

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BATNA 2- Mostefa Ben Boulaïd

Faculté de Mathématiques-Informatique
Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option : Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs

Par

WARDA MERAHI

THÈME

Étude de systèmes linéaires par inversion généralisée

Soutenue le : 10/07/2019

Devant le jury composé de :

Président :	A. Seddik	Prof.	Univ. Batna2
Rapporteur :	S. Guedjiba	Prof.	Univ. Batna2
Examineur :	A. Mennouni	Prof	Univ. Batna2
Examineur :	S. Menkad	MCA	Univ. Batna2
Examineur :	H. Zekraoui	Prof	Univ. Oum El Bouaghi
Examineur :	S. Guerarra	MCA	Univ. Oum El Bouaghi

À MES PARENTS

À MA GRAND-MÈRE

À MES FRÈRES

À MES SOEURS

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à remercier mon directeur de thèse, le Professeur : S. Guedjiba, pour son soutien permanent durant ces années de travail sous sa direction, c'est un grand plaisir pour moi de l'exprimer mes très vifs remerciements d'avoir accepté de diriger ce travail.

Je remercie très sincèrement le Professeur : A. Seddik qui a accepté d'examiner cette thèse et de présider le jury de soutenance.

Je tiens aussi à remercier les membres du Jury pour m'avoir donné l'occasion de discuter ce travail.

Table des matières

Introduction	5
Notations	8
1 Préliminaires	10
1.1 Les matrices	10
1.1.1 Définitions et propriétés	10
1.1.2 Inversibilité	12
1.1.3 Opérations élémentaires	12
1.1.4 Image, noyau et rang d'une matrice	13
1.1.5 Factorisation à rang complet	14
1.1.6 Idempotent	15
1.1.7 Congruence et inertie	15
1.1.8 Complément de Schur	16
1.1.9 Opérations élémentaires sur les matrices partitionnées	16
1.2 Transformations linéaires	17
1.2.1 Concepts de base	17
1.2.2 Transformation linéaire associée à une matrice	18
1.3 Systèmes d'équations linéaires et l'inverse de Moore-Penrose	18
1.3.1 Systèmes d'équations linéaires	18
1.3.2 L'inverse de Moore-Penrose	19
1.3.3 Propriétés principales de l'inverse de Moore-Penrose	21
1.4 Formules de base du rang pour l'inverse de Moore-Penrose	21
1.5 L'équation matricielle $AXB = C$	25
1.5.1 La solution générale de l'équation matricielle $AXB = C$	25
1.5.2 Solution à norme minimale et à rang minimal de l'équation $AXB = C$	26
2 Quelques propriétés des solutions hermitiennes communes des équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$	29
2.1 Introduction	29
2.2 propriétés des solutions communes des équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$	31

2.3	Le rang de sous-matrices dans une solution hermitienne commune des équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$	36
3	Caractérisation de formes spéciales de solutions hermitiennes et communes hermitiennes d'équations matricielles $A_1X_1A_1^* = B_1$ et $A_2X_2A_2^* = B_2$	45
3.1	Introduction	45
3.2	Caractérisation de formes spéciales de solutions hermitiennes et communes hermitiennes des équations matricielles $A_1X_1A_1^* = B_1$ et $A_2X_2A_2^* = B_2$. .	46
4	Sur la décomposition additive de la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$ et $AXA^* = B$	59
4.1	Introduction	59
4.2	Sur la décomposition additive de la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$	60
4.3	Sur la décomposition additive de la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXA^* = B$	74
	Bibliographie	82

Introduction

Beaucoup de problèmes mathématiques révélant de différents domaines tels que l'algèbre, l'analyse numérique, la théorie spectrale..., sont posés d'une manière où leur solution fait intervenir la notion d'inversibilité.

l'un de ces problèmes est la résolution des systèmes d'équations linéaires du type $Ax = b$, où A est une transformation linéaire donnée, dans notre situation A représente une matrice de type $m \times n$.

Il est bien connu que si A est une matrice carrée inversible (non singulière), il existe une matrice unique notée A^{-1} , appelée inverse de A , telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, où I est la matrice identité. Si A^{-1} existe alors le système d'équations linéaires $Ax = b$ a une solution unique, $x = A^{-1}b$. D'autre part, dans de nombreux cas, les solutions d'un système d'équations linéaires existent même lorsque l'inverse de la matrice définissant ces équations n'existe pas. De plus, dans le cas où les équations ne sont pas consistantes, on s'intéresse souvent aux solutions des moindres carrés, d'où la nécessité de définir une matrice possédant des propriétés proches de celle de A^{-1} , quant celui ci n'existe pas.

E. H. Moore en 1920 a généralisé la notion d'inversibilité aux matrices singulières, ou même rectangulaires. La définition de Moore de l'inverse généralisé d'une matrice de type $m \times n$ équivaut à l'existence d'une matrice G de type $n \times m$ telle que $AG = P_A$ et $GA = P_G$, où P_X est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(X)$. En 1955, R. Penrose a montré qu'il existe une matrice unique X satisfaisant les quatre équations :

$$\begin{cases} AXA = A & (1) \\ XAX = X & (2) \\ (AX)^* = AX & (3) \\ (XA)^* = XA & (4) \end{cases}$$

La matrice unique X qui satisfait ces équations est appelée l'inverse de Moore-Penrose, et est notée A^+ , une matrice X qui satisfait la première équation ci-dessus s'appelle un inverse intérieur de A et est souvent désigné par A^- . Penrose a également montré en 1956 que le vecteur A^+y minimise $\|(Ax - y)\|^2 = (Ax - y)^*(Ax - y)$ et a la plus petite norme (euclidienne) parmi tous les vecteurs qui minimisent cette quantité. (Bjerhammar [2], Penrose [22]) ont montré que si X est une matrice quelconque satisfaisant $AXA = A$, alors $Ax = b$ possède une solution si et seulement si $AXb = b$, dans ce cas la solution générale est $x = Xb + (I - XA)y$, où y est arbitraire de type approprié.

On signale que AA^+ et A^+A sont des projections orthogonales sur $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(A^*)$ respectivement, nous utilisons E_A et F_A pour représenter les deux projecteurs $E_A = I - AA^+$ et $F_A = I - A^+A$ induits par A . Concernant diverses propriétés de base d'inverses de Moore-Penrose de matrices, voir par exemple Ben-Israel et Greville [1], M. Z. Nashed [21], Campbell et Meyer. [3] et Rao et Mitra [24].

Comme la résolution d'équations matricielles est l'un des problèmes principaux de la théorie des matrices, l'une des équations linéaires les plus connues est l'équation matricielle

$$AXB = C \quad (1)$$

où A , B et C sont connues et X est inconnue.

De nombreux travaux sur cette équation et ses applications peuvent être trouvés dans la littérature, et en particulier Penrose [22].

Si l'équation matricielle (1) n'est pas consistante, les chercheurs essaient souvent de trouver ses solutions approximatives selon diverses méthodes, on cite ici :

- (1) la solution à moindres carrés, définie comme une matrice X qui minimise la norme de la différence $AXB - C$, c'est-à-dire $\|AXB - C\|_F = \min$,
- (2) la solution à rang minimal, définie comme étant une matrice X minimisant le rang de la différence $AXB - C$, c'est-à-dire $r(AXB - C) = \min$.

Le rang et l'inertie d'une matrice sont deux concepts de base de la théorie des matrices pour décrire la dimension de l'espace vectoriel de lignes ou de colonnes, et la distribution des signes des valeurs propres de la matrice. Ces deux notions sont bien comprises et faciles à manipuler par les opérations élémentaires de matrice ou de congruences. Ces deux quantités jouent un rôle essentiel dans la caractérisation des propriétés algébriques des matrices hermitiennes. En réalité, les rangs et les inerties des matrices hermitiennes ont été les principaux objets d'étude de la théorie des matrices et de leurs applications. Certaines recherches sur les rangs et les inerties des matrices hermitiennes et leurs applications peuvent être trouvées dans [5], [10], [13].

L'équation matricielle $AXA^* = B$ est apparu fréquemment dans la théorie des matrices et ses applications, et a été étudiée par plusieurs auteurs depuis 1970. Par exemple, Khatri et Mitra [12] ont établi les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette équation ait une solution hermitienne, et ont donné sa solution hermitienne générale par des inverses généralisés de matrices.

La thèse se compose de quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à rappeler quelques notions de base concernant les matrices et l'inverse de Moore-Penrose et ses propriétés

Dans le deuxième chapitre nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la paire d'équation matricielle $A_1X_1A_1^* = B_1$ et $A_2X_2A_2^* = B_2$ ait une solution

hermitienne commune sous la forme $\frac{X_1 + X_2}{2}$, où X_1 et X_2 sont les solutions hermitiennes des équations $A_1 X A_1^* = B_1$ et $A_2 X A_2^* = B_2$ respectivement, et nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les sous-matrices d'une solution hermitienne commune de l'équation (2.4) aient une forme spéciale.

Dans le troisième chapitre nous donnons quelques formules pour les rangs maximal et minimal de $A \pm D_1 X_1 D_1^* \pm D_2 X_2 D_2^*$ soumis aux solutions hermitiennes d'une équation matricielle consistante $A_1 X_1 A_1^* = B_1$ et $A_2 X_2 A_2^* = B_2$, à partir de ces formules, nous établissons des caractérisations de certaines classes de solutions des équations données, et nous dérivons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution hermitienne commune de la paire d'équations matricielles $A_1 X_1 A_1^* = B_1$ et $A_2 X_2 A_2^* = B_2$ et nous donnons deux formes spéciales pour cette solution impliquant les sous-matrices dans une solution hermitienne des équations $A_1 X_1 A_1^* = B_1$ et $A_2 X_2 A_2^* = B_2$.

Enfin dans le quatrième chapitre, nous étudions la décomposition additive

$$X = X_1 + X_2, \quad (2)$$

pour les solutions à rang minimal des trois équations matricielles de $A X B = C$, $A_1 X_1 B_1 = C_1$ et $A_2 X_2 B_2 = C_2$. Comme applications, nous dérivons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la décomposition additive

$$C^- = A^- + B^- \quad (3)$$

soit possible, où A^- , B^- et C^- sont des inverses intérieurs à rang minimal de A , B et C respectivement. Ainsi que les décompositions de solutions à rang minimal d'équation matricielle $A X B = C$ en sommes de solutions de

$$A_1 X_1 B_1 = C_{11}, \quad A_1 X_2 B_2 = C_{12}, \quad A_2 X_3 B_1 = C_{21}, \quad A_2 X_4 B_2 = C_{22},$$

où $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $B = (B_1, B_2)$ et $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$.

Dans ce travail nous étudions aussi différents types de solutions de certaines équations matricielles et en particulier les équations $A X B = C$ et $A X A^* = B$.

Notations

On désigne par

- (1) \mathbb{K} le corps des nombres réels ou complexes.
- (2) $\mathbb{C}^{m \times n}$ l'espace des matrices du type $m \times n$ sur \mathbb{C} .
- (3) $\mathbb{R}^{m \times n}$ l'espace des matrices du type $m \times n$ sur \mathbb{R} .
- (4) \mathbb{K}^n l'espace des matrices carrés d'ordre n sur \mathbb{K} .
- (5) \mathbb{K}_H^n l'espace des matrices hermitiennes d'ordre n sur \mathbb{K} .
- (6) I_n la matrice identique d'ordre n .
- (7) A^{-1} l'inverse de A .
- (8) A^+ l'inverse de Moore-Penrose de A .
- (9) $E_A = I - AA^+$ la projection orthogonale sur $\mathcal{N}(A)$.
- (10) $F_A = I - A^+A$ la projection orthogonale sur $\mathcal{N}(A)^*$.
- (11) A^T la transposée de A .
- (12) A^* l'adjoint de A .
- (13) $\mathcal{R}(A)$ l'image de A .
- (14) $\mathcal{N}(A)$ le noyau de A .
- (15) $r(A)$ le rang de A .
- (16) $In(A)$ l'inertie de A .
- (17) $i_+(A)$ le nombre de valeurs propres positives de A .
- (18) $i_-(A)$ le nombre de valeurs propres négatives de A .

(19) $i_0(A)$ le nombre de valeurs propres nulles de A .

(20) $\|A\|_F$ la norme de Frobinius.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit quelques notions de base de l'algèbre linéaire qui joueront un rôle essentiel dans ce travail. Pour une lecture détaillée sur ces notions on renvoie le lecteur à [39] et [11].

1.1 Les matrices

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1. On appelle matrice A de type $m \times n$ sur le corps \mathbb{K} un tableau à m lignes et n colonnes d'entrées en \mathbb{K} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

et on écrit $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, si $m = n$ on dit que A est une matrice carrée.

On note par $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de type $m \times n$ sur le corps \mathbb{K} . La transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $m \times n$ est la matrice de type $n \times m$ notée par A^T telle que $A^T = (a_{ji})$, et la conjuguée de la matrice A est une matrice de même type de A symbolisée par \bar{A} , dont $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$. On note la transposée de la conjuguée d'une matrice A par A^* .

La matrice identité I_n est une matrice de type $n \times n$ avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs, Une matrice scalaire est un multiple de I_n , et une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls.

Définition 1.1.2. Une matrice carré A est dite

1. diagonale si $a_{ij} = 0, i \neq j$,
2. symétrique si $A^T = A$,
3. hermitienne (auto-adjointe) si $A^* = A$,

4. antihermitienne si $A^* = -A$,
5. normale si $A^*A = AA^*$,
6. unitaire si $A^*A = AA^* = I$,
7. orthogonale si $A^T A = AA^T = I$.

Propriété 1.1.3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, soient A et B des matrices sur \mathbb{K} , une fois que les opérations somme et produit sont possibles on a :

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$,
5. $(A^*)^* = A$,
6. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
7. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$,
8. $(AB)^* = B^* A^*$.

Définition 1.1.4. On appelle matrice partitionnée ou matrice en blocs une matrice dont les entrées sont des matrices de types appropriées

Exemple 1.1.5. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 8 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

peut être partitionnée en quatre blocs

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, P_{21} = (1, 2), P_{22} = (0, 5).$$

On peut alors écrire la matrice en bloc comme :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}.$$

P_{11}, P_{12}, P_{21} et P_{22} sont dites sous matrices.

Norme de Frobenius

Définition 1.1.6. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, on définit la norme matricielle de Frobenius notée $\|A\|_F$ par

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace} A^* A}.$$

1.1.2 Inversibilité

Définition 1.1.7. Une matrice carrée $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est dite inversible ou non singulière s'il existe une matrice B d'ordre n telle que :

$$AB = BA = I_n,$$

appelée matrice inverse de A et notée $B = A^{-1}$.

Proposition 1.1.8. 1. Si A est inversible alors son inverse est unique.

2. Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Si A est inversible alors A^T et A^* sont inversibles, de plus $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Théorème 1.1.9. Les assertions suivantes sont équivalentes pour $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

1. A est inversible tel que $A^{-1} = B$.

2. $AB = I_n$.

3. $BA = I_n$.

4. Les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants.

5. Les vecteurs lignes de A sont linéairement indépendants.

Définition 1.1.10. Si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, alors on dit que A est inversible à droite (gauche) s'il existe $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ tel que $AB = I_m$ ($BA = I_n$).

1.1.3 Opérations élémentaires

Définition 1.1.11. Les opérations élémentaires sur une matrice sont des opérations de types suivants :

1. Ajouter à une ligne (colonne) un multiple d'une ligne (colonne) .

2. Permuter deux lignes (colonnes) différentes.

3. Multiplier une ligne (colonne) par un scalaire différent de zéro.

Définition 1.1.12. Une matrice élémentaire est une matrice carrée obtenue en effectuant une opération de ligne sur une matrice identité.

Proposition 1.1.13. Une matrice élémentaire est une matrice inversible.

1.1.4 Image, noyau et rang d'une matrice

Définition 1.1.14. Si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, alors l'image de A , noté par $\mathcal{R}(A)$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de colonnes de A . Si $A = [m_1, m_2 \dots m_n]$, alors $\mathcal{R}(A) = \text{Vect}(m_1, m_2 \dots m_n)$. L'image de A est appelée aussi l'espace de colonnes de A .

L'espace de lignes de A , noté $RS(A)$, est l'ensemble de toutes combinaisons linéaires de lignes de A . Si $A = [v_1, v_2 \dots v_m]^T$, alors $RS(A) = \text{Vect}(v_1, v_2 \dots v_m)$.

Définition 1.1.15. Le noyau de A , noté par $\mathcal{N}(A)$, est l'ensemble de toutes solutions de l'équation $Ax = 0$.

Définition 1.1.16. Le rang d'une matrice A est la dimension de $\mathcal{R}(A)$:

$$r(A) = \dim \mathcal{R}(A),$$

c'est aussi le nombre de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Théorème 1.1.17. (Théorème de la dimension) Pour toute $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$\begin{aligned} n &= r(A) + \dim \mathcal{N}(A), \\ m &= \dim(RS(A)) + \dim \mathcal{N}(A^T). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.18. Soit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. $r(A) = k$,
2. $\dim RS(A) = k$,
3. Le plus grand nombre de colonnes linéairement indépendantes de A est k ,
4. Le plus grand nombre de lignes linéairement indépendantes de A est k .

Proposition 1.1.19. 1. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est inversible si et seulement si $r(A) = n$.

2. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ est inversible à droite si et seulement si $r(A) = m$.
3. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ est inversible à gauche si et seulement si $r(A) = n$.

Proposition 1.1.20. (Inégalités des rangs) supposons que $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ alors

1. $r(A) \leq \min\{m, n\}$,
2. Si une nouvelle matrice B est obtenue en supprimant des lignes et / ou des colonnes de la matrice A , alors $r(B) \leq r(A)$,
3. $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$,
4. Si $A \in \mathbb{K}^{m \times k}$ et $B \in \mathbb{K}^{k \times n}$ alors

$$r(A) + r(B) - k \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

Proposition 1.1.21. (Égalités des rangs)

1. Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, alors $r(A^*) = r(A^T) = r(\bar{A}) = r(A)$,

2. Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, alors $r(A^*A) = r(A)$. Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors $r(A^T A) = r(A)$,
 3. Soient A, B deux matrices de types appropriés, telles que A soit inversible à gauche et B soit inversible à droite. Alors pour toute matrice $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$ on a :

$$r(M) = r(AM) = r(MB) = r(AMB),$$

4. Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ alors $r(A) = r(A_1) + \dots + r(A_k)$.

Définition 1.1.22. $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sont dites équivalentes si $B = C_1^{-1}AC_2$ pour certaines matrices inversibles $C_1 \in \mathbb{K}^{m \times m}$ et $C_2 \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Définition 1.1.23. $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sont dites similaires si $B = C^{-1}AC$ pour une certaine matrice inversible $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Proposition 1.1.24. A et B sont équivalentes si et seulement si $r(A) = r(B)$.

1.1.5 Factorisation à rang complet

Théorème 1.1.25. Une matrice A de type $m \times n$ sur \mathbb{K} et de rang $r > 0$ peut être écrite sous la forme d'un produit $A = EG$, où E est une matrice inversible à gauche et G est inversible à droite et,

$$r(A) = r(E) = r(G) = r.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tel que $r(A) = r$, on désigne par a_1, a_2, \dots, a_n les colonnes de A , alors il existe au moins un ensemble de r colonnes de A linéairement indépendantes. Soit $J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ un ensemble d'indices pour lesquels a_{j_1}, \dots, a_{j_r} sont inéairement indépendantes, et soit la matrice $E \in \mathbb{K}^{m \times r}$ se forme par les colonnes a_{j_1}, \dots, a_{j_r} , c-à-d $E = (a_{j_1}, \dots, a_{j_r})$, si $r = n$ alors $A = E$ est une factorisation à rang complet triviale avec $G = I$.

