

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université de Batna 2
Mustafa BEN BOULAI
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire des Techniques Mathématiques
(LTM)



THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

**RECHERCHE DE TRAJECTOIRES OPTIMALES DANS UNE
CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS COMPLEXES :
SYSTÈME DE SCHRÖDINGER DU QUATRIÈME ORDRE**

Présentée Par
AKSAS Belkacem

Soutenue le : 14 décembre 2017

Membres du jury :

Président :	BENACER Rachid	Professeur	Université de Batna 2
Rapporteurs :	REBIAI Salah Eddine	Professeur	Université de Batna 2
Examineur :	GUEDJIBA Said	Professeur	Université de Batna 2
	AYADI Abdelhamid	Professeur	Université de Oum El Bouaghi
	MEROUANI Abou Bakr	Professeur	Université de Sétif 1
	MOKHTARI Zoheir	Professeur	Université de Biskra

Table des matières

1	Introduction	6
2	Contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec contrôles frontières $y = u_1$, $\Delta y = u_2$	13
2.1	Introduction	13
2.2	Existence et régularité de solution du problème adjoint	16
2.3	Une identité	18
2.4	Inégalité d'observabilité	26
2.5	Mise en place de la méthode HUM	29
3	Contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec un contrôle frontière de type Neumann	37
3.1	Introduction	37
3.2	Position du problème et résultats préliminaires	38
3.2.1	Quelques résultats d'existence et de régularité.	38
3.3	Une identité	41
3.4	Inégalité directe	46
3.5	Estimation d'observabilité ou inégalité inverse	49
3.6	Existence et régularité de solution du problème (2.3a) – (2.3e)	53
3.7	Résultat de contrôlabilité exacte	55
3.8	Contrôle optimal	57

4	Stabilisation de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec un feedback frontière de type Newmann.	60
4.1	Introduction	60
4.2	Choix du contrôle feedback	62
4.3	Bonne position du système (3.6a)-(3.6e)	65
4.4	Résultat de stabilisation exponentielle	69
5	Stabilisation de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec des contrôles frontières en position et en moment	79
5.1	Introduction	79
5.2	Préliminaires et choix des contrôles feedback	80
5.3	Formulation abstraite du système feedback	83
5.4	Résultat de stabilisation exponentielle	86
6	Stabilisation frontière et stabilisation interne de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre	100
6.1	Introduction	100
6.2	Démonstration du théorème 1	104
6.3	Démonstration du résultat de la stabilisation frontière	105
6.4	Démonstration du résultat de la stabilité interne	112
6.5	Démonstration du théorème 3	119

Remerciements

Il est naturel de remercier à la fin d'un tel travail tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible. C'est avec un enthousiasme certain que je profite de ces quelques lignes pour rendre hommage aux personnes qui ont participé à leur manière à la réalisation de cette thèse.

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, Mr. REBIAI Salah Eddine. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je souhaiterais remercier mes rapporteurs pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture de cette thèse et à l'élaboration de leur rapport.

Aussi je remercie les membres de jury pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Pour tous mes amis et mes collègues qui m'ont apporté leur soutien moral pendant ces années d'études, je les en remercie sincèrement.

Enfin, un très grand MERCI à toute ma famille qui m'a gratifié de son amour et fourni les motivations qui ont permis l'aboutissement de cette thèse. Je leur adresse toute ma gratitude du fond du cœur.

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et stabilisation uniforme pour un système gouverné par l'équation de Schrödinger de quatrième ordre dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^n . On montre deux résultats de contrôlabilité exacte en un temps $T > 0$ arbitrairement petit ; le premier dans l'espace V' (V' dual de $V = \{\varphi \in H^3(\Omega) ; \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Sigma\}$) avec deux contrôles frontières $y = u_1, \Delta y = u_2$ sur Σ , le second dans $H^{-2}(\Omega)$ avec contrôle frontière $u = \frac{\partial y}{\partial \nu}$ et $y = 0$ sur Σ . La méthode de démonstration repose dans les deux cas sur la méthode HUM introduite par Lions, les techniques de multiplicateur, et l'argument de compacité/unicité.

D'autre part, on établit sous des conditions géométriques sur le domaine Ω , des résultats de stabilisation frontière et interne.

Pour la stabilisation frontière, on montre, en introduisant des conditions aux limites dissipatives appropriées, que la solution décroît exponentiellement dans un espace d'énergie approprié. Pour la stabilisation interne, en supposant que le terme d'amortissement agit sur un voisinage d'une partie de la frontière, on montre que la solution décroît exponentiellement dans l'espace d'énergie $L^2(\Omega)$. La démonstration des deux résultats est basée sur les techniques de multiplicateur et l'argument de compacité/unicité.

Mots clés : Equation de Schrödinger de quatrième ordre, contrôlabilité exacte, stabilisation uniforme, contrôle frontière, contrôle interne.

Abstract

The purpose of this thesis, is the study of exact controllability and uniform stabilization for a system governed by a Schrödinger equation of the fourth order in a bounded domain Ω of \mathbb{R}^n . we prove two results of exact controllability in an arbitrarily short time $T > 0$, the first in the space V' (V' dual of $V = \{\varphi \in H^3(\Omega); \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ on } \Sigma\}$) with two boundary controls $y = u_1, \Delta y = u_2$ on Σ , The second in $H^{-2}(\Omega)$ with boundary control $u = \frac{\partial y}{\partial \nu}$ and $y = 0$ on Σ . In both cases, the proof relies on HUM method introduced by Lions, multiplier techniques and compactness / uniqueness argument. On the other hand, we establish under geometric conditions on the domain Ω , internal and boundary stabilization results. For the boundary stabilization, by introducing suitable dissipative boundary conditions, we prove that the solution decreases exponentially in an appropriate energy space. For the internal stabilization, by assuming that the damping term is effective on the neighborhood of the boundary, we prove the exponential decay of the $L^2(\Omega)$ energy of the solution. Both results are established by using multiplier techniques and compactness / uniqueness argument.

Keywords : Fourth order Schrödinger equation, Exact controllability, Uniform stabilization, Boundary control, Internal control

ملخص

الهدف من هذه الرسالة دراسة بعض مسائل المراقبة الدقيقة والإستقرارية المنتظمة لنظام مسير بمعادلة شرودنجر من الرتبة الرابعة معرفة على مجموعة محدودة Ω من \mathbb{R}^n .
أولاً نبين نتيجتين للمراقبة الدقيقة في مدة زمنية قصيرة كيفية.

- النتيجة الأولى مبينة في الفضاء الثنوي $\dot{V} \perp V$ بمراقبين $y = u_1$, $\Delta y = u_2$ على Σ حيث Γ على $V = \{\varphi \in H^3(\Omega) / \varphi = \Delta\varphi = 0\}$

- النتيجة الثانية مبينة في الفضاء $H^{-2}(\Omega)$ بمراقب $\frac{\partial y}{\partial \nu} = u$, $y = 0$ على Σ .
طريقة البرهان تعتمد في كلتا الحالتين على طريقة HUM (طريقة الوحداية الهلبارية) المقدمة من طرف Lions وتقنيات المضاعف وحجة التراص/الوحداية.

من جهة اخرى نبين تحت شروط هندسية على المجموعة Ω نتائج الايستقرارية النظامية : على Σ وبالداخل.

- من أجل الإيستقرارية على Σ نبين باستعمال شروط تبديد مناسبة أن الحل يتناقص أسياً في فضاء طاقة مناسب و من أجل الإيستقرارية بالداخل نفرض أن حد الإرجاع فعال في جوار جزء من Σ , في هذه الحالة نبين أن الحل يتناقص أسياً في فضاء الطاقة $L^2(\Omega)$. البرهان في كلتا النتيجتين يعتمد على تقنيات المضاعف و حجة التراص/الوحداية.

مفاتيح الكلمات: معادلة شرودنجر من الرتبة الرابعة, المراقبة الدقيقة, الإيستقرارية المنتظمة, المراقب على الحافة, المراقب بالداخل.

Chapitre 1

Introduction

L'équation de Schrödinger de quatrième ordre apparaît dans plusieurs domaines scientifiques, tels que la physique des plasmas, la communication optique, la physique atomique, la chimie ou encore la biologie, etc....

Les problèmes d'existence et d'unicité de solutions pour sa forme non-linéaire ont été intensivement étudié (voir, par exemple : [8], [9],[47], [20], [22], [15], [16] et leurs références).

Les problèmes de contrôle et de stabilisation des systèmes gouvernés par les équations de Schrödinger linéaires ou non linéaires ont reçu beaucoup d'attention au cours de ces dernières années. Les premiers travaux ont été consacrés à l'obtention des propriétés de contrôlabilité et de stabilisation pour les équations de Schrödinger de second ordre où le contrôle considéré est porté, soit sur la frontière, soit sur une région ω de l'intérieur d'un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Un des résultats certainement le plus général est due

à Lebeau [21] qui garantit que la condition de contrôle géométrique (CCG en abrégé) pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes est suffisante pour la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger linéaire de second ordre à chaque instant T (voir par exemple : [2], [3], [1], [11] et leurs références).

La condition CCG peut être formulé comme suit (voir par exemple [2], [3], [1], [11] et leurs références). Le sous domaine ω de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit à satisfaire la CCG au temps T si et seulement si chaque rayon de l'optique géométrique qui se propage à l'intérieur du domaine Ω et rebondisse sur sa frontière passe par ω en un temps t inférieur ou égal à T . Cette propriété géométrique est équivalente à la propriété de la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes avec contrôle agissant dans ω (voir par exemple [3]). Dans [35], Machtyngier a considéré le problème de la contrôlabilité exacte pour l'équation de Schrödinger linéaire de second ordre dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^n , dans les deux cas suivants : contrôle frontière de classe L^2 agissant sur la condition de Dirichlet, alors la contrôlabilité exacte est prouvée dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$, et contrôle interne de classe L^2 dont le support est un voisinage ω de la frontière $\partial\Omega$, alors la contrôlabilité exacte est prouvée dans l'espace $L^2(\Omega)$. Les deux résultats sont obtenus en combinant les techniques des multiplicateurs et la méthode HUM introduite par Lions [31]. Dans [36], Machtyngier et Zuazua ont étudié le problème de la stabilisation pour l'équation de Schrödinger linéaire de second ordre dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^n en deux situations différentes. Tout d'abord, le problème de la stabilisation frontière avec des conditions aux limites dissipatives est considéré et la méthode utilisée pour la démonstration de la décroissance exponentielle dans l'espace $H^1(\Omega)$ combine les techniques des multiplicateurs et la construction d'une fonction d'énergie. Ensuite, le problème de la stabilisation interne est considéré. Quand le terme d'amortissement est effectué sur un voisinage de la frontière, la décroissance exponentielle dans l'espace L^2 est obtenue à l'aide de l'adaptation des techniques des multiplicateurs développées dans le contexte de la stabilisation des équations des ondes et des plaques. Dans [27], Lasiecka et Triggiani ont étudié la contrôlabilité exacte par un contrôle frontière de type Dirichlet et la stabilisation uni-

forme de l'équation de Schrödinger linéaire de second ordre sur l'espace de la régularité optimale de cette équation via un opérateur de feedback dissipatif explicite, en déduisant que la théorie abstraite du problème de coût quadratique optimal sur un horizon infini avec une équation de Riccati algébrique associée est applicable au problème mixte de Schrödinger. Ceci fournit en particulier, un autre opérateur de feedback stabilisable, généralement non dissipatif, définie en fonction de l'opérateur de Riccati qui correspond. De plus, ils ont établi à l'aide de l'introduction d'une nouvelle variable que ces résultats sont encore valable pour l'équation des plaques, une équation très proche à l'équation de Schrödinger. Par conséquent, plusieurs résultats sur la contrôlabilité et la stabilisation de l'équation de Schrödinger de second ordre peuvent être obtenus des modèles correspondants pour les modèles des équations des plaques en se basant simplement sur la propriété que l'opérateur $\partial_t^2 + \Delta^2$ découlant des équations des plaques peut être décomposé en deux opérateurs conjugués de Schrödinger $(\partial_t - i\Delta)(\partial_t + i\Delta)$.

(voir par exemple [27], [5], [23], [25], [26], [37], [14], [4] et leurs références).

L'équation de Schrödinger est légèrement meilleure qu'une équation des ondes avec une vitesse infinie de propagation du point de vue de la contrôlabilité. En effet, un certain nombre de résultats montrent que, dans certaines situations où la CCG n'est pas satisfaite en tout temps T , on peut encore obtenir des résultats très satisfaisants pour l'équation de Schrödinger. Les deux résultats les plus significatifs dans cette direction sont : Le résultat de Jaffard [18] qui montre que, lorsque le domaine Ω est un carré, alors pour tout sous ensemble ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger linéaire de second ordre est satisfaite en tout temps $T > 0$ dans l'espace $L^2(\Omega)$ et avec des contrôles dans $L^2(\omega \times (0, T))$. Le résultat de N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [8] montre que l'équation de Schrödinger dans un domaine perforé, malgré l'existence de rayons piégés rebondissant entre deux trous, peut être contrôlée à partir d'un voisinage de la frontière extérieure dans chaque espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ avec $s > 0$. Bien que, aucun de ces résultats n'est vrai pour l'équation des ondes.

Pour les problèmes de contrôle de l'équation de Schrödinger nonlinéaire de second

ordre, on peut mentionner les travaux suivants. Dans [17], Illner, Lange et Teismann ont considéré la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger nonlinéaire de second ordre dans un intervalle fini $(-\pi, \pi)$ avec des conditions aux limites périodiques et avec un contrôle interne dont le support est un sous intervalle de $(-\pi, \pi)$. Ils ont montré que ce système est localement exactement contrôlable dans l'espace H^1 . Leur approche est basée sur la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) et le théorème du point fixe de Schauder. Lange et Teismann [22] ont considéré cette équation sur l'intervalle $(0, \pi)$ avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, et ils ont établi la contrôlabilité exacte locale dans l'espace $H_0^1(0, \pi)$ autour d'un état propre particulier. Dans [10], Dehman, Gérard et Lebeau ont étudié le problème de contrôle et de stabilisation d'une classe d'équations de Schrödinger nonlinéaires défocalisantes définies sur une variété Riemannienne bidimensionnelle compacte M sans conditions aux limites. Ils ont démontré, en particulier, que le système est localement contrôlable et exponentiellement stabilisable dans l'espace $H^1(M)$ en supposant que la condition de contrôle géométrique CCG et la propriété de la continuation unique sont satisfaites. La démonstration est basée sur un résultat de propagation des singularités et sur les estimations de dispersion (inégalités de type Strichartz) dues à Burq, Gérard et Tzvetzkov (voir [8], [9]). Dans [29], l'auteur s'est intéressé tout d'abord au problème de contrôle interne. Grâce aux méthodes d'analyse microlocale et l'utilisation des espaces de Bourgain, il a prouvé la stabilisation et la contrôlabilité en grand temps de l'équation de Schrödinger nonlinéaire sur un intervalle, puis sur une variété de dimension trois. De plus, il a étudié le problème de contrôle bilinéaire. Grâce à un effet régularisant, il a établi la contrôlabilité locale de l'équation de Schrödinger sur un intervalle avec une démonstration plus simple que celle existante déjà dans la littérature.

Les problèmes de contrôle de l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre ont été récemment considérés ([50],[52]). Dans [52], il a été montré que l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre avec un contrôle frontière L^2 de type Neumann est exactement contrôlable en un temps arbitrairement petit $T > 0$ dans $H^{-2}(\Omega)$.

Dans [50], les auteurs ont montré que l'équation avec un contrôle frontière, soit de type Dirichlet, soit de type Neumann et avec l'observation localisée associée est bien-posé au sens de Salamon [46] et régulier au sens de Weiss [48], [49]. Ils ont également établi un résultat de contrôlabilité exacte pour cette équation avec un contrôle frontière de type Dirichlet de classe L^2 . Ces résultats ainsi que celui de [52] ont leur permis de déduire la stabilité exponentielle de l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre avec un feedback dissipatif agissant soit sur les conditions aux limites de type Dirichlet, soit sur les conditions aux limites de type Neumann.

Un problème inverse pour l'équation de Schrödinger de quatrième ordre dans le cas uni-dimensionnel a été étudié dans [51].

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de quelques problèmes du contrôle et de stabilisation pour l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre. Le travail de cette thèse est organisé comme suit.

Dans le chapitre 1, on étudie le problème de la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre soumise à l'action de deux contrôles frontières $y = u_1$ et $\Delta y = u_2$ et sans conditions géométriques. Au début, on rappelle quelques résultats préliminaires concernant l'existence et la régularité de la solution faible du problème adjoint au problème homogène. Ensuite, on établit à l'aide des techniques des multiplieurs une identité qui nous permettra d'établir une estimation a priori : l'inégalité inverse, c'est-à-dire, l'inégalité d'observabilité qui est équivalente à la propriété de la contrôlabilité exacte. Enfin, en utilisant la méthode HUM introduite par Lions (voir [31], [32]) et des arguments de compacité/unicité, on obtient l'existence d'un contrôle frontière $u = (u_1, u_2)$ dans un espace approprié tel que la solution du problème considéré satisfait la condition d'équilibre $y(T) = 0$ dans Ω .

Dans le chapitre 2, on s'intéresse au problème de la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre soumise à un seul contrôle frontière de type Neumann $\frac{\partial y}{\partial \nu} = u$, appliqué à une partie de la frontière Σ . Tout d'abord, on donne un résultat d'existence, d'unicité et de régularité de solution. Ce résultat nous permettra

ensuite d'établir les estimations nécessaires pour aboutir à la contrôlabilité exacte dans l'espace $H^{-2}(\Omega)$. En appliquant la méthode HUM et en utilisant des arguments de compacité/unicité, on montre l'existence d'un contrôle frontière de type Neumann tel que la solution du système considéré satisfait la condition d'équilibre $y(T) = 0$ dans Ω . Enfin, on caractérise le contrôle donné par la méthode HUM comme celui qui minimise la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt$ sur le convexe

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma) \text{ tel que } y(T) = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Dans le chapitre 3, on s'intéresse au problème de la stabilisation uniforme dans l'espace d'énergie $H^{-2}(\Omega)$ pour l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre par un seul contrôle frontière agissant sur la condition de Neumann alors que la condition de Dirichlet est gardée homogène. On choisit la fonction de contrôle de telle façon que la norme dans $H^{-2}(\Omega)$ de la solution correspondante décroît quand t tend vers $+\infty$. En suite, on utilise comme dans ([23], [27], [42]) un argument de levage de la topologie de la solution basé sur un changement de variable qui transforme le problème initial à un problème dont les solutions sont assez régulières. Enfin, par la méthode des multiplicateurs on aboutit à des estimations qui nous permettront avec l'utilisation des arguments de compacité/unicité à l'obtention de la stabilisation uniforme du problème.

Dans le chapitre 4, on considère le problème de la stabilisation uniforme pour l'équation de Schrödinger de quatrième ordre par des contrôles frontières en position et en moment. Les deux fonctions de contrôle sont choisies de sorte que la solution correspondante décroît quand t tend vers $+\infty$ dans un espace d'énergie approprié. Pour établir la décroissance exponentielle de la solution, on procède comme dans le chapitre précédent. On opère un changement de variables pour transformer le problème initial à un problème dont les solutions sont assez régulières, et on utilise les techniques de multiplicateur et un argument de compacité/unicité.

Le chapitre 5 concerne l'étude de la stabilisation frontière et interne de l'équation de Schrödinger linéaire de quatrième ordre dans un domaine borné. Dans ce chapitre, on reprend le travail de l'article publié avec le professeur Mr. REBIAI Salah Eddine

dans le *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, intitulée “ Uniform stabilization of the fourth order Schrödinger equation”. Dans ce chapitre, on considère, tout d’abord le problème de la stabilisation frontière. En introduisant des conditions aux limites dissipatives appropriés, on montre que la solution décroît exponentiellement dans un espace d’énergie approprié. Dans le problème de stabilisation interne, en supposant que le terme d’amortissement agit sur un voisinage d’une partie de la frontière, on montre la décroissance exponentielle de la solution dans l’espace d’énergie $L^2(\Omega)$. Les deux résultats sont établis en utilisant les techniques de multiplicateur et des arguments de compacité/unicité.

Chapitre 2

Contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec contrôles frontières $y = u_1$,

$$\Delta y = u_2$$

2.1 Introduction

A travers ce chapitre, Ω est un domaine borné non vide dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) ayant une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^4 . Soit $T > 0$.

Dans Ω , on considère le problème non homogène pour l'équation de Schrödinger de quatrième ordre en $y(x, t)$:

$$iy_t + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.2)$$

$$y = u_1, \quad \Delta y = u_2 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T). \quad (1.3)$$

où : - $y : Q \rightarrow \mathbb{C}$ est l'état du système (1.1) – (1.3) c'est-à-dire : $y = y(x, t)$ est la solution du système (1.1) – (1.3).

- $u_1, u_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions de contrôle qui agissent sur la frontière Γ .

Soit V l'espace de Hilbert défini par

$$\begin{aligned} V &= D(A^{\frac{3}{4}}) \\ &= \{\varphi \in H^3(\Omega) : \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

où A est l'opérateur positif auto-adjoint défini par

$$\begin{aligned} Af &= \Delta^2 f \\ D(A) &= \{\varphi \in H^4(\Omega) : \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

On prend : $u_1 \in L^2(\Sigma)$, $u_2 \in [H^1(0, T; L^2(\Gamma))]'$ = espace dual de l'espace de Hilbert $H^1(0, T; L^2(\Gamma))$. On choisit comme espace des états l'espace $V' =$ dual de V .

