute $x \in domf$ tel que*

$f(x) > f(0)$ on a :

$$y \in \partial f(x) \Longrightarrow \frac{1}{\langle y, x\rangle} y \in \partial^H f(x) \tag{2.30}$$

Preuve :

1. Soit $y \in \partial^H f(x)$ alors $\langle y, x\rangle = 1$ et $f(x) = -f^H(y)$

$$= \inf\{f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\} > -\infty$$

Donc il existe $t \geq 0$ tel que :

$$f^H(y) = -\inf\{f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\} = f^*(ty) - t$$

Si $t = 0$ on a :

$$f^H(y) = -f(x) = f^*(0) - 0 = \sup\{-f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = -f(0)$$

Donc $f(x) \leq f(0)$ contradiction avec l'hypothèse ,ce qui revient que $t > 0$

On a :

$$\begin{aligned} f^H(y) + f(x) &= f^*(ty) - t + f(x) = 0 \\ &\Rightarrow f^*(ty) - t\langle y, x\rangle + f(x) = 0 \quad (\langle y, x\rangle = 1) \\ &\Rightarrow t\langle y, x\rangle = f^*(ty) + f(x) \Rightarrow ty \in \partial f(x) \\ &\Rightarrow y \in \frac{1}{t}\partial f(x) \Rightarrow y \in \underset{t\succ 0}{\cup} t.\partial f(x) \end{aligned}$$

2 Soit maintenant $y \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x\rangle$

Du fait que $0 \in int\,(domf)$ et $f(x) > f(0)$, il resulte que :

$$\langle y, x\rangle > 0 \quad (f(0) \geq f(x) - \langle y, x\rangle)$$

$f^H\left(\frac{1}{\langle y,x\rangle}y\right) = -\inf\left\{f(z) : \langle\frac{1}{\langle y,x\rangle}y, z\rangle \geq 1\right\} = -\inf\{f(z) : \langle y, z\rangle \geq \langle y, x\rangle\}$

De même $y \in \partial f(x)$ alors :

$$f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x\rangle \; \forall z \in \mathbb{R}^n$$

D'où $f^H\left(\frac{1}{\langle y,x\rangle}y\right) \leq -\inf.\{f(x) + \langle y, z - x\rangle : \langle y, z\rangle \geq \langle y, x\rangle\} = -f(x)$

D'après(2.24) on a $\frac{1}{\langle y,x\rangle}y \in \partial^H f(x)$ ■

Remarque 2.3. **[16]** *Si f est une fonction convexe finie, pour toute x tel que $f(x) > f(0)$ on a :*

$$Cone\partial^H f(x) = Cone\partial f(x) \Leftrightarrow \mathbb{R}_+\partial^H f(x) = \mathbb{R}_+\partial f(x)$$

où $ConeA = \{\lambda x : x \in A, \lambda \geq 0\}$.

Chapitre 3

Conditions d'optimalité et dualité

Dans cette partie on présente les conditions d'optimalité et la dualité des problèmes quasi-convexes.

Au premier paragraphe, on classifie les problèmes quasi convexes en trois types, qui se distinguent par leurs équivalences. Dans le deuxième, on présente les conditions d'optimalité pour les trois types de problèmes, et en même temps on présente ces conditions sous forme de polaires d'ensembles. Le troisième paragraphe est consacré à l'étude de la dualité c'est-à-dire, on ramène chacun de ces problèmes sous certaines hypothèses à un problème équivalent appelé le problème dual. Dans le dernier paragraphe, on présente un problème d'application concret en économie.

3.1 Définition et classification des programmes quasi convexes

·Définition d'un programme quasi-convexe

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$Min_{\ x\in D} f(x) \tag{P}$$

où $D = \{x : f_i(x) \leq 0, i = 1, n\}$et $f,\ f_i\,(i = 1, n)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.

On dit que ce probléme est un programme quasi-convexe si la fonction objectif est quasi-convexe et $f_{i.}$sont convexes.

· Classification des programmes quasi-convexes

Evidemment, on ne peut pas traiter d'emblée tous les problèmes qui se rattachent à la classe des programmes mathématiques quasi-convexes. On classifie ces différents problèmes en trois types qui sont :

1. Minimisation d'une fonction quasi-convexe sur un domaine convexe fermé D de $\mathbb{R}^n$

$$\min_{x\in D} f(x) \tag{P$_1$}$$

1. Minimisation d'une fonction quasi-convexe sur un complément d'un convexe D

$$\min_{x\notin intD} f(x) \tag{P$_2$}$$

2. Maximisation d'une fonction quasi-convexe sur un domaine compact D

$$\max_{x\in D} f(x) \tag{P$_3$}$$

Remarque 3.1.

1. Le probléme $\min\{f(x) : x \notin intD\}$ où f une fonction arbitraire et D un ensemble convexe fermé est équivalent au problème **D.C**

$$min\{h(x) - g(x) \ : \ x \in D\}$$

   Où h, g sont des fonctions convexes(ref [**17**]).

2. Tout les problèmes quasi convexes définis précédemment son équivalents, dans le sens que l'on peut transformer chacun de ces trois types au deux autres.

3.2 Conditions d'optimalité

3.2.1 Minimisation d'une fonction quasi-convexe sur un domaine convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

On considère le probléme (P_1) :

$$\min_{x \in D} f(x) \tag{P$_1$}$$

Sous l'hypothèse que $f \in \Gamma$ est une fonction quasi-convexe et D est un domaine convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.
Le problème (P_1) admet une solution optimale.
Supposons que :

$$\inf \{f(x) : x \in D\} > \inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = f(0)$$

Alors, la fonction f est quasi-sous différentiable sur D.

Le théorème suivant donne une condition suffisante d'optimalité globale du problème (P_1).

Théorème 3.1. [16]

Une condition suffisante pour que $x^* \in D$ soit une solution globale du problème (P_1) est

$$0 \in \partial^H f(x^*) + N(x^*, D) \tag{3.1}$$

Preuve :

Supposons que la condition (3.1) est satisfaite, donc il existe $y \in \partial^H f(x^*)$ et $-y \in N(x^*, D)$.

$$y \in \partial^H f(x^*) \Leftrightarrow \langle y, x^* \rangle = 1 \text{ et } f(x^*) = -f^H(y)$$
$$-f^H(y) = \inf \{f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1\} \leq f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1$$

$$\begin{aligned} -y \in N(x^*, D) \quad &\Leftrightarrow \langle -y, z - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall z \in D \\ &\Leftrightarrow \langle y, z \rangle \geq 1 \qquad\quad \forall z \in D \end{aligned}$$

Ce qui implique que x^* est une solution globale de (P_1). $\blacksquare$

Si on prend D sous la forme :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., k\}$$

où $f_i\ (i = 1, ..., k)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\underset{1 \leq\ i\ \leq\ k}{\cap} [f_i < 0] \neq \emptyset$$

alors, d'après le corollaire (1.1), ils existent des nombres réels positifs λ_i tels que :

$$\begin{aligned} N(x^*, D) &= Cône\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial f_i(x^*)\right) \\ \lambda_i f_i(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas la condition d'optimalité ainsi présentée est équivalente à :

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial^H f(x^*) + \sum_{1 \leq\ i\ \leq\ k} \lambda_i \partial f_i(x^*) \\ \lambda_i &\geq 0 \quad \lambda_i f_i(x^*) = 0 \quad , i = 1, ..., k \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Remarque 3.2.

Dans le cas convexe, la condition ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial f(x^*) + \sum_{1\ \leq\ i\ \leq\ k} \lambda_i \partial f_i(x^*) \\ \lambda_i &\geq 0 \quad \lambda_i f_i(x^*) = 0\ ,\ i = 1, ..., k \end{aligned}$$

Et cette dernière n'est autre que la condition de **Kuhn-Tucker**.

Exemple 3.1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \mid t \mid & si \quad t \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 < t \leq 2 \\ \frac{t}{2} & si \quad t > 2 \end{cases} \quad , \quad D = \left[\frac{1}{2}, 5\right]$$

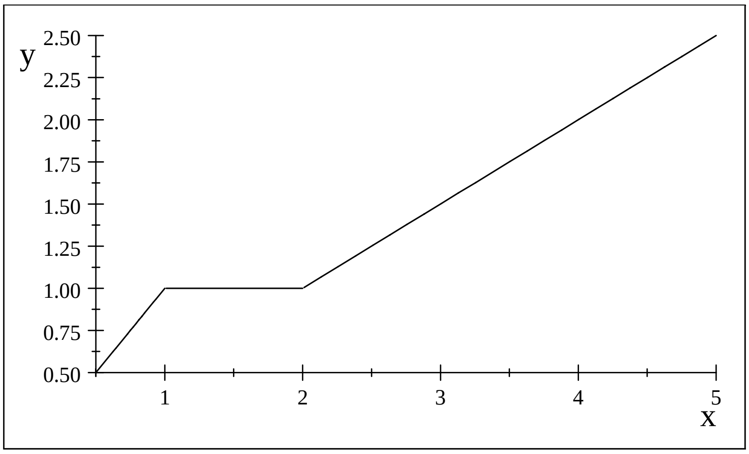

Figure 3.1 : le graphe de la fonction f

La fonction f est quasi convexe et quasi sous différentiable sur D.