Supposons que $r < n$, alors pour chaque colonne $a_j, j \notin J$ il existe une colonne $y_j \in \mathbb{K}^{r \times 1}$ tel que $a_j = Ey_j$. Alors la matrice $G \in \mathbb{K}^{r \times n}$ se forme par les colonnes g_1, \dots, g_n définies par

$$g_j = \begin{cases} y_j & \text{si } j \notin J \\ e_i & \text{si } j = j_i \in J \end{cases},$$

tels que pour $i = 1, \dots, r$, $e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ri})^T$, où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Pour cette matrice G nous avons alors

$$EG = (a_1, \dots, a_n) = A.$$

Il est clair que $r(A) = r(EG) \leq r(E) = r$, alors $r(A) = r(E) = r(G) = r$, $A = EG$ est une factorisation à rang complet de A . \square

Proposition 1.1.26. *La factorisation à rang complet d'une matrice A n'est pas unique.*

Démonstration. si $A = EG$ est une factorisation à rang complet de A , et M est une matrice inversible d'ordre r , alors $A = EMM^{-1}G = (EM)(M^{-1}G)$ une autre factorisation à rang complet de A . \square

1.1.6 Idempotent

Définition 1.1.27. *On dit que $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est un idempotent (projecteur) si $A^2 = A$, si en plus $A = A^*$ alors A est dit projecteur orthogonal.*

Proposition 1.1.28. (a) *Tout idempotent $\neq I_n$ est non inversible.*

(b) *Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *A est un idempotent,*
2. *$I - A$ est un idempotent,*
3. *$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(I - A)$,*
4. *Si $v \in \mathcal{R}(A)$, alors $Av = v$,*
5. *$\mathbb{K}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$,*
6. *A est similaire à $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $k = r(A)$.*

1.1.7 Congruence et inertie

Définition 1.1.29. *un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Le vecteur x est le vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ .*

Matrices congruentes

Définition 1.1.30. *Deux matrices $A, B \in \mathbb{K}_H^n$ sont *congruentes s'il existe une matrice inversible $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $B = C^*AC$, (ou $B = C^TAC$).*

Définition 1.1.31. *Soit $A \in \mathbb{K}_H^n$, L'inertie de A est le triple $In(A) = (i_+(A), i_-(A), i_0(A))$, où $i_+(A)$ est le nombre de valeurs propres positives de A , $i_-(A)$ est le nombre de valeurs propres négatives de A , et $i_0(A)$ est le nombre de valeurs propres nulles de A .*

Proposition 1.1.32. *Soit $A \in \mathbb{K}_H^n$, $r(A) = i_+(A) + i_-(A)$.*

Proposition 1.1.33. *(Loi de Sylvester sur l'inertie)*

*Soit $A, B \in \mathbb{K}_H^n$, A et B sont *congruentes si et seulement si elles ont la même inertie.*

Définition 1.1.34. *On appelle opération élémentaire de congruence sur une matrice hermitienne, les opérations suivantes :*

1. Permuter $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes, en même temps permuter $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de la matrice hermitienne.
2. Multiplier $i^{\text{ème}}$ ligne par une matrice inversible P à gauche, en même temps multiplier $i^{\text{ème}}$ colonne par P^* à droite dans la matrice hermitienne.
3. Ajouter $i^{\text{ème}}$ ligne multiplié par une matrice P à gauche au $j^{\text{ème}}$ ligne, en même temps ajouter $i^{\text{ème}}$ colonne multiplié par P^* à droite au $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice hermitienne.

1.1.8 Complément de Schur

Définition 1.1.35. Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ tel que A_{11} est inversible. Le complément de Schur de A_{11} dans A est la matrice $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, noté par A/A_{11} .

Proposition 1.1.36.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ tel que A_{11} soit inversible. Alors $r(A) = r(A_{11}) + r(A/A_{11})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, tel que $A_{11} \in \mathbb{K}^p$ soit inversible. Alors $r(A) = p$ si et seulement si $A/A_{11} = 0$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$ est hermitienne, tel que A_{11} soit inversible. Alors $In(A) = In(A_{11}) + In(A/A_{11})$.

Démonstration. (3), supposons que $A \in \mathbb{K}_H^n$ et $A_{11} \in \mathbb{K}_H^p$ est inversible.

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} I_p & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$Q^*AQ = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A/A_{11} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$In(A) = In \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A/A_{11} \end{pmatrix} = In(A_{11}) + In(A/A_{11}).$$

□

1.1.9 Opérations élémentaires sur les matrices partitionnées

Les opérations élémentaires et les opérations élémentaires de congruence sur les matrices jouent un rôle important dans l'algèbre linéaire. Ces opérations peuvent être généralisées aux matrices partitionnées comme suit.

(a) Les opérations élémentaires sur les matrices partitionnées

1. Permuter deux blocs lignes (colonnes).
 2. Multiplier un bloc ligne (colonne) à gauche (droite) par une matrice non singulière de taille appropriée.
 3. Ajouter à un bloc ligne (colonne) un autre bloc ligne (colonne) multiplié par une matrice appropriée à gauche (droite).
- (b) Les opérations élémentaires de congruence sur les matrices partitionnées :
1. Interchange $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ blocs lignes, en même temps, échange $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ blocs colonnes de la matrice hermitienne en blocs.
 2. Multiplier $i^{\text{ème}}$ bloc ligne par une matrice inversible P à gauche, en même temps, multiplier $i^{\text{ème}}$ bloc colonne par P^* à droite dans la matrice hermitienne en blocs.
 3. Ajouter $i^{\text{ème}}$ bloc ligne multiplié par une matrice P à gauche au $j^{\text{ème}}$ bloc ligne, en même temps, ajouter $i^{\text{ème}}$ bloc colonne multiplié par P^* de la droite au $j^{\text{ème}}$ bloc colonne de la matrice hermitienne en blocs.

1.2 Transformations linéaires

1.2.1 Concepts de base

Définition 1.2.1. Soient V et W deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} , l'application $\mathcal{A} : V \mapsto W$ est appelée une transformation linéaire de V dans W si pour tous $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v),$$

et

$$\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}(u).$$

Exemple 1.2.2. Soit $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, définie par

$$\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Définition 1.2.3. Soit \mathcal{A} une transformation linéaire de V dans W , Le sous-ensemble,

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(v) : v \in V\},$$

est un sous-espace de W , appelé l'image de \mathcal{A} , et le sous-ensemble,

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{v \in V : \mathcal{A}(v) = 0 \in W\},$$

est un sous-espace de V , appelé le noyau de \mathcal{A} .

Théorème 1.2.4. *Soit \mathcal{A} une transformation linéaire d'un espace vectoriel V de dimension n dans un espace vectoriel W . Alors*

$$\dim\mathcal{R}(\mathcal{A}) + \dim\mathcal{N}(\mathcal{A}) = n.$$

Définition 1.2.5. *Soit \mathcal{A} une transformation linéaire d'un espace vectoriel V de dimension n à un espace vectoriel W . Alors*

1. *\mathcal{A} est injective si $v_1 \neq v_2 \Rightarrow \mathcal{A}(v_1) \neq \mathcal{A}(v_2)$,*
2. *\mathcal{A} est surjective si pour tout $w \in W$ il existe $v \in V$ tel que $\mathcal{A}(v) = w$,*
3. *\mathcal{A} est bijective si elle est injective et surjective.*

1.2.2 Transformation linéaire associée à une matrice

À chaque transformation linéaire on peut associer une matrice sur des bases données, par exemple,

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2)^T \longmapsto \mathcal{A}(x_1, x_2)^T = (3x_1, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2)^T,$$

est une transformation linéaire, Nous pouvons écrire

$$\mathcal{A}(x) = Ax,$$

tel que

$$x = (x_1, x_2)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, à chaque matrice on peut associer une transformation linéaire.

1.3 Systèmes d'équations linéaires et l'inverse de Moore-Penrose

1.3.1 Systèmes d'équations linéaires

Définition 1.3.1. *Un système d'équations linéaires, est un ensemble d'une ou plusieurs équations linéaires dans les mêmes variables, telles que*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mp}x_p = b_m \end{cases}$$

Une solution du système est un p -tuple (c_1, \dots, c_p) . Si $b_j = 0$ pour tous j , le système est homogène.

Un système est consistant s'il existe au moins une solution, sinon le système est inconsistent.

Il est habituel d'identifier le système d'équations linéaires avec l'équation matricielle $Ax =$

$$b, \text{ tels que } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.3.2. Soit $Ax = b$ un système linéaire, où $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$. Alors

1. Un système homogène est toujours consistant (le vecteur nul 0 en est toujours solution),
2. Le système $Ax = b$ est consistant si et seulement si $r(A, b) = r(A)$, c'est-à-dire $b \in \mathcal{R}(A)$.

1.3.2 L'inverse de Moore-Penrose

Le concept de l'inverse généralisé trouve ses racines dans le problème central de l'algèbre linéaire : la résolution de systèmes d'équations linéaires. Considérons un tel système

$$Ax = b,$$

tel que $A \in \mathbb{K}^{r \times r}$ et $r(A) = r$. Alors $x = A^{-1}b$ est la solution unique. Mais que se passe-t-il si A^{-1} n'existe pas, ou A n'est pas carrée ?

Notez que, pour toute matrice A , si nous pouvons trouver une autre matrice B telle que $ABA = A$, alors Bb sera une solution de $Ax = b$, si une solution existe.

supposons que $Ax = b$. Alors $BAx = Bb$ donc $b = Ax = ABAx = A(Bb)$. si A est une matrice inversible alors $B = A^{-1}$. La matrice B s'appelle un inverse généralisé de A et n'est pas nécessairement unique. Le premier travail publié sur les inverses généralisés remonte à Moore [20]. Cependant, ce n'est qu'en 1955 que la théorie se développe, lorsque Penrose [22] définit un inverse généralisé déterminé uniquement pour toute matrice A .

Pour des raisons évidentes, l'inverse généralisé est appelé l'inverse de Moore-Penrose et noté par A^+ .

Définition 1.3.3. Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Alors A^+ est la matrice unique dans $\mathbb{C}^{n \times m}$ telle que

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,
3. $(AA^+)^* = AA^+$,
4. $(A^+A)^* = A^+A$.

Si A est inversible (non singulière), la matrice A^{-1} satisfait trivialement les quatre équations de la définition 1.3.3, alors l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice inversible est l'inverse ordinaire.

D'après les équations (3) et (4), AA^+ et A^+A sont des projections orthogonales sur $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(A^*)$ respectivement, nous utilisons E_A et F_A pour représenter les deux projecteurs $E_A = I - AA^+$ et $F_A = I - A^+A$.

Théorème 1.3.4. *Pour tout $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, A^+ existe et est unique.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ la transformation linéaire associée à A . pour la décomposition $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A}^*)$ on a $\mathcal{A}|_{\mathcal{R}(\mathcal{A}^*)}$ est une transformation linéaire inversible.

on définit la transformation linéaire $\tilde{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ par

$$\tilde{\mathcal{A}}x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp \\ (\mathcal{A}|_{\mathcal{R}(\mathcal{A}^*)})^{-1}x & \text{si } x \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \end{cases}$$

On note par A^+ la matrice de $\tilde{\mathcal{A}}$, il est facile de vérifier que

$$AA^+x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{R}(A)^\perp \\ x & \text{si } x \in \mathcal{R}(A) \end{cases}$$

et

$$A^+Ax = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp \\ x & \text{si } x \in \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*) \end{cases}$$

Maintenant on va montrer que A^+ vérifie les quatre équations de la définition 1.3.3, pour cela on décompose \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m comme suit

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A^*)^\perp \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp.$$

Soit $x = x_1 + x_2 \in \mathbb{C}^n$ tel que $x_1 \in \mathcal{R}(A^*)$ et $x_2 \in \mathcal{R}(A^*)^\perp$. Alors

$$AA^+Ax = AA^+A(x_1 + x_2) = AA^+Ax_1 + AA^+Ax_2 = Ax_1 + 0 = Ax_1 + Ax_2 = Ax,$$

ce qui montre que $AA^+A = A$. de la même façon on trouve $A^+AA^+ = A^+$, $(AA^+)^* = AA^+$ et $(A^+A)^* = A^+A$.

Si X et Y deux matrices satisfaisant les quatre équations de la définition 1.3.3. Alors

$$\begin{aligned} X &= XAX = X(AX)^* = XX^*A^* = XX^*(AYA)^* \\ &= XX^*A^*(AY)^* = XAY = (XA)^*YY = A^*X^*Y \\ &= (AYA)^*X^*Y = (YA)^*A^*X^*Y = YAXAY = YAY \\ &= Y. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'il existe une matrice unique vérifiant les quatre équations de la définition 1.3.3 pour toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. \square

Théorème 1.3.5. [23] *Soit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ et $r(A) = r$, supposons que $A = FG$ soit une factorisation à rang complet de A . Alors*

1. $F^+ = (F^*F)^{-1}F^*$,
2. $F^+F = I_r$,
3. $G^+ = G^*(GG^*)^{-1}$,

4. $GG^+ = I_r$,
5. $A^+ = G^+F^+$.

Démonstration. Puisque F est inversible à gauche et G est inversible à droite, alors F^+ et G^+ sont l'inverse à gauche et à droite de F et G respectivement, donc (2) et (4) sont triviales.

$(F^*F)^{-1}$ et $(GG^*)^{-1}$ sont des matrices carrées à rang complet donc inversibles, pour montrer (1), (3) et (5) en utilisant la définition de l'inverse de Moore-Penrose, (2) et (4). \square

1.3.3 Propriétés principales de l'inverse de Moore-Penrose

Théorème 1.3.6. [4] *On suppose que $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Alors*

1. $(A^+)^+ = A$,
2. $(A^+)^* = (A^*)^+$,
3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$ où $\lambda^+ = \frac{1}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$ et $\lambda^+ = 0$ si $\lambda = 0$,
4. $A^* = A^*AA^+ = A^+AA^*$,
5. $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$,
6. $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^+)^+$,
7. $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$ où U, V sont des matrices unitaires.

Proposition 1.3.7.
$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A_1^+ & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_m^+ \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.3.8. [4] *Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, alors*

1. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^+) = \mathcal{R}(AA^*)$,
2. $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^+A) = \mathcal{R}(A^*A)$,
3. $\mathcal{R}(I - AA^+) = \mathcal{N}(AA^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$,
4. $\mathcal{R}(I - A^+A) = \mathcal{N}(A^+A) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$.

1.4 Formules de base du rang pour l'inverse de Moore-Penrose

Lemme 1.4.1. [18] *Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times p}$ et $C \in \mathbb{C}^{q \times n}$. Alors*

$$r(A, B) = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A), \quad (1.1)$$

$$r \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C), \quad (1.2)$$

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C), \quad (1.3)$$

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r \begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ C F_A & S_A \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

tel que $S_A = D - C A^+ B$. En particulier, si $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$, alors

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - C A^+ B). \quad (1.5)$$

Démonstration. On remarque que

$$(A, B) \begin{pmatrix} I & -A^+ B \\ 0 & I \end{pmatrix} = (A, -A A^+ B + B) = (A, E_A B) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(E_A B) = \{0\},$$

tel que $\begin{pmatrix} I & -A^+ B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est inversible à droite. Alors

$$r(A, B) = r \left[(A, B) \begin{pmatrix} I & -A^+ B \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] = r(A, E_A B) = r(A) + r(E_A B).$$

Les autres égalités de (1.1) et (1.2) sont prouvés de même façon. Pour montrer (1.3), en utilisant (1.1) et (1.2) on obtient

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} + r \left[\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}^+ \right] \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \right] \\ &= r(B) + r \left[\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} (B^+, 0) \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \right] \\ &= r(B) + r \begin{pmatrix} E_B A \\ C \end{pmatrix} \\ &= r(B) + r(C) + r(E_B A (I - C^+ C)) \\ &= r(B) + r(C) + r(E_B A F_C). \end{aligned}$$

Pour démontrer (1.4), écrire

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C A^+ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^+ B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E_A B \\ C F_A & S_A \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned}
r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} A & E_A B \\ C F_A & S_A \end{pmatrix} \\
&= r \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ C F_A & S_A \end{pmatrix} \right] \\
&= r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ C F_A & S_A \end{pmatrix} \\
&= r(A) + r \begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ C F_A & S_A \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$ alors $E_A B = 0$ et $C F_A = 0$ ce qui donne

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(S_A).$$

□

Lemme 1.4.2. [18] Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l \times n}$ et $D \in \mathbb{C}^{l \times k}$

1. $r(A, B) = r(A) + r(B) \iff \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$,
2. $r \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(C) \iff \mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(C^*) = \{0\}$,
3. $r(A, B) = r(A) \iff \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \iff E_A B = 0$,
4. $r \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) \iff \mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \iff C F_A = 0$,
5. $r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = r(A) + r(B) + r(C) \iff \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ et $\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(C^*) = \{0\}$,
6. $r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) \iff \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$ et $D = C A^+ B$.

Lemme 1.4.3. [18] Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$ et $C \in \mathbb{C}^{l \times n}$ des matrices données données, et supposons que

$$\mathcal{R}(A Q) = \mathcal{R}(A) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}[(P A)^*] = \mathcal{R}(A^*).$$

Alors

$$r(A Q, B) = r(A, B), \quad r \begin{pmatrix} P A \\ C \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

En particulier,

$$r(A A^*, B) = r(A, B), \quad r \begin{pmatrix} A^* A \\ C \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Lemme 1.4.4. [32] Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l \times n}$ et $D \in \mathbb{C}^{l \times k}$. le rang du complément de Schur $S_A = D - CA^+B$ satisfait l'égalité

$$r(D - CA^+B) = r \begin{pmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{pmatrix} - r(A). \quad (1.8)$$

Démonstration. Il est évident que

$$\mathcal{R}(A^*B) \subseteq \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*AA^*), \quad \mathcal{R}(AC^*) \subseteq \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*A),$$

d'après (1.5) et le fait que $A^*(A^*AA^*)^+A^* = A^+$, alors

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{pmatrix} &= r(A^*AA^*) + r(S_{A^*AA^*}) \\ &= r(A) + r(D - CA^*(A^*AA^*)^+A^*B) \\ &= r(A) + r(D - CA^+B), \end{aligned}$$

ce qui montre (1.8). □

Lemme 1.4.5. [32] Soient $A_i, B_i, C_i (i = 1, 2, \dots, k)$ et D est une matrice telle que l'expression $D - C_1A_1^+B_1 - \dots - C_kA_k^+B_k$ soit définie. Alors

$$r(D - C_1A_1^+B_1 - \dots - C_kA_k^+B_k) = r \begin{pmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{pmatrix} - r(A), \quad (1.9)$$

où $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$, $B^* = (B_1^*, B_2^*, \dots, B_k^*)$ et $C = (C_1, C_2, \dots, C_k)$.

Définition 1.4.6. On note par \mathbb{C}_H^m l'espace des matrices hermitiennes de type $n \times n$ sur \mathbb{C} .