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de la contrôlabilité exacte du système (1.1) – (1.3), qui consiste à analyser si on peut amener la solution $y = y(x, t)$ du système (1.1) d'un état initial y_0 donné dans l'espace V' à un état final fixé à l'avance y_T au temps $t = T$ (en particulier à $y_T = 0$) en agissant sur le système (1.1) – (1.3) par l'intermédiaire des fonctions de contrôle frontières u_1 et u_2 .

Si cela est possible, on dit que le système d'évolution (1.1) est exactement contrôlable à partir de y_0 au temps $T > 0$ et au moyen des fonctions de contrôle u_1 et u_2 .

L'équation de Schrödinger est l'une des équations fondamentales pour la mécanique quantique, comme l'est la loi de Newton en physique classique, on la retrouve pour décrire des phénomènes assez variés, que ce soit dans l'optique non linéaire (propagation d'un faisceau laser), la physique atomique (par exemple : supraconductivité), la physique des plasmas, la chimie ou encore la biologie, etc....

Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce type d'équation aux dérivées partielles qui apparaît comme un problème à part, assez délicat, puisque elle possède à la fois des

aspects paraboliques et hyperboliques. Elle est réversible en temps comme l'équation des ondes, mais sa vitesse de propagation est infinie ce qui est le cas de l'équation de la chaleur.

Les questions d'existence, d'unicité et de régularité des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire ou non-linéaire de quatrième ordre ont été étudiées par plusieurs auteurs (voir par exemple [38], [39], [50], [15], [16], [19]) par l'application de la méthode d'énergie, ou par l'utilisation des arguments de l'analyse harmonique.

Dans la littérature, on trouve plusieurs références concernant l'obtention des propriétés de la contrôlabilité exacte des systèmes d'évolution gouvernés par l'équation de Schrödinger linéaire ou non-linéaire de second ordre (voir par exemple [21], [13], [34], [35], [41], [28], [53], [17], [22], [43], [44], [30], [45]). Cependant les propriétés de la contrôlabilité exacte des systèmes d'évolution gouvernés par l'équation de Schrödinger linéaire ou non-linéaire de quatrième ordre restent encore, en cours de développement.

Dans ce chapitre, on établit une propriété de la contrôlabilité exacte du système d'évolution (1.1) – (1.3) à l'aide de l'utilisation des techniques de multiplicateur et de l'application de la méthode HUM “Hilbert Uniqueness Method” introduite par Jaques-Louis-Lions.

Plus précisément ; par les arguments de la dualité classique (voir par exemple [2]), la propriété de la contrôlabilité exacte est équivalente à une estimation d'observabilité (dite inégalité inverse) pour le système adjoint ; c'est-à-dire pour le système de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre non contrôlé

$$i\varphi_t + \Delta^2\varphi = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (1.6)$$

$$\varphi = \Delta\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \quad (1.7)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.8)$$

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans le premier paragraphe, on rappelle quelques résultats préliminaires concernant l'existence et la régularité de la solution faible du

problème adjoint (1.6)–(1.8) qui seront utilisés par la suite. Dans le deuxième paragraphe, on montre une identité pour l'équation de Schrödinger de quatrième ordre par un choix approprié du multiplicateur en tenant compte des conditions au bord. Dans le troisième paragraphe, on montre à l'aide de cette identité une estimation d'observabilité (inégalité inverse). Enfin dans le quatrième paragraphe, on résout le problème de la contrôlabilité exacte pour le système (1.1) – (1.3) par l'adaptation de la méthode HUM.

2.2 Existence et régularité de solution du problème adjoint

Considérons le problème non homogène suivant

$$i\theta_t + \Delta^2\theta = f \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (1.9)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.10)$$

$$\theta = \Delta\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T). \quad (1.11)$$

Le résultat concernant l'existence et la régularité de la solution du système (1.9) – (1.11) est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Pour toutes données $\theta_0 \in V$, $f \in L^1(0, T; V)$ il existe une solution faible unique $\theta = \theta(x, t)$ pour le système (1.9) – (1.11), avec*

$$\theta \in C(0, T; V)$$

En plus, l'application : $(\theta_0, f) \rightarrow \theta$ est linéaire continue de $V \times L^1(0, T; V) \rightarrow L^\infty(0, T; V)$ et dépend continuellement des données (θ_0, f) , c'est-à-dire, il existe une constante $C_T > 0$ (dépendant seulement de T) telle que

$$\|\theta(t)\|_V \leq C_T(\|\theta_0\|_V + \|f\|_{L^1(0, T; V)})$$

La démonstration de ce théorème peut être obtenue à l'aide de l'application de l'une des procédures suivantes :

- Méthode de Galerkin basée sur des décompositions de Fourier.
- Méthode variationnelle introduite par Lions et Magenes [33].
- Théorie de Hille-Yosida [40].

On considère maintenant le système homogène associé au système non homogène (1.9) – (1.11)

$$i\varphi_t + \Delta^2\varphi = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (1.12)$$

$$\varphi = \Delta\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \quad (1.13)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.14)$$

On a alors le résultat suivant.

Lemme 2.1 *Pour chaque temps $t > 0$, la solution $\varphi = \varphi(x, t)$ du système (1.12) – (1.14) satisfait les deux lois de conservation, à savoir :*

1)- *La loi de conservation de la charge (masse) :*

$$Q(t) = \int_{\Omega} |\varphi(x, t)|^2 dx = \int_{\Omega} |\varphi(x, 0)|^2 dx \quad (1.15)$$

2)- *La loi de conservation de l'énergie :*

$$E_{\varphi}(t) = E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Delta \varphi(x, t)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Delta \varphi(x, 0)|^2 dx = E_{\varphi}(0) = E_0 \quad (1.16)$$

Preuve. 1)- En multipliant l'EDP dans (1.12) par $\bar{\varphi}$, en intégrant par parties sur Ω et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\varphi(x, t)|^2 dx = 0$$

ce qui signifie que la norme L^2 de φ (la charge) reste constante le long du temps.

2)- En multipliant cette fois-ci l'EDP dans (1.12) par $\Delta\bar{\varphi}_t$, en intégrant par parties sur Ω et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0$$

■

2.3 Une identité

On cherche maintenant à établir une identité qui nous permettra dans la suite d'obtenir des estimations à priori nécessaires pour l'application de la méthode HUM au système (1.1) – (1.3).

Lemme 2.2 *Soit $h = h(x) \in C^3(\bar{\Omega})^n$ un champ de vecteurs. Alors, pour chaque solution $\theta = \theta(x, t)$ du problème (1.9) – (1.11) avec $\theta_0 \in D(\Omega)$ et $f \in D(Q)$, on a l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta\theta) \right)^2 h \cdot \nu d\Sigma - \operatorname{Re} \int_Q \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\theta) \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\bar{\theta}) dQ \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta\bar{\theta}) \Delta h \nabla \theta d\Sigma + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta\bar{\theta}) \nabla(\Delta h \cdot \nabla \theta) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta\theta) \cdot \Delta\bar{\theta} \cdot \nabla(\operatorname{div} h) dQ \\ &- \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta\bar{\theta}) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} d\Sigma + \int_Q \nabla(\Delta\bar{\theta}) \cdot \nabla \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta\bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T \\ &- \frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} \cdot h \nabla \theta d\Sigma + \operatorname{Re} \int_Q f h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \bar{f} \Delta h \nabla \theta dQ + \int_Q \bar{f} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ \\ &+ \frac{1}{2} \int_Q f \Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h dQ. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Preuve. En multipliant l'EDP dans (1.9) par $h \cdot \nabla(\Delta \bar{\theta})$, en intégrant par parties sur Q et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\operatorname{Re} \int_Q (i\theta_t + \Delta^2 \theta) h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ = \operatorname{Re} \int_Q f h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ$$

Ce qui implique

$$\operatorname{Re} \int_Q \Delta^2 \theta h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ - \operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ = \operatorname{Re} \int_Q f h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ$$

On effectue maintenant le calcul des intégrales

$$\operatorname{Re} \int_Q \Delta^2 \theta h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ, \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ.$$

Premièrement, on utilise la formule de Green pour calculer $\int_Q \Delta^2 \theta h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ$.

On a

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta^2 \theta h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \theta) h \nabla(\Delta \bar{\theta}) d\Sigma - \int_Q \nabla(\Delta \theta) \nabla(h \nabla(\Delta \bar{\theta})) dQ \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \theta) h \nabla(\Delta \bar{\theta}) d\Sigma - \int_Q \nabla(\Delta \theta) [\nabla h \nabla(\Delta \bar{\theta}) + h \nabla(\nabla(\Delta \bar{\theta}))] dQ \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \theta) h \nabla(\Delta \bar{\theta}) d\Sigma - \int_Q \nabla(\Delta \theta) \nabla h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ - \int_Q \nabla(\Delta \theta) h \nabla(\nabla(\Delta \bar{\theta})) dQ \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \theta) h \nabla(\Delta \bar{\theta}) d\Sigma - \int_Q \nabla(\Delta \theta) \nabla h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ - \frac{1}{2} \int_Q \nabla(|\nabla \Delta \theta|^2) h dQ \end{aligned}$$

D'après la formule de divergence

$$\operatorname{div}(\Psi q) = \nabla \Psi q + \Psi \operatorname{div} q$$

Pour $\Psi = |\nabla\Delta\theta|^2$ et $q = h$. On a

$$\frac{1}{2} \int_Q \nabla(|\nabla\Delta\theta|^2) h dQ = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\nabla\Delta\theta|^2 h \nu d\Sigma - \frac{1}{2} \int_Q |\nabla\Delta\theta|^2 \operatorname{div} h dQ.$$

En remplaçant maintenant dans l'expression de l'intégrale $\int_Q \Delta^2\theta h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta^2\theta h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\theta) h \nabla(\Delta\bar{\theta}) d\Sigma - \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta\theta) \nabla h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\nabla\Delta\theta|^2 h \nu d\Sigma + \frac{1}{2} \int_Q |\nabla\Delta\theta|^2 \operatorname{div} h dQ. \end{aligned}$$

De la condition au limite $\Delta\theta = 0$ sur Σ , on a

$$\begin{aligned} h \nabla(\Delta\bar{\theta}) &= h \nu \cdot (\nu \nabla(\Delta\bar{\theta})) = h \nu \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\bar{\theta}), \\ |\nabla\Delta\theta|^2 &= \left| \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\theta) \right|_{\text{sur}\Sigma}. \end{aligned}$$

Donc on déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_Q \Delta^2\theta h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} h \nu \left| \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\theta) \right|^2 d\Sigma - \operatorname{Re} \int_Q \nabla(\Delta\theta) \nabla h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q |\nabla\Delta\theta|^2 \operatorname{div} h dQ. \end{aligned}$$

Pour le calcul de $\operatorname{Im} \int_{\Sigma} \theta_t h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ$, on utilise la formule de divergence suivante

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\theta_t \Delta\bar{\theta} h) &= \theta_t \Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h + \nabla(\theta_t \Delta\bar{\theta}) h \\ &= \theta_t \Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h + [\nabla\theta_t \Delta\bar{\theta} + \theta_t \nabla(\Delta\bar{\theta})] h \\ &= \theta_t \Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h + \Delta\bar{\theta} h \nabla\theta_t + \theta_t h \nabla(\Delta\bar{\theta}) \\ &= \theta_t \Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h + \theta_t h \nabla(\Delta\bar{\theta}) + \frac{d}{dt}(\Delta\bar{\theta} h \nabla\theta) - \Delta\bar{\theta}_t h \nabla\theta \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_Q \operatorname{div}(\theta_t \Delta \bar{\theta} h) dQ = \int_{\Sigma} \theta_t \Delta \bar{\theta} h \nu d\Sigma = 0$$

alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \operatorname{div}(\theta_t \Delta \bar{\theta} h) dQ = \int_Q \theta_t \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ + \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ + \\ &\quad \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T - \int_Q \Delta \bar{\theta}_t h \nabla \theta dQ \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ = \int_Q \Delta \bar{\theta}_t h \nabla \theta dQ - \int_Q \theta_t \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ - \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T .$$

Mais comme

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta \bar{\theta}_t h \nabla \theta dQ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma - \int_Q \nabla \bar{\theta}_t (h \nabla \theta) dQ \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \int_Q \Delta (h \nabla \theta) \bar{\theta}_t dQ \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \int_Q \bar{\theta}_t \Delta (h \nabla \theta) dQ \end{aligned}$$

Utilisant maintenant la formule de dérivation suivante

$$\Delta (h \nabla \theta) = \Delta h \nabla \theta + h \nabla (\Delta \theta) + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}$$

pour déduire que

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta \bar{\theta}_t h \nabla \theta dQ &= \int_\Sigma \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \int_Q \bar{\theta}_t [\Delta h \nabla \theta + h \nabla (\Delta \theta) + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}] dQ \\ &= \int_\Sigma \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \int_Q \bar{\theta}_t \Delta h \nabla \theta dQ + \int_Q \bar{\theta}_t h \nabla (\Delta \theta) dQ + \int_Q \bar{\theta}_t (2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}) dQ \end{aligned}$$

En remplaçant dans la formule de l'intégrale $\int_Q \theta_t h \nabla (\Delta \bar{\theta}) dQ$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_Q \theta_t h \nabla (\Delta \bar{\theta}) dQ &= \int_\Sigma \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \int_Q \bar{\theta}_t \Delta h \nabla \theta dQ + \int_Q \bar{\theta}_t h \nabla (\Delta \theta) dQ \\ &+ \int_Q \bar{\theta}_t (2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}) dQ - \int_Q \theta_t \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ - \int_\Omega \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T . \end{aligned}$$

ce qui signifie que :

$$\begin{aligned} \int_Q \theta_t h \nabla (\Delta \bar{\theta}) dQ - \int_Q \bar{\theta}_t h \nabla (\Delta \theta) dQ &= \int_\Sigma \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \int_Q \bar{\theta}_t \Delta h \nabla \theta dQ \\ &+ \int_Q \bar{\theta}_t (2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}) dQ - \int_Q \theta_t \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ - \int_\Omega \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T . \end{aligned}$$

De ceci, on déduit que

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla (\Delta \bar{\theta}) dQ &= \int_\Sigma \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \int_Q \bar{\theta}_t \Delta h \nabla \theta dQ \\ &+ \int_Q \bar{\theta}_t (2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}) dQ - \int_Q \theta_t \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ - \int_\Omega \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T . \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ &= -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma - \frac{i}{2} \int_Q \bar{\theta}_t \Delta h \nabla \theta dQ \\ &- \frac{i}{2} \int_Q \bar{\theta}_t \left(2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{i}{2} \int_Q \theta_t \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T \end{aligned}$$

et comme $\theta_t = i\Delta^2 \theta - if$, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ &= -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma - \frac{i}{2} \int_Q (-i\Delta^2 \bar{\theta} + i\bar{f}) \Delta h \nabla \theta dQ \\ &- \frac{i}{2} \int_Q (-i\Delta^2 \bar{\theta} + i\bar{f}) \left(2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{i}{2} \int_Q (i\Delta^2 \theta - if) \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T \\ &= -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma - \frac{1}{2} \int_Q (\Delta^2 \bar{\theta}) \Delta h \nabla \theta dQ - \int_Q (\Delta^2 \bar{\theta}) \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ \\ &- \frac{1}{2} \int_Q (\Delta^2 \theta) \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ + \frac{1}{2} \int_Q \bar{f} \Delta h \nabla \theta dQ + \int_Q \bar{f} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_Q f \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T \\ &= -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \bar{\theta}) \Delta h \nabla \theta d\Sigma + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta \bar{\theta}) \nabla(\Delta h \nabla \theta) dQ \\ &- \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \bar{\theta}) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} d\Sigma + \int_Q \nabla(\Delta \bar{\theta}) \nabla \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \theta) \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h d\Sigma + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta \theta) \nabla(\Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \bar{f} \Delta h \nabla \theta dQ \\ &+ \int_Q \bar{f} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{1}{2} \int_Q f \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T . \end{aligned}$$

Mais comme on a

$$\begin{aligned} \int_Q \nabla(\Delta\theta)\nabla(\Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h)dQ &= \int_Q \nabla(\Delta\theta)[\nabla(\Delta\bar{\theta}) \operatorname{div} h + \Delta\bar{\theta}\nabla(\operatorname{div} h)]dQ \\ &= \int_Q |\nabla\Delta\theta|^2 \operatorname{div} h dQ + \int_Q \nabla(\Delta\theta)\Delta\bar{\theta}\nabla(\operatorname{div} h)]dQ. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta\bar{\theta})dQ &= -\frac{i}{2} \int_\Sigma \frac{\partial\bar{\theta}_t}{\partial\nu} h \nabla\theta d\Sigma - \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\bar{\theta})\Delta h \nabla\theta d\Sigma + \\ &\frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta\bar{\theta})\nabla(\Delta h \nabla\theta)dQ - \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\bar{\theta}) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} d\Sigma + \\ &\int_Q \nabla(\Delta\bar{\theta})\nabla\left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}\right)dQ - \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\theta)\Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h d\Sigma + \\ &\frac{1}{2} \int_Q |\nabla\Delta\theta|^2 \operatorname{div} h dQ + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta\theta)\Delta\bar{\theta}\nabla(\operatorname{div} h)]dQ \\ &+ \frac{1}{2} \int_Q \bar{f} \Delta h \nabla\theta dQ + \int_Q \bar{f} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}\right)dQ + \\ &\frac{1}{2} \int_Q f \Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h dQ + \frac{i}{2} \int_\Omega \Delta\bar{\theta} h \nabla\theta dx \Big|_0^T \end{aligned}$$

Puisque : $\Delta\theta = 0$ sur Σ , alors $\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta\theta)\Delta\bar{\theta} \operatorname{div} h d\Sigma = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ &= -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \bar{\theta}) \Delta h \nabla \theta d\Sigma + \\
&\frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta \bar{\theta}) \nabla(\Delta h \nabla \theta) dQ - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \bar{\theta}) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} d\Sigma + \\
&\int_Q \nabla(\Delta \bar{\theta}) \nabla \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{1}{2} \int_Q |\nabla \Delta \theta|^2 \operatorname{div} h dQ + \\
&\frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta \theta) \Delta \bar{\theta} \nabla(\operatorname{div} h) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \bar{f} \Delta h \nabla \theta dQ \\
&+ \int_Q \bar{f} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{1}{2} \int_Q f \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T
\end{aligned}$$

Enfin, en reportant ceci dans l'égalité

$$\operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ = \operatorname{Re} \int_Q \Delta^2 \theta h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ - \operatorname{Re} \int_Q f h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ$$

On obtient l'identité suivante

$$\begin{aligned}
&-\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} h \nabla \theta d\Sigma + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \bar{\theta}) \Delta h \nabla \theta d\Sigma \\
&+ \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta \bar{\theta}) \nabla(\Delta h \nabla \theta) dQ - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \bar{\theta}) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} d\Sigma \\
&+ \int_Q \nabla(\Delta \bar{\theta}) \nabla \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta \theta) \Delta \bar{\theta} \nabla(\operatorname{div} h) dQ \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} h \nu \left| \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta \theta) \right|^2 d\Sigma - \operatorname{Re} \int_Q \nabla(\Delta \theta) \nabla h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ - \\
&\operatorname{Re} \int_Q f h \nabla(\Delta \bar{\theta}) dQ - \frac{1}{2} \int_Q \bar{f} \Delta h \nabla \theta dQ - \\
&\int_Q \bar{f} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ - \frac{1}{2} \int_Q f \Delta \bar{\theta} \operatorname{div} h dQ
\end{aligned}$$

Mais

$$\int_Q \nabla(\Delta\theta) \nabla h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\theta) \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\bar{\theta}) dQ$$

Alors l'identité précédente peut être formulée comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta\theta) \right)^2 h \cdot \nu d\Sigma - \operatorname{Re} \int_Q \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\theta) \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta\bar{\theta}) dQ = \\ & -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta\bar{\theta}) \Delta h \nabla \theta d\Sigma + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta\bar{\theta}) \nabla(\Delta h \cdot \nabla \theta) dQ \\ & + \frac{1}{2} \int_Q \nabla(\Delta\theta) \cdot \Delta\bar{\theta} \cdot \nabla(\operatorname{div} h) dQ - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta\bar{\theta}) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} d\Sigma \\ & + \int_Q \nabla(\Delta\bar{\theta}) \cdot \nabla \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta\bar{\theta} h \nabla \theta dx \Big|_0^T \\ & - \frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} \cdot h \nabla \theta d\Sigma + \operatorname{Re} \int_Q f h \nabla(\Delta\bar{\theta}) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \bar{f} \Delta h \nabla \theta dQ \end{aligned}$$

■

2.4 Inégalité d'observabilité

Proposition 2.1 *Pour chaque $T > 0$, il existe une constante positive $C > 0$ (indépendante de T) telle que l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\|\varphi_0\|_V^2 \leq C \int_{\Sigma} \left[\left| \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 \right] d\Sigma. \quad (1.18)$$

pour chaque solution $\varphi = \varphi(x, t)$ du problème (1.12) – (1.14).