Tout $t \in [1, 2]$ est une solution locale (non globale). On va vérifier maintenant la condition (3.1).

$$\begin{aligned} y \in \partial^H f(t) &\Leftrightarrow f^H(y) = -f(t) && \text{et } \langle y, t \rangle = 1 \\ f^H(y) &= -\inf\{f(t) : \langle y, t\rangle \geq 1\} && \text{et } \langle y, t \rangle = 1 \\ &= -\inf\{t : \langle y, t\rangle \geq 1\} && \text{et } yt = 1 \\ &= -t = -f(t) && \text{et } y = \tfrac{1}{t} \end{aligned}$$

Donc $\partial^H f(t) = \left\{\frac{1}{t}\right\}$.

$$\begin{aligned} N(x^*, D) &= \{y \in \mathbb{R} : \langle y, z - t\rangle \leq 0 \ \forall z \in [1, 2]\} \\ &= \{y : y(z - t) \leq 0 \quad \forall z \in [1, 2]\} \end{aligned}$$

$y = \frac{1}{t}$, $t \in [1, 2] \quad \Rightarrow \quad y \geq 0$.

t est un minimum local, alors : $z \geq t \;\; \forall z \in [1, 2] \;\; \Rightarrow z - t \geq 0$

$$\begin{cases} y\left(z-t\right) \leq 0 \\ z - t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow N\left(t, D\right) = \{0\}$$

et la condition d'optimalité globale ainsi définie n'est pas vérifiée.

Tout point $t \in [1, 2]$ est une solution locale (non globale), f admet une solution unique globale $t = \frac{1}{2}$ sur $D = \left[\frac{1}{2}, 5\right]$. On va vérifiér la condition (3.1) du théorème précédent.

$$y \in \partial^H f\left(t\right) \Leftrightarrow f^H\left(y\right) = -f\left(t\right) \quad \text{et} \quad \langle y, t\rangle = 1$$

$$\begin{aligned} f^H\left(y\right) &= -\inf\left\{f\left(t\right) \; : \langle y, t\rangle \geq 1\right\} \text{ et } \langle y, t\rangle = 1 \\ &= -\inf\left\{f\left(t\right) \; : \quad yt \geq 1\right\} \text{ et } \quad yt = 1 \\ &= -f\left(t\right) \qquad\qquad\qquad \text{et} \quad y\tfrac{1}{2} \; = 1 \\ &= -f\left(t\right) \qquad\qquad \text{et} \quad y = 2 \end{aligned}$$

Donc $\partial^H f\left(t\right) = \{2\}$.

$$\begin{aligned} N\left(t, D\right) &= \left\{y : \; \langle y, z - t\rangle \leq 0 \;\; \forall z \in D = \left[\tfrac{1}{2}, 5\right]\right\} \\ &= \left\{y : \; y\left(z - t\right) \leq 0 \;\; \forall z \in \left[\tfrac{1}{2}, 5\right] = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \cup [1, 2] \cup [2, 5]\right\} \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{2} \begin{cases} z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \;\; \Rightarrow 0 \leq z - t \leq \frac{1}{2} \\ z \in [1, 2] \;\; \Rightarrow \frac{1}{2} \leq z - t \leq \frac{3}{2} \\ z \in [2, 5] \;\; \Rightarrow \frac{3}{2} \leq z - t \leq \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow z - t \geq 0$$

On a : $y\left(z - t\right) \leq 0$ mais $\left(z - t\right) \geq 0$ ce qui implique que $y \leq 0$.

Donc $N\left(t, D\right) = \{y : y \leq 0\}$

De plus la condition $0 \in \partial^H f\left(t\right) + N\left(t, D\right)$ est vérifiée.

Théorème 3.2. [16]

La condition (3.1) est satisfaite au moins pour un vecteur $x \in D$.

Preuve :

Comme $f \in \Gamma$, D un convexe fermé, alors f atteint sa valeur maximale α en D.

$$\max \{f(x) : x \in D\} = \alpha < \infty$$

Supposons que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = +\infty$$

L'ensemble $S = \{x : f(x) > \alpha\}$ est un ensemble non vide ouvert,et $0 \in S$ et $M = \{x : f(x) = \alpha\}$ un ensemble compact. On note par $d(y, S)$ la distance euclidéenne de y à S :

$$d(y, S) = \inf \{\|y - z\| : z \in S\}$$

Soit $x \in M$ tel que $\acute{S}$ l'adhérence de S :

$$d(x, S) = \inf_{y \in M} d(y, S)$$

Si $d(x, S) = 0$ alors $S = \acute{S}$.

Si $d(x, S) > 0$, alors :

$$\acute{S} = \{x + \lambda (y - x) : 0 < \lambda \leq 1, y \in S\},$$

et

$$d(x + \lambda (y - x), S) < d(x, S), \ \forall \lambda \in (0, 1], \ \forall y \in S$$

En plus $\acute{S} \cap D = \emptyset$. Alors dans tous les cas, on a un ensemble convexe ouvert $\acute{S}$ satisfaisant :

$$\acute{S} \cap D = \emptyset \text{ et } x \in cl\left(\acute{S}\right) \cap D,$$

où $cl(\acute{S})$ est la fermeture de $\acute{S}$. Depuis $0 \in intD$ et d'après le théorème de séparation, il existe un vecteur P tel que :

$$\langle P, x\rangle = 1 \tag{3.2a}$$

$$\langle P, y\rangle \leq \langle P, x\rangle \quad \forall y \in D \tag{3.2b}$$

$$\langle P, z\rangle > \langle P, x\rangle \quad \forall z \in \acute{S} \tag{3.2c}$$

D'après l'inégalité (3.1), on a :

$$P.(y-x) \leq 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow P \in N(x, D)$$

D'autre part, on a :$S \subseteq \acute{S}$ alors,

$$\begin{aligned} \langle P, z\rangle &> \langle P, x\rangle \quad \forall z \in S. \qquad (3.3) \\ &\Leftrightarrow \langle P, z\rangle > \langle P, x\rangle \quad \forall z: \ f(z) > f(x) \, (\text{depuis } f(x) = \alpha) \end{aligned}$$

l'équation (3.2a) et l'inégalité (3.3) implique que $P \in \partial^H f(x)$. ■

3.2.2 Minimisation d'une fonction quasi-convexe sur un complément d'un convexe

Soit le problème suivant :

$$\min_{x \notin intD} f(x) \tag{P$_2$}$$

où $f \in \Gamma^L$ une fonction quasi convexe et D un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in intD$. Alors, le problème (P_2) admet une solution optimale.

Définition 3.1. [18].

On dit que le problème (P_2) est écrit sous forme standard si :

$$0 \in intD \quad et \quad f(0) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Le théorème suivant établit une condition pour laquelle $z \notin intD$ est une solution globale.

Théorème 3.2. [16]

Une condition nécessaire et suffisante pour que $z \notin intD$ *soit une solution globale du problème* (P_2) *est :*

1. $\partial^H f(z) \cap D^\circ \neq \emptyset$
2. $f^H(y) = \sup\left\{f^H(v) \;:\; v \in D^\circ\right\} \;\forall\, y \in \partial^H f(z)$

Preuve : On a

$$\text{Pour } v \in D^\circ \text{avec } \langle v, x\rangle \geq 1 \;\Leftrightarrow x \notin intD \tag{3.4}$$

On a :

$$\begin{aligned}\sup\left\{f^H(v) \;:\; v \in D^\circ\right\} &= \sup\left\{-\inf\left\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} : v \in D^\circ\right\} \\ &= -\inf_{v \in D^\circ} \inf_x \left\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \\ &= -\inf\left\{f(x) : x \notin intD\right\} \text{(d'après (3.4))}\end{aligned}$$

Soit $z \notin intD$ une solution du (P_2).Comme $z \notin intD$, il existe $y \in D^\circ$ tel que : $\langle y, z\rangle = 1$, alors

$$\begin{aligned}-f^H(y) &= \inf\left\{f(x) : \langle y, x\rangle \geq 1\right\} \geq \inf\left\{f(x) : x \notin intD\right\} \text{(depuis } y \in D^\circ) \\ &= f(z)\end{aligned}$$

La définition de $\partial^H f(z)$ implique que $\partial^H f(z) \cap D^\circ \neq \emptyset$.
Soit $y \in \partial^H f(z)$ on a :

$$f^H(y) = -f(z) = -\inf\left\{f(x) : x \notin intD\right\} = \sup\left\{f^H(v) : v \in D^\circ\right\}$$

Supposons maintenant que $\partial^H f(z) \cap D^\circ \neq \emptyset$ et $f^H(y) = \sup\left\{f^H(v) : v \in D^\circ\right\}$
On doit vérifier que z n'appartient pas à $intD$.
Comme $y \in D^\circ$et $\langle y, z\rangle = 1$ implique que $z \notin intD$, donc z est admissible.