Lemme 1.4.7. [25] Soient $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}_H^n$, $Q \in \mathbb{C}^{m \times n}$, et supposons que $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ est non singulière. Alors,

$$i_{\pm}(PAP^*) = i_{\pm}(A), \quad (1.10)$$

$$i_{\pm}(\lambda A) = \begin{cases} i_{\pm}(A) & \text{si } \lambda > 0 \\ i_{\mp}(A) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}, \quad (1.11)$$

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = i_{\pm}(A) + i_{\pm}(B), \quad (1.12)$$

$$i_+ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q^* & 0 \end{pmatrix} = i_- \begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q^* & 0 \end{pmatrix} = r(Q). \quad (1.13)$$

Lemme 1.4.8. [26] Soient $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{C}_H^n$, et soit

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Alors,

$$i_{\pm}(M_1) = r(B) + i_{\pm}(E_B A E_B), \quad r(M_1) = 2r(B) + r(E_B A E_B), \quad (1.15)$$

$$i_{\pm}(M_2) = i_{\pm}(A) + i_{\pm} \begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ B^* E_A & D - B^* A^+ B \end{pmatrix}, \quad r(M_2) = r(A) + r \begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ B^* E_A & D - B^* A^+ B \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Sous la condition $A \succcurlyeq 0$,

$$i_+(M_1) = r(A \ B), \quad i_-(M_1) = r(B), \quad r(M_1) = r(A \ B) + r(B). \quad (1.17)$$

Sous la condition $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$,

$$i_{\pm}(M_2) = i_{\pm}(A) + i_{\pm}(D - B^* A^+ B), \quad r(M_2) = r(A) + r(D - B^* A^+ B). \quad (1.18)$$

Quelques formules de rang et d'inertie dérivées de (1.1)-(1.3), (1.14)-(1.16) sont données ci-dessous

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ E_P C & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & 0 & P \end{pmatrix} - r(P), \quad (1.19)$$

$$r \begin{pmatrix} A & B F_Q \\ C & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} - r(Q), \quad (1.20)$$

$$r \begin{pmatrix} A & B F_Q \\ E_P C & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & 0 & P \\ 0 & Q & 0 \end{pmatrix} - r(P) - r(Q), \quad (1.21)$$

$$r \begin{pmatrix} A & B F_P \\ F_P B^* & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{pmatrix} - 2r(P), \quad (1.22)$$

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B F_P \\ F_P B^* & 0 \end{pmatrix} = i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{pmatrix} - r(P), \quad (1.23)$$

$$i_{\pm} \begin{pmatrix} E_Q A E_Q & E_Q B \\ B^* E_Q & D \end{pmatrix} = i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B & Q \\ B^* & D & 0 \\ Q^* & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(Q). \quad (1.24)$$

1.5 L'équation matricielle $AXB = C$

1.5.1 La solution générale de l'équation matricielle $AXB = C$

Considérons l'équation matricielle

$$AXB = C, \quad (1.25)$$

où $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ et $C \in \mathbb{C}^{m \times q}$ sont données, et $X \in \mathbb{C}^{n \times p}$ est une matrice inconnue. L'équation (1.25) est l'une des équations matricielles les plus connues dans la théorie. De nombreux articles sur cette équation et ses applications peuvent être trouvés dans la littérature. Dans [22], les conditions de consistence et la solution générale de (1.25) ont été dérivées analytiquement en utilisant des inverses généralisés de matrices et le résultat classique suivant a été obtenu.

Lemme 1.5.1. *L'équation (1.25) est consistante si et seulement si $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$, ce qui équivaut à $AA^+CB^+B = C$, dans ce cas, la solution générale est donnée sous la forme paramétrique suivante*

$$X = A^+CB^+ + F_A U_1 + U_2 E_B, \quad (1.26)$$

où U_1 et U_2 sont arbitraires de types appropriés. La solution de l'équation $AXB = C$ est unique si et seulement si $r(A) = n$ et $r(B) = p$.

1.5.2 Solution à norme minimale et à rang minimal de l'équation $AXB = C$

Si l'équation matricielle dans (1.25) n'est pas consistante, les chercheurs essaient souvent de trouver ses solutions d'approximation qui répondent à certains critères optimaux. Les deux fonctions objectives bien connues pour mesurer l'optimalité des solutions d'approximation sont la norme et le rang de la matrice. Pour (1.25), la solution des moindres carrés est définie comme étant

$$X = \arg \min_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} \|(C - AXB)\|_F, \quad (1.27)$$

tandis que la solution à rang minimal de (1.25) est définie comme étant

$$X = \arg \min_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} r(C - AXB). \quad (1.28)$$

Il est bien connu que l'équation normale correspondant au problème de minimisation dans (1.27) est

$$A^*AXBB^* = A^*CB^*.$$

Cette équation est évidemment consistante, résoudre cette équation par le lemme (1.5.1) donne le résultat suivant.

Lemme 1.5.2. *La solution à moindres carrés générale de l'équation matricielle dans (1.25) peut être écrite comme*

$$X = A^+CB^+ + F_A U_1 + U_2 E_B, \quad (1.29)$$

où U_1 et U_2 sont arbitraires de types appropriées. En particulier, la solution à moindres carrés et à rang minimal de (1.25) peut uniquement être écrite comme $X = A^+CB^+$.

Notez que (1.29) est donnée sous forme paramétrique. On peut facilement en déduire diverses propriétés de la solution à moindres carrés, telles que l'unicité, le rang maximal et le rang minimal, la norme de la solution à moindres carrés, ainsi que la structure des sous-matrices dans la solution à moindres carrés.

Ensuite nous présentons comment trouver la solution à rang minimal de (1.25). Soit

$$P(X) = C - AXB, \quad (1.30)$$

où $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ et $C \in \mathbb{C}^{m \times q}$ sont données, et $X \in \mathbb{C}^{n \times p}$ est une matrice variable. Nous l'appelons l'expression de matrice linéaire associée à (1.25). Dans [35] et [36], une formule importante pour le rang de (1.25) a été établie comme suit :

$$r(C - AXB) = r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} - r(M) + r[E_{T_1}(X + TM^+S)F_{S_1}], \quad (1.31)$$

$$\text{où } M = \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, T = (0, I_n), S = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, T_1 = TF_M, S_1 = E_MS.$$

Pour plus de commodité, soit

$$\hat{P} = E_{T_1}(X + TM^+S)F_{S_1}. \quad (1.32)$$

Il est évident que les rangs maximal et minimal de \hat{P} dans (1.32) sont donnés par

$$\max r(\hat{P}) = \min\{r(E_{T_1}), r(F_{S_1})\} \quad \text{et} \quad \min r(\hat{P}) = 0,$$

à la base de ces résultats, il a été montré dans [35] et [36] que :

Lemme 1.5.3. *Les rangs maximal et minimal de $C - AXB$ par rapport à X sont donnés par*

$$\max_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} r(C - AXB) = \min \left\{ r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} \right\}, \quad (1.33)$$

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} r(C - AXB) = r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Évidemment de (1.31), la matrice X satisfaisant (1.34) est la solution de l'équation matricielle consistante suivante :

$$E_{T_1}(X + TM^+S)F_{S_1} = 0 \quad (1.35)$$

D'après le lemme 1.5.1, la solution générale de (1.35), à savoir, la solution générale à rang minimal de (1.25), peut être écrite comme :

$$X = -TM^+S + T_1U + VS_1, \quad (1.36)$$

où $U \in \mathbb{C}^{(q+n) \times p}$ et $V \in \mathbb{C}^{n \times (m+p)}$ sont arbitraires. On note que (1.36) est donné sous forme paramétrique. On peut facilement déduire diverses propriétés de la solution à rang minimal, telles que l'unicité, les rangs maximaux et minimaux, etc.

Lemme 1.5.4. [36] *La solution à rang minimal de (1.25) est unique si et seulement si*

$$r(A) = n, r(B) = p, r \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} + r(A) = r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} + r(B). \quad (1.37)$$

Démonstration. La solution à rang minimal de (1.25) est unique si et seulement si la solution de l'équation (1.35) est unique ce qui équivaut à

$$r(E_{T_1}) = n \quad \text{et} \quad r(F_{S_1}) = p. \quad (1.38)$$

Or,

$$r(E_{T_1}) = n - r(T_1) = \quad \text{et} \quad r(F_{S_1}) = p - r(S_1).$$

Alors (1.38) équivaut à

$$r(T_1) = 0 \quad \text{et} \quad r(S_1) = 0.$$

telles que

$$r(T_1) = r \begin{pmatrix} T \\ M \end{pmatrix} - r(M) = n + r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} - r(M),$$

et

$$r(S_1) = r \begin{pmatrix} M & S \end{pmatrix} - r(M) = p + r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} - r(M).$$

Alors

$$r(T_1) = 0 \Leftrightarrow r(M) = r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} + n, \quad (1.39)$$

et

$$r(S_1) = 0 \Leftrightarrow r(M) = r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} + p. \quad (1.40)$$

D'autre part on a :

$$r(M) = r \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} + r \left(E \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad (1.41)$$

et

$$r(M) = r \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} + r \left((B, 0) F \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} \right). \quad (1.42)$$

de (1.39) et (1.41), on trouve

$$n = r \left(E \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \right) \leq r(A) \leq n$$

et donc $r(A) = n$ et $r \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} + r(A)$, de la même méthode on montre que $r(B) = p$ et $r \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} C & A \end{pmatrix} + r(B)$. \square

Chapitre 2

Quelques propriétés des solutions hermitiennes communes des équations matricielles $A_1 X A_1^* = B_1$ et $A_2 X A_2^* = B_2$

2.1 Introduction

Considérons l'équation suivante

$$AXA^* = B, \quad (2.1)$$

où $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{C}_H^m$ sont données, et $X \in \mathbb{C}^n$ est une matrice inconnue. L'équation (2.1) est l'une des équations matricielles linéaires les plus simples, qui a beaucoup attiré l'attention de nombreux auteurs depuis 1970, l'équation matricielle (2.1) et sa solution hermitienne ont été largement étudiés dans la littérature. Par exemple dans [14], Y. Liu et Y. Tian, donnent des formules de rang maximal et minimal des sous-matrices dans une solution hermitienne X partitionné en 2×2 blocs, de ces formules ils obtiennent les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces sous-matrices soient nulles ou uniques. En [17], Y. Liu, Y. Tian, et Y. Takane étudient l'équation (2.1), avec B soit hermitienne ou antihermitienne où ils donnent les rangs maximal et minimal de matrices réelles X_0 et X_1 de la solution hermitienne ou antihermitienne $X = X_0 + iX_1$. Groß [6, 7] a déterminé le rang minimal des solutions définies négatives de (2.1).

En ce qui concerne la consistence et la solution hermitienne générale de $AXA^* = B$, le résultat suivant est bien connu.

Lemme 2.1.1. *Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{C}_H^m$ des matrices données. Alors.*

- (a) [6, 12], *L'équation $AXA^* = B$ a une solution $X \in \mathbb{C}_H^n$ si et seulement si $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$, où équivalent à, $AA^+B = B$.*
- (b) [26], *Sous la condition $AA^+B = B$ la solution hermitienne générale de $AXA^* = B$ est donnée par*

$$X = A^+B(A^+)^* + U - A^+AU A^+A, \quad (2.2)$$

$$X = A^+B(A^+)^* + F_A V + V^* F_A, \quad (2.3)$$

où $U \in \mathbb{C}_H^n$ et $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont arbitraires.

considérons la paire d'équation matricielle

$$A_1 X A_1^* = B_1 \quad \text{et} \quad A_2 X A_2^* = B_2. \quad (2.4)$$

Divers problèmes liés à (2.4) et à leurs applications ont été étudiés dans la littérature.

Les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'une solution commune hermitienne de (2.4) et l'expression générale de la solution sont données par le lemme suivant

Lemme 2.1.2. [28] Soient $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$, $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$ des matrices données pour $i = 1, 2$ et supposons que chaque équation matricielle

$$A_1 X A_1^* = B_1 \quad \text{et} \quad A_2 X A_2^* = B_2, \quad (2.5)$$

admet une solution hermitienne, c-à-d, $\mathcal{R}(B_i) \subseteq \mathcal{R}(A_i)$ pour $i = 1, 2$. Alors

- (a) La paire d'équations matricielles (2.5) possède une solution commune hermitienne si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} B_1 & 0 & A_1 \\ 0 & -B_2 & A_2 \\ A_1^* & A_2^* & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

- (b) Sous la condition (2.6), la solution hermitienne générale de la paire d'équations matricielles (2.5) est donnée sous la forme paramétrique suivante :

$$X = X_0 + V F_A + F_A V^* + F_{A_1} U F_{A_2} + F_{A_2} U^* F_{A_1}, \quad (2.7)$$

où X_0 est une solution spéciale de (2.5), $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, et $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont arbitraires.

Dans [28] Y. Tian a établi des formules explicites pour calculer

$$\begin{aligned} & \max_{X \in \mathcal{S}} r(A_1 - B_1 X B_1), \\ & \min_{X \in \mathcal{S}} r(A_1 - B_1 X B_1), \\ & \max_{X \in \mathcal{S}} i_{\pm}(A_1 - B_1 X B_1), \\ & \min_{X \in \mathcal{S}} i_{\pm}(A_1 - B_1 X B_1), \end{aligned}$$

où $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}_H^n \mid B_2 X B_2^* = A_2, B_3 X B_3^* = A_3\}$.

Dans [25] l'auteur a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{X \in \mathbb{C}_H^n \mid A X A^* = B\}, \\ \mathcal{T} &= \left\{ \frac{X_1 + X_2}{2} \mid T_1 A X_1 A^* T_1^* = T_1 B T_1^*, T_2 A X_2 A^* T_2^* = T_2 B T_2^* \right\}. \end{aligned}$$

Dans [8] S. Guerarra et S. Guedjiba ont établi un ensemble de formules explicites pour calculer les rangs et les inerties maximales et minimales de $P - X$ par rapport à X , où $P \in \mathbb{C}_H^n$ est donnée, et X est une solution hermitienne commune à rang minimal des équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$.

Dans [38], les auteurs calculent les rangs maximaux et minimaux des sous-matrices dans une solution à moindres carrés de l'équation $AXB = C$. De ces formules, ils dérivent des conditions nécessaires et suffisantes pour que les sous-matrices soient nulles ou aient d'autres formes spéciales.

L'une des quantités les plus fondamentales de l'algèbre linéaire est le rang d'une matrice, qui est facile à calculer par des opérations élémentaires sur les matrices. Cet entier non négatif fini peut être utilisé pour décrire la dépendance ou l'indépendance des vecteurs, la singularité ou non-singularité d'une matrice, l'équivalence des matrices, la solvabilité des équations matricielles, etc. Un fait fondamental sur le rang d'une matrice est que $M = 0$ si et seulement si $r(M) = 0$. Ainsi, deux matrices M_1 et M_2 de même taille sont égales si et seulement si $r(M_1 - M_2) = 0$. Cette méthode algébrique permet d'étudier diverses expressions composées de matrices et de leurs inverses généralisés, ainsi que de matrices arbitraires.

Dans ce chapitre nous utilisons les formules de rang d'une matrice pour dériver les conditions nécessaires et suffisantes pour que (2.4) possède une solution hermitienne commune sous la forme $\frac{X_1 + X_2}{2}$, où X_1 et X_2 sont les solutions hermitiennes des équations $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$ respectivement, et nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les sous-matrices d'une solution hermitienne commune de l'équation (2.4) aient une forme spéciale.

2.2 propriétés des solutions communes des équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$

Lemme 2.2.1. [34] *Soit*

$$\phi(X_1, X_2) = A - B_1X_1C_1 - (B_1X_1C_1)^* - B_2X_2C_2 - (B_2X_2C_2)^*, \quad (2.8)$$

tel que $A \in \mathbb{C}_H^n$, $B_i \in \mathbb{C}^{m \times p_i}$ et $C_i \in \mathbb{C}^{q_i \times m}$ sont données, et $X_i \in \mathbb{C}^{p_i \times q_i}$ sont des matrices variables pour $i = 1, 2$, et supposons que

$$\mathcal{R}(B_2) \subseteq \mathcal{R}(B_1), \quad \mathcal{R}(C_1^*) \subseteq \mathcal{R}(B_1), \quad \mathcal{R}(C_2^*) \subseteq \mathcal{R}(B_1). \quad (2.9)$$

et soient

$$N = \begin{pmatrix} A & B_2 & C_1^* & C_2^* \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} A & B_2 & C_1^* & C_2^* \\ B_2^* & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} A & B_2 & C_1^* & C_2^* \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} A & B_2 & C_1^* \\ B_2^* & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & C_1^* & C_2^* \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\max_{X_1 \in \mathbb{C}^{p_1 \times q_1}, X_2 \in \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}} r[\phi(X_1, X_2)] = \min\{r[A, B_1], r(N), r(M_1), r(M_2)\}, \quad (2.10)$$

$$\min_{X_1 \in \mathbb{C}^{p_1 \times q_1}, X_2 \in \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}} r[\phi(X_1, X_2)] = 2r[A, B_1] - 2r(M) + 2r(N) + \max\{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad (2.11)$$

$$\max_{X_1 \in \mathbb{C}^{p_1 \times q_1}, X_2 \in \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}} i_{\pm}[\phi(X_1, X_2)] = \min\{i_{\pm}(M_1), i_{\pm}(M_2)\}, \quad (2.12)$$

$$\min_{X_1 \in \mathbb{C}^{p_1 \times q_1}, X_2 \in \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}} i_{\pm}[\phi(X_1, X_2)] = r[A, B_1] - r(M) + r(N) + \max\{i_{\pm}(M_1) - r(N_1), i_{\pm}(M_2) - r(N_2)\}, \quad (2.13)$$

tel que

$$\begin{aligned} s_1 &= r(M_1) - 2r(N_1), \quad s_2 = r(M_2) - 2r(N_2), \\ s_3 &= i_+(M_1) + i_-(M_2) - r(N_1) - r(N_2), \\ s_4 &= i_-(M_1) + i_+(M_2) - r(N_1) - r(N_2). \end{aligned}$$

Soient $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times p}$, $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$, pour $i = 1, 2$. Définir

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ Y = \frac{X_1 + X_2}{2} \in \mathbb{C}_H^n \mid A_1 X_1 A_1^* = B_1, A_2 X_2 A_2^* = B_2 \right\}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{S}_2 = \{X \in \mathbb{C}_H^n \mid A_1 X A_1^* = B_1, A_2 X A_2^* = B_2\}. \quad (2.15)$$

Dans ce cas, on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$.

Théorème 2.2.2. *Supposons que la paire d'équations dans (2.15) a une solution hermitienne commune, \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 définis comme dans (2.14) et (2.15). Alors $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$ si et seulement si*

$$r \begin{pmatrix} 0 & -A_1^* & A_2^* \\ -A_1 & -\frac{1}{2}B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & \frac{1}{2}B_2 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Démonstration. On note que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$ est équivalent à

$$\min_{Y \in \mathcal{S}_1, X \in \mathcal{S}_2} r(Y - X) = 0. \quad (2.17)$$

D'après le lemme 2.1.1, l'expression générale de $Y \in \mathcal{S}_1$ peut être écrite comme

$$Y = \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + F_{A_1} U_1 + U_1^* F_{A_1} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} + F_{A_2} U_2 + U_2^* F_{A_2}, \quad (2.18)$$

où U_1 et U_2 sont arbitraires de types appropriés. Alors

$$\begin{aligned}
 Y - X &= \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + F_{A_1} U_1 + U_1^* F_{A_1} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} + F_{A_2} U_2 + U_2^* F_{A_2} - X_0 \\
 &\quad - V F_A - F_A V^* - F_{A_1} U F_{A_2} - F_{A_2} U^* F_{A_1} \\
 &= \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 - (V, -U_1^*, -U_2^*) \begin{pmatrix} F_A \\ F_{A_1} \\ F_{A_2} \end{pmatrix} \\
 &\quad - (F_A, F_{A_1}, F_{A_2}) \begin{pmatrix} V^* \\ -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix} - F_{A_1} U F_{A_2} - F_{A_2} U^* F_{A_1}.
 \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned}
 L &= \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & F_{A_1} & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} & F_{A_2} \\ & F_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_1 &= \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & F_{A_1} & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} & F_{A_2} \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_2 &= \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & F_{A_1} & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} & F_{A_2} \\ & F_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 G &= \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & I_p \\ & F_A & 0 \\ & F_{A_1} & 0 \\ & F_{A_1} & 0 \end{pmatrix}, \\
 G_1 &= \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & F_{A_1} & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ & F_A & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} & F_{A_2} \\ & F_A & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, d'après le lemme 2.2.1, on a

$$\min_{Y \in S_1, X \in S_2} r(Y-X) = 2r \left(\frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0, I_p \right) - 2r(G) + 2r(L) + \max\{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \quad (2.19)$$

où

$$\begin{aligned} t_1 &= r(G_1) - 2r(L_1), t_2 = r(G_2) - 2r(L_2), \\ t_3 &= i_+(G_1) + i_-(G_2) - r(L_1) - r(L_2), \\ t_4 &= i_-(G_1) + i_+(G_2) - r(L_1) - r(L_2). \end{aligned}$$

Nous allons simplifier $r(G)$, $r(L)$, $i_{\pm}(L_i)$ et $i_{\pm}(G_i)$ pour $i = 1, 2$.