Preuve. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dans l'identité (1.17), posons $\theta = \varphi$, $h(x) = x - x_0$ et $f = 0$

On obtient

$$2 \int_Q |\nabla \Delta \varphi|^2 dQ = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right)^2 h \cdot \nu d\Sigma - \frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\varphi}_t}{\partial \nu} h \cdot \nabla \varphi d\Sigma + \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\varphi} h \nabla \varphi dx \Big|_0^T$$

Du fait que les normes $\{\int_{\Omega} |\nabla \Delta f|^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$ et $\|f\|_V$ sont équivalentes, on a

$$2 \int_Q |\nabla \Delta \varphi|^2 dQ \geq C \left\| A^{\frac{3}{4}} \varphi \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = C \left\| A^{\frac{3}{4}} \varphi_0 \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = CT \|\varphi_0\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2$$

$$\left| \frac{i}{2} \int_{\Omega} \Delta \bar{\varphi} h \nabla \varphi dx \Big|_0^T \right| \leq \frac{M_h}{2\epsilon} \|\nabla \varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \frac{\epsilon}{2} M_h c \|\varphi_0\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2.$$

$$\left| -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{\varphi}_t}{\partial \nu} h \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma \right| \leq \frac{M_h}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_t}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \frac{M_h}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma.$$

Ces inégalités nous permettront d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{M_h}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma &\geq CT \|\varphi_0\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 - \frac{M_h}{2\epsilon} \|\nabla \varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 - \frac{\epsilon}{2} M_h c \|\varphi_0\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 \\ &\quad - \frac{M_h}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_t}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma - \frac{M_h}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

ce qui veut dire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\left| \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \bar{\varphi}_t}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 \right] d\Sigma + \frac{1}{2\epsilon} \|\nabla \varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\ \geq \left(\frac{CT}{M_h} - \frac{\epsilon}{2} c \right) \|\varphi_0\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

■

On montre maintenant à l'aide de l'argument de compacité et d'unicité le lemme suivant.

Lemme 2.3 *Pour chaque $0 < T < +\infty$, il existe une constante positive C_T telle que :*

$$\|\nabla \varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \leq C_T \int_{\Sigma} \left[\left| \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \bar{\varphi}_t}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 \right] d\Sigma. \quad (1.20)$$

Preuve. On montre (1.20) par contradiction. On suppose que cette inégalité est fautive. Alors, il existe une suite de solutions $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour le problème (1.12) – (1.14)

sur $(0, T)$ telle que

$$\begin{aligned} i(\varphi_n)_t + \Delta^2 \varphi_n &= 0 && \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ \varphi_n = \Delta \varphi_n &= 0 && \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ \varphi_n(x, 0) &= \varphi_{n0} && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

et que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi_n\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 &= 1, \\ \int_{\Sigma} \left[\left| \frac{\partial \Delta \varphi_n}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_{nt}}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|^2 \right] d\Sigma &\longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

La suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait l'inégalité (1.19).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\left| \frac{\partial \Delta \varphi_n}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_{nt}}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|^2 \right] d\Sigma + 2 \frac{M_h}{\epsilon} \|\nabla \varphi_n\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}^2 \\ \geq (CT - 2\epsilon M_h) \|\varphi_{n0}\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2. \end{aligned}$$

Donc la suite $\{\varphi_{n0}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace V . On peut alors extraire une sous-suite notée encore $\{\varphi_{n0}\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\varphi_{n0} \rightharpoonup \tilde{\varphi}_0 \in V$ faiblement.

Soit maintenant $\tilde{\varphi}$ la solution du problème (1.12)–(1.14) correspondante à la condition initiale $\tilde{\varphi}_0 \in V$, il s'ensuit que

$$\varphi_n(t) \rightharpoonup \tilde{\varphi}(t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T; V)$$

Ceci implique que $\varphi_n(t)$ est uniformément borné dans $L^\infty(0, T; V)$, et puisque l'injection $V \subset H_0^1(\Omega)$ est compacte, on conclut qu'il existe une sous-suite notée encore $\{\varphi_n\}$ telle que

$$\varphi_n(t) \rightarrow \tilde{\varphi}(t) \text{ fortement dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

Donc

$$\|\nabla\tilde{\varphi}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 = 1$$

et

$$\frac{\partial\Delta\tilde{\varphi}}{\partial\nu} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu} = \frac{\partial\tilde{\varphi}_t}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Sigma$$

ce qui veut dire que la fonction $\tilde{\varphi}$ satisfait

$$\begin{aligned} i\tilde{\varphi}_t + \Delta^2\tilde{\varphi} &= 0 && \text{dans } Q, \\ \tilde{\varphi} = 0, \Delta\tilde{\varphi} &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial\Delta\tilde{\varphi}}{\partial\nu} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu} = \frac{\partial\tilde{\varphi}_t}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Alors pour $T > 0$ arbitrairement petit le théorème d'unicité de Holmgren implique

$$\tilde{\varphi} = 0 \text{ dans } Q$$

Ceci contredit $\|\nabla\tilde{\varphi}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 = 1$, d'où le résultat désiré. ■

2.5 Mise en place de la méthode HUM

Grâce à l'estimation d'observabilité (1.18) et au théorème 1, on définit la norme

$$\|\varphi_0\|_F = \left(\int_{\Sigma} \left(\left| \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right|^2 \right) d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

On considère l'espace de Hilbert

$$F = \text{complété de } V \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_F$$

De (1.18), on a

$$F \subset V, V' \subset F'$$

L'existence et l'unicité de la solution faible du problème non-homogène (1.1) – (1.3) est donnée par la méthode de transposition (voir par exemple [33]). Plus précisément, on suppose que $y_0 \in V', u_1 \in L^2(\Sigma)$ et $u_2 \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma))]'$, et soit $\theta = \theta(x, t)$ la solution unique du problème

$$i\theta_t + \Delta^2\theta = f \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (1.21)$$

$$\theta = \Delta\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \quad (1.22)$$

$$\theta(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.23)$$

où $f \in L^1(0, T ; V)$

En multipliant l'équation (1.1) par $\bar{\theta}$ où $\theta = \theta(x, t)$ est la solution du problème (1.21) – (1.23).

On intégrant sur Q , on obtient

$$0 = \int_Q (iy_t + \Delta^2 y)\bar{\theta} dQ = i \int_Q y_t \bar{\theta} dQ + \int_Q \Delta^2 y \bar{\theta} dQ$$

Utilisant la formule de Green, en tenant compte des conditions aux limites, on déduit que

$$\int_0^T \langle y(t), f(t) \rangle_{V' \times V} dt + \langle -iy(0), \theta(0) \rangle_{V' \times V} - \int_{\Sigma} u_1 \frac{\partial \Delta \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma - \int_{\Sigma} u_2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma = 0 \quad (1.24)$$

Donc, on a la définition suivante de la solution faible du problème (1.1) – (1.3).

Définition 2.1 *On dit que $y \in L^\infty(0, T ; V')$ est la solution au sens de transposition du*

problème (1.1) – (1.3) si et seulement si (1.24) est satisfaite pour chaque

$$f \in L^1(0, T; V), \text{ où } \theta \in C([0, T]; V)$$

est la solution du problème (1.21) – (1.23).

La proposition suivante revendique l'existence d'une solution unique du système (1.1) – (1.3) au sens de la méthode de transposition.

Proposition 2.2 Soit $u_1, \in L^2(\Sigma)$ et $u_2 \in [H^1(0, T; L^2(\Gamma))]'$. Alors il existe une unique solution $y \in C([0, T]; V')$ au sens de transposition pour le problème (1.1) – (1.3) avec la donnée initiale $y_0 \in V'$. De plus l'application

$$(u_1, u_2) \longrightarrow y$$

est linéaire et continue de $L^2(\Sigma) \times [H^1(0, T; L^2(\Gamma))]' \longrightarrow C(0, T; V')$.

Preuve. Sans perte de généralité et à cause de la réversibilité en temps du système (1.1) – (1.3), on suppose que $y_0 = 0$. Alors d'après le théorème 1, on a

$$\|\theta(t)\|_V \leq C_T \|f\|_{L^1(0, T; V)}; \forall t \in [0, T].$$

On définit maintenant la forme linéaire S par

$$\langle S, f \rangle = \int_{\Sigma} u_1 \frac{\partial \Delta \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma + \int_{\Sigma} u_2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma; \forall f \in L^1(0, T; V).$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\langle S, f \rangle| &\leq \left| \operatorname{Re} \int_{\Sigma} u_1 \frac{\partial \Delta \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma \right| + \left| \operatorname{Re} \int_{\Sigma} u_2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma \right| \leq \|u_1\|_{L^2(\Sigma)} \times \left\| \frac{\partial \Delta \bar{\theta}}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&\quad + \|u_2\|_{[H^1(0,T;L^2(\Gamma))]' } \times \left\| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} \\
&\leq C(\|u_1\|_{L^2(\Sigma)} + \|u_2\|_{[H^1(0,T;L^2(\Gamma))]' }) \|\theta(t)\|_V \\
&\leq C'(\|u_1\|_{L^2(\Sigma)} + \|u_2\|_{[H^1(0,T;L^2(\Gamma))]' }) \|f\|_{L^1(0,T;V)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $S : L^1(0, T ; V) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, ceci veut dire que S est un élément de $L^\infty(0, T ; V')$ le dual topologique de $L^1(0, T ; V)$. De plus on a

$$\|S\|_{L^\infty(0,T;V')} \leq C(\|u_1\|_{L^2(\Sigma)} + \|u_2\|_{[H^1(0,T;L^2(\Gamma))]' })$$

Donc d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $y \in L^\infty(0, T ; V')$ tel que

$$\langle y, f \rangle = \int_0^T \langle y(t), f(t) \rangle_{V' \times V} dt; \forall f \in L^1(0, T ; V).$$

D'après ce qui précède on a

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;V')} \leq C(\|u_1\|_{L^2(\Sigma)} + \|u_2\|_{[H^1(0,T;L^2(\Gamma))]' })$$

Ceci implique que l'application

$(u_1, u_2) \longrightarrow y$ est linéaire et continue de $L^2(\Sigma) \times [H^1(0, T ; L^2(\Gamma))]'$ sur $L^\infty(0, T ; V')$. De plus, $y \in C([0, T]; V')$.

En effet, soient $\{u_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de l'espace $D(0, T ; C^2(\Gamma))$ telles que : $u_1^n \longrightarrow u_1 \in L^2(\Sigma)$ et $u_2^n \longrightarrow u_2 \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma))]'$, et soit y_n la solution de (1.1) – (1.3) correspondantes aux conditions aux limites u_1^n et u_2^n . Alors

$y_n \in C([0, T]; V')$ et

$$\|y_n\|_{L^\infty(0,T;V')} \leq C(\|u_1^n\|_{L^2(\Sigma)} + \|u_2^n\|_{[H^1(0,T;L^2(\Gamma))]' })$$

et puisque

$$\begin{aligned} u_1^n &\longrightarrow u_1 \in L^2(\Sigma), \\ \text{et } u_2^n &\longrightarrow u_2 \in [H^1(0, T; L^2(\Gamma))]', \end{aligned}$$

alors $y_n \longrightarrow y$ dans $L^\infty(0, T; V')$ et puisque $C(0, T; V')$ est un sous espace fermé de l'espace $L^\infty(0, T; V')$, on déduit que $y \in C(0, T; V')$.

On introduit maintenant le problème rétrograde

$$i\psi_t + \Delta^2\psi = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (1.25)$$

$$\psi = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu}, \Delta \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right) \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \quad (1.26)$$

$$\psi(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.27)$$

où $\varphi = \varphi(x, t)$ est la solution du problème (1.12) – (1.14) avec $\varphi_0 \in F$ et $T > 0$ telle que l'inégalité inverse ait lieu.

La dérivée : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right)$ est prise au sens de la dualité entre l'espace $H^1(0, T; L^2(\Gamma))$ et son dual $[H^1(0, T; L^2(\Gamma))]',$ c'est-à-dire :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right), \omega \right\rangle_{[H^1(0, T; L^2(\Gamma))]' \times H^1(0, T; L^2(\Gamma))} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \frac{\partial \omega_t}{\partial t} d\Sigma, \forall \omega \in H^1(0, T; L^2(\Gamma)).$$

La solution $\psi = \psi(x, t)$ du problème (1.25) – (1.27) est définie par la méthode de transposition. On multiplie la première equation de (1.25) – (1.27) par $\bar{\theta}$ et on intègre sur Q . On trouve la formulation du problème rétrograde. Trouver $\psi \in L^\infty(0, T; V')$ qui vérifie $-i\psi(0) \in V' \subset F'$ tel que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \psi(t), f(t) \rangle_{V' \times V} dt + \langle -i\psi(0), \theta_0 \rangle_{F' \times F} - \\ &\int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \Delta \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} d\Sigma \\ &= 0, \forall (\theta_0, f) \in F \times L^1(0, T; V) \end{aligned}$$

pour toute solution θ du problème (1.21) – (1.23) où l'on a pris $f \in L^1(0, T ; V)$ et $\theta_0 \in F$.

Le terme $\int_Q \psi \bar{f} dx dt$ est interprété par la dualité entre $L^1(0, T ; V)$ et $L^\infty(0, T ; V')$ tandis que les termes $\int_\Sigma \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \Delta \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma$, $\int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \nu} d\Sigma$, $\int_\Sigma \frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{\theta}_t}{\partial \nu} d\Sigma$ ont un sens par la définition de l'espace F . D'après Lions (voir [31]), le problème (1.25) – (1.27) possède une solution ψ et une seule vérifiant $\psi \in L^\infty(0, T ; V')$ et $-i\psi(0) \in V' \subset F'$.

On définit maintenant l'application linéaire

$$\Lambda : F \longrightarrow F'$$

par

$$\Lambda \varphi_0 = -i\psi(0), \quad \forall \varphi_0 \in F. \quad (1.28)$$

En multipliant l'équation (1.25) par $\varphi = \varphi(x, t)$ la solution du problème homogène (1.12) – (1.14), et en intégrant par parties sur Q . On trouve

$$\langle -i\psi(0), \varphi_0 \rangle_{F' \times F} = \int_\Sigma \psi \frac{\partial \Delta \bar{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma + \int_\Sigma \Delta \psi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma$$

et des conditions aux limites (1.26), on obtient

$$\langle -i\psi(0), \varphi_0 \rangle_{F' \times F} = \int_\Sigma \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial \Delta \bar{\varphi}}{\partial \nu} \right) d\Sigma + \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma - \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma$$

et d'après la formule

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right), \omega \right\rangle_{[H^1(0, T; L^2(\Gamma))]' \times H^1(0, T; L^2(\Gamma))} = - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \frac{\partial \omega_t}{\partial t} d\Sigma, \quad \forall \omega \in H^1(0, T; L^2(\Gamma)).$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
\langle -i\psi(0), \varphi_0 \rangle_{F' \times F} &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial \Delta \bar{\varphi}}{\partial \nu} \right) d\Sigma + \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} \right) d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial \Delta \bar{\varphi}}{\partial \nu} \right) d\Sigma + \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_t}{\partial \nu} \right) d\Sigma. \\
&= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma, \forall \varphi_0 \in F.
\end{aligned}$$

et de (1.28), on a

$$\langle \Lambda \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{F' \times F} = \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma, \forall \varphi_0 \in F.$$

Soient maintenant $\varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \in F$, et soient φ et $\tilde{\varphi}$ les solutions correspondantes du système homogène (1.12) – (1.14).

Alors, il est facile de montrer que

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda \varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \rangle_{F' \times F} &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}}{\partial \nu} \right) d\Sigma + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu} \right) d\Sigma + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_t}{\partial \nu} \right) d\Sigma \\
&= (\varphi_0, \tilde{\varphi}_0)_F, \forall \varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \in F
\end{aligned}$$

où $(\cdot)_F$ est le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_F$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\langle \Lambda \varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \rangle_{F' \times F} \leq \|\varphi_0\|_F \|\tilde{\varphi}_0\|_F, \forall \varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \in F$$

et que

$$|\langle \Lambda \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{F' \times F}| \leq \|\varphi_0\|_F^2, \forall \varphi_0 \in F.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire

$$(\varphi_0, \tilde{\varphi}_0) \longrightarrow a(\varphi_0, \tilde{\varphi}_0) = \langle \Lambda \varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \rangle_{F' \times F}$$

est continue et coercive sur $F \times F$. Donc d'après le théorème de Lax-Milgram, Λ est un

isomorphisme de F sur F' . En particulier, pour tout $-i\psi(0) \in F'$, il existe un unique élément $\varphi_0 \in F$ tel que $\Lambda\varphi_0 = -i\psi(0)$. L'unicité de la solution du problème (1.25)–(1.27) assure que $\psi = y$. Par conséquent $y(T) = 0$.

Les contrôles u_1, u_2 sont alors données par

$$u_1 = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) \quad \text{sur } \Sigma,$$

où φ est la solution du problème (1.12) – (1.14) avec $\varphi_0 = \Lambda^{-1}(-iy(0))$.

Enfin, on observe que d'après les conditions aux limites du problème rétrograde (1.25) – (1.27),

$$\{u_1, u_2\} \in L^2(\Sigma) \times [H^1(0, T; L^2(\Gamma))]'.$$

■

Chapitre 3

Contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec un contrôle frontière de type Neumann

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^n , l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec un contrôle u dans la condition de Neumann agissant seulement sur une partie Γ_1 de la frontière de Ω . On établit à l'aide de HUM un résultat de contrôlabilité exacte dans $H^{-2}(\Omega)$ avec contrôle u dans la classe $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans le premier paragraphe, on commence par introduire quelques notations et puis on énonce des résultats préliminaires qui seront utilisés par la suite. Dans le deuxième paragraphe on montre notre résultat de contrôlabilité exacte.

3.2 Position du problème et résultats préliminaires

Soit $T > 0$ et soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) ayant une frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^3 . Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que : $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point fixé à l'extérieur de Ω tel que

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \quad (2.1)$$

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} \quad (2.2)$$

où $m(x) = x - x_0$ et $\nu(x)$ désigne le vecteur unitaire normal sortant en $x \in \Gamma$.

On considère dans Ω , l'équation de Schrödinger de quatrième ordre soumis à un contrôle frontière de type Neumann supporté sur Γ_1 .

$$iy_t + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.3a)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = u \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.3d)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.3e)$$

où $y : Q \rightarrow \mathbb{C}$ désigne la fonction d'état et $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ désigne la fonction de contrôle.

3.2.1 Quelques résultats d'existence et de régularité.

Dans ce paragraphe, on énonce quelques résultats d'existence et de régularité qui nous seront utiles pour l'application de la méthode HUM. Considérons le problème homogène

suivant

$$i\varphi_t + \Delta^2\varphi = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.4a)$$

$$\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (2.4b)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.4c)$$

L'espace naturel de l'énergie pour le système (2.4a) – (2.4c) est l'espace $H_0^2(\Omega)$ muni de la norme induite par le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \Delta f \overline{\Delta g(x)} dx$$

L'énergie $E(t)$ associé au problème (2.4a) – (2.4c) est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta\varphi|^2 dx \quad (2.5)$$

On a le résultat suivant d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.4a) – (2.4c).

Théorème 3.1 *Pour chaque donnée initiale $\varphi_0 \in H_0^2(\Omega)$, le problème admet (2.4a) – (2.4c) une solution unique $\varphi \in C([0, T]; H_0^2(\Omega))$, et si $\varphi_0 \in H^6(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, alors*

$$\varphi \in C([0, T]; H^6(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H_0^2(\Omega))$$

En plus, la solution du problème (2.4a) – (2.4c) satisfait les deux lois de conservation, à savoir la conservation de la charge et la conservation de l'énergie, c'est-à-dire

$$\|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0, \quad (2.6)$$

$$\|\Delta\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.7)$$

Preuve. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution, on réécrit le problème (2.4a) – (2.4c) sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait du premier ordre comme suit

$$\begin{aligned}\varphi_t &= A\varphi, \\ \varphi(0) &= \varphi_0,\end{aligned}$$

où A est l'opérateur non borné définie par

$$\begin{aligned}A &: D(A) \subset H_0^2(\Omega) \longrightarrow H_0^2(\Omega), \\ A\varphi &= i\Delta^2\varphi \text{ avec } D(A) = H^6(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).\end{aligned}$$

A est un opérateur fermé de domaine dense dans $H_0^2(\Omega)$. En plus iA est auto-adjoint. Donc A est le générateur infinitesimal d'un C_0 -groupe unitaire $\left\{ S(t) = e^{i\Delta^2 t} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$. Alors il s'en suit de la théorie des semigroupes que le problème (2.4a) – (2.4c) admet une solution unique

$$\begin{aligned}\varphi &\in C([0, T]; H_0^2(\Omega)) \text{ si } \varphi_0 \in H_0^2(\Omega), \\ \varphi &\in C([0, T]; H^6(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H_0^2(\Omega)) \text{ si } \varphi_0 \in H^6(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).\end{aligned}$$

Pour montrer (2.6), on multiplie l'équation (2.4a) par $\bar{\varphi}$, on intègre sur Ω et on prend la partie imaginaire, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\varphi(x, t)|^2 dx = 0$$

Ce qui signifie que la norme L^2 de φ (la charge) reste constante le long du temps.