$$f(z) = -f^H(y) = -\sup\left\{f^H(v) : v \in D^\circ\right\} = \inf\left\{f(x) : x \notin intD\right\}$$

Donc z est une solution optimale de (P_2). ■

· **les conditions d'optimalité au sens des polaires** :

Théorème 3.3. [17]

Soit $z \notin intD$. La condition

$$D^{\circ} \subseteq \{x : f(x) < f(z)\}^{\circ} \tag{3.5}$$

est nécessaire pour que z soit une solution optimale.de (P_2) c.à.d

$$z \text{ est une solution optimale de } (P_2) \Rightarrow D^{\circ} \subseteq \{x : f(x) < f(z)\}^{\circ}$$

Si le problème (P_2) est régulier c.à.d

$$\inf \{f(x) : x \notin intD\} = \inf \{f(x) : x \notin D\} \tag{3.6}$$

Alors, *la condition (3.5) est suffisante pour que z soit une solution optimale de (P_2).*

Preuve :

Supposons que z est une solution optimale de (P_2), alors :

$$f(z) \leq f(x) \quad \forall x \notin intD$$

Donc

$$\{x : f(x) < f(z)\} \subseteq intD \subset D$$

D'après la definition (1.20), on a :

$$D^{\circ} \subseteq \{x : f(x) < f(z)\}^{\circ}$$

Supposons maintenant que(3.6) est satisfaite c-à-d :

$$\inf \{f(x) : x \notin intD\} = \inf \{f(x) : x \notin D\}$$

et z n'est pas une solution optimale, alors il existe $u \notin D : f(u) < f(z)$.

Comme $u \notin D$, D est fermé et $0 \in D$, $\exists v \in D^{\circ} : \langle u, v \rangle > 1$.

Du fait que $f(u) < f(v)$, il resulte que $v \notin \{x : f(x) < f(z)\}^{\circ}$.

Donc $D^{\circ} \not\subset \{x : f(x) < f(z)\}^{\circ}$. ■

Remarque 3.3.

Si f est s.c.s alors, le problème (P_2) est régulier.

3.2.3 Maximisation d'une fonction quasi-convexe sur un convexe compact

On considère le problème :

$$\max_{x \in D} f(x) \tag{P$_3$}$$

où $f \in \Gamma^U$ est une fonction quasi convexe et D est un compact contenant 0. Supposons que

$$f(0) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \inf\{f(x) : x \in D\}$$

Comme $f \in \Gamma^U$ et D est un compact, alors le problème (P_3) admet une solution.

Définition 3.2. [18]

On dit que le problème (P_3) est écrit sous forme standard si D contient 0 et $f(0) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Théorème 3.4. [16]

Le vecteur $v \in D$ est une solution globale du problème standard (P_3) si, et seulement si f est quasi sous différentiable en z et on a : $f^H(y) = Min\left\{f^H(v) : v \notin intD^{\circ}\right\}$, pour toute $y \in \partial^H f(z)$.

Preuve :

Supposons que z est une solution globale du (P_3), alors :

$$f(z) = \max\{f(x) : x \in D\} > f(0)$$

Alors, d'après le corollaire (2.3) f est quasi sous differentiable en z.

Soit $y \in \partial^H f(z)$.Comme $\langle y, z\rangle = 1$ on a : $y \notin intD^\circ$.Soit $v \notin intD^\circ$ on a :

$$\sup_{x\in D}\langle v, x\rangle \geq 1$$

et comme D est un compact , il existe $\acute{x} \in D$ tel que : $\langle v, \acute{x}\rangle \geq 1$,alors :

$$\begin{aligned} f^H(v) &= -\inf\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} \geq -f(\acute{x}) \\ &\geq -\max\{f(x) : x \in D\} = -f(z) \\ &= f^H(y) \end{aligned}$$

Donc

$$f^H(y) = \min\left\{f^H(v) : v \notin intD^\circ\right\}$$

Supposons que f est quasi sous différentiable en z et il existe $y \in \partial^H f(z)$ tel que :

$$f^H(y) = \min\left\{f^H(v) : v \notin intD^\circ\right\}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= -f^H(y) = -\inf\left\{f^H(v) \ : \ v \notin intD^\circ\right\} \\ &= -\inf_v\left\{-\inf_x\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} : v \notin intD^\circ\right\} \\ &= \sup_v\left\{\inf_x\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} : v \notin intD^\circ\right\} \\ &\geq \inf_x\{f(x) : \langle v, x\rangle \geq 1\} \qquad \forall v \notin intD^\circ \end{aligned} \tag{3.7}$$

Soit $\acute{z}$ une solution optimale du problème (P_3) et $\acute{y} \in \partial^H f(\acute{z})$ alors $\acute{y} \notin intD^\circ$ et

$$f(\acute{z}) = -f^H(\acute{y}) = \inf\{f(x) : \langle \acute{y}, x\rangle \geq 1\} \tag{3.8}$$

D'après (3.7) et(3.8), ona : $f(z) \geq f(\acute{z})$ donc z est une solution optimale de (P_3). ■

·**Les Conditions d'optimalité au sens des polaires :**

Théorème 3.5. [17]

Soit $z \in D$. La condition

$$\{x : f(x) \leq f(z)\}^\circ \subseteq D^\circ \tag{3.9}$$

*est nécessaire pour que z.*soit une solution optimale de (P_3)

Si le problème (P_3) est régulier c'est-à-dire

$$\sup\{f(x) : x \in D\} = \sup\{f(x) : x \in int(D)\} \tag{3.10}$$

Alors, *la condition (3.9) est suffisante pour que z soit une solution optimale.*

Preuve :

Si z est une solution optimale, alors $D \subseteq \{x : f(x) \leq f(z)\}$ .D'après la definition (1.20) du polaire on a :

$$\{x : f(x) \leq f(z)\}^\circ \subseteq D^\circ$$

Supposons maintenant que (3.10) est vérifiée c-à-d :

$$\sup\{f(x) : x \in D\} = \sup\{f(x) : x \in int(D)\}$$

Et z n'est pas un optimal, alors il existe x^*tel que :

$$x^* \in D - \overline{\{x : f(x) \leq f(z)\}}$$

$0 \in \{x : f(x) \leq f(z)\}$, ce qui implique qu'il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\langle y, x^* \rangle > 1 \tag{3.11}$$

$$\langle y, x \rangle \leq 1 \quad \forall x : f(x) \leq f(z) \tag{3.12}$$

La deuxième inégalité (3.1) implique que $y \in \{x : f(x) \leq f(z)\}^\circ$.

D′autre part on a :

$$\sup\{\langle y, x \rangle : x \in D\} \geq \langle y, x^* \rangle > 1$$

Alors $y \notin D^\circ$ donc la condition (3.9) n'est pas vérifiée. ■

Remarque 3.4.

1. Si f est Sci et $int\,(D) \neq \emptyset$ alors, le problème (P_3) est régulier(ref[17]).

3.3 Dualité

Cette partie est consacrée à l'étude de la dualité des trois problèmes définis précédemment.

Le principe de la théorie de dualité consiste à associer à un problème d'optimisation primal un autre problème d'optimisation simple dit dual, dont la résolution est plus simple nous permet d'obtenir facilement les solutions du problème dual.
Etant donné le problème d'optimisation (P_1) appelé problème primal, nous allons lui associer un problème d'optimisation qui admet des relations avec (P_1).
Considérons le problème suivant :

$$\inf_{y \in D^H} f^H(y) \tag{D$_1$}$$

Le problème (D_1) est appelé le problème dual de (P_1).

Comme $f \in \Gamma$ est une fonction quasi convexe et D est un convexe fermé, alors f^H est une fonction quasi-convexe et D^H est un convexe fermé. Donc (D_1) est le problème de minimisation quasi-convexe sur un convexe fermé et admet une solution optimale. De plus on a :

$$\sup\left\{f^H(y) : y \in \mathbb{R}^n\right\} > \inf\left\{f(x) : x \in D\right\} > \inf\left\{f^H(y) : y \in \mathbb{R}^n\right\}$$

Définition 3.3. [16]

Soit $x \in D$ une solution où la condition (3.1) est satisfaite. Le vecteur $y \in \partial^H f(x) \cap -N(x, D)$ est appelé le vecteur général de ***Kuhn-Tucker*** *du problème (P_1).*

Théorème 3.6. [16]

On a :

$$\inf(P_1) = -\inf(D_1).$$

Preuve :

Pour toute $x \in D, y \in D^H$ on a : $\langle y, x \rangle \geq 1$.

$$-f^H(y) = \inf\{f(x) : \langle y, x \rangle \geq 1\} \leq f(x)$$

En passant à la borne inférieure sur $x \in D$, puis sur $y \in D^H$ on obtient :

$$\inf(P_1) \geq -\inf(D_1).$$

Réciproquement, soient $x \in D$ une solution de (P_1) et y le vecteur général de **Kuhn-Tucker**

$$\langle y, x \rangle = 1 \text{ et } -y \in N(x, D)$$

alors $y \in D^H$ et

$\inf(P_1) = f(x) = -f^H(y) \leq -\inf(D_1)$. ■

Théorème 3.7. [16]