En appliquant (1.2), (1.8), (1.23) et (1.12), et simplifier par $[A_1 A_1^+ B_1, A_2 A_2^+ B_2] = [B_1, B_2]$, les opérations élémentaires sur les matrices et les opérations de congruence, et le fait que $\mathcal{R}(F_A) \subseteq \mathcal{R}(F_{A_1})$ et $\mathcal{R}(F_A) \subseteq \mathcal{R}(F_{A_2})$, on obtient

$$\begin{aligned} r(G) &= r \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & I_p \\ & F_A & 0 \\ & F_{A_1} & 0 \\ & F_{A_2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & I_p \\ & F_{A_1} & 0 \\ & F_{A_2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2p + r(A_2 F_{A_1}) - r(A_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_{\pm}(G_1) &= i_{\pm} \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & F_{A_1} & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ & F_A & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ & F_{A_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= i_{\pm} \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & F_{A_1} & F_{A_2} \\ & F_{A_1} & 0 \\ & F_{A_2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= i_{\pm} \begin{pmatrix} \frac{A_1^+ B_1 (A_1^+)^*}{2} + \frac{A_2^+ B_2 (A_2^+)^*}{2} - X_0 & I_p & I_p & 0 & 0 \\ & I_p & 0 & 0 & A_1^* \\ & I_p & 0 & 0 & A_2^* \\ & 0 & A_1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & A_2 & 0 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2) \\
 &= i_{\pm} \begin{pmatrix} 0 & I_p & I_p & -\frac{1}{4}A_1^+ B_1 + \frac{1}{2}X_0 A_1^* & -\frac{1}{4}A_2^+ B_2 \\ I_p & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ I_p & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ -\frac{1}{4}B_1 (A_1^+)^* + \frac{1}{2}A_1 X_0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}B_2 (A_2^+)^* & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2) \\
 &= p + i_{\pm} \begin{pmatrix} 0 & -A_1^* & A_2^* \\ -A_1 & -\frac{1}{2}B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & \frac{1}{2}B_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2),
 \end{aligned}$$

Par des étapes similaires, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 i_{\pm}(G_2) &= p + i_{\pm} \begin{pmatrix} 0 & -A_1^* & A_2^* \\ -A_1 & -\frac{1}{2}B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & \frac{1}{2}B_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2), \\
 r(L) &= 2p + r \begin{pmatrix} 0 & -A_1^* & A_2^* \\ -A_1 & -\frac{1}{2}B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & \frac{1}{2}B_2 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2).
 \end{aligned}$$

Il est clair que

$$r(L) = r(L_1) = r(L_2) \text{ et } t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = -r(L).$$

En substituant ces relations dans (2.19) on obtient (2.16). □

2.3 Le rang de sous-matrices dans une solution hermitienne commune des équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$

Soit

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}_H^n \mid A_1XA_1^* = B_1, A_2XA_2^* = B_2\}. \quad (2.20)$$

Les solutions hermitiennes communes de la paire d'équations matricielles en \mathcal{S} sont données par

$$X = X_0 + VF_A + F_AV^* + F_{A_1}UF_{A_2} + F_{A_2}U^*F_{A_1},$$

où X_0 est une solution commune hermitienne spéciale de la paire d'équations matricielles dans \mathcal{S} , $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, et $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont arbitraires.

L'un des concepts fondamentaux de la théorie des matrices est la partition de la matrice. De nombreuses propriétés d'une matrice peuvent être dérivées à partir de sa partition. Une solution commune hermitienne $X \in \mathcal{S}$ est partitionnée en blocs de 2×2 de la forme $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{pmatrix}$, telles que $X_1 \in \mathbb{C}_H^{n_1}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ et $X_3 \in \mathbb{C}_H^{n_2}$, avec $n_1 + n_2 = n$.

Puisque X_1, X_2 et X_3 sont les sous-matrices dans une solution hermitienne commune X de la paire d'équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$, elles peuvent être réécrites comme

$$X_1 = (I_{n_1}, 0) X \begin{pmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix} := R_1XR_1^*,$$

$$X_2 = (I_{n_1}, 0) X \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{pmatrix} := R_1XR_2^*,$$

$$X_3 = (0, I_{n_2}) X \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{pmatrix} := R_2XR_2^*.$$

Nous adoptons les notations suivantes pour les collections de sous-matrices X_1, X_2 et X_3 .

$$\mathcal{S}_i = \left\{ X_i \mid X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \right\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ainsi, les équations matricielles définies dans \mathcal{S} peuvent être écrites comme

$$(A_{11}, A_{12}) X \begin{pmatrix} A_{11}^* \\ A_{12}^* \end{pmatrix} = B_1,$$

$$(A_{21}, A_{22}) X \begin{pmatrix} A_{21}^* \\ A_{22}^* \end{pmatrix} = B_2.$$

où $A_{11} \in \mathbb{C}^{m_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{C}^{m_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{C}^{m_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{m_2 \times n_2}$.

Voici quelques résultats connus concernant les rangs et les inerties des matrices, qui seront utilisés dans cette section.

Lemme 2.3.1. [34] Soient $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$ et $B_i \in \mathbb{C}_H^n$ pour $i = 1, 2$ et supposons que la paire d'équations matricielles

$$A_1XA_1^* = B_1 \quad \text{et} \quad A_2XA_2^* = B_2,$$

a une solution commune $X \in \mathbb{C}_H^n$. et soit \mathcal{S} défini par (2.20), et définir

$$P_1 = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B^* & 0 & A_1^* & A_2^* \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & -B_1 & A_1 \\ B^* & A_1^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & -B_2 & A_2 \\ B^* & A_2^* & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B & B \\ 0 & -B_1 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -B_2 & 0 & A_2 \\ B^* & A_1^* & A_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} A & 0 & B & B \\ 0 & -B_1 & A_1 & 0 \\ B^* & A_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} A & 0 & B & B \\ 0 & -B_2 & A_2 & 0 \\ B^* & A_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Alors

1. Le rang maximal de $A - BXB^*$ soumis à \mathcal{S} est

$$\max_{X \in \mathcal{S}} r(A - BXB^*) = \min \left\{ r(A, B), r(Q_1) - r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2), r(P_2) - 2r(A_1), r(P_3) - 2r(A_2) \right\}, \quad (2.21)$$

2. Le rang minimal de $A - BXB^*$ soumis à \mathcal{S} est

$$\min_{X \in \mathcal{S}} r(A - BXB^*) = 2r(A, B) - 2r(P_1) + 2r(Q_1) + \max \left\{ r(P_2) - 2r(Q_2), r(P_3) - 2r(Q_3), u_1, u_2 \right\}, \quad (2.22)$$

où

$$u_1 = i_+(P_2) + i_-(P_3) - r(Q_2) - r(Q_3),$$

$$u_2 = i_-(P_2) + i_+(P_3) - r(Q_2) - r(Q_3),$$

3. L'inertie maximale de $A - BXB^*$ soumise à \mathcal{S} est

$$\max_{X \in \mathcal{S}} i_{\pm}(A - BXB^*) = \min \left\{ i_{\pm}(P_2) - r(A_1), i_{\pm}(P_3) - r(A_2) \right\}, \quad (2.23)$$

4. L'inertie minimale de $A - BXB^*$ soumise à \mathcal{S} est

$$\min_{X \in \mathcal{S}} i_{\pm}(A - BXB^*) = r(A, B) - r(P_1) + r(Q_1) + \max \left\{ i_{\pm}(P_2) - r(Q_2), i_{\pm}(P_3) - r(Q_3) \right\}. \quad (2.24)$$

Lemme 2.3.2. [33] Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l \times n}$, $B_1 \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $C_1 \in \mathbb{C}^{q \times n}$ des matrices données, et $Y \in \mathbb{C}^{k \times n}$, $Z \in \mathbb{C}^{m \times l}$, $U \in \mathbb{C}^{p \times q}$ des matrices variables. Alors

$$\min_{Y,Z,U} r(A - BY - ZC - B_1UC_1) = r \begin{pmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(B) - r(C), \quad (2.25)$$

$$\max_{Y,Z,U} r(A - BY - ZC - B_1UC_1) = \min \left\{ m, n, r \begin{pmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.26)$$

Théorème 2.3.3. Soient $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$ et $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$ des matrices données pour $i = 1, 2$, supposons que la paire d'équations matricielles

$$A_1XA_1^* = B_1 \quad \text{et} \quad A_2XA_2^* = B_2,$$

a une solution commune $X \in \mathbb{C}_H^n$. et soient

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} -B_1 & 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & -B_2 & 0 & A_{21} & A_{22} \\ A_{12}^* & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_2 &= \begin{pmatrix} -B_1 & 0 & A_{11} & 0 & -A_{12} \\ 0 & -B_2 & 0 & A_{21} & A_{22} \\ A_{11}^* & A_{21}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} -B_1 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, & M_2 &= \begin{pmatrix} -B_2 & A_{22} & -A_{21} & 0 \\ A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}, \\ M_3 &= \begin{pmatrix} -B_1 & A_{11} & 0 & -A_{12} \\ A_{11}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, & M_4 &= \begin{pmatrix} -B_2 & A_{21} & 0 & -A_{22} \\ A_{21}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}, \\ L_1 &= \begin{pmatrix} -B_1 & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix}, & L_2 &= \begin{pmatrix} -B_2 & A_{22} \\ A_{22}^* & 0 \end{pmatrix}, & L_3 &= \begin{pmatrix} -B_1 & A_{11} \\ A_{11}^* & 0 \end{pmatrix}, & L_4 &= \begin{pmatrix} -B_2 & A_{21} \\ A_{21}^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

(a)

$$\min_{X_1 \in \mathcal{S}_1} r(X_1) = 2r(T_1) - 2r(A_{12}^*, A_{22}^*) + \max \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \max_{X_1 \in \mathcal{S}_1} r(X_1) &= \min \left\{ n_1, 2n_1 + r(T) - r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2), \right. \\ &\quad \left. 2n_1 + r(L_1) - 2r(A_1), 2n_1 + r(L_2) - 2r(A_2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

où

$$\begin{aligned} t_1 &= i_+(L_1) + i_-(L_2) - r(M_1) - r(M_2), & t_3 &= r(L_1) - 2r(M_1), \\ t_2 &= i_-(L_1) + i_+(L_2) - r(M_1) - r(M_2), & t_4 &= r(L_2) - 2r(M_2). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min_{X_2 \in \mathcal{S}_2} r(X_2) &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & B_1 & 0 \\ A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \max_{X_2 \in \mathcal{S}_2} r(X_2) &= \min \left\{ n_1, n_2, r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} + n - r(A_1) - r(A_2) - r(A), \right. \\ &\quad \left. r \begin{pmatrix} 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & B_1 & 0 \\ A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} + n - r(A_1) - r(A_2) - r(A) \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

(c)

$$\min_{X_3 \in \mathcal{S}_3} r(X_3) = 2r(T_2) - 2r \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} + \max \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \max_{X_3 \in \mathcal{S}_3} r(X_3) &= \min \left\{ n_2, 2n_2 + r(T_2) - r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2), \right. \\ &\quad \left. 2n_2 + r(L_3) - 2r(A_1), 2n_2 + r(L_4) - 2r(A_2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

où

$$\begin{aligned} s_1 &= i_+(L_3) + i_-(L_4) - r(M_3) - r(M_4), \quad s_3 = r(L_3) - 2r(M_3), \\ s_2 &= i_-(L_3) + i_+(L_4) - r(M_3) - r(M_4), \quad s_4 = r(L_4) - 2r(M_4). \end{aligned}$$

Démonstration. Soient

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & R_1 & 0 & 0 \\ R_1^* & 0 & A_1^* & A_2^* \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_1 \\ 0 & -B_1 & A_1 \\ R_1^* & A_1^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_1 \\ 0 & -B_2 & A_2 \\ R_1^* & A_2^* & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & R_1 & R_1 \\ 0 & -B_1 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -B_2 & 0 & A_2 \\ R_1^* & A_1^* & A_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_1 & R_1 \\ 0 & -B_1 & A_1 & 0 \\ R_1^* & A_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_1 & R_1 \\ 0 & -B_2 & A_2 & 0 \\ R_1^* & A_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Appliquons le lemme 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} \min_{X_1 \in \mathcal{S}_1} r(X_1) &= \min_{X \in \mathcal{S}} r(R_1 X R_1^*) \\ &= 2r(0, R_1) - 2r(P_1) + 2r(Q_1) + \max\{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

où

$$\begin{aligned} t_1 &= i_+(P_2) + i_-(P_3) - r(Q_2) - r(Q_3), \quad t_3 = r(P_2) - 2r(Q_2), \\ t_2 &= i_-(P_2) + i_+(P_3) - r(Q_2) - r(Q_3), \quad t_4 = r(P_3) - 2r(Q_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{X_1 \in \mathcal{S}_1} r(X_1) &= \max_{X \in \mathcal{S}} r(R_1 X R_1^*) \\ &= \min \left\{ r(0, R_1), r(Q_1) - r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2), r(P_2) - 2r(A_1), r(P_3) - 2r(A_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Simplifier les matrices en bloc dans (2.33) et (2.34) par les opérations élémentaires sur les matrices et les opérations de congruence, on obtient

$$\begin{aligned} r(P_1) &= 2n_1 + r \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}, & r(Q_1) &= 2n_1 + r \begin{pmatrix} -B_1 & 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & -B_2 & 0 & A_{21} & A_{22} \\ A_{12}^* & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ r(Q_2) &= 2n_1 + r \begin{pmatrix} -B_1 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, & r(Q_3) &= 2n_1 + r \begin{pmatrix} -B_2 & A_{22} & -A_{21} & 0 \\ A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}, \\ i_{\pm}(P_2) &= n_1 + i_{\pm} \begin{pmatrix} -B_1 & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix}, & i_{\pm}(P_3) &= n_1 + i_{\pm} \begin{pmatrix} -B_2 & A_{22} \\ A_{22}^* & 0 \end{pmatrix}, \\ r(P_2) &= 2n_1 + r \begin{pmatrix} -B_1 & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix}, & r(P_3) &= 2n_1 + r \begin{pmatrix} -B_2 & A_{22} \\ A_{22}^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En substituant les résultats ci-dessus à (2.33) et (2.34) on obtient (2.27) et (2.28). Ensuite, nous appliquons le lemme 2.3.2 à

$$\begin{aligned} X_2 &= R_1 X R_2^* \\ &= R_1 X_0 R_2^* + V_1 F_A R_2^* + R_1 F_A V_2^* + (R_1 F_{A_1}, R_1 F_{A_2}) \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{A_2} R_2^* \\ F_{A_1} R_2^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $V_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n}$ et $V_2 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n}$ sont arbitraires, on obtient

$$\begin{aligned} \min_{X_2 \in \mathcal{S}_2} r(X_2) &= \min_{U, V_1, V_2} r \left(R_1 X_0 R_2^* + V_1 F_A R_2^* + R_1 F_A V_2^* + (R_1 F_{A_1}, R_1 F_{A_2}) \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{A_2} R_2^* \\ F_{A_1} R_2^* \end{pmatrix} \right) \\ &= r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_A & R_1 F_{A_1} & R_1 F_{A_2} \\ F_A R_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_A \\ F_A R_2^* & 0 \\ F_{A_2} R_2^* & 0 \\ F_{A_1} R_2^* & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_A & R_1 F_{A_1} & R_1 F_{A_2} \\ F_A R_2^* & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_2} R_2^* & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_1} R_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(R_1 F_A) - r(F_A R_2^*), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \max_{X_2 \in \mathcal{S}_2} r(X_2) &= \max_{U, V_1, V_2} r \left(R_1 X_0 R_2^* + V_1 F_A R_2^* + R_1 F_A V_2^* + (R_1 F_{A_1}, R_1 F_{A_2}) \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{A_2} R_2^* \\ F_{A_1} R_2^* \end{pmatrix} \right) \\ &= \min \left\{ n_1, n_2, r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_A & R_1 F_{A_1} & R_1 F_{A_2} \\ F_A R_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_A \\ F_A R_2^* & 0 \\ F_{A_2} R_2^* & 0 \\ F_{A_1} R_2^* & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

On applique (1.21) aux matrices en blocs dans (2.35) et (2.36), simplifier par $[A_1 A_1^+ B_1, A_2 A_2^+ B_2] = [B_1, B_2]$, les opérations élémentaires sur les matrices, et le fait que $\mathcal{R}(R_1 F_A) \subseteq \mathcal{R}(R_1 F_{A_1})$ et $\mathcal{R}(R_1 F_A) \subseteq \mathcal{R}(R_1 F_{A_2})$, on obtient

$$\begin{aligned} &r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_A & R_1 F_{A_1} & R_1 F_{A_2} \\ F_A R_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_{A_1} & R_1 F_{A_2} \\ F_A R_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & A_{11} R_1 X_0 A_1^* & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & A_{21} R_1 X_0 A_2^* \end{pmatrix} + n - r(A_1) - r(A_2) - r(A) \\ &= r \begin{pmatrix} (0, 0) & 0 & (0, 0) & A_{11}^* & A_{21}^* \\ (0, A_{12}) & -A_{11} & (0, 0) & (A_{11}, 0) X_0 A_1^* & 0 \\ (0, 0) & A_{21} & (0, A_{22}) & 0 & (A_{21}, 0) X_0 A_2^* \end{pmatrix} \\ &\quad + n - r(A_1) - r(A_2) - r(A) \\ &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} + n - r(A_1) - r(A_2) - r(A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_2^* & R_1 F_A \\ F_A R_2^* & 0 \\ F_{A_2} R_2^* & 0 \\ F_{A_1} R_2^* & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_2^* & R_1 F_A \\ F_{A_1} R_2^* & 0 \\ F_{A_2} R_2^* & 0 \end{pmatrix} \\
 & = r \begin{pmatrix} 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & 0 & A_1 X_0 R_2^* A_{22}^* \\ A_{22} & 0 & A_2 X_0 R_2^* A_{22}^* \end{pmatrix} + n_1 + n_2 - r(A) - r(A_1) - r(A_2) \\
 & = r \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_{11}^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{21}^* \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -A_{12}^* \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22}^* \end{pmatrix} \\ A_{12} & A_1 X_0 \begin{pmatrix} 0 \\ A_{12}^* \end{pmatrix} & 0 \\ A_{22} & 0 & A_2 X_0 \begin{pmatrix} A_{21}^* \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + n - r(A) - r(A_1) - r(A_2) \\
 & = r \begin{pmatrix} 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & B_1 & 0 \\ A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} + n - r(A) - r(A_1) - r(A_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_A & R_1 F_{A_1} & R_1 F_{A_2} \\ F_A R_2^* & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_2} R_2^* & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_1} R_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} R_1 X_0 R_1^* & R_1 F_{A_1} & R_1 F_{A_2} \\ F_{A_1} R_2^* & 0 & 0 \\ F_{A_2} R_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & A_{11} R_1 X_0 A_1^* & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_1 + n_2 - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 & = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} + n - 2r(A_1) - 2r(A_2).
 \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.4.4, on a

$$r(R_1 F_A) = n_1 + r \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} - r(A), \quad r(F_A R_2^*) = n_2 + r \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} - r(A).$$