Pour avoir (2.7), on multiplie l'équation (2.4a) par $\bar{\varphi}_t$ et on intègre sur Ω , on trouve

$$i \int_{\Omega} |\varphi_t|^2 dx + \int_{\Omega} \Delta^2 \varphi \bar{\varphi}_t dx = 0$$

De la formule de Green, on déduit que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta \varphi|^2 dx = 0$$

D'où la conservation de l'énergie le long du temps. ■

Considérons maintenant le problème suivant avec un terme source non nul

$$i\theta_t + \Delta^2 \theta = f \quad \text{dans } Q, \quad (2.8a)$$

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (2.8b)$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.8c)$$

Théorème 3.2 *Soient $f \in L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$, $\theta_0 \in H_0^2(\Omega)$. Alors (2.8a) – (2.8c) admet une solution unique $\theta \in C([0, T] ; H_0^2(\Omega))$. De plus, on a*

$$E(t) \leq c \left\{ E(0) + \left(\int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2 \right\} \quad (2.9)$$

Preuve. Puisque $f \in L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$, on déduit du lemme précédent que le problème (2.8a) – (2.8c) admet une solution unique $\theta \in C([0, T] ; H_0^2(\Omega))$. L'estimation (2.9) découle du fait que

$$\theta(t) = S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

. ■

3.3 Une identité

L'identité suivante est considérée comme un moyen essentiel pour l'obtention des estimations nécessaires dans la mise en place de la méthode HUM. On a la proposition suivante.

Proposition 3.1 Soit $h(x, t) \in C^3(\overline{Q}, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteurs. Alors pour chaque solution faible θ de (2.8a) – (2.8c), c'est à dire pour chaque $\theta_0 \in H_0^2(\Omega)$ et pour chaque $f \in L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$, on a l'identité suivante.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} h \cdot \nu |\Delta \theta|^2 d\Gamma dt = \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \theta \cdot \Delta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \\
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \theta \left(2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} \cdot \theta \cdot \Delta (\operatorname{div} h) dx dt + \\
& \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \bar{\theta} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx dt - \frac{i}{2} \int_0^T \theta \cdot h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \theta \cdot h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T + \\
& + \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \theta \cdot \operatorname{div} h dx dt - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Preuve. On montre le résultat dans le cas d'une solution forte, c'est-à-dire qui correspond à des données initiales $\theta_0 \in H^6(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et $f \in L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$ puis on passe au cas de solution faible par des arguments de densité.

On multiplie l'équation (2.8a) par $h \cdot \nabla \bar{\theta}$, on intègre sur Q et on prend la partie réelle. Il vient que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int_Q f h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt &= \operatorname{Re} \left(i \int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt \right) + \operatorname{Re} \int_Q (\Delta^2 \theta) h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt \\
&= -\operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \operatorname{Re} \int_Q (\Delta^2 \theta) h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Calculons la première intégrale dans le côté droit de (2.11). On a

$$\int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt = \left[\int_{\Omega} \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T - \int_Q \theta h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt - \int_Q \theta h \cdot \nabla \bar{\theta}_t dx dt$$

Puisque $\theta = 0$ sur Γ , alors

$$\begin{aligned}
\int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt &= \left[\int_{\Omega} \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T - \int_Q \theta h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \\
& \int_Q \bar{\theta}_t h \cdot \nabla \theta dx dt + \int_Q \bar{\theta}_t \theta \operatorname{div} h dx dt
\end{aligned}$$

D'où

$$2i \operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt = \left[\int_{\Omega} \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T - \int_Q \theta h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \int_Q \bar{\theta}_t \theta \operatorname{div} h dx dt$$

et donc

$$\operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_Q \theta h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_Q \bar{\theta}_t \theta \operatorname{div} h dx dt$$

De (2.8a), on obtient

$$\operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_Q \theta h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_Q (-i \Delta^2 \bar{\theta} + i \bar{f}) \theta \operatorname{div} h dx dt \quad (2.12)$$

Mais

$$\begin{aligned} & \int_Q (\Delta^2 \bar{\theta}) \theta \operatorname{div} h dx dt = \\ & \int_{\Sigma} \frac{\partial(\Delta \bar{\theta})}{\partial \nu} \theta \operatorname{div} h d\Gamma dt - \int_Q \nabla \Delta \bar{\theta} \cdot \nabla \theta (\operatorname{div} h) dQ \\ & - \int_Q \nabla \Delta \bar{\theta} \cdot \nabla (\operatorname{div} h) \theta dQ = \\ & \int_{\Sigma} \frac{\partial(\Delta \bar{\theta})}{\partial \nu} \theta \operatorname{div} h d\Gamma dt - \int_{\Gamma} \Delta \bar{\theta} (\operatorname{div} h) \nabla \theta \cdot \nu d\Gamma \\ & + \int_Q |\Delta \theta|^2 \operatorname{div} h dQ + \int_Q (\Delta \bar{\theta}) \nabla \theta \cdot \nabla (\operatorname{div} h) dQ \\ & - \int_{\Gamma} \theta \Delta \bar{\theta} \nabla (\operatorname{div} h) \cdot \nu d\Gamma + \int_Q \theta \Delta \bar{\theta} \Delta (\operatorname{div} h) dQ + \\ & \int_Q \Delta \bar{\theta} \nabla (\operatorname{div} h) \cdot \nabla \theta dQ \end{aligned}$$

Des conditions aux limites (2.8b), on a

$$\begin{aligned}
\int_Q (\Delta^2 \bar{\theta}) \theta \operatorname{div} h dx dt &= \int_Q |\Delta \theta|^2 \operatorname{div} h dQ + \int_Q (\Delta \bar{\theta}) \nabla \theta \cdot \nabla (\operatorname{div} h) dQ + \\
\int_Q \theta \Delta \bar{\theta} \Delta (\operatorname{div} h) dQ &+ \int_Q \Delta \bar{\theta} \nabla (\operatorname{div} h) \cdot \nabla \theta dQ
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Insérons (2.13) dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \int_Q \theta_t h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_Q \theta h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt - \\
\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q |\Delta \theta|^2 \operatorname{div} h dQ &- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q (\Delta \bar{\theta}) \nabla \theta \cdot \nabla (\operatorname{div} h) dQ - \\
\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q \theta \Delta \bar{\theta} \Delta (\operatorname{div} h) dQ &- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q \Delta \bar{\theta} \nabla (\operatorname{div} h) \cdot \nabla \theta dQ + \\
\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q \bar{f} \theta \operatorname{div} h dx dt &
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Maintenant, explicitons l'intégrale $\operatorname{Re} \int_Q \Delta^2 \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt$

Du théorème de Green, on a

$$\int_Q \Delta^2 \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt = \int_{\Sigma} \frac{\partial (\Delta \theta)}{\partial \nu} h \cdot \nabla \bar{\theta} d\Gamma dt - \int_Q \nabla (\Delta \theta) \cdot \nabla (h \cdot \nabla \bar{\theta}) dx dt \tag{2.15}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\nabla (\Delta \theta) \cdot \nabla (h \cdot \nabla \bar{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\Delta \theta)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\Delta \theta)}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + h_j \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
& \int_Q \nabla(\Delta\theta) \cdot \nabla (h \cdot \nabla \bar{\theta}) \, dxdt \\
&= \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\Delta\theta)}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + h_j \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) dQ \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Sigma} \Delta\theta \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + h_j \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \nu_i d\Sigma - \\
& \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta\theta \left(\frac{\partial^2 h_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} + h_j \frac{\partial^3 \bar{\theta}}{\partial x_i^2 \partial x_j} \right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs des conditions aux limites (2.8b), on a

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \nu_i = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \nu^2} \nu_j \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \nu^2} \nu_j^2 \quad \text{sur } \Gamma$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \int_Q \nabla(\Delta\theta) \cdot \nabla (h \cdot \nabla \bar{\theta}) \, dxdt = \int_{\Sigma} |\Delta\theta|^2 h \cdot \nu d\Sigma - \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta\theta \left(\Delta h_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) dQ - \\
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta\theta \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ - \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta\theta \left(h_j \frac{\partial(\Delta \bar{\theta})}{\partial x_j} \right) dQ \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Combinant (2.15), (2.8b) et (2.16), on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_Q \Delta^2 \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} \, dxdt = - \int_{\Sigma} |\Delta\theta|^2 h \cdot \nu d\Sigma + \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta\theta \left(\Delta h_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) dQ + \\
& 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta\theta \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta\theta \left(h_j \frac{\partial(\Delta \bar{\theta})}{\partial x_j} \right) dQ \tag{2.17}
\end{aligned}$$

De (2.17), il résulte

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_Q \Delta^2 \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt = - \int_{\Sigma} |\Delta \theta|^2 h \cdot \nu d\Sigma + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta \theta (\Delta h_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}) dQ + \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta \theta (\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j}) dQ + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta \theta (h_j \frac{\partial (\Delta \bar{\theta})}{\partial x_j}) dQ \\
& = - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta \theta|^2 h \cdot \nu d\Sigma + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta \theta (\Delta h_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}) dQ + \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta \theta (\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j}) - \frac{1}{2} \int_Q |\Delta \theta|^2 \operatorname{div} h dx dt \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Reportant (2.14) et (2.18) dans (2.11), obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta \theta|^2 h \cdot \nu d\Sigma = - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} \theta h \cdot \nabla \bar{\theta} dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_Q \theta h_t \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt + \\
& \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q |\Delta \theta|^2 \operatorname{div} h dQ + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q (\Delta \bar{\theta}) \nabla \theta \cdot \nabla (\operatorname{div} h) dQ + \\
& \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q \theta \Delta \bar{\theta} \Delta (\operatorname{div} h) dQ + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q \Delta \bar{\theta} \nabla (\operatorname{div} h) \cdot \nabla \theta dQ - \\
& \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q \bar{f} \theta \operatorname{div} h dx dt + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta \theta (\Delta h_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}) dQ + \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_Q \Delta \theta (\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_i \partial x_j}) - \frac{1}{2} \int_Q |\Delta \theta|^2 \operatorname{div} h d - \operatorname{Re} \int_Q f h \cdot \nabla \bar{\theta} dx dt
\end{aligned}$$

■

3.4 Inégalité directe

On établit à présent une majoration de la dérivée normale (inégalité directe).

Lemme 3.1 *Soient $f \in L^1(0, T; H_0^2(\Omega))$ et $\theta_0 \in H_0^2(\Omega)$. Alors pour chaque $T > 0$, la*

solution θ de (2.8a) – (2.8c) vérifie

$$\int_{\Sigma_1} |\Delta\theta|^2 d\Gamma dt \leq C_T \|\theta_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + C_T' \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^2 \quad (2.19)$$

où C_T, C_T' sont deux constantes positives, et pour $f = 0$, on obtient l'inégalité suivante dite inégalité directe

$$\int_{\Sigma_1} |\Delta\theta|^2 d\Gamma dt \leq C_T \|\theta_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \quad (2.20)$$

Preuve. Pour avoir (2.19), on applique l'identité (2.10) avec le choix suivant du multiplicateur h

$$h = \nu \text{ sur } \Gamma$$

De plus, puisque h est de classe C^3 , alors il existe une constante C_h telle que

$$C_h = \text{Max}(|h|, |\nabla h|, |\Delta h|, |\text{div } h|, |\nabla(\text{div } h)|, |\Delta(\text{div } h)|)$$

Par conséquent il vient que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\Delta\theta|^2 d\Gamma dt \leq C_h \int_0^T \|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)} dt + \\ & 2C_h \int_0^T \|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}C_h \int_0^T \|\Delta\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} dt \\ & + C_h \int_0^T \|\Delta\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}C_h \left[\|\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \right]_0^T + \\ & \frac{1}{2}C_h \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\theta\|_{L^2(\Omega)} dt + C_h \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\Delta\theta|^2 d\Gamma dt \leq C_h \int_0^T \left[\epsilon \|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|\nabla\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt + 2C_h \int_0^T \|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \\
& \frac{1}{2} C_h \int_0^T \left[\epsilon \|\Delta\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + C_h \int_0^T \left[\epsilon \|\Delta\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt + \\
& \frac{1}{2} C_h \left[\epsilon \left(\|\theta(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{4\epsilon} \left(\|\nabla\bar{\theta}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\bar{\theta}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right] + \\
& \frac{1}{2} C_h \int_0^T \left[\epsilon \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt + C_h \int_0^T \left[\epsilon \|\nabla\bar{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt
\end{aligned}$$

et en tenant compte des inégalités de Poincaré suivantes

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \beta_1 \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega) \quad \text{avec } \beta_1 > 0, \\
\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \beta_2 \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega) \quad \text{avec } \beta_2 > 0.
\end{aligned}$$

On obtient, après simplification,

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\Delta\theta|^2 d\Gamma dt \leq K_1 \int_0^T \|\Delta\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + K_2 E(0) + K_3 \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

où

$$\begin{aligned}
K_1 &= C_h \left\{ \left(\frac{5\epsilon}{2} + 2 \right) + \frac{\beta_1}{4} \left(\frac{1}{2\epsilon} + 2\epsilon \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{2\epsilon} + \epsilon \right) \right\}, \\
K_2 &= C_h \left(\epsilon\beta_1 + \frac{\beta_2}{4\epsilon} \right), \\
K_3 &= \frac{3C_h}{8\epsilon}
\end{aligned}$$

De (2.9) et du fait que

$$\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} dt \leq T^{1/2} \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}$$

on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\Delta\theta|^2 d\Gamma dt \\
\leq & K_1 \int_0^T C \left\{ E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^2 \right\} dt + K_2 E(0) + K_3 \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
\leq & (K_1 T C + K_2) E(0) + (K_3 + T^2 K_1 C) \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^2
\end{aligned}$$

Cette inégalité, peut être réécrite comme suit

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\Delta\theta|^2 d\Gamma dt \leq C_T E(0) + C'_T \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^2$$

où

$$C_T = K_1 \cdot C \cdot T + K_2, \quad C'_T = K_1 \cdot C \cdot T^2 + K_3$$

et pour $f = 0$, on trouve (2.20). ■

3.5 Estimation d'observabilité ou inégalité inverse

Dans ce paragraphe, on établit une deuxième estimation (estimation d'observabilité ou bien inégalité inverse) en utilisant le multiplicateur h défini par

$$h(x) = x - x_0, \text{ où } x_0 \in \mathbb{R}^n$$

tel que

$$\begin{aligned}
h(x) \cdot \nu(x) & \leq 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\
h(x) \cdot \nu(x) & > 0 & \text{sur } \Gamma_1.
\end{aligned}$$

Pour ce champ de vecteurs, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} h(x) &= n, \\ \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \\ \Delta h &= 0 \end{aligned}$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.2 *Pour chaque $T > 0$, il existe une constante $C = C_T > 0$ telle que*

$$\|\varphi_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_{\Sigma_1} |\Delta \varphi|^2 d\Gamma dt \quad (2.21)$$

pour chaque solution φ du problème (2.4a) – (2.4c) avec $\varphi_0 \in H_0^2(\Omega)$.

Preuve. On réécrit l'identité (2.10) avec $f = 0$ et avec le multiplicateur h défini comme ci-dessus, on obtient

$$\int_{\Sigma} |\Delta \varphi|^2 h \cdot \nu d\Gamma dt = 2 \int_Q |\Delta \varphi|^2 dx dt + i \left[\int_{\Omega} \varphi \cdot h \cdot \nabla \bar{\varphi} dx \right]_0^T.$$

On prend la partie réelle

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\Delta \varphi|^2 h \cdot \nu d\Gamma dt &= 2 \int_Q |\Delta \varphi|^2 dx dt - \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} \varphi \cdot h \cdot \nabla \bar{\varphi} dx \right]_0^T \\ &= 4T \|\varphi_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} \varphi \cdot h \cdot \nabla \bar{\varphi} dx \right]_0^T \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, il résulte

$$\begin{aligned}
& \left| \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} \varphi h \cdot \nabla \bar{\varphi} dx \right]_0^T \right| \leq C_h \{ \varepsilon \left[\|\varphi(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \\
& \frac{1}{4\varepsilon} \left[\|\nabla \overline{\varphi(T)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \overline{\varphi(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \} \\
& \leq 2\varepsilon C_h \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_h}{4\varepsilon} \|\nabla \varphi\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
4T \|\varphi_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 & \leq \int_{\Sigma_1} |\Delta \varphi|^2 h \cdot \nu d\Gamma dt + 2\varepsilon C_h \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_h}{4\varepsilon} \|\nabla \varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \\
& \leq M_h \int_{\Sigma_1} |\Delta \varphi|^2 d\Gamma dt + 2\varepsilon C_h \|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_h}{4\varepsilon} \|\nabla \varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Pour la démonstration de l'inégalité (2.21) il suffit de prouver les estimations suivantes

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Sigma_1} |\Delta \varphi|^2 d\Gamma dt \quad (2.23)$$

$$\|\nabla \varphi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 \leq C \int_Q |\Delta \varphi|^2 d\Gamma dt . \quad (2.24)$$

On montre seulement l'inégalité (2.24) puisque l'inégalité (2.23) s'obtient directement de l'inégalité de Poincaré. Si l'inégalité (2.24) n'est pas satisfaite, alors il existe une suite de solutions $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour le problème (2.4a) – (2.4c) telle que

$$\|\nabla \varphi_n\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

$$\int_{\Sigma_1} |\Delta \varphi_n|^2 d\Gamma dt \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Puisque φ_n satisfait (2.22), il résulte que φ_{n0} est uniformément borné dans $H_0^2(\Omega)$, donc il existe une sous-suite encore notée $\{\varphi_{n0}\}$ telle que

$$\varphi_{n0} \rightharpoonup \tilde{\varphi}_0$$

Soit $\tilde{\varphi}(t)$ la solution du problème (2.4a) – (2.4c) correspondante à la donnée initiale $\tilde{\varphi}_0$, alors

$$\varphi_n(t) \rightarrow \tilde{\varphi}(t) \quad \text{faiblement étoilé dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$$

et la suite $\varphi_n(t)$ est uniformément borné dans $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$. De la compacité de l'injection $H_0^1(\Omega) \subset H_0^2(\Omega)$, on conclut que

$$\varphi_n(t) \rightarrow \tilde{\varphi}(t) \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

et de (2.25), on a

$$\|\|\nabla\tilde{\varphi}\|\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} = 1$$

En plus de (2.26), on trouve

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{on } \Sigma_1$$

$\tilde{\varphi}$ est alors solution du problème

$$\begin{aligned} i\tilde{\varphi}_t + \Delta^2\tilde{\varphi} &= 0 && \text{dans } Q, \\ \tilde{\varphi} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ \Delta\tilde{\varphi} &= 0 && \text{sur } \Sigma_1. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Il en résulte alors de l'unicité de la solution du problème (2.27) que $\tilde{\varphi} = 0$ dans Q . Ce qui contredit que $\|\|\nabla\tilde{\varphi}\|\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} = 1$. Ceci met fin à la démonstration de (2.24).

En tenant compte de (2.23) et de (2.24), alors (2.21) est une conséquence de (2.22).

■

3.6 Existence et régularité de solution du problème

(2.3a) – (2.3e)

Dans cette section, on s'intéresse à une notion de solutions faibles du problème (2.3a)–(2.3e) à laquelle on aura besoin par la suite. Ces solutions sont obtenues par transposition à partir des résultats précédents.

Plus précisément, on multiplie les deux membres de l'équation (2.3a) par une fonction θ solution du problème (2.8a) – (2.8c) avec la condition $\theta(T) = 0$ et on intègre sur Q , on obtient

$$i \int_Q y_t \bar{\theta} dx dt + \int_Q (\Delta^2 y) \bar{\theta} dx dt = 0$$

On intègre par partie par rapport à la variable t le premier terme et on utilise la formule de Green pour le second, il vient que

$$\int_Q y (-i\bar{\theta}_t + \Delta^2 \bar{\theta}) dx dt + i \left[\int_{\Omega} y \bar{\theta} dx \right]_0^T + \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu} \Delta \bar{\theta} d\Gamma dt = 0$$

où

$$\int_Q y \bar{f} dx dt - i \int_{\Omega} y(0) \overline{\theta(0)} dx + \int_{\Sigma} \nu \Delta \bar{\theta} d\Sigma = 0$$

Ainsi, on peut énoncer la définition suivante pour la solution faible du problème (2.3a) – (2.3b) avec la condition initiale $y_0 \in H^{-2}(\Omega)$.

Définition 3.1 *On dit que $y \in L^\infty(0, T ; H^{-2}(\Omega))$ est une solution de (2.3a) – (2.3e) au sens de transposition si et seulement si*

$$\int_0^T \langle y(t), f(t) \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} dt - i \langle y(0), \theta(0) \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} + \int_{\Sigma} \nu \Delta \bar{\theta} d\Sigma = 0 \quad (2.28)$$

pour chaque $f \in L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$, où $\theta = \theta(x, t)$ est la solution du problème (2.8a) – (2.8c) avec $\theta(T) = 0$.

Cette définition est justifiée par le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Etant donné $u \in L^2(\Sigma)$. Alors il existe une solution unique*

$y \in C([0, T] ; H^{-2}(\Omega))$ au sens de transposition pour le problème (2.3a) – (2.3e) avec une condition initiale $y_0 \in H^{-2}(\Omega)$. De plus, l'application $v \mapsto y$ est linéaire et continue de $L^2(\Sigma)$ dans $C([0, T] ; H^{-2}(\Omega))$.