Soit $f \in \Gamma$ une fonction quasi convexe, alors pour tout ensemble convexe fermé D on a :

$$\inf\{f(x) : x \in D\} = \inf\{f(x) : x \in D^{HH}\} = \inf\left\{f(x) : x \in \overline{\{tz : z \in D, t \geq 1\}}\right\}$$

Preuve :

On a :

$$D \subseteq \overline{\{tz : z \in D, t \geq 1\}}$$

Alors :

$$\inf\{f(x) : x \in D\} \geq \inf\left\{f(x) : x \in \overline{\{tz : z \in D, t \geq 1\}}\right\}$$

Comme $f \in \Gamma$, le problème $\inf\left\{f(x) : x \in \overline{\{tz : z \in D, t \geq 1\}}\right\}$ admet une solution v, ainsi ils existent deux suites $\{z^k\} \subset D$ et $\{t^k\}, t^k \geq 1$ tels que :$t^k z^k \to v$ et depuis $f(0) < f(z^k)$ on a :

$$f(z^k) = f\left(\frac{1}{t^k}(t^k z^k) + \left(1 - \frac{1}{t^k}\right)0\right) \leq Max\left(f(t^k z^k), f(0)\right) = f(t^k z^k).$$

Ce qui implique que :

$$\inf\{f(x): x\in D\} \leq \liminf f\left(z^k\right) \leq \liminf f\left(t^k z^k\right) \leq f(v). \quad \blacksquare$$

Théorème 3.8. [16]

Soit $(z, y) \in D \times D^H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *y est le vecteur générale de K-T du problème primal (P_1) en z,*
2. *z est le vecteur générale de K-T du problème dual (D_1) en y.*

Preuve :

Soit y le vecteur général de **K-T** en z alors :

$$1 = \langle y, z\rangle \leq \langle y, x\rangle \quad \forall x \in D$$
$$f^H(y) = -f(z)$$

Comme $f \in \Gamma$est une fonction quasi convexe , alors $f^{HH} = f$ (d'après corollaire 2.1), on obtient donc

$$f^{HH}(z) = -f^H(y) \quad \text{et} \quad 1 = \langle y, z\rangle \leq \langle v, z\rangle \quad \forall v \in D^H.$$

Ce qui veut dire que z est le vecteur général de **K-T** en y. $\blacksquare$

Corollaire 3.1. [16]

Le couple $(z, y) \in D \times D^H$ *est une solution de l'inégalité*

$$f(z) + f^H(y) \leq 0,$$

si et seulement si, z *est une solution de* (P_1) *et* y *est une solution de* (D_1).

Corollaire 3.2. [16]

Le couple $(z, y) \in D \times D^H$ *est une solution des deux inégalités suivantes :*

$$\langle z, y \rangle \leq 1$$

$$f(z) + f^H(y) \leq 0,$$

si et seulement si, z *est une solution de* (P_1) *et* y *est un vecteur général de* ***K-T*** *de* (P_1).

Preuve :

Pour toute $(z, y) \in D \times D^H$ on a :$\langle y, z \rangle \geq 1$ et $f^H(y) = -\inf \{f(z) : \langle y, z \rangle \geq 1\}$ alors : $-f^H(y) \leq f(z)$. D'après les deux inégalités on a :

$$f^H(y) = -f(z)\text{. et } \langle y, z \rangle = 1$$

qui est équivalent à z est une solution optimale de (P_1) et y un vecteur de **K-T** de (P_1) .■

On associé au problème (P_2), le problème suivant :

$$\sup_{y \in D^\circ} f^H(y) \qquad (\mathrm{D}_1)$$

(D_2) est appelé problème dual. Comme $f \in \Gamma^L$ et $0 \in intD$ on a $f^H \in \Gamma^U$ et D° est un compact, donc(D_2) est le problème de maximisation quasi convexe sur un compact et en plus admet une solution optimale.

Remarque 3.5 :

D est un ensemble convexe fermé et $0 \in intD$ alors $D^{\circ\circ} = D$.

Théorème 3.9 : [18]

On a :

1. $\inf(P_2) = -\sup(D_2)$.

2. *Si y est une solution optimale de (D_2) alors tout minimum de f sur l'ensemble $\{x : \langle y, x\rangle \geq 1\}$ est une solution optimale de (P_2).*

3. *Si (P_2) est régulier et D est borné alors (D_2) est régulier.*

Preuve :

1. On a :

$$\begin{aligned}
-\sup(D_2) &= -\sup\left\{f^H(y) : y \in D^\circ\right\} \\
&= -\sup_{y\in D^\circ}\left\{-\inf_x\left\{f(x) : \langle x, y\rangle \geq 1\right\}\right\} \\
&= \inf_{y\in D^\circ}\inf_x\left\{f(x) : \langle x, y\rangle \geq 1\right\} \\
&= \inf_x\inf_{y\in D^\circ}\left\{f(x) \ : \ \langle x, y\rangle \ \geq 1\right\} \\
&= \inf_{x\notin intD} f(x) \ \text{(puisque } x \in intD = intD^{\circ\circ} \Leftrightarrow \sup_{y\in D^\circ}\langle y, x\rangle < 1)
\end{aligned}$$

2. Soit y une solution optimale de (D_2) et z un minimum de f sur $\{x : \langle x, y\rangle \geq 1\}$, alors

$$f(z) = \inf\left\{f(x) : \langle x, y\rangle \geq 1\right\} = -f^H(y) = -\sup(D_2) = \inf(P_2).$$

Et comme $y \in D^\circ$ et $\langle z, y\rangle \geq 1, z \notin intD$ donc z est une solution optimale de (P_2).

3. Supposons que D est borné et (P_2) est régulier c .à.d

$$\inf\left\{f(x) : x \notin intD\right\} = \inf\left\{f(x) : x \notin D\right\}$$

Soit $\{x_n\}$ une suite telle que : $x \notin D$ et

$$f(x_n) \to \inf\left\{f(x) : x \notin intD\right\} \ n \to +\infty$$

Soit $\langle y_n, .\rangle$ une fonction linéaire telle que :

$$1 = \langle y_n, x_n\rangle > \sup_{x\in D}\langle y_n, x\rangle$$

Comme D est borné, il existe $\acute{x} \in D$ tel que : $\langle y_n, \acute{x} \rangle < 1$, alors $y \in intD^{\circ}$. De plus

$$\sup \left\{ f^H (y) : y \in D^{\circ} \right\} \geq f^H (y_n) = -\inf \left\{ f (x) : \langle y_n, x \rangle \geq 1 \right\} \geq -f (x_n).$$

,

$$f (x_n) \rightarrow \inf \left\{ f (x) : x \notin intD \right\} = -\sup \left\{ f^H (y) : y \in D^{\circ} \right\} \quad \text{(d'après (1))}$$

Donc $f^H (y_n) \rightarrow \sup \left\{ f^H (y) : y \in D^{\circ} \right\}$. Comme $y_n \in intD^{\circ}$, implique que

$$f^H (y_n) = \sup \left\{ f^H (y) : y \in intD^{\circ} \right\} = \sup \left\{ f^H (y) : y \in D^{\circ} \right\}$$

Donc (D_2) est régulier. ■

Corollaire 3.3 : [16]

z est une solution optimale du problème (P_2) si et seulement si $\partial^H f (z) \cap D^{\circ} \neq \emptyset$ et tout $y \in \partial^H f (z) \cap D^{\circ}$ est une solution optimale de (D_2).

Preuve : La preuve de ce corollaire est une conséquence directe du théorème (3.2).