En substituant ces résultats dans (2.35) et (2.36) on obtient (2.29) et (2.30).
La preuve de (c) est similaire à celle de (a). \square

Corollaire 2.3.4. Soient $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$ et $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$ des matrices données pour $i = 1, 2$ et supposons que la paire d'équations matricielles

$$A_1XA_1^* = B_1 \quad \text{et} \quad A_2XA_2^* = B_2,$$

a une solution commune $X \in \mathbb{C}_H^n$. Alors

- (a) L'équation (2.4) a une solution hermitienne commune sous la forme $X = \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ X_2^* & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\max \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = 2r \begin{pmatrix} A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix} - 2r(T_1),$$

et

$$\max \{s_1, s_2, s_3, s_4\} = 2r \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} - 2r(T_2),$$

- (b) Toutes les solutions hermitiennes communes de l'équation (2.4) ont la forme $X = \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ X_2^* & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\min \left\{ 2n_1 + r(T_1) - r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2), 2n_1 + r(L_1) - 2r(A_1), 2n_1 + r(L_2) - 2r(A_2) \right\} = 0,$$

et

$$\min \left\{ 2n_2 + r(T_2) - r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2), 2n_2 + r(L_3) - 2r(A_1), 2n_2 + r(L_4) - 2r(A_2) \right\} = 0,$$

- (c) L'équation (2.4) a une solution hermitienne commune sous la forme $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & B_1 & 0 \\ A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix},$$

- (d) Toutes les solutions hermitiennes communes de l'équation (2.4) ont la forme $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\min \left\{ r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} + n - r(A_1) - r(A_2) - r(A), \right.$$

$$r \left(\begin{array}{ccc} 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & B_1 & 0 \\ A_{22} & 0 & B_2 \end{array} \right) + n - r(A_1) - r(A_2) - r(A) \Big\} = 0.$$

Théorème 2.3.5. Soient $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$ et $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$ des matrices données pour $i = 1, 2$ supposons que la paire d'équations matricielles

$$A_1 X A_1^* = B_1 \quad \text{et} \quad A_2 X A_2^* = B_2,$$

a une solution commune $X \in \mathbb{C}_H^n$. Alors

(a) La sous-matrice X_1 est unique si et seulement si

$$\dim\{\mathcal{R}(A_1^*) \cap \mathcal{R}(A_2^*)\} - \dim\{\mathcal{R}(A_{12}^*) \cap \mathcal{R}(A_{22}^*)\} = n_1,$$

(b) La sous-matrice X_3 est unique si et seulement si

$$\dim\{\mathcal{R}(A_1^*) \cap \mathcal{R}(A_2^*)\} - \dim\{\mathcal{R}(A_{11}^*) \cap \mathcal{R}(A_{21}^*)\} = n_2,$$

(c) La sous-matrice X_2 est unique si et seulement si

$$\dim\{\mathcal{R}(A_1^*) \cap \mathcal{R}(A_2^*)\} - \dim\{\mathcal{R}(A_{12}^*) \cap \mathcal{R}(A_{22}^*)\} = n_1,$$

et

$$\dim\{\mathcal{R}(A_1^*) \cap \mathcal{R}(A_2^*)\} - \dim\{\mathcal{R}(A_{11}^*) \cap \mathcal{R}(A_{21}^*)\} = n_2.$$

Démonstration. Nous prouvons seulement (a), notons que

$$X_1 = R_1 X_0 R_1^* + V_1 F_A R_1^* + R_1 F_A V_1^* + R_1 F_{A_1} U F_{A_2} R_1^* + R_1 F_{A_2} U F_{A_1} R_1^*.$$

Alors X_1 est unique si et seulement si $R_1 F_A = R_1 F_{A_1} = R_1 F_{A_2} = 0$.

$$R_1 F_A = R_1 F_{A_1} = R_1 F_{A_2} = 0 \Leftrightarrow r(R_1 F_A) = r(R_1 F_{A_1}) = r(R_1 F_{A_2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_1 + r \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} - r(A) = 0 \\ n_1 + r(A_{12}) - r(A_1) = 0 \\ n_1 + r(A_{22}) - r(A_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r(A) = r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + n_1 \\ r(A_1) = r(A_{12}) + n_1 \\ r(A_2) = r(A_{22}) + n_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dim\{\mathcal{R}(A_1^*) \cap \mathcal{R}(A_2^*)\} - \dim\{\mathcal{R}(A_{12}^*) \cap \mathcal{R}(A_{22}^*)\} = n_1,$$

□

Chapitre 3

Caractérisation de formes spéciales de solutions hermitiennes et communes hermitiennes d'équations matricielles

$$A_1X_1A_1^* = B_1 \text{ et } A_2X_2A_2^* = B_2$$

3.1 Introduction

la partition des matrices est l'un des concepts fondamentaux de la théorie des matrices. De nombreuses propriétés en peuvent être dérivées.

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{pmatrix}$ une partition de la solution hermitienne de l'équation matricielle

$$AXA^* = B. \tag{3.1}$$

Y.Liu et Y.Tian [14], donnent quelques formules pour le rang maximal et le rang minimal des sous-matrices X_1 , X_2 et X_3 . Ils ont également déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour que les sous-matrices soient nulles ou uniques. Dans [9], l'auteur établit les inerties maximales et minimales des deux sous-matrices X_1 et X_3 dans une solution hermitienne à rang minimal de l'équation matricielle (3.1), et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces sous-matrices soient définies positives (non positives, négatives, non négatives). Dans [38], les auteurs calculent les rangs maximal et minimal des sous-matrices dans les solutions à moindres carrés de l'équation $AXB = C$. De ces formules, ils dérivent des conditions nécessaires et suffisantes pour que les sous-matrices soient nulles, et ont établi autres formes spéciales.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques formules pour les rangs maximaux, minimaux de $A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*$ soumis aux solutions hermitiennes d'une paire d'équation matricielle consistante $A_1X_1A_1^* = B_1$ et $A_2X_2A_2^* = B_2$, à partir de ces formules, nous établissons des caractérisations de certaines classes de solutions des équations données, et nous dérivons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution

hermitienne commune de la paire d'équations matricielles et nous donnons deux formes spéciales pour cette solution impliquant les sous-matrices dans une solution hermitienne des équations $A_1X_1A_1^* = B_1$ et $A_2X_2A_2^* = B_2$.

3.2 Caractérisation de formes spéciales de solutions hermitiennes et communes hermitiennes des équations matricielles $A_1X_1A_1^* = B_1$ et $A_2X_2A_2^* = B_2$

Considérons la paire d'équations matricielles

$$A_1XA_1^* = B_1 \quad \text{et} \quad A_2XA_2^* = B_2. \quad (3.2)$$

Ces équations matricielles peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}) X \begin{pmatrix} A_{11}^* \\ A_{12}^* \end{pmatrix} &= B_1, \\ (A_{21}, A_{22}) X \begin{pmatrix} A_{21}^* \\ A_{22}^* \end{pmatrix} &= B_2. \end{aligned}$$

où $A_{11} \in \mathbb{C}^{m_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{C}^{m_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{C}^{m_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{m_2 \times n_2}$.

On définit les ensembles \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_{ij} comme suit

$$\mathcal{S}_1 = \{X_1 \in \mathbb{C}_H^n \mid A_1X_1A_1^* = B_1\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{S}_2 = \{X_2 \in \mathbb{C}_H^n \mid A_2X_2A_2^* = B_2\}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{S}_{ij} = \{X_{ij} \in \mathbb{C}_H^n \mid X_i = \begin{pmatrix} X_{i1} & X_{i2} \\ X_{i2}^* & X_{i3} \end{pmatrix}\}, \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

où $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$ et $X_i = \begin{pmatrix} X_{i1} & X_{i2} \\ X_{i2}^* & X_{i3} \end{pmatrix}$ est une partition de la solution hermitienne de $A_iX_iA_i^* = B_i$ pour $i = 1, 2$.

Dans ce chapitre, on va établir des formules explicites de

$$\min_{X_1 \in \mathcal{S}_1, X_2 \in \mathcal{S}_2} r(A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*), \quad (3.6)$$

$$\max_{X_1 \in \mathcal{S}_1, X_2 \in \mathcal{S}_2} r(A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*), \quad (3.7)$$

où $D_i \in \mathbb{C}^n$.

Et nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les ensembles $\mathcal{S}_{1j} \cap \mathcal{S}_{2j}$ ne soient pas vides, et en conséquence, nous obtenons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions hermitiennes communes de (3.2). En fin, nous prouverons que

si $X_{12} = X_{22}$ alors $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{23} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{13} \end{pmatrix}$ sont des solutions hermitiennes commune de l'équation (3.2).

Nous donnons d'abord quelques lemmes nécessaires dans la suite.

Lemme 3.2.1. [15, 28] Soient $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $C \in \mathbb{C}^{p \times m}$ des matrices données, supposons que $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(C^*)$. Alors,

$$\max_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} r[A - BXC - (BXC)^*] = \min \left\{ r(A, C^*), r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.8)$$

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} r[A - BXC - (BXC)^*] = 2r(A, C^*) + r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\max_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} i_{\pm}[A - BXC - (BXC)^*] = i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{n \times p}} i_{\pm}[A - BXC - (BXC)^*] = r(A, C^*) + i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\max_{X \in \mathbb{C}^{n \times m}} r[A - BX - (BX)^*] = \min \left\{ m, r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.12)$$

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{n \times m}} r[A - BX - (BX)^*] = r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - 2r(B), \quad (3.13)$$

$$\max_{X \in \mathbb{C}^{n \times m}} i_{\pm}[A - BX - (BX)^*] = i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\min_{X \in \mathbb{C}^{n \times m}} i_{\pm}[A - BX - (BX)^*] = i_{\pm} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - r(B). \quad (3.15)$$

Lemme 3.2.2. [33] Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l \times n}$, $B_1 \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $C_1 \in \mathbb{C}^{q \times n}$ des matrices données, $Y \in \mathbb{C}^{k \times n}$, $Z \in \mathbb{C}^{m \times l}$, $U \in \mathbb{C}^{p \times q}$ des matrices variables. Alors

$$\min_{Y, Z} r(A - BY - ZC) = r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} - r(B) - r(C), \quad (3.16)$$

$$\min_{Y, Z, U} r(A - BY - ZC - B_1UC_1) = r \begin{pmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(B) - r(C). \quad (3.17)$$

Lemme 3.2.3. Soient $A \in \mathbb{C}_H^n$, $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B_i \in \mathbb{C}_H^m$ et $D_i \in \mathbb{C}^n$ des matrices données pour $i = 1, 2$, supposons que les équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$ possèdent une solution hermitienne. Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 définis comme dans (3.3) et (3.4). Alors

$$\max_{X_1 \in \mathcal{S}_1, X_2 \in \mathcal{S}_2} r(A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*) = \min \{ r(A, D_1, D_2), r(L_1) - 2r(A_1) - 2r(A_2) \}, \quad (3.18)$$

$$\min_{X_1 \in \mathcal{S}_1, X_2 \in \mathcal{S}_2} r(A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*) = 2r(A, D_1, D_2) + r(L_1) - 2r(L_2), \quad (3.19)$$

où

$$L_1 = \begin{pmatrix} A & D_1 & D_2 & 0 & 0 \\ D_1^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ D_2^* & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A_1 & 0 & \pm B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & \pm B_2 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} A & D_1 & D_2 \\ D_1^* & 0 & 0 \\ D_2^* & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Démonstration. D'après le lemme 2.1.1 (2.3), les solutions hermitiennes générales de la paire d'équations matricielles dans (3.2) peuvent être écrites comme suit :

$$X_1 = A_1^+ B_1 (A_1^+)^* + F_{A_1} V_1 + V_1^* F_{A_1}, \quad (3.20)$$

$$X_2 = A_2^+ B_2 (A_2^+)^* + F_{A_2} V_2 + V_2^* F_{A_2}, \quad (3.21)$$

où les matrices $V_1, V_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont arbitraires.

En remplaçant (3.20) et (3.21) dans $A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*$, on obtient

$$\begin{aligned} A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^* &= A \pm D_1A_1^+ B_1 (A_1^+)^* D_1^* \pm D_1F_{A_1} V_1 D_1^* \pm D_1V_1^* F_{A_1} D_1^* \\ &\quad \pm D_2A_2^+ B_2 (A_2^+)^* D_2^* \pm D_2F_{A_2} V_2 D_2^* \pm D_2V_2^* F_{A_2} D_2^* \\ &= H - KXL - (KXL)^*, \end{aligned}$$

où $H = A \pm D_1A_1^+ B_1 (A_1^+)^* D_1^* \pm D_2A_2^+ B_2 (A_2^+)^* D_2^*$, $K = (D_1F_{A_1}, D_2F_{A_2})$, $L^* = (D_1, D_2)$,
 $X = \begin{pmatrix} \mp V_1 & 0 \\ 0 & \mp V_2 \end{pmatrix}$.

on applique lemme 3.2.1 (3.8) et (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \max_{X_1 \in \mathcal{S}_1, X_2 \in \mathcal{S}_2} r(A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*) &= \max_X r(H - KXL - (KXL)^*) \\ &= \min \left\{ r(H, L^*), r \begin{pmatrix} H & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \min_{X_1 \in \mathcal{S}_1, X_2 \in \mathcal{S}_2} r(A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*) &= \min_X r(H - KXL - (KXL)^*) \\ &= 2r(H, L^*) + r \begin{pmatrix} H & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} H & K \\ L & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En appliquant (1.21), (1.22), les opérations élémentaires sur les matrices en blocs et simplifier par $[A_1 A_1^+ B_1, A_2 A_2^+ B_2] = [B_1, B_2]$ aux matrices en blocs sur le côté droit de (3.22) et (3.23), on obtient

$$\begin{aligned}
 r \begin{pmatrix} H & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} H & D_1 F_{A_1} & D_2 F_{A_2} \\ F_{A_1} D_1^* & 0 & 0 \\ F_{A_2} D_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} H & (D_1, D_2) F \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^* \\ D_2^* \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A \pm D_1 A_1^+ B_1 (A_1^+)^* D_1^* \pm D_2 A_2^+ B_2 (A_2^+)^* D_2^* & D_1 & D_2 & 0 & 0 \\ & D_1^* & & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ & D_2^* & & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ & 0 & & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} A & D_1 & D_2 & 0 & 0 \\ D_1^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ D_2^* & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ \mp B_1 (A_1^+)^* D_1^* & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp B_2 (A_2^+)^* D_2^* & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} A & D_1 & D_2 & 0 & 0 \\ D_1^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ D_2^* & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A_1 & 0 & \pm B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & \pm B_2 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r(L_1) - 2r(A_1) - 2r(A_2), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r \begin{pmatrix} H & K \\ L & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H & D_1 F_{A_1} & D_2 F_{A_2} \\ D_1^* & 0 & 0 \\ D_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} H & D_1 & D_2 & 0 & 0 \\ D_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} A & D_1 & D_2 \\ D_1^* & 0 & 0 \\ D_2^* & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2) \\
 &= r(L_2) - r(A_1) - r(A_2), \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(H, L^*) &= r(A \pm D_1 A_1^+ B_1 (A_1^+)^* D_1^* \pm D_2 A_2^+ B_2 (A_2^+)^* D_2^*, D_1, D_2) \\
 &= r(A, D_1, D_2). \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

En remplaçant (3.24), (3.25) et (3.26) dans (3.22) et (3.23) on obtient (3.18) et (3.19). \square

Dans ce qui suit, les solutions hermitiennes $X_1 \in \mathcal{S}_1$ et $X_2 \in \mathcal{S}_2$ sont considérées comme une matrice en blocs de 2×2 telles que $X_1 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{13} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{23} \end{pmatrix}$, où $X_{i1} \in \mathbb{C}_H^{n_1}$, $X_{i2} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ et $X_{i3} \in \mathbb{C}_H^{n_2}$, pour $i = 1, 2$, tel que $n_1 + n_2 = n$. On note que les sous-matrices inconnues X_{i1}, X_{i2}, X_{i3} pour $i = 1, 2$ peuvent être réécrites comme suit :

$$X_{i1} = (I_{n_1}, 0) X_i \begin{pmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix} := P_1 X_i P_1^*,$$

$$X_{i2} = (I_{n_1}, 0) X_i \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{pmatrix} := P_1 X_i P_2^*,$$

$$X_{i3} = (0, I_{n_2}) X_i \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{pmatrix} := P_2 X_i P_2^*.$$

Théorème 3.2.4. Soient $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$ pour $i = 1, 2$, on définit \mathcal{S}_{1j} et \mathcal{S}_{2j} pour $j = 1, 2, 3$ comme suit :

$$\mathcal{S}_{1j} = \left\{ X_{1j} \mid X_1 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{13} \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{S}_{2j} = \left\{ X_{2j} \mid X_2 = \begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{23} \end{pmatrix} \right\},$$

où X_1 et X_2 sont les solutions hermitiennes de $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$ respectivement. Noter également,

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & -A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & -B_2 \end{pmatrix}.$$

Alors

1. $\mathcal{S}_{11} \cap \mathcal{S}_{21} \neq \emptyset$ si et seulement si $r \begin{pmatrix} 0 & M_1^* \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix} = 2r(M_1)$,
2. $\mathcal{S}_{13} \cap \mathcal{S}_{23} \neq \emptyset$ si et seulement si $r \begin{pmatrix} 0 & M_2^* \\ M_2 & N_1 \end{pmatrix} = 2r(M_2)$,
3. $\mathcal{S}_{12} \cap \mathcal{S}_{22} \neq \emptyset$ si et seulement si $r \begin{pmatrix} 0 & M_2^* \\ M_1 & N \end{pmatrix} = r(M_1) - r(M_2)$.

Démonstration. On remarque que $\mathcal{S}_{11} \cap \mathcal{S}_{21} \neq \emptyset$ est équivalent à $\min_{X_{11} \in \mathcal{S}_{11}, X_{21} \in \mathcal{S}_{21}} r(X_{11} - X_{21}) = 0$.