Preuve. Sans perte de généralité, on suppose que $y_0 = 0$. Ceci est due à la réversibilité du système (2.3a) – (2.3e) par rapport à la variable de temps t . Premièrement, on multiplie l'équation (2.8a) par $\bar{\theta}$, on intègre sur Q et on prend la partie réelle, on obtient

$$\int_Q |\Delta\theta|^2 dxdt = \operatorname{Re} \int_Q f\bar{\theta} dxdt$$

et par la suite

$$\|\theta(t)\|_{H_0^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))} , \quad (2.29)$$

On applique l'identité (2.10) avec le champ de vecteurs $h = \nu$ sur Γ et on substitue l'estimation 2.29 dans l'inégalité 2.20, on trouve

$$\|\Delta\theta\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f\|_{L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))}$$

De cette dernière, il en résulte

$$\left| \operatorname{Re} \int_{\Sigma} u \Delta \bar{\theta} d\Sigma \right| \leq \|u\|_{L^2(\Sigma)} \|\Delta\theta\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|u\|_{L^2(\Sigma)} \|f\|_{L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))} \quad (2.30)$$

Ce qui signifie que l'application

$$f \mapsto \operatorname{Re} \int_{\Sigma} u \Delta \bar{\theta} d\Sigma$$

est linéaire et continue de $L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$ dans \mathbb{R} . Par conséquent, il existe un unique $y \in L^\infty(0, T ; H^{-2}(\Omega))$ qui satisfait 2.29. De 2.29 et l'estimation 2.30, on a

$$\|y\|_{L^\infty(0, T ; H^{-2}(\Omega))} \leq c \|u\|_{L^2(\Sigma)} \quad (2.31)$$

Ce qui implique que l'application $u \longmapsto y$ est continue de $L^2(\Sigma)$ sur $L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega))$. De plus, $y \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$.

En effet, on considère une suite de contrôles $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(0, T; C^3(\Gamma))$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2(\Sigma) \quad (2.32)$$

Soit y_n la solution de (2.3a) – (2.3e) correspondante à la condition frontière u_n . Puisque u_n est régulier, $y_n \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$. D'après 2.31 et 2.32, $y_n \longrightarrow y \in L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega))$. Puisque $C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$ est un sous espace fermé de $L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega))$, alors $y \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$. ■

3.7 Résultat de contrôlabilité exacte

Le résultat de la contrôlabilité exacte du problème (2.3a)–(2.3e) est énoncé ci-dessous.

Théorème 3.4 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^3 . Soit $T > 0$. Alors, pour chaque donnée initiale $y_0 \in H^{-2}(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2(\Sigma_1)$ tel que la solution $y = y(x, t; v)$ du problème (2.3) satisfait la condition $y(T) = 0$ dans Ω .*

Preuve. Pour la démonstration de ce théorème, on utilise la méthode HUM. On procède en plusieurs étapes

Étape 1 : On résout le problème homogène

$$\begin{aligned} i\varphi_t + \Delta^2\varphi &= 0 && \text{dans } Q, \\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(0) &= \varphi_0 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

avec $\varphi_0 \in H_0^2(\Omega)$. D'après le premier paragraphe, le problème (2.4a) – (2.4c) admet une solution unique $\varphi \in C([0, T]; H_0^2(\Omega))$. Du lemme 3.2, on a le résultat de régularité

suivant

$$\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq C_T \|\varphi_0\|_{H_0^2(\Omega)}$$

Cette inégalité traduit le fait que l'application $\varphi_0 \longrightarrow \Delta\varphi$ se prolonge en une application linéaire continue de $H_0^2(\Omega)$ sur $L^2(\Sigma_1)$.

Etape 2 : On considère le problème rétrograde non-homogène

$$i\psi_t + \Delta^2\psi = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (2.33a)$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (2.33b)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \begin{cases} \Delta\varphi & \text{sur } \Sigma_1 \\ 0 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}, \quad (2.33c)$$

$$\psi(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.33d)$$

Le changement de variable de t en $(T - t)$, nous permet de déduire du théorème 3.1 que le problème (2.33) admet une solution unique au sens de transposition avec $\psi \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$. Donc $\psi(0)$ est bien définie dans $H^{-2}(\Omega)$ et ceci pour chaque choix de φ_0 . On définit alors pour $\varphi_0 \in H_0^2(\Omega)$ l'opérateur Λ par

$$\Lambda\varphi_0 = i\psi(0)$$

On montre que Λ est un opérateur linéaire continue de $H_0^2(\Omega)$ dans (son dual) $H^{-2}(\Omega)$. En effet, on considère une autre donnée initiale $\tilde{\varphi}_0 \in H_0^2(\Omega)$. On multiplie (2.33a) par $\tilde{\varphi}$ et on intègre sur Q , on obtient

$$\langle -i\psi(0), \tilde{\varphi}_0 \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} + \int_{\Sigma_1} \Delta\varphi \Delta\tilde{\varphi} d\Sigma = 0$$

et en particulier

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} = \int_{\Sigma_1} |\Delta\varphi|^2 d\Sigma$$

D'après le lemme 3.2, il est clair que la forme bilinéaire

$$\varphi_0, \widetilde{\varphi}_0 \in H_0^2(\Omega) \longrightarrow \langle \Lambda\varphi_0, \widetilde{\varphi}_0 \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}$$

est coercive. Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram,

$$\forall y_0 \in H^{-2}(\Omega), \exists \varphi_0 \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que } \Lambda\varphi_0 = iy(0).$$

Soient $y(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$ les solutions correspondantes à $\psi(0) = y(0)$. De l'unicité de la solution $y = \psi$.

Donc $y(T) = 0$ dans Ω et le contrôle $u \in L^2(\Sigma_1)$ est donné par $u = \Delta\varphi \in L^2(\Sigma_1)$, où φ est la solution du problème (2.4) avec la donnée initiale $\varphi_0 = \Lambda^{-1}(iy(0))$. ■

3.8 Contrôle optimal

En admettant que le système (2.3) est exactement contrôlable à l'instant $T > 0$, on cherche à caractériser le contrôle qui soit de norme minimale. Cela conduit à considérer le problème de contrôle optimal suivant

$$(PC) \quad \text{Inf}_{v \in U_{ad}} \left\{ J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \right\}.$$

où U_{ad} est l'ensemble des contrôles admissibles définis par

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma) \text{ tel que on a : (2.3) et } y(T) = 0 \}$$

Du théorème 3.4, on déduit que $U_{ad} \neq \emptyset$. Ce qui implique que le problème (PC) a un sens.

La question naturelle étant alors la suivante, le problème (PC) admet une solution unique $u \in U_{ad}$. Peut-on caractériser cette solution par un système d'optimalité et obtenir

ainsi un contrôle de norme minimale qui conduit la solution y à la condition $y(T) = 0$ dans Ω .

Pour chercher le système d'optimalité (S.O.), on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On introduit tout d'abord la fonction de Lagrange

$$L(y, v, p) = \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt - \int_Q p(t) \overline{(iy_t + \Delta^2 y)} dx dt$$

qu'on peut écrire, après intégration par parties, comme suit

$$\begin{aligned} L(y, v, p) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + i \left[\int_{\Omega} p(t) \overline{y(t)} dx \right]_0^T - i \int_Q p_t(t) \overline{y(t)} dx dt - \\ &\int_{\Sigma} p(t) \frac{\partial \overline{(\Delta y(t))}}{\partial \nu} d\Gamma dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial p(t)}{\partial \nu} \overline{\Delta y(t)} d\Gamma dt - \int_Q \Delta p(t) \frac{\partial \overline{y(t)}}{\partial \nu} d\Gamma dt + \\ &\int_Q \frac{\partial (\Delta p(t))}{\partial \nu} \overline{y(t)} d\Gamma dt - \int_Q \Delta^2 p(t) \overline{y(t)} dx dt. \end{aligned}$$

En introduisant le crochet de dualité $\langle p(t), y(t) \rangle_{H_0^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)}$ et en rappelant la condition au bord $\frac{\partial y}{\partial \nu} = v$ sur Γ_1 , on a

$$\begin{aligned} L(y, v, p) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \langle p(T), -iy(T) \rangle_{H_0^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)} - \\ &\langle p(0), -iy(0) \rangle_{H_0^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)} - \int_Q (ip_t + \Delta^2 p) \overline{y} dx dt - \int_{\Sigma} \Delta p(t) \overline{v(t)} d\Gamma dt \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour le problème de contrôle optimal (PC) sont alors

$$\nabla_p L(y, u, p) = 0, \quad (2.34a)$$

$$\nabla_y L(y, u, p) = 0, \quad (2.34b)$$

$$\nabla_v L(y, u, p)(v - u) \geq 0, \forall v \in U_{ad} \text{ et } u \in U_{ad}. \quad (2.34c)$$

L'équation (2.34a) signifie que l'équation d'état (2.3) est satisfaite.

Une évaluation de (2.34b) montre que p est solution du système adjoint suivant

$$\begin{aligned} ip_t + \Delta^2 p &= 0 && \text{dans } Q, \\ p &= \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Sigma, \\ p(T) &= p^0, \quad p(0) = 0 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

L'inégalité (2.34c) est équivalente à l'inégalité variationnelle

$$\int_{\Sigma_1} (u - \Delta p)(v - u) d\Gamma dt \geq 0; \forall u \in U_{ad}, v \in U_{ad}.$$

Pour $\Gamma_0 = \emptyset$, le contrôle optimal est donné par

$$u = \Delta p \text{ sur } \Gamma_1$$

où p désigne la solution du problème adjoint au problème homogène (2.4).

Chapitre 4

Stabilisation de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec un feedback frontière de type Newmann.

4.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) ayant une frontière suffisamment régulière Γ de classe C^3 et soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de $\Gamma = \partial\Omega$ telle que : $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ avec $\Gamma_1 \neq \emptyset$.

On considère dans Ω un système gouverné par l'équation de Schrödinger de quatrième

ordre en $y(x, t)$

$$iy_t + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, +\infty), \quad (3.1a)$$

$$y(x, 0) = y_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1b)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, +\infty), \quad (3.1c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_0 \times (0, +\infty), \quad (3.1d)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = u \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_1 \times (0, +\infty). \quad (3.1e)$$

où : - u désigne la fonction de contrôle avec $u \in L^2((0, +\infty); L^2(\Gamma_1)) = L^2(\Sigma_1)$

- ν désigne le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur de Ω au point $x \in \Gamma$.

- $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désigne l'opérateur de dérivation dans la direction normale.

Le but de ce chapitre est l'étude du problème de la stabilisation uniforme pour le système (3.1a) – (3.1e) via un opérateur de feedback frontière linéaire approprié basé sur la position y , telle que la fonction de feedback frontière u une fois insérée dans la condition au bord (3.1e) produit un C_0 -semi-groupe qui décroît exponentiellement vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$ au sens de la topologie uniforme de l'espace des opérateurs $\mathfrak{L}(Z)$.

En raison des résultats de régularité et de contrôlabilité exacte du problème (3.1a) – (3.1e) établis récemment dans [52], l'espace approprié pour l'étude de la stabilisation du problème (3.1a) – (3.1e) est l'espace $Z = H^{-2}(\Omega) = D(A^{\frac{1}{2}})'$ où $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ est un opérateur positif auto-adjoint induit par la forme sésquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ donnée par :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} = a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \Delta\varphi(x) \overline{\Delta\psi(x)} dx \quad \forall \varphi, \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Selon le théorème de Lax-Milgram (voir par exemple [12]), A est un isomorphisme canonique de $D(A) = H_0^2(\Omega)$ sur $Z = H^{-2}(\Omega)$.

Si on introduit $\Delta^2 : H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, alors il est facile de montrer que

$Af = \Delta^2 f$ pour $f \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et que $A^{-1}g = (\Delta^2)^{-1}g$ pour $g \in L^2(\Omega)$. Par

conséquent A est une extension du bi-Laplacien Δ^2 à l'espace $H_0^2(\Omega)$.

Il est bien connu que $D(A^{\frac{1}{2}}) = L^2(\Omega)$ (voir [25], [26]) et que $A^{\frac{1}{2}}$ est un isomorphisme canonique de $L^2(\Omega)$ sur $Z = H^{-2}(\Omega)$.

De plus, les relations d'équivalence des normes suivantes sont satisfaites : $\|\varphi\|_{D(A^\alpha)} = \|A^\alpha\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\varphi\|_{D(A^\alpha)'} = \|A^{-\alpha}\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $\alpha \geq 0$, où $D(A^\alpha)'$ est le dual de $D(A^\alpha)$ par rapport à l'espace pivot.

La fonction d'énergie $E(t)$ associée à la solution $y = y(x, t)$ du problème (3.1a)–(3.1e) au temps t est définie par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|y(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|y(t)\|_{D(A^{\frac{1}{2}})'}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|A^{-\frac{1}{2}}y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

4.2 Choix du contrôle feedback

On cherche un contrôle u qui garantie au moins que $\frac{dE}{dt} \leq 0$.

En effet par dérivation formelle de la fonction énergie $E(t)$ par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^{-\frac{1}{2}}y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle A^{-\frac{1}{2}}y(t), A^{-\frac{1}{2}}y(t) \right\rangle_\Omega \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left\langle A^{-\frac{1}{2}}y_t, A^{-\frac{1}{2}}y \right\rangle + \left\langle A^{-\frac{1}{2}}y, A^{-\frac{1}{2}}y_t \right\rangle \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\langle A^{-\frac{1}{2}}y_t, A^{-\frac{1}{2}}y \right\rangle = \operatorname{Re} \left\langle y_t, A^{-1}y \right\rangle = \operatorname{Re} \left\langle i\Delta^2 y, A^{-1}y \right\rangle \end{aligned}$$

De la formule de Green, on a

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) = & \operatorname{Re} i \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta y}{\partial \nu} \overline{A^{-1}y} d\Gamma - \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial}{\partial \nu} (\overline{A^{-1}y}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu} \Delta (\overline{A^{-1}y}) d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} y \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta (\overline{A^{-1}y})) d\Gamma + \int_{\Omega} y \Delta^2 (\overline{A^{-1}y}) d\Omega \right\} \end{aligned}$$

Puisque $y \in H^{-2}(\Omega)$ donc $A^{-1}y \in H_0^2(\Omega)$, et par conséquent

$$\overline{A^{-1}y} = \frac{\partial}{\partial \nu} (\overline{A^{-1}y}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

De plus comme $y = 0$ sur Γ , on déduit que

$$\frac{dE}{dt}(t) = \operatorname{Re} \left\{ i \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu} \Delta (\overline{A^{-1}y}) d\Gamma + i \int_{\Omega} |y|^2 d\Omega \right\} = \operatorname{Re} \left\{ i \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu} \Delta (\overline{A^{-1}y}) d\Gamma \right\}$$

Par conséquent, en choisissant

$$u = i\Delta(A^{-1}y) \tag{3.3}$$

on obtient

$$\frac{dE}{dt}(t) = -\|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = -\int_{\Gamma_1} \|\Delta(A^{-1}y)\|^2 d\Gamma \leq 0.$$

On exprime le contrôle u en fonction de l'opérateur de Green G qui agit de la frontière Γ à l'intérieur du domaine Ω . Plus précisément, soit G l'application définie par :

$$Gu = y \iff \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 y = 0 \text{ dans } \Omega, \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = u \text{ sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

En utilisant la théorie elliptique (voir [33], [40]), on déduit que

$$G : H^s(\Gamma_1) \longrightarrow H^{s+\frac{3}{2}}(\Omega)$$

est continue pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui implique que G est fermé.

En particulier pour $s = 0$ on a

$$G : \text{continue de } L^2(\Gamma_1) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Omega).$$

Par conséquent, on obtient par dualité que l'opérateur adjoint G^* est définie par :

$$G^* : \text{continue de } H^{-\frac{3}{2}}(\Omega) \longrightarrow H^0(\Gamma_1) = L^2(\Gamma).$$

Le lemme suivant détermine explicitement l'opérateur G^* .

Lemme 4.1 (voir [?]) *Soit $G^* : L^2(\Gamma_1) \longrightarrow L^2(\Omega)$ l'opérateur adjoint de G , dont le sens*

$$\langle Gu, \phi \rangle_{\Omega} = \langle u, G^* \phi \rangle_{\Gamma_1}; \forall u \in L^2(\Gamma_1), \phi \in L^2(\Omega)$$

de G . Alors

$$G^* A \phi = -\Delta \phi |_{\Gamma_1} \text{ pour } \phi \in D(A) \tag{3.4}$$

De (3.3) et (3.4), on a

$$u = -iG^* y \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{3.5}$$

En utilisant maintenant des techniques comme dans ([5], [24], [42]), le problème (3.1a) – (3.2) peut être modélisé comme équation du premier ordre sous forme additive

$$y_t = iAy - iAGu \quad \text{dans } D(A)'$$

En vertu de (3.1a) – (3.2) et du lemme 4.1, le système de feedback qui en résulte

s'écrit sous la forme

$$iy_t + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (3.6a)$$

$$y(x, 0) = y_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.6b)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (3.6c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \quad (3.6d)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = i\Delta(A^{-1}y) \quad \text{sur } \Sigma_1. \quad (3.6e)$$

4.3 Bonne position du système (3.6a)-(3.6e)

Le système (3.6a)-(3.6e) peut être reformulé sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait du premier ordre comme suit :

$$\begin{cases} y_t = A_F y & \text{dans } D(A)' \\ y(x, 0) = y_0(x) & y_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})' = H^{-2}(\Omega) \end{cases} \quad (3.7)$$

où $A_F = iA - AGG^*$ avec $D(A_F) = \{y \in Z = H^{-2}(\Omega); A_F y \in Z = H^{-2}(\Omega)\}$.

Théorème 4.1 *Pour chaque donnée initiale $y_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})' = H^{-2}(\Omega)$, il existe une solution unique $y \in C((0, +\infty); Z)$ pour le système (3.7). De plus, si $y_0 \in D(A_F)$, alors*

$$y \in C((0, +\infty); D(A_F)) \cap C^1((0, +\infty); Z).$$

Preuve. D'après le théorème de Lumeur-Phillips, il suffit de montrer que l'opérateur A_F est maximal dissipatif sur l'espace des états $Z = H^{-2}(\Omega)$. Ce qui revient alors à montrer les deux assertions suivantes

$$i) \forall y \in D(A_F) \text{ on a : } \operatorname{Re} \langle A_F y, y \rangle_{H^{-2}(\Omega)} \leq 0 .$$

$$ii) \forall f \in Z = H^{-2}(\Omega), \exists y \in D(A_F) \text{ tel que : } (\lambda I - A_F)y = f.$$

En effet ;

i) On a pour tout $y \in D(A_F)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \langle A_F y, y \rangle_{H^{-2}(\Omega)} &= \operatorname{Re} \langle A_F y, y \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'}, \\
&= \operatorname{Re} \langle (iA - AGG^*)y, y \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'}, \\
&= \operatorname{Re} \langle iAy, y \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'} - \operatorname{Re} \langle AGG^*y, y \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'}, \\
&= -\operatorname{Re} \langle AGG^*y, y \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'}, \\
&= -\operatorname{Re} \|G^*y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

ii) On montre maintenant que $\lambda I - A_F$ est surjectif pour un certain $\lambda > 0$.

Soit $f \in Z = H^{-2}(\Omega)$, on détermine $y \in D(A_F)$ tel que $(\lambda I - A_F)y = f$, ou bien $\lambda y - iAy - AGG^*y = f$.