Exemple 3.2 :

Considérons le problème suivant :

$$\begin{array}{c} \min \|x\|^2 \\ x \notin intD \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \min \|x\|^2 \\ x \notin int \left\{ conv \left\{ a_1, ..., a_k \right\} \right\} \end{array} \qquad \text{(P)}$$

où $D = conv \left\{ a_1, ..., a_k \right\}$ est l'enveloppe convexe de $\left\{ a_1, ..., a_k \right\}$telle que $a_1, ..., a_k$, soient des vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Comme $D = conv \left\{ a_1, ..., a_k \right\}$est un convexe fermé, et $0 \in int \left(\left\{ conv \left\{ a_1, ..., a_k \right\} \right\} \right)$, il résulte que

$$\begin{aligned} (conv \left\{ a_1, ..., a_k \right\})^{\circ} &= \left\{ v : \langle x, v \rangle \leq 1 \ \forall x \in conv \left\{ a_1, ..., a_k \right\} \right\} \\ &= \left\{ v : \langle a_i, v \rangle \leq 1 \ \forall i = 1, ..., k \right\} \end{aligned}$$

Le problème dual (D) associé au problème primal (P) est défini par :

$$\begin{array}{c} \max -\frac{1}{\|v\|^2} \\ v \in (conv\{a_1,...,a_k\})^\circ \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \max -\frac{1}{\|v\|^2} \\ \langle a_i, v\rangle \leq 1 \quad \forall i=1,...,k \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \max \|v\|^2 \\ \langle a_i, v\rangle \leq 1 \quad \forall i=1,...,k \end{array} \tag{D}$$

Donc on peut reécrire le problème (D) comme suit :

$$\max\left\{\|v\|^2 \ : \ \langle a_i, v\rangle \leq 1 \quad \forall i=1,...,k\right\}$$

Soit $\overline{v}$ une solution de (D) alors :

$$\begin{aligned} \|\overline{v}\|^2 &= \max\left\{\|v\|^2 : v \in (conv\{a_1,...,a_k\})^\circ\right\} \\ &= \max\left\{\|v\|^2 : \langle a_i, v\rangle \leq 1 \quad \forall i=1,...,k\right\} \end{aligned}$$

$\overline{v} \in (conv\{a_1,...,a_k\})^\circ \Rightarrow \langle x, \overline{v}\rangle \leq 1 \ \forall x \in conv\{a_1,...,a_k\}$

$$\begin{aligned} \langle x, \overline{v}\rangle \leq 1 \quad &\Rightarrow \overline{v}^t x \leq 1 \\ &\Rightarrow \overline{v}\overline{v}^t x \leq \overline{v} \\ &\Rightarrow x \leq \tfrac{\overline{v}}{\overline{v}\overline{v}^t} = \tfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Supposons maintenant que x est un minimum de $f(x) = \|x\|^2$ sur l'ensemble $\{x : \langle x, \overline{v}\rangle \geq 1\}$ alors :

$$\|x\|^2 = \min\left\{\|x'\|^2 : \langle x', \overline{v}\rangle \geq 1\right\}$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle x, \overline{v}\rangle \geq 1 \quad &\Rightarrow \overline{v}^t x \geq 1 \Rightarrow \overline{v}\overline{v}^t x \geq \overline{v} \\ &\Rightarrow x \geq \tfrac{\overline{v}}{\overline{v}\overline{v}^t} = \tfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2} \end{aligned} \tag{2}$$

D'après (1) et (2) on a : $x = \frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}$ alors ,

$$f(x) = f\left(\frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}\right) = \left\|\frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}\right\|^2 = \frac{1}{\|\overline{v}\|^2} = -f^H(\overline{v})$$

D'après la propriété (1) du théorème (3.9), on a :

$$f(x) = -f^H(\overline{v}) = \frac{1}{\|\overline{v}\|^2}$$

Donc le minimum de problème primal est $x = \frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}$.

Exemple 3.3 :

Considérons le problème suivant :

$$\min_{g(x)\geq 0} \|x\|^2$$

où $g(x) = \sup\{y^t Bx - 1 : h(y) \leq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^m\}$ avec B une matrice de type $m \times n$ et h est une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}^m$ telle que : $\{y : h(y) \leq 0\}$ est borné, alors g est une fonction convexe finie c'est-à-dire $g(x) < +\infty$ et $g(0) = -1 < 0$.

On note par $G = \{x : g(x) \leq 0\}$ .On peut reécrire le problème (P) comme suit :

$$\min_{x\notin intG} \|x\|^2$$

On définit

$$\begin{aligned} G^\circ &= \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, x\rangle \leq 1 \ \ \forall x \in G\} \\ &= \left\{v \in \mathbb{R}^n : v = B^T y \ \text{ pour toute } y \text{ satisfait } h(y) \leq 0\right\} \end{aligned}$$

Le problème dual (D) associe au problème (P) est :

$$\begin{array}{ccc} \max -\frac{1}{\|v\|^2} & \Leftrightarrow & \max -\frac{1}{\|v\|^2} \\ v \in G^\circ & & v = B^T y \ \ \forall y : h(y) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow & \max \|v\|^2 \\ & & v = B^T y \ \ \forall y : h(y) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow & \max \left\|B^T y\right\|^2 \\ & & h(y) \leq 0 \ \ \forall y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Ce dernier problème est un problème de maximisation convexe sur un ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^m$.

Donc la dimension du problème primal est n alors que la dimension du dual est m. Si $m << n$, la résolution du problème dual dans $\mathbb{R}^m$ est appropriée à la résolution directe du (P) dans $\mathbb{R}^n$.

Considérons le problème suivant :

$$\min_{y \notin intD^\circ} f^H(y) \tag{D$_3$}$$

(D_3) est appelé le problème dual de (P_3). Comme $f \in \Gamma^U$ est une fonction quasi convexe et D est un compact contient 0 alors $f^H \in \Gamma^L$ et $0 \in intD^\circ$, (D_3) est le problème de minimisation quasi convexe sur un complément d'un convexe, qui admet une solution optimale.

Théorème 3.10 : [18]

Soit (P_3) le problème primal et (D_3) son problème dual on a :

1. $-\sup(P_3) = \inf(D_3)$.
2. *Si $\bar{x}$ est une solution optimale de (P_3) alors tout minimum de f^H sur l'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^n : \langle \bar{x}, v\rangle \geq 1\}$ est une solution optimale de (D_3).*
3. *Si $\bar{v}$ une solution optimale de (D_3) alors pour tout $\bar{x} \in N(D^\circ, \bar{v}) - \{0\}$ le vecteur $\frac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v}\rangle}$ est une solution optimale de (P_3).*

Preuve :

1. On a :

$$\begin{aligned}
-\sup(P_3) &= -\sup \{f(x) : x \in D\} \\
&= -\sup \left\{ f^{HH}(x) : x \in D\right\} \text{ (comme } f^{HH} = f) \\
&= -\sup_{x\in D} - \inf_{v} \left\{f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \\
&= \inf_{x\in D} \inf_{v} \left\{f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1\right\} \\
&= \inf_{v} \left\{ \inf_{x\in D} f^H(v) : \langle v, x\rangle \geq 1 \right\} \\
&= \inf f^H(v) \quad \text{(puisque } v \in intD^\circ \Leftrightarrow \sup_{x\in D} \langle v, x\rangle < 1) \\
&= \inf(D_3)
\end{aligned}$$

2. Supposons que $\bar{x}$ est une solution optimale de (P_3) c.à.d

$$\bar{x} \in D \qquad f(\bar{x}) = \sup(P_3)$$

Soit $\bar{v}$ un minimum de f^H sur$\{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \bar{x} \rangle \geq 1\}$. Comme $\bar{x} \in D$,

l'ensemble$\{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \bar{x} \rangle \geq 1\} \subset \{v : v \notin intD^\circ\}$.En plus

$$\begin{aligned} \inf(D_3) &= -\sup(P_3) = -f(\bar{x}) = -f^{HH}(\bar{x}) \\ {}^2 &= \inf\left\{f^H(v) : \langle v, \bar{x} \rangle \geq 1\right\} = f^H(\bar{v}). \end{aligned}$$

Donc $\bar{v}$ est une solution optimale de (D_3).

3. Supposons que $\bar{v}$ est une solution optimale de(D_3). Soit $\bar{x} \in N(D^\circ, \bar{v}) - \{0\}$ alors :

$$\langle \bar{x}, v - \bar{v} \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in D^\circ.$$

Comme $\bar{x} \neq 0$ et $0 \in intD^\circ$,on a $\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle > 0$ alors :

$$\begin{aligned} &\left\langle \tfrac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}, \bar{v} \right\rangle = 1 \\ 0 \geq &\left\langle \tfrac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}, v - \bar{v} \right\rangle = \left\langle \tfrac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}, v \right\rangle - 1 \quad \forall v \in D^\circ \end{aligned}$$

Ce qui resulte que $\left\langle \frac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}, v \right\rangle \leq 1$ $\forall v \in D^\circ$,donc $\frac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle} \in D$. De plus on a :

$$\begin{aligned} -f\left(\tfrac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}\right) &= -f^{HH}\left(\tfrac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}\right) \\ &= \inf_v \left\{f^H(v) : \left\langle \tfrac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}, v \right\rangle \geq 1\right\} \\ &\leq f^H(\bar{v}) = \inf(D_3) = -sup(P_3) \end{aligned}$$

Donc $\frac{\bar{x}}{\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle}$ est une solution optimale de (P_3). ■

Théorème 3.11 : [17]

1. *Si v est une solution optimale de (D_3) alors tout vecteur $x \in D$ tel que :$\langle v, x \rangle \geq 1$ est un optimal de (P_3).*
2. *Si le problème (P_3) est régulier alors (D_3) est régulier.*

Preuve :

1. Supposons que v est une solution de (D_3) .puisque $v \notin intD^{\circ}$ et D est compacte, il existe $x \in D$ tel que :$\langle v, x\rangle \geq 1$. Alors,

$$f(x) \geq \inf\{f(z) : \langle z, v\rangle \geq 1\} = -f^H(y) = -\inf(D_3) = \sup(P_3)$$

Donc x est une solution de (P_3).