Appliquer le lemme 3.2.3, on obtient

$$\begin{aligned} \min_{X_{11} \in \mathcal{S}_{11}, X_{21} \in \mathcal{S}_{21}} r(X_{11} - X_{21}) &= \min_{X_1 \in \mathcal{S}_1, X_2 \in \mathcal{S}_2} r(P_1X_1P_1^* - P_1X_2P_1^*) \\ &= 2r \begin{pmatrix} P_1 & P_1 \end{pmatrix} + r(G_1) - 2r(G_2), \end{aligned} \quad (3.27)$$

où

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_1 & 0 & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & -B_2 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_1 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

En simplifiant le rang de G_1 et G_2 , par les opérations élémentaires sur les matrices en blocs, on obtient

$$\begin{aligned} r(G_1) &= r \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_1 & 0 & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & -B_2 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^* & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22}^* \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & -B_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{11}^* & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22}^* \\ 0 & 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & -B_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{12}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_{11}^* & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & -B_2 \end{pmatrix} + 2n_1 \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & M_1^* \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix} + 2n_1, \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(G_2) &= r \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_1 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 & I_{n_1} & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + 2n_1 \\
 &= r(M_1) + 2n_1. \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

En remplaçant (3.28) et (3.29) dans (3.27), on obtient

$$\min_{X_{11} \in \mathcal{S}_{11}, X_{21} \in \mathcal{S}_{21}} r(X_{11} - X_{21}) = r \begin{pmatrix} 0 & M_1^* \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix} - 2r(M_1). \tag{3.30}$$

La preuve de (2) est similaire à celle de (1).

Ensuite, nous prouvons (3). $S_{12} \cap S_{22} \neq \emptyset$ est équivalent à $\min_{X_{12} \in S_{12}, X_{22} \in S_{22}} r(X_{12} - X_{22}) = 0$.

$$\begin{aligned} X_{12} - X_{22} &= P_1X_1P_2^* - P_1X_2P_2^* \\ &= D + P_1F_{A_1}V_{12} - P_1F_{A_2}V_{22} + V_{11}^*F_{A_1}P_2^* - V_{21}^*F_{A_2}P_2^* \\ &= D - PX - YQ = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $V_1 = (V_{11}, V_{12})$ et $V_2 = (V_{21}, V_{22})$ telles que $V_{11}, V_{21} \in \mathbb{C}^{n \times n_1}$ et $V_{12}, V_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n_2}$ sont arbitraires.

$$\begin{aligned} D &= P_1A_1^+B_1(A_1^+)^*P_2^* - P_1A_2^+B_2(A_2^+)^*P_2^*, \quad P = (P_1F_{A_1}, P_1F_{A_2}), \quad Q = \begin{pmatrix} F_{A_1}P_2^* \\ F_{A_2}P_2^* \end{pmatrix}, \\ X &= \begin{pmatrix} -V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = (-V_{11}^*, V_{21}^*). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.2.2 du côté gauche de (3.31) on obtient

$$\begin{aligned} \min_{X_{12} \in S_{12}, X_{22} \in S_{22}} r(X_{12} - X_{22}) &= \min_{X, Y} r(D - PX - YQ) \\ &= r \begin{pmatrix} D & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} - r(P) - r(Q). \end{aligned} \quad (3.32)$$

En appliquant les lemmes 1.4.1, 1.4.8 (1.21), les opérations élémentaires sur les matrices en blocs, et en simplifiant par $A_iA_i^+B_i = B_i$ pour $i = 1, 2$. on obtient

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} D & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} D & P_1F_{A_1} & P_1F_{A_2} \\ F_{A_1}P_2^* & 0 & 0 \\ F_{A_2}P_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} D & (P_1, P_1)F \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \\ E \begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2^* \\ P_2^* \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} P_1A_1^+B_1(A_1^+)^*P_2^* - P_1A_2^+B_2(A_2^+)^*P_2^* & P_1 & P_1 & 0 & 0 \\ & P_2^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ & P_2^* & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\ &= r \begin{pmatrix} 0 & P_1 & 0 & -P_1A_1^+B_1 & -P_1A_2^+B_2 \\ P_2^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_1^* & A_2^* \\ 0 & A_1 & -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r \begin{pmatrix} 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_1^* & A_2^* \\ 0 & A_1 & -A_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & 0 \\ I_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{11}^* & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ 0 & A_{11} & A_{12} & -A_{11} & -A_{12} & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^* \\ 0 & 0 & 0 & -A_{12}^* & A_{22}^* \\ A_{12} & -A_{11} & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & B_2 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) + n_1 + n_2 \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & M_2^* \\ M_1 & N \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) + n, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(P) &= r(P_1F_{A_1}, P_1F_{A_2}) \\
 &= r \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2) + n_1 \\
 &= r(M_1) - r(A_1) - r(A_2) + n_1, \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(Q) &= r \begin{pmatrix} F_{A_1}P_2^* \\ F_{A_2}P_2^* \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \\ P_2 & P_2 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & -A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2) + n_2 \\
 &= r(M_2) - r(A_1) - r(A_2) + n_2. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

En remplaçant (3.33), (3.34) et (3.35) dans (3.32) on obtient

$$\min_{X_{12} \in \mathcal{S}_{12}, X_{22} \in \mathcal{S}_{22}} r(X_{12} - X_{22}) = r \begin{pmatrix} 0 & M_2^* \\ M_1 & N \end{pmatrix} - r(M_1) - r(M_2). \quad (3.36)$$

Ce qui montre (3). □

Corollaire 3.2.5. *L'hypothèse et les symboles sont les mêmes que dans le théorème 3.2.4. Alors*

$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

- (a) $r \begin{pmatrix} 0 & M_1^* \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix} = 2r(M_1)$,
- (b) $r \begin{pmatrix} 0 & M_2^* \\ M_2 & N_1 \end{pmatrix} = 2r(M_2)$,
- (c) $r \begin{pmatrix} 0 & M_2^* \\ M_1 & N \end{pmatrix} = r(M_1) - r(M_2)$.

Théorème 3.2.6. *Soient $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$ pour $i = 1, 2$ supposons que les équations matricielles dans (3.2) ont des solutions hermitiennes et supposons que $X_{12} = X_{22}$. Alors Les matrices $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{23} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{13} \end{pmatrix}$ sont deux solutions hermitiennes communes de la paire d'équations matricielles dans (3.2).*

Démonstration. D'après le lemme 2.1.2, la solution hermitienne commune générale de la paire d'équations dans (3.2) peut être écrite comme :

$$X = X_0 + VF_A + F_AV^* + F_{A_1}UF_{A_2} + F_{A_2}U^*F_{A_1}, \quad (3.37)$$

où X_0 est une solution commune hermitienne spéciale de la paire d'équations dans (3.2), $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ et $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont arbitraires.

Aussi, pour $i = 1, 2$ on a,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{i1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} X_i(P_1^*, 0) := R_1 X_i R_1^*, \\ \begin{pmatrix} 0 & X_{i2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} X_i(0, P_2^*) := R_1 X_i R_2^*, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_{i2}^* & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} X_i(P_1^*, 0) := R_2 X_i R_1^*, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{i3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} X_i(0, P_2^*) := R_2 X_i R_2^*. \end{aligned}$$

On note que $R_1 + R_2 = I_n$, donc

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{22} \\ X_{12}^* & X_{23} \end{pmatrix} = X_1R_1^* + X_2R_2^*, \quad (3.38)$$

$$\begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{21} & X_{12} \\ X_{22}^* & X_{13} \end{pmatrix} = X_1R_2^* + X_2R_1^*. \quad (3.39)$$

Alors

$$\begin{aligned} X - \begin{pmatrix} X_{11} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{23} \end{pmatrix} &= X - X_1R_1^* - X_2R_2^* \\ &= G + VF_A + F_AV^* + F_{A_1}UF_{A_2} + F_{A_2}U^*F_{A_1} - F_{A_1}V_1R_1^* - V_1^*F_{A_1}R_1^* \\ &\quad - F_{A_2}V_2R_2^* - V_2^*F_{A_2}R_2^* \\ &= G + VF_A + F_AV^* + F_{A_1}UF_{A_2} + F_{A_2}U^*F_{A_1} - F_{A_1}W_1 - V_1^*F_{A_1}R_1^* \\ &\quad - F_{A_2}W_2 - V_2^*F_{A_2}R_2^* \\ &= G - KY - ZL - K_1WL_1, \end{aligned} \quad (3.40)$$

où $G = X_0 - A_1^+B_1(A_1^+)^*R_1^* - A_2^+B_2(A_2^+)^*R_2^*$ et

$$K = (F_A, F_{A_1}, F_{A_2}), L^* = (F_A, R_1F_{A_1}, R_2F_{A_2}), K_1 = (F_{A_1}, F_{A_2}), L_1^* = (F_{A_2}, F_{A_1}),$$

$$Y^* = (-V, W_1^*, W_2^*), Z = (-V, V_1^*, V_2^*), W = \begin{pmatrix} -U & 0 \\ 0 & -U^* \end{pmatrix}.$$

En appliquant le lemme 3.2.2, on obtient

$$\min_{Y, Z, W} r(G - KY - ZL - K_1WL_1) = r \begin{pmatrix} G & K & K_1 \\ L & 0 & 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} G & K \\ L_1 & 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} G & K & K_1 \\ L & 0 & 0 \\ L_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(K) - r(L). \quad (3.41)$$

Appliquons le lemme 1.21 et simplifions par les opérations élémentaires sur les matrices en blocs, et par $A_iX_0A_i^* = B_i$ pour $i = 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} G & K & K_1 \\ L & 0 & 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} G & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} & F_{A_1} & F_{A_2} \\ F_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_1}R_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_2}R_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} G^* & F_A & R_1F_{A_1} & R_2F_{A_2} \\ F_{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} G^* & I_n & R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(A) - 2r(A_1) - 2r(A_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r \begin{pmatrix} 0 & I_n & R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_1X_0 & 0 & A_1 & 0 & -B_1 & 0 \\ -A_2X_0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & -B_2 \end{pmatrix} - r(A) - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & I_n & R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(A) - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(A) - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & A_1^* & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & A_2^* \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} - 2r(A_1) - 2r(A_2) + n, \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r \begin{pmatrix} G & K & K_1 \\ L & 0 & 0 \\ L_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} G & F_A & F_{A_1} & F_{A_2} & F_{A_1} & F_{A_2} \\ F_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_1}R_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_2}R_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} G & F_{A_1} & F_{A_2} \\ F_{A_1} & 0 & 0 \\ F_{A_2} & 0 & 0 \\ F_{A_1}R_1^* & 0 & 0 \\ F_{A_2}R_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \\ L_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(K) &= r \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ I_n & I_n & I_n \end{pmatrix} - r(A) - r(A_1) - r(A_2) \\ &= r(A) - r(A_1) - r(A_2) + n, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$r(L) = r \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \\ R_1 & R_2 \end{pmatrix} - r(A_1) - r(A_2). \quad (3.45)$$

En remplaçant (3.42), (3.43), (3.44) et (3.45) dans (3.41), on obtient

$$\min_{Y,Z,W} r(G - KY - ZL - K_1WL_1) = 0. \quad (3.46)$$

Alors, la matrice $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{23} \end{pmatrix}$ est une solution hermitienne commune de (3.2).

De la même méthode, nous montrons que $\begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} \\ X_{22}^* & X_{13} \end{pmatrix}$ est également une solution hermitienne commune de l'équation (3.2). \square

Chapitre 4

Sur la décomposition additive de la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$ et $AXA^* = B$

4.1 Introduction

Récemment, la recherche sur les équations matricielles linéaires a attiré plus d'attention et a eu beaucoup de résultats. De nombreux travaux sont traités sur la décomposition additive

$$A^- = B^- + C^-,$$

des inverses intérieurs de matrices, où A^- , B^- et C^- sont des solutions des équations matricielles $AX_1A = A$, $BX_2B = B$ et $CX_3C = C$ respectivement, voir [31].

En [29] Y. Tian a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que la solution d'équation matricielle linéaire $AXB = C$ s'écrive en sommes de deux solutions d'équations matricielles linéaires $A_1X_1B_1 = C_1$ et $A_2X_2B_2 = C_2$. Certaines applications concernent également les décompositions additives d'inverses intérieurs, et les décompositions de solutions d'équations matricielles $AXB = C$ en sommes de solutions des équations

$$A_1X_1B_1 = C_{11}, \quad A_1X_2B_2 = C_{12}, \quad A_2X_3B_1 = C_{21}, \quad A_2X_4B_2 = C_{22},$$

où $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $B = (B_1, B_2)$ et $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$, ont été obtenus. Ce travail a été étendu aux solutions hermitiennes d'équation matricielles $AXA^* = B$, $A_1X_1A_1^* = B_1$ et $A_2X_2A_2^* = B_2$, voir [30].

Nous considérons l'équation matricielle

$$AXB = C, \tag{4.1}$$

où $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m \times q}$, sont données et $X \in \mathbb{C}^{n \times p}$ est une matrice inconnue. Dans [28] La solution à rang minimal de (4.1) est la matrice X qui minimise le rang de

$C - AXB$, cette solution peut être écrite comme :

$$X = -TM^+S + T_1U + VS_1, \quad (4.2)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad T = (0 \quad I_n), \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, \quad T_1 = TF_M, \quad S_1 = E_MS,$$

et U, V sont arbitraires de types appropriées.

Soient

$$AXB = C, \quad A_1X_1B_1 = C_1, \quad A_2X_2B_2 = C_2. \quad (4.3)$$

Le but de ce chapitre est d'étudier la décomposition additive

$$X = X_1 + X_2, \quad (4.4)$$

pour les solutions à rang minimal des trois équations matricielles de (4.3). Comme applications, nous dérivons les conditions nécessaires et suffisantes pour la décomposition additive

$$C^- = A^- + B^- \quad (4.5)$$

soit possible, où A^- , B^- et C^- sont des inverses intérieurs à rang minimal de A, B et C respectivement. Ainsi que les décompositions de solutions à rang minimal d'équation matricielle $AXB = C$ en sommes de solutions de

$$A_1X_1B_1 = C_{11}, \quad A_1X_2B_2 = C_{12}, \quad A_2X_3B_1 = C_{21}, \quad A_2X_4B_2 = C_{22},$$

où $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $B = (B_1, B_2)$ et $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$.

Rappelons qu'une matrice A est nulle si et seulement si $r(A) = 0$. D'où deux matrices A et B du même type sont égales si et seulement si $r(A - B) = 0$, deux ensembles \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 formés en matrices du même type ont une matrice commune si et seulement si $\min_{A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2} r(A - B) = 0$, et $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$ si et seulement si $\max_{A \in \mathcal{S}_1} \min_{B \in \mathcal{S}_2} r(A - B) = 0$.

4.2 Sur la décomposition additive de la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$

Dans cette section, on rappelle quelques résultats nécessaires pour la suite

Lemme 4.2.1. [37] *Soient A, B et C des matrices données, et soient X et Y deux matrices variables telles que $A + BX + YC$ soit définie. Alors*

$$\min_{X, Y} r(A + BX + YC) = r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} - r(B) - r(C) = r(E_B A F_A). \quad (4.6)$$

Soient A, B_1, B_2, C_1 , et C_2 des matrices données, et soient X et Y deux matrices variables telles que $A + B_1XC_1 + B_2YC_2$ soit définie. Supposons aussi $\mathcal{R}(B_1) \subseteq \mathcal{R}(B_2)$ et $\mathcal{R}(C_2^*) \subseteq \mathcal{R}(C_1^*)$. Alors

$$\max_{X,Y} r(A + B_1XC_1 + B_2YC_2) = \left\{ r \begin{pmatrix} A & B_2 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} A \\ C_1 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.7)$$

considérons

$$AXB = C, \quad A_1X_1B_1 = C_1, \quad A_2X_2B_2 = C_2, \quad (4.8)$$

trois équations matricielles linéaires, où $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m \times q}$, $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B_i \in \mathbb{C}^{p \times q_i}$ et $C_i \in \mathbb{C}^{m_i \times q_i}$ pour $i = 1, 2$. On définit les ensembles \mathcal{S} et \mathcal{T} comme suit :

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}^{n \times p} | r(AXB - C) \text{ est minimal}\}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{T} = \{X_1 + X_2 \in \mathbb{C}^{n \times p} | r(A_1X_1B_1 - C_1) \text{ est minimal}, r(A_2X_2B_2 - C_2) \text{ est minimal}\}. \quad (4.10)$$

Théorème 4.2.2. Soient \mathcal{S} et \mathcal{T} définis comme dans (4.9) et (4.10), soient aussi

$$D = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} S \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad F = (T, T_1, T_2).$$

Alors,

- (a) $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, c-à-d, il existe $X \in \mathcal{S}$ et $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$ tel que $X = X_1 + X_2$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r(D, E) + r \begin{pmatrix} D \\ F \end{pmatrix} - r(D), \quad (4.11)$$

- (b) $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}, \text{ ou } \mathcal{R} \begin{pmatrix} B^* \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{pmatrix} C^* \\ A^* \end{pmatrix}, \text{ ou}$$

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r(D) - 2r(M) + r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} + r(C, A) + n + p, \quad (4.12)$$

- (c) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} T_1^* \\ T_2^* \end{pmatrix} \cap \mathcal{R} \begin{pmatrix} M_1^* & 0 \\ 0 & M_2^* \end{pmatrix} = \{0\}, \text{ ou } \mathcal{R} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \cap \mathcal{R} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \{0\}, \text{ ou}$$

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & M_2 & S_2 \end{pmatrix} + r(D) - 2r(M_1) - 2r(M_2). \quad (4.13)$$

Démonstration. On note que l'expression générale de la solution à rang minimal d'équations matricielles dans (4.8) peut être écrite respectivement comme :

$$X = -TM^+S + PU + VQ, \quad (4.14)$$

$$X_1 = -T_1M_1^+S_1 + P_1U_1 + V_1Q_1, \quad (4.15)$$

$$X_2 = -T_2M_2^+S_2 + P_2U_2 + V_2Q_2, \quad (4.16)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, T = (0, I_n), S = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, P = TF_M, Q = E_MS,$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} C_1 & A_1 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix}, T_1 = (0, I_n), S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, P_1 = T_1F_{M_1}, Q_1 = E_{M_1}S_1,$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} C_2 & A_2 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = (0, I_n), S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, P_2 = T_2F_{M_2}, Q_2 = E_{M_2}S_2,$$

où U, U_1, U_2, V, V_1, V_2 sont arbitraires de types appropriés.