Pour cela, on utilise le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-2}(\Omega) * H_0^2(\Omega)}$ avec $\phi \in H_0^2(\Omega)$, on a

$$\lambda \langle y, \phi \rangle_{H^{-2}(\Omega) * H_0^2(\Omega)} - i \langle Ay, \phi \rangle_{H^{-2}(\Omega) * H_0^2(\Omega)} + \langle AGG^*y, \phi \rangle_{H^{-2}(\Omega) * H_0^2(\Omega)} = \langle f, \phi \rangle_{H^{-2}(\Omega) * H_0^2(\Omega)}.$$

Comme $H^{-2}(\Omega) = D(A^{\frac{1}{2}})'$ et $H_0^2(\Omega) = D(A^{\frac{1}{2}})$, on obtient

$$\lambda \langle y, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' * D(A^{\frac{1}{2}})} - i \langle Ay, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' * D(A^{\frac{1}{2}})} + \langle AGG^*y, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' * D(A^{\frac{1}{2}})} = \langle f, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' * D(A^{\frac{1}{2}})}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\lambda \left\langle A^{-\frac{1}{2}}y, A^{\frac{1}{2}}\phi \right\rangle_{L^2(\Omega) * L^2(\Omega)} - i \left\langle A^{-\frac{1}{2}}Ay, A^{\frac{1}{2}}\phi \right\rangle_{L^2(\Omega) * L^2(\Omega)} \\
&+ \left\langle A^{-\frac{1}{2}}AGG^*y, A^{\frac{1}{2}}\phi \right\rangle_{L^2(\Omega) * L^2(\Omega)} = \langle f, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' * D(A^{\frac{1}{2}})}
\end{aligned}$$

où bien

$$\lambda \langle y, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - i \langle Ay, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle A^{\frac{1}{2}}GG^*y, A^{\frac{1}{2}}\phi \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' * D(A^{\frac{1}{2}})}$$

Mais comme $GG^*y \in H_0^2(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} \langle AGG^*y, \phi \rangle_{H^{-2}(\Omega)*H_0^2(\Omega)} &= \left\langle A^{\frac{1}{2}}GG^*y, A^{\frac{1}{2}}\phi \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle GG^*y, \phi \rangle_{H_0^2(\Omega)=D(A^{\frac{1}{2}})} = \langle G^*y, G^*\phi \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

D'où

$$\lambda \langle y, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - i \langle Ay, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle G^*y, G^*\phi \rangle_{L^2(\Gamma_1)} = \langle f, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'*D(A^{\frac{1}{2}})}. \quad (3.8)$$

En utilisant la formule de Green, on déduit que

$$\begin{aligned} \langle Ay, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (Ay)\bar{\phi}d\Omega = \int_{\Omega} (\Delta^2 y)\bar{\phi}d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Delta y)}{\partial \nu} \bar{\phi}d\Gamma - \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \nu} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta y \Delta \bar{\phi}d\Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

En reportant (3.9) dans (3.8), on obtient

$$\lambda \langle y, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - i \langle \Delta y, \Delta \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle G^*y, G^*\phi \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'*D(A^{\frac{1}{2}})}$$

En multipliant les deux membres de l'équation de ci-dessus par $1 + i$, on trouve

$$a(y, \phi) = l(\phi)$$

où

$$a(y, \phi) = (1 + i) \left\{ \lambda \langle y, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - i \langle \Delta y, \Delta \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle G^*y, G^*\phi \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \right\}$$

et

$$l(\phi) = (1 + i) \langle f, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})'*D(A^{\frac{1}{2}})}$$

Il est clair que la forme $a(y, \phi)$ est une forme sésquilinéaire continue et coercive sur l'espace $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^2(\Omega)$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
|a(y, \phi)| &= \left| (1+i) \left\{ \lambda \langle y, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - i \langle \Delta y, \Delta \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle G^* y, G^* \phi \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \right\} \right| \\
&\leq \sqrt{2} \left\{ \lambda \|y\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|G^* y\|_{L^2(\Gamma_1)} \|G^* \phi\|_{L^2(\Gamma_1)} \right\} \\
&\leq C \|y\|_{H_0^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $y = \phi \in H_0^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} a(\phi, \phi) &= \operatorname{Re} \left\{ (1+i) \left\{ \lambda \langle \phi, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - i \langle \Delta \phi, \Delta \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle G^* \phi, G^* \phi \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \right\} \right\} \\
&= \lambda \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|G^* \phi\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\
&= \lambda \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|G^* \phi\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\
&\geq \|\phi\|_{H_0^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

De plus la forme linéaire l est continue. En effet

$$|l(\phi)| = \left| (1+i) \langle f, \phi \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' * D(A^{\frac{1}{2}})} \right| \leq \sqrt{2} \|f\|_{H^{-2}(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C_f \|\phi\|_{H_0^2(\Omega)}.$$

Donc d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique élément $y \in H^{-2}(\Omega)$ tel que

$$a(y, \phi) = l(\phi)$$

pour tout $\phi \in H_0^2(\Omega)$. ■

Proposition 4.1 *Supposons que $y_0 \in Z$. Alors la solution de (3.6a) – (3.6e) satisfait*

$$E(T) - E(0) = - \|G^* y\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 \quad (3.10)$$

D'où on a

$$\int_0^{+\infty} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt = \int_0^{+\infty} \|G^* y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt \leq E(0) \quad (3.11)$$

Preuve. Tout d'abord, on suppose que $y_0 \in D(A_F)$. Alors l'énergie $E(t)$ est différentiable et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle y(t), y(t) \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})}, \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle e^{A_F t} y_0, e^{A_F t} y_0 \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})}, \\
&= \operatorname{Re} \langle A_F e^{A_F t} y_0, e^{A_F t} y_0 \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})}, \\
&= - \|G^* y(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}.
\end{aligned}$$

Intégration de 0 à T , nous donne

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \|G^* y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt$$

D'où

$$\int_0^T \|G^* y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt \leq E(0)$$

et par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \|G^* y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt \leq E(0)$$

Puisque $D(A_F)$ est dense dans Z , l'inégalité (3.11) reste vraie pour tout $y_0 \in Z$. ■

4.4 Résultat de stabilisation exponentielle

Notre objectif dans ce paragraphe est d'étudier le problème de la stabilité exponentielle pour le système en boucle fermée (3.6a) – (3.6e).

Le résultat principal est fournie par le théorème suivant.

Théorème 4.2 *Supposons qu'il existe un champ de vecteur $h(x) \in [C^3(\bar{\Omega})]^n$ tel que*

$$(H1) \quad h(x) \cdot \nu(x) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0.$$

Alors, il existe des constantes positives M et δ telle que pour chaque donnée initiale $y_0 \in Z = H^{-2}(\Omega)$, la solution correspondante du système (3.6a) – (3.6e) satisfait l'estimation suivante

$$E(t) \leq M e^{-\delta t} E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Un changement de variable $y \longrightarrow p$

En référence à l'énergie $E(t)$ du problème (3.6a) – (3.6e), notre tâche est de montrer qu'il existe d'un temps $0 < T < \infty$ tel que

$$E(T) \leq r E(0), \quad r < 1, \quad \text{pour tout } y_0 \in Z. \quad (3.12)$$

ou bien

$$\|e^{A_F T}\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$$

et d'après laquelle la décroissance exponentielle uniforme est établie. Comme d'habitude, il suffit de montrer l'estimation (3.12) pour $y_0 \in D(A_F)$ et d'étendre ensuite le résultat par l'argument de continuité à tout $y_0 \in Z$.

On suppose donc que $y_0 \in D(A_F)$ et en adaptant alors aux circonstances actuelles les idées de ???. On introduit une nouvelle variable notée p par

$$p = A^{-1} y \in D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^2(\Omega)$$

où la régularité indiquée est une conséquence du théorème 4.1. On obtient alors le système suivant

$$p_t - i\Delta^2 p = F \quad \text{dans } Q, \quad (3.13a)$$

$$p = \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (3.13b)$$

$$p(0) = A^{-1} y_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.13c)$$

où

$$F = -GG^*Ap$$

On a la relation

$$\|p(t)\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}^2 = \|y(t)\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}^2$$

Une identité pour le p -problème

On établit une identité pour le p -problème qui nous permettra d'obtenir par la suite des estimations a priori nécessaires pour la réalisation de l'inégalité (3.12). ■

Proposition 4.2 *Soit $h(\cdot)$ un champ de vecteurs dans $[C^3(\bar{\Omega})]^n$ et soit $p_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Alors la solution p du problème (3.13a) – (3.13c) satisfait l'identité suivante*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\Delta p)^2 h \cdot \nu d\Sigma &= 2 \operatorname{Re} \int_Q \Delta p \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \\ \operatorname{Re} \int_Q \Delta p \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial^2 x_j} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) dQ &+ \int_Q \Delta \bar{p} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) dQ + \\ \frac{1}{2} \int_Q \Delta \bar{p} \cdot p \cdot \Delta(\operatorname{div} h) dQ &+ \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} p \cdot h \cdot \nabla \bar{p} dx \right]_0^T + \operatorname{Im} \int_Q F h \nabla \bar{p} dQ + \\ \frac{i}{2} \int_Q \bar{F} \cdot p \operatorname{div} h dQ. \quad (3.2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Preuve. Multipliant des deux membres de l'équation (3.13a) par $h \nabla \bar{p}$, intégrant par parties sur Q et prenant la partie imaginaire on obtient

$$\operatorname{Im} \int_Q p_t h \nabla \bar{p} dQ - \operatorname{Re} \int_Q (\Delta^2 p) h \cdot \nabla \bar{p} dQ = \operatorname{Im} \int_Q F h \cdot \nabla \bar{p} dQ \tag{3.15}$$

Calculons chaque terme de l'identité (3.15)

$$\underline{\operatorname{Terme} \operatorname{Im} \int_Q p_t \cdot h \nabla \bar{p} dQ},$$

En intégrant par parties par rapport à t et en appliquant la formule de divergence,

on obtient en tenant compte des conditions aux limites (3.13b)

$$\begin{aligned} \int_Q p_t h \cdot \nabla \bar{p} dQ &= \left[\int_\Omega p h \cdot \nabla \bar{p} dx \right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega p h \cdot \nabla \bar{p}_t dQ \\ &= \left[\int_\Omega p h \cdot \nabla \bar{p} dx \right]_0^T + \int_Q \bar{p}_t h \cdot \nabla p dQ + \int_Q \bar{p}_t p \operatorname{div} h dQ \end{aligned}$$

De (3.13a), on déduit que

$$\begin{aligned} \int_Q p_t h \cdot \nabla \bar{p} dQ &= \left[\int_\Omega p h \cdot \nabla \bar{p} dx \right]_0^T + \int_Q \bar{p}_t h \cdot \nabla p dQ - i \int_Q \Delta^2 \bar{p} \cdot p \operatorname{div} h dQ + \\ &\int_Q \bar{F} \cdot p \operatorname{div} h dQ. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_Q p_t h \cdot \nabla \bar{p} dQ - \int_Q \bar{p}_t h \cdot \nabla p dQ = \left[\int_\Omega p h \cdot \nabla \bar{p} dx \right]_0^T - i \int_Q \Delta^2 \bar{p} \cdot p \operatorname{div} h dQ + \int_Q \bar{F} \cdot p \operatorname{div} h dQ.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \int_Q p_t h \cdot \nabla \bar{p} dQ &= \operatorname{Im} \left[\int_\Omega p h \cdot \nabla \bar{p} dx \right]_0^T - \operatorname{Re} \int_Q (\Delta^2 \bar{p}) p \operatorname{div} h dQ + \\ &\operatorname{Im} \int_Q \bar{F} \cdot p \operatorname{div} h dQ \end{aligned} \quad (3.16)$$

De la formule de Green et des conditions aux limites (3.13a), on a

$$\begin{aligned} \int_Q (\Delta^2 \bar{p}) p \operatorname{div} h dQ &= \int_Q \Delta \bar{p} \cdot \Delta (p \operatorname{div} h) dQ \\ &= \int_Q |\Delta p|^2 \operatorname{div} h dQ + \int_Q (\Delta \bar{p}) p \Delta (\operatorname{div} h) dQ + 2 \int_Q \Delta \bar{p} \nabla p \cdot \nabla \operatorname{div} h dQ. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Insérant (3.17) dans (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Im} \int_Q p_t \cdot h \nabla \bar{p} dQ &= \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} p h \nabla \bar{p} dx \right]_0^T - \int_Q |\Delta p|^2 \operatorname{div} h dQ - \\
\operatorname{Re} \int_Q (\Delta \bar{p}) p \Delta (\operatorname{div} h) dQ &- 2 \operatorname{Re} \int_Q \Delta \bar{p} \nabla p \cdot \nabla \operatorname{div} h dQ + \\
\operatorname{Im} \int_Q \bar{F} \cdot p \operatorname{div} h dQ &
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Terme $\operatorname{Re} \int_Q \Delta^2 p \cdot h \nabla \bar{p} dQ$,

La formule de Green et les conditions aux limites (3.13b) nous donnent

$$\int_Q \Delta^2 p \cdot h \nabla \bar{p} dQ = - \int_{\Sigma} h \cdot \nu |\Delta p|^2 d\Sigma + \int_Q \Delta p \cdot \Delta (h \nabla \bar{p}) dQ$$

Mais

$$\begin{aligned}
\Delta p \Delta (h \cdot \nabla \bar{p}) &= \Delta p \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_j^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right] + \Delta p \left[2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \\
\frac{1}{2} \operatorname{div} (|\Delta p|^2 h) &- \frac{1}{2} |\Delta p|^2 \operatorname{div} h.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \int_Q \Delta^2 p \cdot h \nabla \bar{p} dQ \\
&= - \int_{\Sigma} h \cdot \nu |\Delta p|^2 d\Sigma + \operatorname{Re} \int_Q \Delta p \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_j^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right] dQ + \\
&2 \operatorname{Re} \int_Q \Delta p \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_j} \right] dQ + \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div} (|\Delta p|^2 h) dQ \\
&- \frac{1}{2} \int_Q |\Delta p|^2 \operatorname{div} h dQ
\end{aligned} \tag{3.19}$$

En insérant (3.18) et (3.19) dans (3.15), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} ph \nabla \bar{p} dx \right]_0^T - \\
& \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_Q (\Delta \bar{p}) p \Delta (\operatorname{div} h) dQ - \operatorname{Re} \int_Q \Delta \bar{p} \nabla p \cdot \nabla \operatorname{div} h dQ + \\
& \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_Q \bar{F} p \operatorname{div} h dQ + \int_{\Sigma} h \cdot \nu |\Delta p|^2 d\Sigma - \operatorname{Re} \int_Q \Delta p \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right] dQ - \\
& 2 \operatorname{Re} \int_Q \Delta p \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_j} \right] dQ - \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div} (|\Delta p|^2 h) dQ = \\
& \operatorname{Im} \int_Q F h \cdot \nabla \bar{p} dQ
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Spécialisons maintenant l'identité (3.20) au champs de vecteurs radial $h(x) = x - x_0$, où $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} h(x) &= n, \\
\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\
\nabla(\operatorname{div} h) &= 0, \quad \Delta(\operatorname{div} h) = 0.
\end{aligned}$$

et l'identité (3.20) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
2 \int_Q |\Delta p|^2 dQ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} ph \nabla \bar{p} dx \right]_0^T + \frac{n}{2} \operatorname{Im} \int_Q \bar{F} p dQ + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} h \cdot \nu |\Delta p|^2 d\Sigma \\
&- \operatorname{Im} \int_Q F h \cdot \nabla \bar{p} dQ
\end{aligned} \tag{3.21}$$

On estime maintenant chaque terme de l'identité (3.21).

Terme $\int_Q |\Delta p|^2 dQ$

De la décroissance de l'énergie on a

$$2 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta p|^2 dx dt \geq 2CTE(T) \tag{3.22}$$

Terme $\text{Im} \int_Q F.h \nabla \bar{p} dQ$

On a

$$\begin{aligned} \left| \text{Im} \int_Q F.h \nabla \bar{p} dQ \right| &\leq \left| \int_Q F.h \nabla \bar{p} dQ \right| \\ &\leq \frac{C_G}{2\varepsilon} \int_0^T \|G^*y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt + \frac{\varepsilon M_h}{2} \|\nabla p\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Terme $\int_Q \bar{F} p dQ$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_Q \bar{F} p dQ \right| &\leq \int_0^T \|p\|_{L^2(\Omega)} \|GG^*y\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{C_G}{2\varepsilon} \int_0^T \|G^*y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \end{aligned}$$

Puisque $p \in H_0^2(\Omega)$, alors

$$\frac{n}{2} \left| \text{Im} \int_Q \bar{F} p dQ \right| \leq \frac{nC_G}{4\varepsilon} \int_0^T \|G^*y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt + \frac{n\varepsilon}{4} \mu T E(0) \quad (3.24)$$

Terme $\left[\int_\Omega p h \nabla \bar{p} dx \right]_0^T$

En combinant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le fait que $p \in H_0^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left[\int_\Omega p h \nabla \bar{p} dx \right]_0^T \right| &\leq C_h \left\{ \|p(T)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \bar{p}(T)\|_{L^2(\Omega)} + \|p(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\leq \frac{M_h}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \|p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \|\nabla p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \right\} \\ &\leq \frac{\mu M_h}{\varepsilon} E(0) + \frac{\varepsilon M_h}{2} \|\nabla p\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

On reporte (3.22)-(3.25) dans (3.21), on obtient

$$\begin{aligned}
2CTE(T) &\leq \frac{\mu M_h}{\varepsilon} E(0) + \frac{\varepsilon M_h}{2} \|\|\nabla p\|\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2 + \\
&\quad \frac{nC_G}{4\varepsilon} \int_0^T \|G^* y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt + \frac{n\varepsilon}{4} \mu T E(0) + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} h \cdot \nu |\Delta p|^2 d\Sigma + \frac{C_G}{2\varepsilon} \int_0^T \|G^* y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt + \\
&\quad \frac{\varepsilon M_h}{2} \|\|\nabla p\|\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

De (3.10), (3.11), de (H1) et du fait que

$$G^* y = \Delta p \quad \text{on } \Sigma_1$$

on déduit de (3.26) que

$$\begin{aligned}
&((2C - \frac{n\varepsilon}{4}\mu)T - \frac{\mu M_h}{\varepsilon})E(T) \\
&\leq (\frac{nC_G}{4\varepsilon} + \frac{M_h}{2} + \frac{C_G}{2\varepsilon}) \int_{\Sigma_1} |\Delta p|^2 d\Sigma + \varepsilon M_h \|p\|_{C([0,T]; H_0^1(\Omega))}^2
\end{aligned} \tag{3.27}$$

On choisit ε et T de telle façon que

$$\begin{aligned}
2C - \frac{n\varepsilon}{4}\mu &> 0, \\
(2C - \frac{n\varepsilon}{4}\mu)T - \frac{\mu M_h}{\varepsilon} &> 0.
\end{aligned}$$

Enfin, on a besoin d'absorber le terme d'ordre inférieur $\|p\|_{C([0,T]; H_0^1(\Omega))}^2$. ■

Lemme 4.2 *L'estimation (3.27) implique qu'il existe une constante $C_T > 0$ telle que*

$$\|p\|_{C([0,T]; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C_T \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\Delta p|^2 d\Gamma dt \tag{3.28}$$

Preuve. On applique l'argument de compacité-unicité. Supposons que l'inégalité (3.28) est fautive. Alors il existe une suite de solutions $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour le problème (3.13a) –

(3.13b) telles que

$$\|p_n\|_{C([0,T]; H_0^1(\Omega))}^2 = 1, \quad (3.29)$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} |\Delta p_n|^2 d\Gamma dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty. \quad (3.30)$$

De (3.27), il en résulte que la suite de conditions initiales $\{p_{n0}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de solutions est uniformément bornée dans $H_0^2(\Omega)$ et donc, on peut extraire une sous-suite notée encore $\{p_{n0}\}$ telle que

$$p_{n0} \rightharpoonup \tilde{p}_0 \text{ faiblement dans } H_0^2(\Omega)$$

Soit $\tilde{p}(t)$ la solution du problème (3.13a) – (3.13b) correspondante à la donnée initiale \tilde{p}_0 . Alors

$$p_n(t) \rightharpoonup \tilde{p}(t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$$

et $p_n(t)$ est uniformément borné dans $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$. Ceci avec la compacité de l'injection $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, impliquent qu'il existe une sous-suite notée encore $\{p_n(t)\}$ telle que

$$p_n(t) \rightarrow \tilde{p}(t) \text{ fortement dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

et par (3.29), on a

$$\|\tilde{p}\|_{C(0,T;H_0^1(\Omega))} = 1$$

En plus de (3.30), on obtient

$$\Delta \tilde{p} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \quad (2.31)$$

De (2.31), on conclut que

$$G\Delta \tilde{p} = 0$$

et donc \tilde{p} est solution du problème homogène

$$\tilde{p}_t + i\Delta^2\tilde{p} = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (3.32a)$$

$$\tilde{p} = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\nu} \text{ sur } \Sigma, \quad (3.32b)$$

$$\Delta\tilde{p} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \quad (3.32c)$$

De l'unicité de la solution du problème (3.32a) – (3.32c), on déduit que

$$\tilde{p} = 0 \text{ dans } Q$$

Ceci contredit

$$\|\tilde{p}\|_{C(0,T;H_0^1(\Omega))} = 1$$

L'inégalité (3.28) utilisée dans (3.27) donne

$$\left((2C - \frac{n\varepsilon}{4}\mu)T - \frac{\mu M_h}{\varepsilon}\right)E(T) \leq C_{n,G,h,\varepsilon} \int_{\Sigma_1} |\Delta p|^2 d\Sigma$$

qui avec (3.10) implique l'estimation désirée (3.12). ■

Chapitre 5

Stabilisation de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec des contrôles frontières en position et en moment

5.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné non vide dans $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^4 . Soit un temps $T > 0$.

On considère dans Ω un système dynamique gouverné par une équation de Schrödinger de quatrième ordre en $y(t, x)$

$$iy_t + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q, \quad (4.1)$$

$$y = u_1 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (4.2)$$

$$\Delta y = u_2 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (4.3)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{dans } \Omega$$

où $y = y(t, x)$ est la fonction d'état, u_1 et u_2 sont les fonctions de contrôle.

L'objectif de ce chapitre est l'étude du problème de la stabilisation uniforme pour le système (4.1) – (4.3) par des contrôles frontières explicités en fonction de y .