2. Supposons que (P_3) est régulier c'est-à-dire

$$\sup\{f(x) : x \in D\} = \sup\{f(x) : x \in intD\}$$

Soit $\{x_n\} \subset intD$ tel que :

$$f(x_n) \to \sup\{f(x) : x \in D\} = \sup\{f(x) : x \in intD\} \tag{1}$$

Comme $f^{HH} = f$, on a :

$$f(x_n) = f^{HH}(x_n) = -\inf\left\{f^H(y) : \langle y, x_n\rangle \geq 1\right\}$$

Soit y_n un vecteur tel que :$\langle y_n, x_n\rangle \geq 1$ et

$$\left|f^H(y_n) + f(x_n)\right| \leq \frac{1}{n} \tag{2}$$

En effet, pour $x_n \in intD$, On a

$$\sup_{x \in D}\langle y_n, x\rangle > \langle x_n, y_n\rangle = 1$$

De plus, (1) et (2) impliquent que

$$-f^H(y_n) \to \sup\{f(x) : x \in D\} \;\; si\ n \to +\infty$$

Mais d'aprés la propriété (1) du théorème (3.10) on a :

$$\sup\{f(x) : x \in D\} = -\inf\left\{f^H(y) : y \notin intD^\circ\right\}$$

ce qui resulte que

$$\inf\left\{f^H(y) : y \notin D^\circ\right\} = \inf\left\{f^H(y) : y \notin intD^\circ\right\}$$

Donc le problème dual (D_3) est régulier. ■

Corollaire 3.4 : [16]

Le vecteur $z \in D$ est un optimal du (P_3) si et seulement si $y \in \partial^H f(z)$ est un optimal du (D_3).

Preuve :

La preuve de ce corollaire est une conséquence directe du théorème (3.4).

Exemple 3.4 :

Considérons le problème d'optimisation quadratique suivant :

$$\max_{x \in D} x^t A x$$

où A une matrice de type $m \times n$ définie positive, symétrique et $D = \{x : \|x\| \leq 1\}$.
On a :

$$\begin{aligned} D^\circ &= \{x : \|x\| \leq 1\}^\circ = \{v : \langle v, x\rangle \leq 1 \;\; \forall x : \|x\| \leq 1\} \\ intD^\circ &= \{v : \langle v, x\rangle < 1 \;\; \forall x : \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} v &\notin intD^\circ \Leftrightarrow \langle v, x\rangle \geq 1 \;\; \forall x : \|x\| \leq 1 \\ 1 &\leq \langle v, x\rangle \leq \|x\| \|v\| \leq \|v\| \quad (\text{comme } \|x\| \leq 1). \end{aligned}$$

Donc $v \notin intD^\circ \Leftrightarrow \|v\| \geq 1$.

Pour appliquer les résultats obtenus au paragraphe précédent, on doit représenter le problème dual de (P), comme suit :

$$\begin{array}{c} \min v^t A^{-1} v \\ v \notin intD^{\circ} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \min v^t A^{-1} v \\ \|v\| \geq 1 \end{array}$$

Si $\alpha = -\frac{1}{v^t A^{-1} v} \Leftrightarrow v^t A^{-1} v = -\frac{1}{\alpha}$ donc le problème (D) peut se réecrire sous la forme :

$$\begin{array}{c} \min -\frac{1}{v^t A^{-1} v} \\ \|v\| \geq 1 \end{array}$$

En plus, si $-\alpha$ est une valeur optimale de $\min \left\{ -\frac{1}{v^t A^{-1} v} : \|v\| \geq 1 \right\}$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est une valeur optimale
de $\min \{ v^t A^{-1} v : \|v\| \geq 1 \}$ et d'après la propriété (1) du théorème (3.10) on a :

$$\max x^t A x = \alpha = \frac{1}{\min v^t A^{-1} v}$$

L'égalité précédente implique : si α est la plus grande valeur propre de A alors, $\frac{1}{\alpha}$ est la petite valeur propre de A.

3.4 Application

Dans cette partie on présente une application de la dualité quasi-convexe en économie qui consiste à trouver un vecteur des prix, pour un échange commercial entre deux secteurs A et B.

Pour un vecteur des prix donné, le secteur B est intéressé à obtenir une valeur maximale des produits sous une contrainte de dépense.

Le secteur A est intéressé à trouver un vecteur des prix admissible tel que le niveau d'allocation commerciale par la valeur d'un produit d'unité est maximisé. Le problème à l'étude est un problème de minimisation quasi-convexe. On utilise la dualité quasi-convexe pour obtenir le problème dual et les conditions d'optimalité.

Le vecteur des prix peut être interprété comme un équilibre.

Considérons deux secteurs commerciaux A et B et n produits échangés entre A et B.

L'écoulement des produits de A vers B est noté par un vecteur x avec la convention de signe suivant :

$$\begin{aligned} \cdot x_i &> 0 : x_i \text{ unités de } i^{ème} \text{ produit échangé de } A \text{ à } B. \\ \cdot x_i &< 0 : x_i \text{ unités de } i^{ème} \text{ produit échangé de } B \text{ à } A. \end{aligned}$$

Chaque vecteur x est associée à $f(x)$ la valeur du gain des produits pour B.

Si l'écoulement passe de A à B, le gain $f(x)$ pour B signifie la perte pour A.

Supposons que f est une fonction continue, quasi-concave et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = +\infty$$

Pour un x donné pour compenser la perte $f(x)$ de la valeur de produits pour le secteur A, le directeur du secteur A annonce un vecteur P des prix tel qu'il recoit du secteur B une allocation commerciale :

$$Px = P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n$$

Dans ce cas on donne la convention de signe pour le vecteur P :

$P_i > 0$: A reçoit P_i unités monétaires de B pour une unité du $i^{ème}$produit échangé de A à B

$P_i < 0$: B reçoit $-P_i$ unités monétaires de A pour une unité du $i^{ème}$produit échangé de A à B.

Définition :

Soit P le vecteur des prix défini par :

$$P = (P_1, P_2, ..., P_n)$$

et soit $\mathbb{P}$ un ensemble convexe, fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \in int\ \mathbb{P}$.

On dit que le vecteur des prix P est réalisable si $P \in \mathbb{P}$.

Pour un vecteur des prix P. Le secteur B est intéressé à trouver un vecteur x pour maximiser $f(x)$ sous la contrainte de dépense $Px \leq e$ où $e(e > 0)$ est une limite de niveau de dépense.

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $e = 1$ c'est-à-dire, la contrainte de dépense est écrite sous la forme : $Px \leq 1$.

Le problème de secteur B est écrit sous la forme :

$$\sup_{Px \leq 1} f(x) \tag{P_B}$$

On note par $h(P)$ la valeur maximale de (P_B).

Puisque x est une variable de décision du directeur du secteur B, pour un vecteur donné P des prix, il peut déteminer un produit x sous condition de solubilité, tel que le secteur B gagne le produit de valeur $h(P)$, ou d'une façon équivalente le secteur A perd le produit de valeur $h(P)$.

Maintenant le problème du secteur A est de trouver un vecteur d'équilibre P des prix dans le sens qu'il minimise la fonction de perte $h(P)$ sur l'ensemble $\mathbb{P}$ des vecteurs admissible des prix.

Le problème de secteur A est :

$$\inf_{P\in\mathbb{P}} h(P) \tag{P_A}$$

où h est une fonction quasi-convexe donc le problème (P_A) est un problème de type minimisation quasi-convexe.

Remarque :

1. Dans le cas où $f(x) > 0$ pour $x > 0$, la valeur $h(P)$ est positive et la quantité $\frac{1}{h(P)}$ représente le niveau d'allocation commerciale par une unité de produits.
2. Le problème (P_A) est équivalent au problème de maximisation de $\frac{1}{h(P)}$ c'est-à-dire

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} \frac{1}{h(P)}$$

Définition :

L'ensemble X des vecteurs des produits x qui vérifient la condition de dépense pour tous les vecteurs P des prix de $\mathbb{P}$ est défini par :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : P.x \leq 1, \forall P \in \mathbb{P}\}$$

Le problème dual de (P_A) est défini par :

$$\sup_{x\in X} f(x) \tag{P_A^*}$$

où f est une fonction quasi-concave, donc $(P_A)^*$est un problème de maximisation quasi-concave.

Pour tout $P \in \mathbb{P}$ et $x \in X$ on a : $P.x \leq 1$. Alors

$$h(P) = \sup\{f(y) : P.y \leq 1\} \geq f(x)$$

Donc

$$\inf_{P\in\mathbb{P}} h(P) \geq \sup_{x\in X} f(x) \Leftrightarrow \inf(P_A) \geq \sup(P_A)^* \tag{1}$$

Le vecteur P est le quasi sous différentiel de f en x si

$$f(y) > f(x) \Rightarrow P.y > P.x \tag{2}$$

$$P.x = 1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}(2) \Leftrightarrow\ & P.y > P.x\ \forall y : f(y) > f(x) \\ & \Leftrightarrow P.y \leq P.x \Rightarrow f(y) \leq f(x) \\ & \Leftrightarrow f(y) \leq f(x)\ \forall y\ P.y \leq P.x\end{aligned} \tag{4}$$

D'après (3) et (4), on a :

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \sup\{f(y) : P.y \leq P.x\} \\ &= \sup\{f(y) : P.y \leq 1\} = h(P)\end{aligned}$$

Donc

$$P \in \partial^H f(x) \Rightarrow f(x) = h(P) \text{ et } P.x = 1 \tag{5}$$

.