Il est clair que $X = X_1 + X_2$ si et seulement si $r(X - X_1 - X_2) = 0$, dans ce cas

$$\begin{aligned} X - X_1 - X_2 &= -TM^+S + T_1M_1^+S_1 + T_2M_2^+S_2 + PU - P_1U_1 - P_2U_2 + VQ - V_1Q_1 - V_2Q_2 \\ &= -TM^+S + T_1M_1^+S_1 + T_2M_2^+S_2 + (P, P_1, P_2) \begin{pmatrix} U \\ -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix} + (V, -V_1, -V_2) \begin{pmatrix} Q \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \\ &= G + KX + YL, \end{aligned}$$

où $G = -TM^+S + T_1M_1^+S_1 + T_2M_2^+S_2$, et

$$K = (P, P_1, P_2), L = \begin{pmatrix} Q \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} U \\ -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix}, Y = (V, -V_1, -V_2)$$

Appliquons (4.6), on obtient

$$\begin{aligned} \min_{X, X_1, X_2} r(X - X_1 - X_2) &= \min_{X, Y} r(G + KX + YL) \\ &= r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} - r(K) - r(L) \end{aligned} \quad (4.17)$$

On applique (1.21) et le lemme 1.4.4 aux trois matrices en blocs du côté droit de (4.17) et en simplifiant par des opérations élémentaires sur les matrices en blocs, nous obtenons

$$r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} G & P & P_1 & P_2 \\ Q & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} G & TF_M & T_1F_{M_1} & T_2F_{M_2} \\ E_MS & 0 & 0 & 0 \\ E_{M_1}S_1 & 0 & 0 & 0 \\ E_{M_2}S_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} G & (T, T_1, T_2)F & \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \\ E \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} -TM^+S + T_1M_1^+S_1 + T_2M_2^+S_2 & T & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} M^*MM^* & 0 & 0 & M^*S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1^*M_1M_1^* & 0 & M_1^*S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2^*M_2M_2^* & M_2^*S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ TM^* & T_1M_1^* & T_2M_2^* & 0 & T & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & -M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & -M_2 & S_2 \\ T & T_1 & T_2 & 0 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2), \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(K) &= r(P, P_1, P_2) \\
 &= r(TF_M, T_1F_{M_1}, T_2F_{M_2}) \\
 &= r \left((T, T_1, T_2) - (T, T_1, T_2) \begin{pmatrix} M^+ & 0 & 0 \\ 0 & M_1^+ & 0 \\ 0 & 0 & M_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= r \begin{pmatrix} M^*MM^* & 0 & 0 & M^*M & 0 & 0 \\ 0 & M_1^*M_1M_1^* & 0 & 0 & M_1^*M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2^*M_2M_2^* & 0 & 0 & M_2^*M_2 \\ TM^* & T_1M_1^* & T_2M_2^* & T & T_1 & T_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} MM^* & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & M_1M_1^* & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2M_2^* & 0 & 0 & M_2 \\ TM^* & T_1M_1^* & T_2M_2^* & T & T_1 & T_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \\ T & T_1 & T_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2), \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(L) &= r \begin{pmatrix} E_M S \\ E_{M_1} S_1 \\ E_{M_2} S_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \left(\begin{pmatrix} S \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^+ & 0 & 0 \\ 0 & M_1^+ & 0 \\ 0 & 0 & M_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= r \begin{pmatrix} M^* M M^* & 0 & 0 & M^* S \\ 0 & M_1^* M_1 M_1^* & 0 & M_1^* S_1 \\ 0 & 0 & M_2^* M_2 M_2^* & M_2^* S_2 \\ M M^* & 0 & 0 & S \\ 0 & M_1 M_1^* & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & M_2 M_2^* & S_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2) \\
 &= r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & M_2 & S_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2). \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

En remplaçant (4.18), (4.19) et (4.20) dans (4.17), on obtient

$$\begin{aligned}
 \min_{X, X_1, X_2} r(X - X_1 - X_2) &= \min_{X, Y} r(G + KX + YL) \\
 &= r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & -M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & -M_2 & S_2 \\ T & T_1 & T_2 & 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & M_2 & S_2 \end{pmatrix} \\
 &\quad + r(M) + r(M_1) + r(M_2).
 \end{aligned}$$

L'inclusion $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ signifie que pour tout $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$, il existe $X \in \mathcal{S}$ tel que $X = X_1 + X_2$, c-à-d, $\min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) = 0$ pour tout $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$, ce qui équivaut à

$$\max_{X_1 + X_2 \in \mathcal{T}} \min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) = 0. \tag{4.21}$$

Appliquons le lemme 4.2.1 à $X - X_1 - X_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) &= \min_{U, V} r(-TM^+S - X_1 - X_2 + PV + UQ) \\
 &= r \begin{pmatrix} -TM^+S - X_1 - X_2 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} - r(P) - r(Q). \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

En remplaçant (4.15) et (4.16) dans les matrices en blocs dans (4.22), on obtient

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -TM^+S - X_1 - X_2 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G - P_1 U_1 - V_1 Q_1 - P_2 U_2 - V_2 Q_2 & TF_M \\ E_M S & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} G & TF_M \\ E_M S & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y (I_p \ 0) + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

où $Y = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix}$ et $Z = (-V_1, -V_2)$. Appliquons lemme 4.2.1 (4.7) et simplifions par les opérations élémentaires sur les matrices en blocs, on obtient

$$\begin{aligned} & \max_{Y,Z} r \left(\begin{pmatrix} G & TF_M \\ E_M S & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \min \left\{ r \begin{pmatrix} G & TF_M & I_n \\ E_M S & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & TF_M \\ E_M S & 0 \\ I_p & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & TF_M & P_1 & P_2 \\ E_M S & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \min \left\{ n + r(E_M S), p + r(TF_M), r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \max_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} \min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) &= \min \left\{ n - r(P), p - r(Q), r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} - r(P) - r(Q) \right\} \\ &= \min \left\{ r(M) - r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}, r(M) - r(C, A), r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} - r(P) - r(Q) \right\}. \end{aligned}$$

L'inclusion $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ est équivalente à

$$\max_{X \in \mathcal{S}} \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X - X_1 - X_2) = 0. \quad (4.23)$$

D'après (4.6) on a

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X - X_1 - X_2) &= \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X + T_1 M_1^+ S_1 + T_2 M_2^+ S_2 - P_1 U_1 - V_1 Q_1 - P_2 U_2 - V_2 Q_2) \\ &= \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X + T_1 M_1^+ S_1 + T_2 M_2^+ S_2 + (P_1, P_2) \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix} + (-V_1, -V_2) \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}) \\ &= r \begin{pmatrix} X + T_1 M_1^+ S_1 + T_2 M_2^+ S_2 & P_1 & P_2 \\ Q_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(P_1, P_2) - r \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X + T_1 M_1^+ S_1 + T_2 M_2^+ S_2 & P_1 & P_2 \\ Q_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} TM^+ S + T_1 M_1^+ S_1 + T_2 M_2^+ S_2 + PU + VQ & P_1 & P_2 \\ Q_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 \\ Q_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ensuite en appliquant (4.7), on obtient

$$\begin{aligned} & \max_{U,V} r \left(\begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 \\ Q_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \min \left\{ r \begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 & I_n \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 \\ Q_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 \\ I_p & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \min \left\{ n + r \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, p + r(P_1, P_2), r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \max_{X \in \mathcal{S}} \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X - X_1 - X_2) &= \min \left\{ n - r(P_1, P_2), p - r \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & K \\ L & 0 \end{pmatrix} - r(P_1, P_2) \right. \\ &\quad \left. , -r \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \min \left\{ n + r(M_1) + r(M_2) - r \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, p + r(M_1) + r(M_2) - r \begin{pmatrix} S_1 & M_1 & 0 \\ S_2 & 0 & M_2 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} S_1 & M_1 & 0 \\ S_2 & 0 & M_2 \end{pmatrix} - r(D) + 2r(M_1) + 2r(M_2) \right\}. \end{aligned}$$

□

Rappelons que les inverses intérieurs A^- , B^- et C^- sont des solutions de trois équations matricielles $AX_1A = A$, $BX_2B = B$, $CX_3C = C$, respectivement. L'application du théorème 4.2.2 aux trois équations précédentes donne la conséquence suivante sur la décomposition additive dans (4.5).

Corollaire 4.2.3. *Soient*

$$\mathcal{S} = \{X \mid r(AXA - A) \text{ est minimal}\},$$

$$\mathcal{T} = \{X_1 + X_2 \mid r(BX_1B - B) \text{ est minimal}, r(CX_2C - C) \text{ est minimal}\},$$

où X, X_1 et X_2 sont des inverses intérieurs de A, B et C respectivement. Alors

1. $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B+C \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & B \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \\ B & B \end{pmatrix} - r(A) - r(B) - r(C),$$

2. $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $A = 0$ ou $r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B+C \end{pmatrix} = r(A) + r(B) + r(C)$,

3. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R}(B^*) \cap \mathcal{R}(C^*) = \{0\}$ ou $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$ ou

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B+C \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} + r(B, C) + r(A) - 2r(A) - 2r(C).$$

Démonstration. D'après le théorème 4.2.2 (a), il existe des inverses intérieurs hermitiens A^-, B^- et C^- tel que $C^- = A^- + B^-$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & -M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & -M_2 & S_2 \\ T & T_1 & T_2 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & -M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & -M_2 & S_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

où $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} B & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} C & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

Par les opérations élémentaires, nous montrons que

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & -M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & -M_2 & S_2 \\ T & T_1 & T_2 & 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -B & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & I_m \\ 0 & I_n & 0 & I_n & 0 & I_n & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & -B & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & B & -B & -B & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & C & -C \end{pmatrix} + m + n \\ &= r \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 \\ -B & 0 & -B & 0 & -B \\ 0 & 0 & -B & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 \end{pmatrix} + n + m \\ &= r \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ -B & -B & -B \\ 0 & -B & C \end{pmatrix} + r(A) + r(C) + n + m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r \begin{pmatrix} A & 0 & C \\ 0 & B & 0 \\ B & 0 & B+C \end{pmatrix} + r(A) + r(C) + n + m \\
 &= r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B+C \end{pmatrix} + r(A) + r(B) + r(C) + n + m, \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & S \\ 0 & -M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & -M_2 & S_2 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -B & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & I_m \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -C \end{pmatrix} + m \\
 &= r \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C \end{pmatrix} + m \\
 &= r \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & -B & C \end{pmatrix} + r(A) + r(B) + r(C) + m, \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 \\ T & T_1 & T_2 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 \\ 0 & I_n & 0 & I_n & 0 & I_n \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & -B & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -C & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & -B & -B & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C \end{pmatrix} + n \\
 &= r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \\ B & B \end{pmatrix} + r(A) + r(B) + r(C) + n, \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

$$r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 \end{pmatrix} = 2r(A) + 2r(B) + 2r(C). \quad (4.28)$$

On substitue (4.25, 4.26, 4.27) et (4.28) dans (4.24), on obtient

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B+C \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & B \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \\ B & B \end{pmatrix} - r(A) - r(B) - r(C).$$

D'après le théorème 4.2.2 (b), $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $r(M) = r(A)$ ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r(D) - 2r(M) + 2r(A) + n + m,$$

ce qui est équivalent à, $A = 0$ ou

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B + C \end{pmatrix} = r(B) + r(C) - r(A).$$

D'après le théorème 4.2.2 (c), $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} T_1^* \\ T_2^* \end{pmatrix} \cap \mathcal{R} \begin{pmatrix} M_1^* & 0 \\ 0 & M_2^* \end{pmatrix} = \{0\},$$

ou

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \cap \mathcal{R} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \{0\},$$

ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & M_2 & S_2 \end{pmatrix} + r(D) - 2r(M_1) - 2r(M_2).$$

ce qui équivaut à

$$r \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = r(M_1) + r(M_2) + n, \quad (4.29)$$

ou

$$r \begin{pmatrix} S_1 & M_1 & 0 \\ S_2 & 0 & M_2 \end{pmatrix} = r(M_1) + r(M_2) + m, \quad (4.30)$$

ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & M_2 & S_2 \end{pmatrix} + r(D) - 2r(M_1) - 2r(M_2). \quad (4.31)$$

Par les opérations élémentaires, on obtient

$$r \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} + r(B) + r(C) + n,$$

et

$$r \begin{pmatrix} S_1 & M_1 & 0 \\ S_2 & 0 & M_2 \end{pmatrix} = r(B, C) + r(B) + r(C) + m.$$

En simplifiant les formules de rang dans (4.29), (4.30) et (4.31), on obtient le résultat dans le corollaire 4.2.3 (3). □

Considérons maintenant l'équation

$$AX = C. \quad (4.32)$$

On partitionne cette équation matricielle comme

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Corollaire 4.2.4. Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{C}^{m \times q}$ des matrices donnés et $X \in \mathbb{C}^{n \times q}$ est une matrice inconnue, supposons que l'équation (4.32) n'est pas consistante. On définit

$$\mathcal{S} = \{X \mid r(AX - C) \text{ est minimal}\},$$

$$\mathcal{T} = \{X_1 + X_2 \mid r(A_1 X_1 - C_1) \text{ est minimal}, r(A_2 X_2 - C_2) \text{ est minimal}\}.$$

Alors

1. $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} C & A & A \\ C_1 & A_1 & 0 \\ C_2 & 0 & A_2 \end{pmatrix} = r(A, C) + r(A).$$

2. $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $A = 0$ ou $r(E_A C) = r(C) = q$ ou

$$r \begin{pmatrix} C & A & A \\ C_1 & A_1 & 0 \\ C_2 & 0 & A_2 \end{pmatrix} = r(A, C) + r(A_1) + r(A_2) - r(A).$$

3. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R}(A_1^*) \cap \mathcal{R}(A_2^*)$,

$$\text{ou } r \begin{pmatrix} C_1 & A_1 & 0 \\ C_2 & 0 & A_2 \end{pmatrix} = r(A_1) + r(A_2) + q,$$

$$\text{ou } r \begin{pmatrix} C & A & A \\ C_1 & A_1 & 0 \\ C_2 & 0 & A_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} C_1 & A_1 & 0 \\ C_2 & 0 & A_2 \end{pmatrix} + 2r(A) - r(A_1) - r(A_2).$$

Démonstration. les résultats ci-dessus découlent du théorème 4.3.3, en remplaçant A par $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, C par $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, et $B = B_1 = B_2 = I_q$, et en simplifiant par les opérations élémentaires sur les matrices en blocs. □

une extension du théorème 4.2.2 est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.2.5. Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $B_i \in \mathbb{C}^{p \times q_i}$, $C \in \mathbb{C}^{m \times q}$ et $C_i \in \mathbb{C}^{m_i \times q_i}$ des matrices données, $i = 1, \dots, k$, et soient $AXB = C$, $A_1X_1B_1 = C_1, \dots, A_kX_kB_k = C_k$ sont $k + 1$ équation matricielle. On définit

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}^{n \times p} | r(AXB - C) \text{ est minimal}\}. \quad (4.34)$$

$$\mathcal{T} = \{X_1 + \dots + X_k \in \mathbb{C}^{n \times p} | r(A_1X_1B_1 - C_1) \text{ est minimal}, \dots, r(A_kX_kB_k - C_k) \text{ est minimal}\}. \quad (4.35)$$

Considérons

$$D = \begin{pmatrix} M & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -M_k \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} S \\ S_1 \\ \vdots \\ S_k \end{pmatrix}, \quad F = (T, T_1, \dots, T_2),$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -M_k \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_k \end{pmatrix}, \quad F_1 = (T_1, \dots, T_2).$$

Alors,

(a) $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, c-à-d, il existe $X \in \mathcal{S}$ et $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$ tel que $X = X_1 + X_2$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r(D, E) + r \begin{pmatrix} D \\ F \end{pmatrix} - r(D), \quad (4.36)$$

(b) $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$, ou $\mathcal{R} \begin{pmatrix} B^* \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{pmatrix} C^* \\ A^* \end{pmatrix}$, ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r(D) - 2r(M) + r \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} + r(C, A) + n + p, \quad (4.37)$$

(c) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R}(D_1^*) \cap \mathcal{R}(E_1^*) = \{0\}$, ou $\mathcal{R}(D_1) \cap \mathcal{R}(F_1) = \{0\}$, ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = r(D_1, F_1) - r \begin{pmatrix} D_1 \\ E_1 \end{pmatrix} + r(D) - 2r(D_1). \quad (4.38)$$

Démonstration. la preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 3.2.4. □

Remarque 4.2.6. Considérons

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X (B_1, B_2) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

une partition de l'équation $AXB = C$. Soient

$$A_1X_1B_1 = C_{11}, \quad A_1X_2B_2 = C_{12}, \quad A_2X_3B_1 = C_{21}, \quad A_2X_4B_2 = C_{22}, \quad (4.40)$$

quatre équations matricielles obtenue de (4.39). On définit \mathcal{S} et \mathcal{T} comme suit

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}^{n \times p} | r(AXB - C) \text{ est minimal}\}, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{T} = \left\{ \sum_{i=1}^4 X_i \in \mathbb{C}^{n \times p} \mid \begin{array}{l} r(A_1X_1B_1 - C_{11}) \text{ est minimal, } r(A_1X_2B_2 - C_{12}) \text{ est minimal,} \\ r(A_2X_3B_1 - C_{21}) \text{ est minimal, } r(A_2X_4B_2 - C_{22}) \text{ est minimal} \end{array} \right\}. \quad (4.42)$$

On peut appliquer le théorème 4.2.5 sur les cinq équations ci-dessus pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

4.3 Sur la décomposition additive de la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXA^* = B$

Nous avons besoin des lemmes suivants pour la suite

Lemme 4.3.1. [16, 27] Soient $A \in \mathbb{C}_H^n$ et $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ des matrices données. Alors, les rangs maximal et minimal de $A + BX + (BX)^*$ par rapport à $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ sont donnés par

$$\max_X r(A + BX + (BX)^*) = \min \left\{ m, r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.43)$$

$$\min_X r(A + BX + (BX)^*) = r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - 2r(B). \quad (4.44)$$

Lemme 4.3.2. [35] Soient $A \in \mathbb{C}_H^n$, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $C \in \mathbb{C}^{p \times m}$ des matrices données, supposons que $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(C^*)$. Alors,

$$\max_X r(A + BXC + (BXC)^*) = \min \left\{ r(A, C^*), r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.45)$$

$$\min_X r(A + BXC + (BXC)^*) = 2r(A, C^*) + r \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

considérons

$$AXA^* = B, \quad A_1X_1A_1^* = B_1, \quad A_2X_2A_2^* = B_2, \quad (4.47)$$

trois équations matricielles linéaires, où $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}_H^m$, $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$ pour $i = 1, 2$. On définit les ensembles \mathcal{S} et \mathcal{T} comme suit

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}^{n \times p} | r(AXA^* - B) \text{ est minimal}\}, \quad (4.48)$$

$$\mathcal{T} = \{X_1 + X_2 \in \mathbb{C}^{n \times p} | \begin{array}{l} r(A_1X_1A_1^* - B_1) \text{ est minimal, } r(A_2X_2A_2^* - B_2) \text{ est minimal} \end{array}\}. \quad (4.49)$$

Théorème 4.3.3. Soient \mathcal{S} et \mathcal{T} définis comme dans (4.9) et (4.10), soient aussi

$$D = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} T^* \\ T_1^* \\ T_2^* \end{pmatrix}.$$

Alors,

- (a) $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, c-à-d, il existe $X \in \mathcal{S}$ et $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$ tel que $X = X_1 + X_2$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} D \\ E^* \end{pmatrix} - r(D). \quad (4.50)$$

- (b) $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{pmatrix} B \\ A^* \end{pmatrix}$, ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} B \\ A^* \end{pmatrix} + r(M_1) + r(M_2) - r(M) + 2n. \quad (4.51)$$

- (c) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R} \begin{pmatrix} T_1^* \\ T_2^* \end{pmatrix} \cap \mathcal{R} \begin{pmatrix} M_1^* & 0 \\ 0 & M_2^* \end{pmatrix} = \{0\}$, ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ F & 0 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} + r(M) - r(M_1) - r(M_2). \quad (4.52)$$

Démonstration. On note que l'expression générale de la solution à rang minimal d'équations matricielles dans (4.47) peut être écrite respectivement comme :

$$X = -TM^+T^* + PU + U^*P^*, \quad (4.53)$$

$$X_1 = -T_1M_1^+T_1^* + P_1U_1 + U_1^*P_1^*, \quad (4.54)$$

$$X_2 = -T_2M_2^+T_2^* + P_2U_2 + U_2^*P_2^*. \quad (4.55)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}, \quad T = (0, \quad I_n), \quad P = TF_M,$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 \\ A_1^* & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = (0, \quad I_n), \quad P_1 = T_1F_{M_1},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} B_2 & A_2 \\ A_2^* & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = (0, \quad I_n), \quad P_2 = T_2F_{M_2}.$$

où U, U_1 et U_2 sont arbitraires de types appropriés.