Des résultats de régularité et de contrôlabilité exacte pour le problème (4.1) – (4.3) sont établis dans le premier chapitre, voir aussi par exemple ([31], [32], [52]). Ici on étudie la stabilisation du problème (4.1) – (4.3) dans l'espace $Z = D(A^{\frac{3}{4}})'$ dual de l'espace de Hilbert

$$D(A^{\frac{3}{4}}) = \{\varphi \in H^3(\Omega); \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

avec des contrôles feedback

$$u_1 \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma)), u_2 \in [H^1(0, \infty; L^2(\Gamma))]'$$

5.2 Préliminaires et choix des contrôles feedback

Soit $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ l'opérateur positif auto-adjoint défini par

$$\begin{aligned} A\varphi &= \Delta^2\varphi, \\ D(A) &= \{\varphi \in H^4(\Omega) : \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} D(A^{\frac{1}{4}}) &= H_0^1(\Omega), \\ D(A^{3/4}) &= \{\varphi \in H^3(\Omega) : \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\} \end{aligned}$$

avec normes équivalentes. Ainsi, pour $\varphi \in D(A^{\frac{1}{4}})$,

$$\|\varphi\|_{D(A^{1/4})} = \|A^{1/4}\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{équivalente à} \quad \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega \quad (4.4)$$

et

$$\|\varphi\|_{D(A^{3/4})} = \|A^{3/4}\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{équivalente à} \quad \int_{\Omega} |\nabla(\Delta\varphi)|^2 d\Omega \quad (4.5)$$

L'énergie associée à la solution $y = y(t, x)$ du problème (4.1) – (4.3) dans l'espace $Z = D(A^{\frac{3}{4}})'$ est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} \|y(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})'}^2 = \frac{1}{2} \|A^{-\frac{3}{4}}y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.6)$$

Dérivons formellement la fonction d'énergie $E(t)$ par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})'}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^{-\frac{3}{4}}y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle A^{-\frac{3}{4}}y(t), A^{-\frac{3}{4}}y(t) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left\langle A^{-\frac{3}{4}}y_t(t), A^{-\frac{3}{4}}y(t) \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle A^{-\frac{3}{4}}y(t), A^{-\frac{3}{4}}y_t(t) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\langle y_t(t), A^{-\frac{3}{2}}y(t) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

De (4.1), on écrit

$$\frac{dE(t)}{dt} = \operatorname{Re} \left\langle i\Delta^2 y(t), A^{-\frac{3}{2}}y(t) \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Application de la formule de Green, nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{dE(t)}{dt} &= \operatorname{Re}\left\{i \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Delta y)}{\partial \nu} \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)} d\Gamma - i \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} d\Gamma + \right. \\
&\quad \left. i \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu} \overline{\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)} d\Gamma - i \int_{\Gamma} y \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} d\Gamma + \right. \\
&\quad \left. i \int_{\Omega} y \overline{\Delta^2 \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)} d\Omega\right\} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Mais $y \in D(A^{\frac{3}{4}})'$, alors $A^{-\frac{3}{2}}y = A^{-\frac{3}{4}} \left(A^{-\frac{3}{4}}y\right) \in D(A^{\frac{3}{4}})$ et par conséquent

$$A^{-\frac{3}{2}}y = \Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \tag{4.8}$$

Insérons (4.8) dans (4.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dE(t)}{dt} &= \operatorname{Re}\left\{-i \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} d\Gamma - i \int_{\Gamma} y \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} d\Gamma + i \int_{\Omega} y \overline{\Delta^2 \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)} d\Omega\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} d\Gamma - i \int_{\Gamma} y \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} d\Gamma + i \int_{\Omega} y \overline{A \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)} d\Omega\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} d\Gamma - i \int_{\Gamma} y \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} d\Gamma + i \int_{\Omega} y \overline{\left(A^{-\frac{1}{2}}y\right)} d\Omega\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} d\Gamma - i \int_{\Gamma} y \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} d\Gamma + i \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{4}}y \overline{\left(A^{-\frac{1}{4}}y\right)} d\Omega\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} d\Gamma - i \int_{\Gamma} y \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} d\Gamma + i \int_{\Omega} \left|A^{-\frac{1}{4}}y\right|^2 d\Omega\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i \int_{\Gamma} \Delta y \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} d\Gamma - i \int_{\Gamma} y \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} d\Gamma\right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\langle u_2, i \frac{\partial \overline{\left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)}}{\partial \nu} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} + \operatorname{Re} \left\langle u_1, i \frac{\partial \overline{\left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}}y\right)\right)}}{\partial \nu} \right\rangle_{L^2(\Gamma)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, un choix naturel des contrôles feedback est donné par

$$u_1 = -i \frac{\partial \left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}} y \right) \right)}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma, \quad (4.9)$$

$$u_2 = -i \frac{\partial \left(A^{-\frac{3}{2}} y \right)}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (4.10)$$

En effet, pour ce choix, on a

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \left\| \frac{\partial \left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}} y \right) \right)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \left\| \frac{\partial \left(A^{-\frac{3}{2}} y \right)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 0 \quad (4.11)$$

Ce qui signifie que l'énergie du système (4.1) – (4.3) est une fonction décroissante sur l'espace d'état $Z = D(A^{\frac{3}{4}})$.

5.3 Formulation abstraite du système feedback

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la formulation abstraite du problème (4.1) – (4.3) avec u_1 et u_2 donnés respectivement par (4.9) et (4.10), sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait du premier ordre et à l'obtention des résultats d'existence et d'unicité de la solution de ce dernier. Pour cela, on introduit les applications de Green G_1 et G_2 :

$$y_1 = G_1 u_1 \iff \{ \Delta^2 y_1 = 0 \text{ dans } \Omega ; y_1 = u_1, \Delta y_1 = 0 \text{ sur } \Gamma \}, \quad (4.12)$$

$$y_2 = G_2 u_2 \iff \{ \Delta^2 y_2 = 0 \text{ dans } \Omega ; y_2 = 0, \Delta y_2 = u_2 \text{ sur } \Gamma \}. \quad (4.13)$$

Soit D l'opérateur de Dirichlet défini par

$$D : H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega), s \in \mathbb{R},$$

$$\phi = Du \iff \{ \Delta \phi = 0 \text{ dans } \Omega, \phi = 0 \text{ sur } \Gamma \} \quad (4.14)$$

On a ([25])

$$G_1 = D, \quad (4.15)$$

$$G_2 = -A^{-\frac{1}{2}}D, \quad (4.16)$$

Soit maintenant $G_i^*(i = 1, 2)$ l'opérateur adjoint de G_i dans le sens

$$(G_i u, f)_{L^2(\Omega)} = (u, G_i^* f)_{L^2(\Gamma)}, \quad u \in L^2(\Gamma), \quad f \in L^2(\Omega).$$

Alors le second théorème de Green nous permet d'établir

$$G_1^* A f = \frac{\partial(\Delta f)}{\partial \nu}, \quad f \in D(A), \quad (4.17)$$

$$G_1^* A^{\frac{1}{2}} f = D^* A^{\frac{1}{2}} f = -\frac{\partial f}{\partial \nu}, \quad f \in D(A^{\frac{1}{2}}), \quad (4.18)$$

$$G_2^* A f = \frac{\partial f}{\partial \nu}, \quad f \in D(A), \quad (4.19)$$

$$G_2^* A^{\frac{1}{2}} f = -D^* A^{\frac{1}{2}} f = \frac{\partial f}{\partial \nu}, \quad f \in D(A^{\frac{1}{2}}). \quad (4.20)$$

En utilisant maintenant les techniques de [14], le problème (4.1) – (4.3) peut être modélisé comme une équation additive du premier ordre

$$y_t = iAy - iAG_1 u_1 - iAG_2 u_2 \quad (4.21)$$

où A est l'extension de $L^2(\Omega) \longrightarrow [D(A)]'$ de l'opérateur A défini dans le paragraphe précédent.

En utilisant (4.9), (4.10), (4.17) – (4.20), on peut exprimer les fonctions de contrôles u_1 et u_2 comme suit

$$u_1 = -iG_1^* A^{-\frac{1}{2}} y = -iD^* A^{-\frac{1}{2}} y, \quad (4.22)$$

$$u_2 = -i\Lambda^2 G_2^* A^{-\frac{1}{2}} y = i\Lambda^2 D^* A^{-\frac{1}{2}} y. \quad (4.23)$$

Dans (4.23), Λ désigne l'isomorphisme de $H^s(0, T ; L^2(\Gamma))$ sur $H^{s-1}(0, T ; L^2(\Gamma))$; $s \in \mathbb{R}$.

En vertu de (2.2), le système (4.21) prend la forme

$$y_t = A_F y, \quad (4.24)$$

$$y(0) = y_0. \quad (4.25)$$

où

$$\begin{aligned} A_F &= iA - AG_1 G_1^* A^{-\frac{1}{2}} - AG_2 \Lambda^2 G_2^* A^{-\frac{1}{2}}, \\ D(A_F) &= \{y \in D(A^{\frac{3}{4}})'; A_F y \in D(A^{\frac{3}{4}})'\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'équation aux dérivées partielles correspondante à (4.24), (4.25) est

$$iy_t + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } (0, \infty) \times \Omega, \quad (4.27)$$

$$y(0, x) = y_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.28)$$

$$y = -i \frac{\partial \left(\Delta \left(A^{-\frac{3}{2}} y \right) \right)}{\partial \nu} \quad \text{sur } (0, \infty) \times \Gamma \quad (4.29)$$

$$\Delta y = -i \Lambda^2 \frac{\partial \left(A^{-\frac{3}{2}} y \right)}{\partial \nu} \quad \text{sur } (0, \infty) \times \Gamma \quad (4.30)$$

On a le résultat suivant pour la bonne position du problème (4.24), (4.25).

Théorème 5.1 *i) L'opérateur A_F défini dans (4.26) est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contraction sur $Z = D(A^{\frac{3}{4}})'$. ii) Pour chaque $y_0 \in Z = D(A^{\frac{3}{4}})'$, la solution $y(t)$ du problème (4.24), (4.25) satisfait*

$$E(T) - E(0) = - \left(\left\| G_1^* A^{-\frac{1}{2}} y \right\|_{L^2(0, T ; L^2(\Gamma))}^2 + \left\| \Lambda^2 G_2^* A^{-\frac{1}{2}} y \right\|_{[H^1(0, \infty ; L^2(\Gamma))]' }^2 \right) \quad (4.31)$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \left\| G_1^* A^{-\frac{1}{2}} y \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq E(0), \quad (4.32)$$

$$\left\| \Lambda^2 G_2^* A^{-\frac{1}{2}} y \right\|_{[H^1(0,\infty;L^2(\Gamma))]' }^2 \leq E(0) \quad (4.33)$$

La démonstration *i* est similaire à la démonstration du théorème 1 du chapitre2, alors que *ii* découle de (4.11).

5.4 Résultat de stabilisation exponentielle

On établit dans ce paragraphe, la stabilité exponentielle du système en boucle fermée (4.28) – (4.31).

Théorème 5.2 *Il existe des constantes positives M et δ telle que, pour chaque donnée initiale $y_0 \in Z = D(A^{\frac{3}{4}})'$, la solution correspondante du problème (4.28) – (4.31) satisfait l'estimation suivante*

$$E(T) \leq M e^{-\delta t} E(0), \forall t \geq 0.$$

Preuve. En référence à l'énergie $E(t)$ du problème (4.27) – (4.30), notre tâche est de montrer l'existence d'un temps $0 < T < \infty$ tel que

$$E(T) \leq r E(0), r < 1 \quad (4.34)$$

pour tout $y_0 \in Z = D(A^{\frac{3}{4}})'$ et à partir de laquelle la décroissance uniforme est déduite.

Comme d'habitude, il suffit de montrer (4.34) pour $y_0 \in D(A_F)$ et d'étendre ensuite le résultat à $y_0 \in Z = D(A^{\frac{3}{4}})'$ par un argument de densité.

Soit $y_0 \in D(A_F)$ et on introduit une nouvelle variable p en posant

$$p = A^{-\frac{3}{2}} y \in C([0, T]; D(A^{\frac{3}{4}})) \quad (4.35)$$

De (4.26) et (4.35), on obtient l'équation abstraite

$$p_t = iP - A^{-1/2}G_1G_1^*Ap - A^{-1/2}G_2\Lambda^2G_2^*Ap, \quad (4.36)$$

$$p(0) = A^{-3/2}y(0). \quad (4.37)$$

L'équation aux dérivées partielles associée à (4.36) – (4.37) est

$$ip_t + \Delta^2 p = F_1 + F_2 \quad \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \quad (4.38)$$

$$p = \Delta p = 0 \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma, \quad (4.39)$$

$$p(x, 0) = p_0 \in D(A^{\frac{3}{4}}) \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.40)$$

où

$$F_1 = -iA^{-\frac{1}{2}}G_1G_1^*Ap = -iA^{-\frac{1}{2}}G_1 \frac{\partial(\Delta P)}{\partial\nu} = -iA^{-\frac{1}{2}}D \frac{\partial(\Delta p)}{\partial\nu}, \quad (4.41)$$

$$F_2 = -iA^{-\frac{1}{2}}G_2\Lambda^2G_2^*Ap = -iA^{-\frac{1}{2}}G_2\Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial\nu} = iA^{-1}D\Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial\nu}. \quad (4.42)$$

En terme de $p(\cdot)$, l'énergie $E(t)$ est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2$$

Une identité pour le problème (3.1) ■

Proposition 5.1 *Soient $h(x) \in [C^3(\overline{\Omega})]^n$ un champ de vecteur, et $y_0 \in D(A_F)$. Alors*

, la solution p du problème (4.38) – (4.40) satisfait l'identité suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p dx \right]_0^T - \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} h \nabla p d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \Delta h \nabla p d\Gamma dt + \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta \bar{p}) \nabla (\Delta h \nabla p) dx dt + \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \Delta h \nabla p dx dt - \\
& \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} \Delta h \nabla p dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) d\Gamma dt + \\
& \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta \bar{p}) \nabla (\nabla h \nabla (\nabla p)) dx dt + i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) dx dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta p) \Delta \bar{p} \nabla (\operatorname{div} h) dx dt - \\
& \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \operatorname{div} h dx dt + \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \operatorname{div} h dx dt = \\
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) d\Gamma dt - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta p) \nabla h \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt - \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} h \cdot \nu |\nabla (\Delta p)|^2 d\Gamma dt - \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt + \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Preuve. On multiplie les deux membres de l'équation (4.38) par $h \cdot \nabla (\Delta \bar{p})$, on intègre par parties sur $(0, T) \times \Omega$, et on prend la partie réelle. On obtient

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} p_t h \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt = \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 p h \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt - \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt + \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

On calcule les deux premiers termes de l'identité (4.44).

$$\text{Terme } \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} p_t h \cdot \nabla (\Delta \bar{p}) dx dt$$

On a des conditions aux limites (4.39)

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} p_t h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt = - \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \bar{p}_t h \nabla p \, dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Omega} p_t \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt \\
& = - \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \bar{p}_t \nabla (h \nabla p) \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_t \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt \\
& = - \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} h \nabla p \, d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{p}_t \Delta (h \nabla p) \, dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Omega} p_t \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt \\
& = - \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} h \nabla p \, d\Gamma dt + \\
& \int_0^T \int_{\Omega} \bar{p}_t (\Delta h \nabla p + 2 \nabla h \nabla (\nabla p) + h \nabla (\Delta p)) \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_t \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt \\
& = - \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} h \nabla p \, d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{p}_t \Delta h \nabla p \, dx dt + \\
& 2 \int_0^T \int_{\Omega} \bar{p}_t \nabla h \nabla (\nabla p) \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{p}_t h \nabla (\Delta p) \, dx dt. - \int_0^T \int_{\Omega} p_t \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt
\end{aligned} \tag{4.45}$$

De (4.45), on obtient

$$\begin{aligned}
2i \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} p_t h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt & = - \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} h \nabla p \, d\Gamma dt + \\
& \int_0^T \int_{\Omega} \bar{p}_t \Delta h \nabla p \, dx dt + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \bar{p}_t \nabla h \nabla (\nabla p) \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_t \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Combinant (4.46) et (4.38), pour avoir

$$\begin{aligned}
& 2i \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} p_t h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt = - \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} h \nabla p \, d\Gamma dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \bar{p} \Delta h \nabla p \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \Delta h \nabla p \, dx dt + \\
& \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} \Delta h \nabla p \, dx dt - 2i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \bar{p} \nabla h \nabla (\nabla p) \, dx dt - \\
& 2 \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) \, dx dt + 2 \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) \, dx dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 p \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} p_t h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt = \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T - \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} h \nabla p \, d\Gamma dt - \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \Delta h \nabla p \, d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta \bar{p}) \nabla (\Delta h \nabla p) \, dx dt + \\
& \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \Delta h \nabla p \, dx dt - \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} \Delta h \nabla p \, dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) \, d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta \bar{p}) \nabla (\nabla h \nabla (\nabla p)) \, dx dt + \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) \, dx dt - i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} \nabla h \nabla (\nabla p) \, dx dt + \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla (\Delta p)|^2 \operatorname{div} h \, dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta p) \Delta \bar{p} \nabla (\operatorname{div} h) \, dx dt - \\
& \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt + \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \operatorname{div} h \, dx dt
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Terme $\operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 p h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt$.

On a

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 p h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt = \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) \, d\Gamma dt - \\
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta p) \nabla h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} h_{,\nu} |\nabla (\Delta p)|^2 \, d\Gamma dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla (\Delta p)|^2 \operatorname{div} h \, dx dt. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Reportant (4.47) et (4.48) dans (4.44), on obtient l'identité (4.43).

On considère maintenant le cas où le champ de vecteur $h(x) = x - x_0$, où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un point fixé.

Alors

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} h = n, \nabla h = I_n, \\
& \nabla (\operatorname{div} h) = \Delta h = 0
\end{aligned}$$

et soit

$$M_h = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |h(x)|$$

En terme de $h(\cdot)$, l'identité (4.43) prend la forme

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla (\Delta p)|^2 \, dx dt = \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \right|^2 h_{,\nu} d\Gamma dt + \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} \frac{\partial p}{\partial \nu} h_{,\nu} d\Gamma dt + \\
& i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \, dx dt - i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \Delta \bar{p} \, dx dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla (\nabla p) \, dx dt + i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \nabla (\nabla p) \, dx dt - \\
& \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p \, dx \right]_0^T - \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt + \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt \tag{4.49}
\end{aligned}$$

On estime maintenant chaque termes de cette identité .

Terme $\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla (\Delta p)|^2 dxdt$

De (4.5), on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla (\Delta p)|^2 dxdt \geq 2C \int_0^T E(T) dt = 2CTE(T) \quad (4.50)$$

Terme $\frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Gamma dt$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \frac{i}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} \frac{\partial p}{\partial \nu} h.\nu d\Gamma dt \right| \leq \frac{M_h}{4} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \frac{M_h}{4} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \quad (4.51)$$

Terme $i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \Delta \bar{p} dxdt$.

De (4.16) et (4.17), on déduit que

$$\left| i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \Delta \bar{p} dxdt \right| = \left| i \frac{n}{2} \int_0^T \langle G_1 G_1^* A p, A^{-\frac{1}{2}} \Delta p \rangle_{L^2(\Omega)} dt \right|$$

Mais

$$\left\| A^{-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\Delta \bar{p}\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C \|\bar{p}\|_{H^3(\Omega)} \leq C \|\bar{p}\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}, \forall p \in D(A^{\frac{3}{4}}),$$

et

$$\left\| G_1 G_1^* A^{-\frac{1}{2}} y \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{G_1} \|G_1^* A p\|_{L^2(\Gamma)}, \forall y \in D(A^{\frac{3}{4}})',$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \Delta \bar{p} dxdt \right| &\leq \frac{nCC_{G_1}}{4\varepsilon} \int_0^T \|G_1^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \\ &\frac{\varepsilon nCC_{G_1}}{4} \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 dt \end{aligned} \quad (4.52)$$

Terme $-i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \Delta \bar{p} dxdt$.

On a grace à (4.16) et (4.20),

$$\left| -i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \Delta \bar{p} dx dt \right| = \left| i \frac{n}{2} \int_0^T \langle G_2 \Lambda^2 G_2^* A p, A^{-\frac{1}{2}} \Delta \bar{p} \rangle_{L^2(\Omega)} dt \right|$$

et du fait que

$$\begin{aligned} \left\| G_2 \Lambda^2 G_2^* A^{-\frac{1}{2}} y \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_{G_2} \|\Lambda G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C_{G_2} \|G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)} + C_{G_2} \|G_2^* A p_t\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left| -i \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \Delta \bar{p} dx dt \right| &\leq \frac{n C C_{G_2}}{4\varepsilon} \int_0^T \|G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \\ &\frac{n C C_{G_2}}{4\varepsilon} \int_0^T \|G_2^* A p_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \frac{\varepsilon n C C_{G_2}}{4} \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 dt \end{aligned} \quad (4.53)$$

Terme $-i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial(\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla(\nabla p) dx dt$.

On a

$$\begin{aligned} \left| -i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial(\Delta \bar{p})}{\partial \nu} \nabla(\nabla p) dx dt \right| &= \left| -i \int_0^T \langle A^{-\frac{1}{2}} \nabla(\nabla p), G_1 G_1^* A p \rangle_{L^2(\Omega)} dt \right| \\ &\leq \frac{C C_{G_1}}{2\varepsilon} \int_0^T \|G_1^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \frac{\varepsilon C C_{G_1}}{2} \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 dt \end{aligned} \quad (4.54)$$

Terme $i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \nabla(\nabla p) dx dt$.

On a

$$\begin{aligned} \left| i \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} \nabla(\nabla p) dx dt \right| &= \left| -i \int_0^T \langle A^{-\frac{1}{2}} \nabla(\nabla p), G_2 \Lambda^2 G_2^* A p \rangle_{L^2(\Omega)} dt \right| \\ &\leq \frac{C C_{G_2}}{2\varepsilon} \int_0^T \|G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \frac{C C_{G_2}}{2\varepsilon} \int_0^T \|G_2^* A p_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \\ &\frac{\varepsilon C C_{G_2}}{2} \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 dt \end{aligned} \quad (4.55)$$

Terme $-\frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p dx \right]_0^T$.