La condition suffisante pour l'optimalité de $x \in X$ est

$$0 \in \partial^H f(x) - N(x, X) \tag{6}$$

en plus $\partial^H f(x) \cap N(x, X) \neq \emptyset$ et tout vecteur $P \in \partial^H f(x) \cap N(x, X)$ est une solution optimale du problème (P_A) c.à.d

$$\begin{aligned} 0 \in \partial^H f(x) - N(x, X) \quad &\Rightarrow x \in X \text{ est une solution de } (\mathrm{P}_A)^*. \\ P \in \partial^H f(x) \cap N(x, X) \quad &\Rightarrow P \text{ est une solution de } (\mathrm{P}_A).\end{aligned}$$

La condition(6) est satisfaite c'est-à-dire, il existe au moins un vecteur $x \in X$ vérifiant (6).

La dualité forte entre les problèmes (P_A) et $(P_A)^*$est une consequence de la condition (6), on a :

$$\min(P_A) = \max(P_A)^*$$

Soit $x \in X$ où x satisfait la condition (6) et $P \in \partial^H f(x) \cap N(x, X)$, on a :

$$\begin{aligned} P &\in \partial^H f(x) \Rightarrow f(x) = h(P) \text{ et } P.x = 1 \\ P &\in N(x, X) \Rightarrow P.y \leq 1 \ \ \forall y \in X \Rightarrow P \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

. Alors x, P sont admissible, donc x est une solution de $(P_A)^*$et P est une solution de (P_A).

Exemple :

Soient x_1, x_2 deux produits et $x = (x_1, x_2)$ la quantité d'écoulement de deux produits x_1, x_2 de Aà B.

On définit la fonction f comme suit :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } {}_1x_2 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \text{ ou } x_2 \leq 0 \end{cases}$$

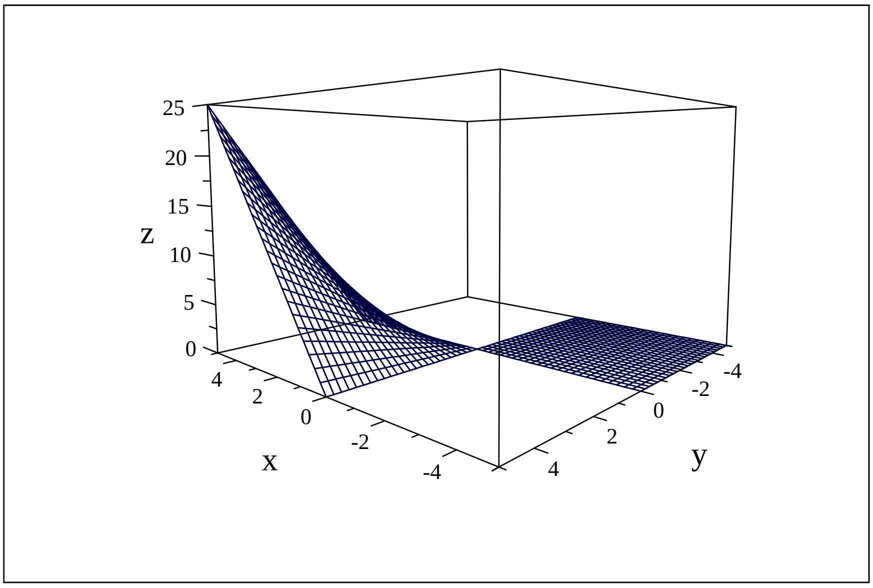

Figure 1 : le graphe de la fonction f

Considérons l'ensemble des prix suivant :

$$\mathbb{P} = \left\{(P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2 : 4P_1^2 + P_2^2 \leq 1\right\}$$

(1)-Pour $P = (P_1, P_2)$ avec $P_1 \leq 0$ ou $P_2 \leq 0$ on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} h(P) &= \sup\{f(x_1, x_2) : P_1x_1 + P_2x_2 \leq 1\} \\ &= \sup\{x_1x_2 : P_1x_1 + P_2x_2 \leq 1\} = +\infty \end{aligned}$$

(2)- Pour $P_1 > 0$ et $P_2 > 0$ on a :

$$\begin{aligned} h(P) &= \sup\{f(x_1, x_2) : P_1x_1 + P_2x_2 \leq 1\} \\ &= \sup\{x_1x_2 : P_1x_1 + P_2x_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1x_1 + P_2x_2 &\leq 1 \Rightarrow (P_1x_1 + P_2x_2)^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow P_1^2x_1^2 + P_2^2x_2^2 + 2P_1P_2x_1x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

On a

$$P_1^2x_1^2 + P_2^2x_2^2 \geq 2P_1P_2x_1x_2 \Rightarrow P_1^2x_1^2 + P_2^2x_2^2 + 2P_1P_2x_1x_2 \geq 4P_1P_2x_1x_2$$

Mais $P_1^2x_1^2 + P_2^2x_2^2 + 2P_1P_2x_1x_2 \leq 1$,alors $x_1x_2 \leq \frac{1}{4P_1P_2}$

Donc

$$\sup\{f(x_1, x_2) : P_1x_1 + P_2x_2 \leq 1\} = \frac{1}{4P_1P_2}$$

$$h(P_1, P_2) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P_1 \leq 0 \text{ ou } P_2 \leq 0 \\ \frac{1}{4P_1P_2} & \text{si } P_1 > 0 \text{ et } P_2 > 0 \end{cases}$$

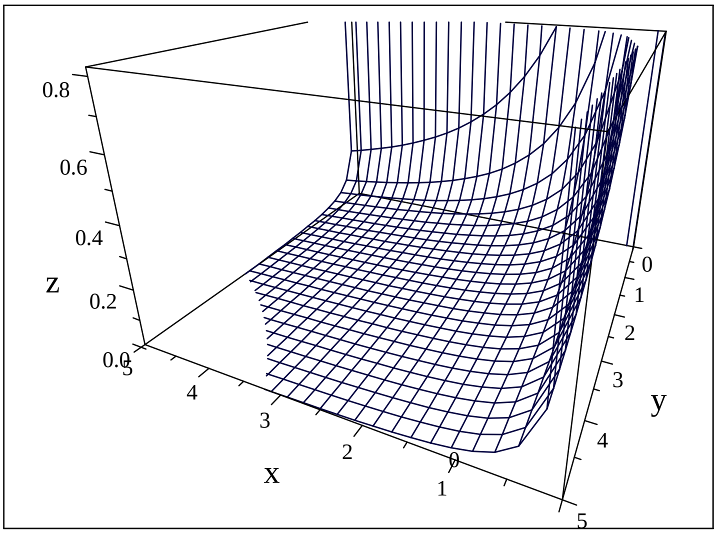

Figure 2 : le graphe de la fonction h

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1,x_2) : P_1x_1 + P_2x_2 \le 1, \forall (P_1,P_2) \in \mathbb{P} \ \} \\ &= \ \{(x_1,x_2) : P_1x_1 + P_2x_2 \le 1, 4P_1^2 + P_2^2 \le 1 \ \} \end{aligned}$$

On a $P_1x_1 + P_2x_2 \le 1 \ \Rightarrow P_1x_1 \le 1 - P_2x_2 \ \Rightarrow P_1^2x_1^2 \le (1-P_2x_2)^2 = 1 + P_2^2x_2^2 - 2P_2x_2$

$$\begin{aligned} &\le 1 + (1-4P_1^2)\, x_2^2 - 2P_2x_2 \\ &= 1 + x_2^2 - 4P_1^2x_2^2 - 2P_2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2P_2x_2 + \left(1-4P_1^2\right) x_2^2 - P_1^2x_1^2 \quad &\ge \quad 0 \\ &\Longrightarrow \quad -2P_2x_2 + \left(1-4P_1^2\right) x_2^2 - P_1^2x_1^2 \ge -1 \\ &\Rightarrow \quad -2P_2x_2 + x_2^2 - 4P_1^2x_2^2 - P_1^2x_1^2 \ge -4P_1^2 - P_2^2 \\ &\Rightarrow \quad -2P_2x_2 + x_2^2 - 4P_1^2x_2^2 - P_1^2x_1^2 + 4P_1^2 + P_2^2 \ge 0 \\ &\Rightarrow \quad -P_1^2\left(x_1^2 + 4x_2^2 - 4\right) + (P_2 - x_2)^2 \ge 0 \\ &\Rightarrow \quad x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \le 0 \Rightarrow x_1^2 + 4x_2^2 \le 4 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x_1,x_2) : P_1x_1 + P_2x_2 \leq 1, 4P_1^2 + P_2^2 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) : x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4 \right\} \end{aligned}$$