Il est clair que $X = X_1 + X_2$ si et seulement si $r(X - X_1 - X_2) = 0$, dans ce cas

$$\begin{aligned} X - X_1 - X_2 &= -TM^+T^* + T_1M_1^+T_1^* + T_2M_2^+T_2^* + PU - P_1U_1 - P_2U_2 + U^*P^* - U_1^*P_1^* - U_2^*P_2^* \\ &= -TM^+T^* + T_1M_1^+T_1^* + T_2M_2^+T_2^* + (P, P_1, P_2) \begin{pmatrix} U \\ -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + (U^*, -U_1^*, -U_2^*) \begin{pmatrix} P \\ P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} \\ &= G + KX + (KX)^* \end{aligned}$$

où $G = TM^+T^* + T_1M_1^+T_1^* + T_2M_2^+T_2^*$, $K = (P, P_1, P_2)$, $L = \begin{pmatrix} Q \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} U \\ -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix}$,

et $Y = (V, -V_1, -V_2)$.

Appliquons (4.44), on obtient

$$\begin{aligned} \min_{X, X_1, X_2} r(X - X_1 - X_2) &= \min_X r(G + KX + (KX)^*) \\ &= r \begin{pmatrix} G & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} - 2r(K). \end{aligned} \quad (4.56)$$

On applique (1.22) et le lemme 1.4.4 aux matrices en blocs du côté droit de (4.56) et en simplifiant par des opérations élémentaires sur les matrices en blocs, nous obtenons

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} G & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} G & P & P_1 & P_2 \\ P^* & 0 & 0 & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} G & TF_M & T_1F_{M_1} & T_2F_{M_2} \\ F_M T^* & 0 & 0 & 0 \\ F_{M_1} T_1^* & 0 & 0 & 0 \\ F_{M_2} T_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} & G & & (T, T_1, T_2)F \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} T^* \\ T_1^* \\ T_2^* \end{pmatrix} & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r \begin{pmatrix} -TM^+T^* + T_1M_1^+T_1^* + T_2M_2^+T_2^* & T & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ T^* & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ T_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ T_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} M^*MM^* & 0 & 0 & M^*T^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1^*M_1M_1^* & 0 & M_1^*T_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2^*M_2M_2^* & M_2^*T_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ TM^* & T_1M_1^* & T_2M_2^* & 0 & T & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^* & 0 & 0 & 0 & M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &- 3r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & T^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & 0 & T_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 & T_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & T^* \\ 0 & -M_1 & 0 & T_1^* \\ 0 & 0 & -M_2 & T_2^* \\ T & T_1 & T_2 & 0 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2), \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(K) &= r(P, P_1, P_2) \\
&= r(TF_M, T_1F_{M_1}, T_2F_{M_2}) \\
&= r\left((T, T_1, T_2) - (T, T_1, T_2) \begin{pmatrix} M^+ & 0 & 0 \\ 0 & M_1^+ & 0 \\ 0 & 0 & M_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= r\left(\begin{pmatrix} M^*MM^* & 0 & 0 & M^*M & 0 & 0 \\ 0 & M_1^*M_1M_1^* & 0 & 0 & M_1^*M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2^*M_2M_2^* & 0 & 0 & M_2^*M_2 \\ TM^* & T_1M_1^* & T_2M_2^* & T & T_1 & T_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2)\right) \\
&= r\left(\begin{pmatrix} MM^* & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & M_1M_1^* & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2M_2^* & 0 & 0 & M_2 \\ TM^* & T_1M_1^* & T_2M_2^* & T & T_1 & T_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2)\right) \\
&= r\left(\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \\ T & T_1 & T_2 \end{pmatrix} - r(M) - r(M_1) - r(M_2),\right) \tag{4.58}
\end{aligned}$$

En remplaçant (4.57), (4.58) et dans (4.56), on obtient

$$\begin{aligned}
\min_{X, X_1, X_2} r(X - X_1 - X_2) &= \min_X r(G + KX + YL) \\
&= r\begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} - 2r\begin{pmatrix} D \\ E^* \end{pmatrix} + r(D).
\end{aligned}$$

L'inclusion $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ signifie que pour tout $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$, il existe $X \in \mathcal{S}$ tel que $X = X_1 + X_2$, c-à-d, $\min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) = 0$ pour tout $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$, ce qui est équivalent à

$$\max_{X_1 + X_2 \in \mathcal{T}} \min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) = 0. \tag{4.59}$$

Appliquons (4.44) à $X - X_1 - X_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) &= \min_U r(-TM^+T^* - X_1 - X_2 + PU + U^*P^*) \\
&= r\begin{pmatrix} -TM^+T^* - X_1 - X_2 & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix} - 2r(P). \tag{4.60}
\end{aligned}$$

En remplaçant (4.54) et (4.55) dans les matrices en blocs dans (4.60), on obtient

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -TM^+T^* - X_1 - X_2 & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G - P_1U_1 - U_1^*P_1^* - P_2U_2 - U_2^*P_2^* & P \\ & P^* \\ & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} G & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y (I_n \ 0) + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} Y^* \begin{pmatrix} P_1^* & 0 \\ P_2^* & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où $Y = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix}$. Appliquons (4.46) et simplifions par les opérations élémentaires sur les matrices en blocs, on obtient

$$\begin{aligned} & \max_Y r \left(\begin{pmatrix} G & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} Y^* \begin{pmatrix} P_1^* & 0 \\ P_2^* & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \min \left\{ r \begin{pmatrix} G & P & I_n \\ P^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & P & P_1 & P_2 \\ P^* & 0 & 0 & 0 \\ P_1^* & 0 & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \min \left\{ n + r(P^*), r \begin{pmatrix} G & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \max_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} \min_{X \in \mathcal{S}} r(X - X_1 - X_2) &= \min \left\{ n - r(P), r \begin{pmatrix} G & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} - 2r(P) \right\} \\ &= \min \left\{ r(M) - r \begin{pmatrix} B \\ A^* \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} B \\ A^* \end{pmatrix} - r(D) + 2r(M) - 2n \right\}. \end{aligned}$$

L'inclusion $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ est équivalente à

$$\max_{X \in \mathcal{S}} \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X - X_1 - X_2) = 0. \quad (4.61)$$

D'après (4.44) on a

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X - X_1 - X_2) &= \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X + T_1 M_1^+ T_1^* + T_2 M_2^+ T_2^* - P_1 U_1 - U_1^* P_1^* - P_2 U_2 - U_2^* P_2^*) \\ &= \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r \left(X + T_1 M_1^+ T_1^* + T_2 M_2^+ T_2^* + (P_1, P_2) \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix} + (-U_1^*, -U_2^*) \begin{pmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix} \right) \\ &= r \begin{pmatrix} X + T_1 M_1^+ T_1^* + T_2 M_2^+ T_2^* & P_1 & P_2 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2r(P_1, P_2). \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X + T_1 M_1^+ T_1^* + T_2 M_2^+ T_2^* & P_1 & P_2 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T M^+ T^* + T_1 M_1^+ T_1^* + T_2 M_2^+ T_2^* + P U + U^* P^* & P_1 & P_2 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U^* \begin{pmatrix} P^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ensuite en appliquant (4.45), on obtient

$$\begin{aligned} & \max_U r \left(\begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 \\ P_1^* & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U (I_n \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U^* (P^* \ 0 \ 0) \right) \\ &= \min \left\{ r \begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 & I_n \\ P_1^* & 0 & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & P_1 & P_2 & P \\ P_1^* & 0 & 0 & 0 \\ P_2^* & 0 & 0 & 0 \\ P^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \min \left\{ n + r \begin{pmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} G & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \max_{X \in \mathcal{S}} \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{T}} r(X - X_1 - X_2) = \min \left\{ n - r(P_1, P_2), r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} - 2r(P_1, P_2) - r(D) \right\} \\ &= \min \left\{ n + r(M_1) + r(M_2) - r \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} - r(D) + 2r(M_1) \right. \\ & \quad \left. + 2r(M_2) \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

L'application du théorème 4.3.3 aux trois équations $AX_1A = A$, $BX_2B = B$, $CX_3C = C$ donne la conséquence suivante sur la décomposition additive dans (4.5).

Corollaire 4.3.4. Soient A, B et $C \in \mathbb{C}_H^n$ des matrices données, on définit

$$\mathcal{S} = \{X \mid r(AXA - A) \text{ est minimal}\},$$

$$\mathcal{T} = \{X_1 + X_2 \mid r(BX_1B - B) \text{ est minimal}, r(CX_2C = C) \text{ est minimal}\},$$

X, X_1 et X_2 sont des inverses intérieurs de A, B et C respectivement. Alors

1. $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B + C \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & A \\ B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} - 2r(A) - 2r(B) - 2r(C) - m,$$

2. $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $A = 0$ ou $r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B + C \end{pmatrix} = r(B) + r(C) - r(A)$,

3. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R}(B^*) \cap \mathcal{R}(C^*) = \{0\}$ ou

$$r \begin{pmatrix} A & C \\ B & B + C \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} + r(A) - r(B) - r(C).$$

Démonstration. on remplace par $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} B & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} C & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$ dans le théorème 4.3.3 et en simplifiant par les opérations élémentaires sur les matrices en blocs. □

une extension du théorème 4.2.2 est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.3.5. *Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n}$, $B \in \mathbb{C}_H^m$, $B_i \in \mathbb{C}_H^{m_i}$, des matrices données, $i = 1, \dots, k$, soient aussi $AXA^* = B$, $A_1X_1A_1^* = B_1, \dots, A_kX_kA_k^* = B_k$ sont $k + 1$ équation matricielle. On définit*

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}_H^n | r(AXA^* - B) \text{ est minimal}\}, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{T} = \{X_1 + \dots + X_k \in \mathbb{C}_H^n | r(A_1X_1A_1^* - B_1) \text{ est minimal}, \dots, r(A_kX_kA_k^* - B_k) \text{ est minimal}\}. \quad (4.63)$$

Considérons

$$D = \begin{pmatrix} M & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -M_k \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} -M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -M_k \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} T^* \\ T_1^* \\ \vdots \\ T_k^* \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} T_1^* \\ \vdots \\ T_k^* \end{pmatrix}.$$

Alors,

- (a) $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, c-à-d, il existe $X \in \mathcal{S}$ et $X_1 + X_2 \in \mathcal{T}$ tel que $X = X_1 + X_2$ si et seulement si

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} D \\ E^* \end{pmatrix} - r(D), \quad (4.64)$$

- (b) $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{pmatrix} B \\ A^* \end{pmatrix}$, ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} B \\ A^* \end{pmatrix} + r(D) - 2r(M) + 2n. \quad (4.65)$$

- (c) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{R}(E_1) \cap \mathcal{R}(-D_1) = \{0\}$, ou

$$r \begin{pmatrix} D & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} D_1 \\ E_1^* \end{pmatrix} + r(M) - r(D_1). \quad (4.66)$$

Démonstration. la preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 3.2.4. □

Bibliographie

- [1] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, Generalized inverses, theory and applications, Springer-Verlag New York, Inc, (2003).
- [2] A. Bjerhammar, A generalized matrix algebra, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm **1958** (1958), no. 124, 32 pp.
- [3] S. L. Campbell and C. D. Meyer, Jr., Generalized inverses of linear transformations, Corrected reprint of the 1979 original. Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [4] S. L. Campbell, C. D. Meyer, Generalized inverses of linear transformations, SIAM, Philadelphia, 2009.
- [5] N. Cohen, J. Dancis, Maximal rank Hermitian completions of partially specified Hermitian matrices, Linear Algebra Appl. **244** (1996) 265-276.
- [6] J. Groß, A note on the general Hermitian solution to $AXA^* = B$, Bull, Malays. Math. Soc. (2) **21** (1998), 57-62.
- [7] J. Groß, Nonnegative-definite and positive-definite solution to the matrix equation $AXA^* = B$ -revisited, Linear Algebra Appl. **321** (2000) 123-129.
- [8] S. Guerarra and S. Guedjiba, Common hermitian least-rank solution of matrix equation $A_1X_1A_1^*$ and $A_2X_2A_2^*$, Facta universitatis (Niš). Ser. Math. Inform, **5** (2015), 539-554.
- [9] S. Guerarra, Positive and negative definite submatrices in an hermitian least rank solution of the matrix equation $AXA^* = B$. Numerical Algebra, Control and Optimization. **9** (2019), 15-22.
- [10] E.V. Haynsworth, Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix, Linear Algebra Appl. **1** (1968) 73-81.
- [11] L. Hogben, Handbook of linear algebra.
- [12] C. G. Khatri and S. K. Mitra, Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations, SIAM J. Appl.Math. **31** (1976), 579-585.
- [13] C. K. Li, Y.T. Poon, Sum of Hermitian matrices with given eigenvalues : inertia, rank, and multiple eigenvalues, Canad. J. Math. **62** (2010) 109-132.
- [14] Y. Liu.Y. Tian, Extremal ranks of submatrices in an Hermitian solution to the matrix equation $AXA^* = B$ with applications, J. Appl. Math. Comput. **32** (2010), 289-301.

- [15] Y. Liu, Y. Tian, Max-min problems on the ranks and inertias of the matrix expressions $A - BXC \pm (BXC)^*$ with applications. *J. Optim. Theory Appl.* **148**, 593-622 (2011).
- [16] Y. Liu and Y. Tian, More on extremal ranks of the matrix expressions $ABXX^*B^*$ with statistical applications. *Numer. Linear Algebra Appl.* **15** (2008), 307-325.
- [17] Y. Liu, Y. Tian, Y. Takane, Ranks of Hermitian and skew-Hermitian solutions to the matrix equation $AXA^* = B$, *Linear Algebra Appl.* **431** (2009), 2359-2372.
- [18] G. Marsaglia and G.P.H Styan, Equalities and inequalities for ranks of matrices, *linear Multilinear Algebra* **2** (1974), 269-292.
- [19] W. Merahi and S. Guedjiba, Some properties of common hermitian solution of matrix equations $A_1XA_1^* = B_1$ and $A_2XA_2^* = B_2$, *Matematički Vesnik*, **3** (2019), 214-229.
- [20] E. H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.* **26** (1920), 394-395.
- [21] M. Z. Nashed, *Generalized Inverses, Theory and Applications*, Academic Press, NY(1976).
- [22] R. Penrose, A generalized inverse for matrices, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **51** (1955), 406-413.
- [23] R. Piziak, Full Rank Factorization of Matrices, *Mathematics Magazine* June 1999.
- [24] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, Wiley, New York, 1971.
- [25] Y. Tian, Equalities and inequalities for Hermitian solutions and Hermitian definite solutions of the two matrix equations $AX = B$ and $AXA^* = B$, *Aequationes Math.*, in press.
- [26] Y. Tian, Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications, *Linear Algebra Appl.* **433** (2010), 263-296.
- [27] Y. Tian and Y. Liu, Extremal ranks of some symmetric matrix expressions with applications. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **28** (2006), 890-905.
- [28] Y. Tian, Maximization and minimization of the rank and inertias of the Hermitian matrix expression $A - BX - (BX)^*$ with applications, *Linear Algebra Appl.* **434** (2011), 2109-2139.
- [29] Y. Tian, On additive decompositions of solutions of the matrix equation $AXB = C$, *Calcolo* (2010) **47** : 193-209.
- [30] Y. Tian, On Additive Decomposition of the Hermitian Solution of the Matrix Equation $AXA^* = B$, *Mediterr. J. Math.* **9** (2012), 47 – 60.
- [31] Y. Tian, G.P.H. Styan, On some matrix equalities for generalized inverses with applications. *Linear Algebra Appl.* **430**, 2716 – 2733(2009)
- [32] Y. Tian, Rank Equalities Related to Generalized Inverses of Matrices and Their Applications, Master Thesis, Montreal, Quebec, Canada (2000).

-
- [33] Y. Tian. Ranks and independence of solutions of the matrix equation $AXB+CYD = M$. Acta Math. Univ. Comenianae. **1** : 75-84, 2006.
- [34] Y. Tian, Some optimization problems on ranks and inertias of matrix-valued functions subject to linear matrix equation restrictions, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), no 1, 148-178.
- [35] Y. Tian, The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices, Southeast Asian Bull. Math. **25** (2002) 745-55.
- [36] Y. Tian, S. Cheng, The maximal and minimal ranks of $A - BXC$ with applications, N.Y. J. Math. **9** (2003) 345-362.
- [37] Y. Tian, Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverses. Linear Algebra Appl. **355**, 187-214 (2002).
- [38] F. Zhang, Y. Li, W.Guo, J.Zhao, Least squares solution with special structure to the linear matrix equation $AXB = C$.
- [39] F. Zhang, Matrix Theory Basic Results and Techniques, Second Edition, 2011.

Abstract

Moore-Penrose inverse is one of the most fundamental concepts in matrix theory, and is a powerful tool for solving matrix equations and establishing various rank equalities or inequalities for matrices. This work is divided into three parts, organized as follows.

In the first one, we study the common hermitian solution of matrix equation $A_1XA_1^* = B_1$ and $A_2XA_2^* = B_2$, and we provide necessary and sufficient conditions to have a common hermitian solution in the form $X = \frac{X_1 + X_2}{2}$, where X_1 and X_2 are the solution of $A_1XA_1^* = B_1$ and $A_2XA_2^* = B_2$ respectively. In addition, we determine maximal and minimal ranks of submatrices in a common hermitian solution and other results are established.

In the second part, we give some formulas for the maximal and minimal ranks of $A \pm D_1X_1D_1^* \pm D_2X_2D_2^*$ subject to the hermitian solutions of a consistent matrix equations $A_1X_1A_1^* = B_1$ and $A_2X_2A_2^* = B_2$, from these formulas we establish characterizations of some classes of solutions of the given equations.

In the third part, our work is concerned with additive decomposition of least rank solution of the matrix equations $AXB = C$ and $AXA^* = B$.

keywords

Moore-Penrose inverse, matrix equation, hermitian solution, submatrix, rank of a matrix.

ملخص

يعد معكوس مور-بنروز واحد من أكثر المفاهيم الأساسية في نظرية المصفوفات، وهو أداة قوية لحل معادلات المصفوفات وإنشاء متباينات مختلفة في رتب المصفوفات. و ينقسم هذا العمل إلى ثلاثة أجزاء منظمة على النحو التالي

في الجزء الأول: ندرس الحل الهرميتي المشترك للمعادلات $A_2 X_2 A_2^* = B_2$ و $A_1 X_1 A_1^* = B_1$

و نحدد الشروط اللازمة والكافية للحصول على حل هرميتي مشترك $X = \frac{X_1 + X_2}{2}$ ،

بحيث X_1 و X_2 يمثلان حلين هرميتيين للمعادلات السابقة. كما نقوم أيضا بتحديد الحد الأدنى والحد الأعلى لرتب المصفوفات الجزئية للحل الهرميتي المشترك للمعادلات السابقة بالإضافة إلى نتائج أخرى .

في الجزء الثاني: نقدم بعض الصيغ للرتب القصوى والدنيا للعبارة $A \pm D_1 X_1 D_1^* \pm D_2 X_2 D_2^*$ بحيث X_1 و X_2 يمثلان حلين هرميتيين للمعادلات $A_2 X_2 A_2^* = B_2$ و $A_1 X_1 A_1^* = B_1$ على التوالي، و من خلال هذه الصيغ نقوم بتحديد بعض الخواص المميزة لمجموعات خاصة لحلول المعادلات المعطاة .

في الجزء الثالث: ينصب عملنا على التفكيك التجميعي للحل الأصغر رتبة للمعادلات $AXB=C$ و $AXA^*=B$.

الكلمات الدالة:

معكوس مور _ بنروز، معادلة المصفوفة، الحل الهرميتي، مصفوفة جزئية، رتبة مصفوفة.