Le problème (P) du secteur A est défini par :

$$\inf_{P\in\mathbb{P}} h(P) = \inf_{4P_1^2+P_2^2\leq 1\ P_1>0, P_2>0} \frac{1}{4P_1P_2} \tag{P}$$

Son dual est :

$$\sup_{x\in X} f(x) = \sup_{x\in\left\{(x_1,x_2):x_1^2+4x_2^2\leq 4\ , x_1>0, x_2>0\right\}} x_1x_2 \tag{D}$$

Pour (x_1,x_2) avec $x_1>0, x_2>0$, on a :

$$\begin{aligned} \partial^H f(x_1,x_2) &= \{P=(P_1,P_2) :\ P.x = 1 \text{ et } f(x) = h(P)\} \\ &= \left\{P=(P_1,P_2) :\ P_1x_1+P_2x_2 = 1 \text{ et } x_1x_2 = \frac{1}{4P_1P_2}\right\} \end{aligned}$$

$P_1x_1 + P_2x_2 = 1$ et $x_1x_2 = \frac{1}{4P_1P_2} \Rightarrow P_1P_2 = \frac{1}{4x_1x_2} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2x_1}, P_2 = \frac{1}{2x_2}$ donc $\partial^H f(x_1,x_2) = (P_1,P_2) = \left(\frac{1}{2x_1}, \frac{1}{2x_2}\right)$.

De la condition $0 \in \partial^H f(x_1,x_2) - N((x_1,x_2),X)$ avec

$$x_1>0, x_2>0 \text{ et } x_1^2+4x_2^2 = 4 \tag{1}$$

on trouve

$$2x_1 = \frac{\lambda}{(2x_1)}, 8x_2 = \frac{\lambda}{(2x_2)} \text{ avec } \lambda > 0$$

de (1), on obtient

$$\lambda = 8,\ x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc la solution du problème dual est $x = (x_1,x_2) = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$et on peut calculer la solution du problème primal après utilisation du quasi sous différentiel de f en x où x est la solution du problème dual. Alors $P = (P_1,P_2) = \left(\frac{1}{2x_1}, \frac{1}{2x_2}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exemple :

Si f est une fonction linéaire c'est-à-dire $f(x) = C.x$, $C \neq 0$; on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} h(P) &= \sup\{f(x) : P.x \leq 1\} \\ &= \sup\{C.x : P.x \leq 1\} \end{aligned}$$

Si $P = \theta C, \theta > 0$.

$P.x = \theta c.x \leq 1 \Rightarrow Cx \leq \frac{1}{\theta}$.

Si $P \notin \{\theta C, \theta > 0.\}$ donc $\sup\{C.x : P.x \leq 1\} = +\infty$.

Le problème du secteur A est défini comme suit :

$$\inf_{P=\theta C \in \mathbb{P}} h(P) = \inf_{P=\theta C \in \mathbb{P}} \frac{1}{\theta}$$

Donc si f est une fonction linéaire avec un vecteur C des coefficients linéaire , le vecteur optimal des prix est proportionnel à C.

Dans le cas général où f est une fonction non linéaire, pour trouver le vecteur optimal des prix , nous vérifions la condition $0 \in \partial^H f(x) - N(x, X)$ pour le problème dual $(P_A)^*$.

Le vecteur P est une solution optimal du problème primal (P_A) s'il est dans l'intersection de l'ensemble des quasi sous différentiels et du cône normal à la solution du problème dual c'est-à-dire $P \in \partial^H f(x) \cap N(x, X)$ où x est la solution optimale du problème dual.

Conclusion.

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude de la dualité quasi convexe de trois types de problèmes d'optimisation.

En utilisant les concepts et les propriétés des quasi conjuguées et quasi sous différentiels pour déterminer les conditions d'optimalité et la dualité de type Fenchel de ces trois types de problèmes :

(1)- Minimisation d'une fonction quasi convexe sur une partie convexe, compacte(MIQC).

(2)- Minimisation d'une fonction quasi convexe sur un complèment d'une partie convexe(MIQCC).

(3)- Maximisation d'une fonction quasi convexe sur une partie compacte(MAQC).

Nous remarquons la stabilité de la dualité utilisée (i.e. la coïncidence entre le problème primal et dual.) et la dualité symétrique entre le problème (MAQC) et (MIQCC).

Nous pensons qu'un effort considérable doit être porté d'un côté sur l'utilisation des conditions d'optimalité globale, comme critère d'arrêt dans certains algorithmes et.d'un autre côté par la construction et le développement des algorithmes de type primal-dual qui nous dirigera à résoudre le problème primal et dual en parallèle,

Bibliographie

[1] **D.Azé ;** Elements d'analyse convexe et variationnelle. ellipses, Paris **(1997)**.

[2] **F.B.Akoa ;** *Approches de points intérieurs et de la programmation DC en optimisation non convexe. Thèse de doctorat préparée au laboratoire de mathématiques de l'institut National des sciences Appliquées de ROUEN* **(2005)**.

[3] **M.ATTEIA** et **A.ALQuortobi ;** *Quasiconvex duality in optimization and optimal control. Lecture notes in control and information science, V30, Springer Verlag Berlin* **(1981)**.

[4] **J.P.CROUZEIX ;** *Contribution à l'étude des fonctions quasi convexes. Thèse de doctorat (Ph). Université de Clermond-Ferrand 2, France* **(1977)**.

[5] **J.P.CROUZEIX ;** *Polaires quasi convexes et dualité. Compte rendus de l'académie des sciences de Paris, V 279, PP 955-958* **(1974)**.

[6] **J.P.CROUZEIX, Cust** et **Limos ;** *Continuity and differentiability of quasi convex functions. Proceedings of the 6 thinternational symposium.on generalized conexity and generalized monotonicity, Samos(Greece) PP 121-149* **(1999)**.

[7] **A.CHARKI et M.Volle ;** *Complément de dualité quasi convexe. Ann. Sci.Math. Quèbec 23, N 2,PP 119-137* **(1999)**.

[8] **D.Eppstein ;** *Quasiconvex programming. Publication 52, uniersité de Californie PP 287-331* **(2004)**.

[9] **R.ENKHBAT** et **T.IBARAKI ;** *On maximization and minimization of a quasi-convex function. Journal of global optimization, V 36, N 3 PP 379-389* **(2006)**.

[10] **J.B.G.Frenk** et **Kassay ;** *Introduction to convex and quasiconvex analysis. Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity, non convex optimization and its Applications. Erasmus University Rotterdam, V76* **(2001)**.

[11] **J.A.Ferland ;** *Quasiconvexity and pseudoconvexity of functions on nonnegative orthant. Journal of optimization theory and applications PP 169-181* **(1980)**.

[12] **A.Kheraghel ;** Elements d'analyse convexe (dans $\mathbb{R}^n$). Théorie fondamentale et exercice. Edition université de Sétif **(2001)**.

[13] **N.Meddouer ;** *Contribution à l'étude des problèmes d'optimisation avec des données quadratiques. Thèse de Magister présentée au département de mathématiques, Université de Constantine* **(2003)**.

[14] **T.R.Rockafellar ;** Convex analysis. Princeton, New Jersey Princeton University Press **(1970)**.

[15] **S.Ruibi ;** *Dualité de Fenchel en optimisation non convexe. Thèse de Magister présentée au département de mathématiques, Université de Batna* **(2003)**.

[16] **P.T.TACH ;** *A non convex duality with a zero gap and application. SIAM. J. Optimization, V14,N1, PP 44-64* **(1994)**.

[17] **P.T.TACH ;** *Global optimality criterion and a duality with a zero gap in nonconvex optimization problems. SIAM. J. Math. Anal ; PP 1537-1556 ; 24* **(1994)**.

[18] **P.T.TACH ;** *Quasi conjugates of functions, duality relationship between quasiconvex minimization under a reverse convex constraint and quasiconvex maximization under a convex constraint ; and application. J. Math. Anal ; PP 299-322, 159* **(1991)**.

[19] **P.T.TACH ;** *Equilibrium prices and quasiconvex duality. Proceedings of the 7 th international sympsium on generalized conexity and generalized monotonicity, Hanoi, vietnam* **(2002)**.

[20] **P.T.TACH ;** *Ageneralized duality and applications. J. Global optimization, PP 311-324, 3* **(1993)**.

[21] **J.Tind ;** *Bloking and anti bloking sets. Math programming, PP 157-166, 6* **(1974)**.

Abstract

The objective of this work is to study the **quasi-convex** duality for three types of optimization problems. We use the concepts and the properties of **quasi-convexity**, **quasi-conjugate** and **quasi- subdifferentials** of a function defined on $\mathbb{R}^n$ whose values are in $\overline{\mathbb{R}}$, to study the optimality conditions and stability of **Fenchel** duality type. We present some illustrative examples and an application problem in economy.

Key words

Non convex optimization, **quasi-convex** programming , **quasi-convex** duality, optimality conditions.