On a

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p dx \right]_0^T \right| \\
& \leq M_h \left[\left\| \Delta \bar{p}(T) \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla p(T)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \Delta \bar{p}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla p(0)\|_{L^2(\Omega)} \right] \\
& \leq M_h \left[\frac{1}{4} \|\Delta p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|\Delta p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.56}$$

De (4.39) et (4.11), on a

$$\|\Delta p(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla(\Delta p(T))\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
\|\Delta p(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq C \|\nabla(\Delta p(0))\|_{L^2(\Omega)}^2, \\
& \leq C \{E(T) + \|G_1^* A p\|_{L^2(0,T; L^2(\Gamma))}^2 + \|\Lambda^2 G_2^* A p\|_{[H^1(0,\infty; L^2(\Gamma))]' }^2\}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Insérant (4.57) et (4.58) dans (4.56), pour trouver

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{i}{2} \left[\int_{\Omega} \Delta \bar{p} h \nabla p dx \right]_0^T \right| \leq \frac{M_h}{2} \|\nabla p\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} C M_h E(T) + \\
& \frac{M_h}{4} \{ \|G_1^* A p\|_{L^2(0,T; L^2(\Gamma))}^2 + \|\Lambda^2 G_2^* A p\|_{[H^1(0,\infty; L^2(\Gamma))]' }^2 \}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Terme $-\operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla(\Delta \bar{p}) dx dt$

De (4.16) et (4.17), on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \left| -\operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla(\Delta \bar{p}) \, dx dt \right| \\
&= \left| -\operatorname{Im} \int_0^T \langle G_1 G_1^* A p, A^{-\frac{1}{2}} h \nabla(\Delta p) \rangle_{L^2(\Omega)} \, dt \right| \\
&\leq \int_0^T \|G_1 G_1^* A p\|_{L^2(\Omega)} \left\| A^{-\frac{1}{2}} h \nabla(\Delta \bar{p}) \right\|_{L^2(\Omega)} \, dt
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\left\| A^{-\frac{1}{2}} h \nabla(\Delta \bar{p}) \right\|_{L^2(\Omega)} &= \|h \nabla(\Delta \bar{p})\|_{D(A^{\frac{1}{2}})} \\
&\leq C_h \|p\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \left| -\operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-\frac{1}{2}} D \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} h \nabla(\Delta \bar{p}) \, dx dt \right| \\
&\leq \frac{C_{G_1} C_h}{2\varepsilon} \int_0^T \|G_1^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, dt + \frac{\varepsilon C_{G_1} C_h}{2} \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 \, dt \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Terme $\operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} h \nabla(\Delta \bar{p}) \, dx dt$.

De (4.16) et (4.20), on a

$$\begin{aligned}
& \left| \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} A^{-1} D \Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial \nu} h \nabla (\Delta \bar{p}) \, dx dt \right| \\
&= \left| - \operatorname{Im} \int_0^T \langle G_2 \Lambda^2 G_2^* A p, A^{-\frac{1}{2}} h \nabla (\Delta \bar{p}) \rangle_{L^2(\Omega)} \, dt \right| \\
&\leq \int_0^T \|G_2 \Lambda^2 G_2^* A p\|_{L^2(\Omega)} \|A^{-\frac{1}{2}} h \nabla (\Delta \bar{p})\|_{L^2(\Omega)} \, dt \\
&\leq \frac{C_{G_2} C_h}{2\varepsilon} \int_0^T \|\Lambda G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, dt + \frac{\varepsilon C_{G_2} C_h}{2} \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 \, dt \\
&\leq \frac{C_{G_2} C_h}{2\varepsilon} \int_0^T \|G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, dt + \frac{C_{G_2} C_h}{2\varepsilon} \int_0^T \|G_2^* A p_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, dt \\
&+ \frac{\varepsilon C_{G_2} C_h}{2} \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 \, dt \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Insérons (4.50) – (4.59), (4.60) et (4.61) dans (4.49), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T E(T) &\leq \frac{M_h}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt + \\
&\frac{M_h}{4} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p_t}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt + \frac{M_h}{4} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt + \\
&\left(\frac{C_{G_1} C_h}{2\varepsilon} + \frac{n C C_{G_1}}{4\varepsilon} + \frac{C C_{G_1}}{2\varepsilon} + \frac{M_h}{4} \right) \int_0^T \|G_1^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, dt + \\
&\left(\frac{C C_{G_2}}{2\varepsilon} + \frac{n C C_{G_2}}{4\varepsilon} + \frac{M_h}{4} \right) \int_0^T \|G_2^* A p_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, dt + \frac{M_h}{2\varepsilon} \|\nabla p\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2 + \\
&\left(\frac{n C C_{G_2}}{4\varepsilon} + \frac{C_{G_2} C_h}{2\varepsilon} + \frac{C C_{G_2}}{2\varepsilon} + \frac{M_h}{4} + \frac{C_{G_2} C_h}{2\varepsilon} \right) \int_0^T \|G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, dt + \\
&\varepsilon \left(\frac{C_{G_2} C_h}{2} + \frac{C_{G_1} C_h}{2} + \frac{C C_{G_2}}{2} + \frac{C C_{G_1}}{2} + \frac{n C C_{G_2}}{4} + \frac{n C C_{G_1}}{4} \right) \int_0^T \|p(t)\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 \, dt + \\
&\frac{1}{2} C M_h E(T) \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Utilisant encore une fois (4.50), on simplifie (4.62) à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}TE(T) &\leq \frac{M_h}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \frac{M_h}{4} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p_t}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \\
&+ \frac{M_h}{4} \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + K_1 \int_0^T \|G_1^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\
&+ K_2 \int_0^T \|G_2^* A p_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + K_3 \int_0^T \|G_2^* A p\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \\
&\varepsilon K_4 T E(T) + \frac{1}{2} C M_h E(T) + \frac{M_h}{2\varepsilon} \|\|\nabla p\|\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2
\end{aligned}$$

qu'on peut réécrire grace à (4.17) – (4.20)

$$\begin{aligned}
&((\frac{1}{2} - \varepsilon K_4)T - \frac{1}{2} C M_h) E(T) \leq \\
&(\frac{M_h}{2} + K_1) \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + (\frac{M_h}{4} + K_2) \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p_t}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \\
&(\frac{M_h}{4} + K_3) \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \frac{M_h}{2\varepsilon} \|\|\nabla p\|\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
E(T) &\leq \tilde{K}_1 \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \tilde{K}_2 \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p_t}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \\
&\tilde{K}_3 \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \tilde{K}_4 \|\|\nabla p\|\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2
\end{aligned} \tag{4.63}$$

On élimine maintenant de (4.63) le terme d'ordre inférieur en utilisant un argument de compacité-unicité. On montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\|\nabla p\|\|_{C([0,T]; L^2(\Omega))}^2 \leq C \left(\int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p_t}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \right) \tag{4.64}$$

Supposons que (4.64) n'est pas vraie. Alors, il existe une suite $\{p_n(t)\}$ de solutions du problème (4.38) – (4.40) sur $[0, T]$

$$\begin{aligned} ip_{nt} + \Delta^2 p_n &= F_1 + F_2 && \text{dans } Q, \\ p_n(0) &= p_{n0} && \text{dans } \Omega, \\ p_n = \Delta p_n &= 0 && \text{dans } \Sigma. \end{aligned} \tag{4.65}$$

telle que

$$\|\|\nabla p_n\|\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 = 1 \tag{4.66}$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial(\Delta p_n)}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p_{nt}}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial p_n}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt = 0 \tag{4.67}$$

Chaque solution $p_n(t)$ satisfait (4.63), et ainsi on a

$$\|p_{n0}\|_{D(A^{\frac{3}{4}})}^2 \leq Const, \quad \text{uniformément pour } n \in \mathbb{N}$$

Donc, on peut extraire une sous-suite notée encore $\{p_n(t)\}$ telle que

$$p_{n0} \longrightarrow \tilde{p}_0 \quad \text{faiblement dans } D(A^{\frac{3}{4}})$$

Soit $\tilde{\varphi}_n(t)$ la solution du problème (4.65) correspondante à \tilde{p}_0 . Donc, il s'ensuit que

$$p_n(t) \longrightarrow \tilde{p}(t) \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0, T ; D(A^{\frac{3}{4}})) \tag{4.68}$$

(4.68) implique à son tour que $p_n(t)$ est uniformément borné dans $L^\infty(0, T ; D(A^{\frac{3}{4}}))$. Ce fait avec la compacité de l'injection $D(A^{\frac{3}{4}}) \subset H_0^1(\Omega)$ implique qu'il existe une sous-suite notée encore par $\{p_n(t)\}$ telle que

$$p_n(t) \longrightarrow \tilde{p}(t) \quad \text{fortement dans } C([0, T] ; H_0^1(\Omega))$$

De (4.66), on obtient

$$\|\nabla \tilde{p}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 = 1 \quad (4.69)$$

En plus, par (4.67)

$$\frac{\partial(\Delta \tilde{p})}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{p}_t}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F_1 &= -iA^{-\frac{1}{2}}D \frac{\partial(\Delta \tilde{p})}{\partial \nu} = 0, \\ F_2 &= iA^{-1}D\Lambda^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \nu} = 0 \end{aligned}$$

et par conséquent $\tilde{p}(t)$ satisfait

$$\begin{aligned} i\tilde{p}_t + \Delta^2 \tilde{p} &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \tilde{p} = \Delta \tilde{p} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial(\Delta \tilde{p})}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{p}_t}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Le théorème d'unicité de Holmgren appliqué à (4.70) donne $\tilde{p} = 0$. Ceci contredit (4.69), et la démonstration de (4.64) est achevée.

Maintenant (4.63) et (4.64) donnent

$$E(T) \leq \text{Const} \int_0^T \int_{\Gamma} \left(\left| \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial p_t}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|^2 \right) d\Gamma dt$$

qui avec (4.31) implique

$$E(T) \leq \frac{\text{Const}}{1 + \text{Const}} E(0)$$

D'où le résultat désiré. ■

Chapitre 6

Stabilisation frontière et stabilisation interne de l'équation de Schrödinger de quatrième ordre

6.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude des problèmes de la stabilisation frontière et interne pour l'équation de Schrödinger de quatrième ordre dans un domaine régulier Ω de \mathbb{R}^n .

On considère, tout d'abord le problème de la stabilisation frontière. En introduisant des conditions aux limites dissipatives appropriés, on montre que la solution décroît exponentiellement dans un espace d'énergie approprié. Dans le problème de stabilisation interne, en supposant que le terme d'amortissement est effectué sur un voisinage d'une partie de la frontière, on montre la décroissance exponentielle de la solution dans l'espace d'énergie $L^2(\Omega)$. Les deux résultats sont établis en utilisant des techniques de la méthode des multiplicateurs et des arguments de compacité/unicité.

Soit Ω un domaine borné non vide de \mathbb{R}^n de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière.

Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de la frontière Γ définie par

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \quad (5.1)$$

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} \quad (5.2)$$

où $\nu(\cdot)$ est le vecteur normal unitaire à Γ orienté vers l'extérieur de Ω , $m(x) = x - x_0$, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un point fixé à l'extérieur de Ω tel que

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset \quad (5.3)$$

Dans Ω , on considère l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec un terme d'amortissement frontière supporté sur Γ_0 .

$$y_t(x, t) = i\Delta^2 y(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (5.4)$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.5)$$

$$y(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} y(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \quad (5.6)$$

$$\Delta y(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta y(x, t)) = m(x) \cdot \nu(x) y_t(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty). \quad (5.8)$$

L'espace naturel de l'énergie pour le système (5.4) – (5.8) est l'espace

$$V = \{f \in H^2(\Omega); \quad f = \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\}$$

muni de la norme induite par le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \Delta f(x) \overline{\Delta g(x)} dx$$

qui dans V est équivalente à la norme de $H^2(\Omega)$. Par conséquent la fonction d'énergie d'une solution du système (5.4) – (5.8) est définie par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|y(t)\|_V^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

En ce qui concerne la bonne-position de la solution du système (5.4) – (5.8), on a le résultat suivant .

Théorème 6.1 *Pour chaque donnée initiale $y_0 \in V$, le système (5.4) – (5.8) admet une solution unique*

$$y \in C([0, +\infty); V) \cap C^1([0, +\infty); V')$$

où V' est le dual de V . En plus si $y_0 \in H^6(\Omega) \cap V$, et

$$\begin{aligned} \Delta y_0(x, t) &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial \Delta y_0(x, t)}{\partial \nu} &= im(x) \cdot \nu(x) \Delta^2 y_0(x, t) && \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

Alors $y \in C^1([0, +\infty); V) \cap C([0, +\infty); H^6(\Omega) \cap V)$ et satisfait

$$\begin{aligned} \Delta y(x, t) &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial \nu} &= im(x) \cdot \nu(x) \Delta^2 y(x, t) && \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

Dans le théorème suivant, on indique un résultat de stabilité exponentielle pour le système (5.4) – (5.8).

Théorème 6.2 *Il existe des constantes positives M et δ telles que pour chaque donnée initiale $y_0 \in V$, l'énergie $E(\cdot)$ de la solution du système (5.4) – (5.8) où Γ_0 et Γ_1 sont données par (5.1) et (5.2) satisfait l'inégalité*

$$E(t) \leq M e^{-\delta t} E(0) \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad (5.9)$$

Dans ce chapitre, on étudie également le problème de la stabilité pour l'équation de Schrödinger de quatrième ordre avec un terme d'amortissement interne. Pour cela, soit $\omega \subset \Omega$ un voisinage de $\overline{\Gamma_0}$ et soit $a(\cdot)$ une fonction de $L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \text{ a.e. dans } \Omega \\ \exists a_0 > 0 : a(x) \geq a_0 \text{ a.e. dans } \omega \end{cases} \quad (5.10)$$

On considère l'équation de Schrödinger de quatrième ordre amortie intérieurement

$$y_t(x, t) = i\Delta^2 y(x, t) - a(x)y(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (5.11)$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.12)$$

$$y(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} y(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty). \quad (5.13)$$

Il est facile de voir que le système (5.11) – (5.13) admet une solution unique de classe

$$y \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega))')$$

si $y_0 \in L^2(\Omega)$, et dans la classe

$$y \in C([0, +\infty); H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega))$$

si $y_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

On définit l'énergie d'une solution de système (5.11) – (5.13) comme suit

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

On a alors le résultat de décroissance exponentielle suivant.

Théorème 6.3 *Soit $\omega \subset \Omega$ un voisinage de $\overline{\Gamma_0}$. On suppose que la fonction $a(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ satisfait (5.10). Alors, il existe des constantes positives M et δ telles que*

$$F(t) \leq M e^{-\delta t} F(0), \quad \forall t > 0$$

pour chaque solution de (5.11) – (5.13) avec donnée initiale $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première section, on donne la preuve du théorème 1. La démonstration du théorème 2 est présentée dans la troisième section.

La quatrième section est consacrée à la démonstration du théorème 3.

6.2 Démonstration du théorème 1

On réécrit le système (5.4)–(5.8) comme un problème de Cauchy abstrait dans V sous la forme

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

où A est un operateur linéaire non borné défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \{f \in V, \Delta^2 f \in V, \Delta f = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \frac{\partial(\Delta f)}{\partial \nu} = im(x).\nu(x)\Delta^2 f \text{ sur } \Gamma_0\} \\ Af = i\Delta^2 f \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Il est clair que A est fermé et de domaine dense dans V . De plus, il est dissipatif (voir Appendice A). Son adjoint A^* qui est définit par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A^*) = \{f \in V, \Delta^2 f \in V, \Delta f = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \frac{\partial(\Delta f)}{\partial \nu} = -im(x).\nu(x)\Delta^2 f \text{ sur } \Gamma_0\} \\ A^* f = -i\Delta^2 f \end{array} \right. \quad (5.15)$$

est aussi dissipatif (voir Appendice A).

Par conséquent A engendre un C_0 -semi groupe de contraction sur V (voir [40], p. 15, corollaire 4.4). Le théorème 1 suit maintenant de la théorie de semi groupes .

6.3 Démonstration du résultat de la stabilisation frontière

On montre le théorème pour les solutions régulières. Le cas général suit par un argument de densité. On procède en plusieurs étapes.

Etape 1. On dérive la fonction d'énergie $E(t)$ et on applique le théorème de Green. On obtient

$$\frac{d}{dt}E(t) = - \int_{\Gamma_0} m(x).\nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma \quad (5.16)$$

après l'utilisation des conditions aux limites (5.6) – (5.8).

(5.16) implique

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x).\nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma dt \quad (5.17)$$

pour tout $T > 0$.

Etape 2. On multiplie des deux membres de l'équation (5.4) par $m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)}$ et on intègre par partie sur $\Omega \times (0, T)$. On obtient (Voir Appendice B)

$$\begin{aligned}
4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt &= \text{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx \right]_0^T \\
&- 2 \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial (\Delta y(x, t))}{\partial \nu} m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} d\Gamma dt - \\
n \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} y(x, t) \frac{\partial (\overline{\Delta y(x, t)})}{\partial \nu} d\Gamma dt &- \text{Im} \int_0^T \int_{\Omega} y(x, t) \overline{y_t(x, t)} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt + \\
\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta y(x, t)|^2 m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt & \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Puisque $m(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ sur Γ_1 , alors on a de (5.18)

$$\begin{aligned}
4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt &\leq \text{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx \right]_0^T \\
&- 2 \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial (\Delta y(x, t))}{\partial \nu} m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} d\Gamma dt - \\
&- n \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} y(x, t) \frac{\partial (\overline{\Delta y(x, t)})}{\partial \nu} d\Gamma dt - \text{Im} \int_0^T \int_{\Gamma_0} y(x, t) \overline{y_t(x, t)} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Etape 3. On estime chaque terme du membre de droite de (5.19) séparément.

Premier terme : D'après l'inégalité de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \text{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx \right]_0^T \right| \\
&\leq C \int_{\Omega} \left(|y(x, T)| |\nabla \overline{y(x, T)}| + |y(x, 0)| |\nabla y(x, 0)| \right) dx
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Ici et dans le reste du chapitre C désigne une constante positive différente à des occurrences différentes.

Utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient de (5.20)

$$\left| \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) m(x) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} dx \right]_0^T \right| \leq C \int_{\Omega} (|\nabla y(x, 0)|^2 + |\nabla y(x, T)|^2) dx \quad (5.21)$$

Deuxième terme : Utilisant les conditions aux limites (5.8) et le théorème de trace, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial (\Delta y(x, t))}{\partial \nu} m(x) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} d\Gamma dt \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma dt + \\ & \varepsilon \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt \end{aligned} \quad (5.22)$$

où ε est une constante positive à fixé plus tard et μ_1 est une constante telle que

$$\int_{\Gamma_0} |\nabla \psi(x)|^2 d\Gamma \leq \mu_1 \int_{\Omega} |\Delta \psi(x)|^2 dx$$

pour tout $\psi \in V$.

Troisième terme : Du théorème de trace suivi de l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| n \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} y(x, t) \frac{\partial (\overline{\Delta y(x, t)})}{\partial \nu} d\Gamma dt \right| \leq \frac{C n^2}{2\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma dt + \\ & \frac{\varepsilon}{2} \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt \end{aligned} \quad (5.23)$$

où μ_2 est telle que

$$\int_{\Gamma_0} |\psi(x)|^2 dx \leq \mu_2 \int_{\Omega} |\Delta \psi(x)|^2 dx$$

pour tout $\psi \in V$.

Quatrième terme : On a aussi du théorème de trace et de l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}
& \left| \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Gamma_0} y(x, t) \overline{y_t(x, t)} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt \right| \\
& \leq \frac{C}{2\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma dt + \\
& \frac{\varepsilon}{2} \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Etape 4. Par l'insertion de (5.21) – (5.24) dans (5.19), on obtient

$$\begin{aligned}
4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt & \leq C \int_{\Omega} (|\nabla y(x, 0)|^2 + |\nabla y(x, T)|^2) dx + \\
& C \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma dt + \\
& \varepsilon(\mu_1 + \mu_2) \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt
\end{aligned}$$

Choisissant ε suffisamment petit pour que $4 - \varepsilon(\mu_1 + \mu_2) > 0$ et invoquant la propriété de non-croissance de la fonction d'énergie $E(t)$, on aboutit à

$$TE(T) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma dt + C \|y\|_{C(0, T, H_{\Gamma_1}^1(\Omega))}^2 \tag{5.25}$$

où

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega); f = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

Etape 5. On établit maintenant l'existence d'une constante positive C telle que

$$\|y\|_{C(0, T, H_{\Gamma_1}^1(\Omega))}^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |y_t(x, t)|^2 d\Gamma dt \tag{5.26}$$

On procède par contradiction. Si (5.26) n'est pas satisfaite, il existe une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de solutions pour le système (5.4) – (5.8) avec

$$y_n(x, 0) = y_n^0(x), \quad x \in \Omega,$$

telle que

$$\|y_n\|_{C(0,T;H_{\Gamma_1}^1(\Omega))} = 1, \text{ pour tout } n \quad (5.27)$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) \left| \frac{\partial y_n(x, t)}{\partial t} \right|^2 d\Gamma dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \quad (5.28)$$

Puisque chaque solution de (5.4) – (5.8) satisfait (5.25) , on déduit de (5.27) et (5.28) que la suite $\{y_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans V . Par conséquent il existe une sous suite notée encore par $\{y_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$y_n^0 \longrightarrow \tilde{y}^0 \quad \text{faiblement dans } V$$

Supposons que \tilde{y} est la solution de système (5.4) – (5.8) correspondante à la condition initiale \tilde{y}^0 . Alors

$$y_n \longrightarrow \tilde{y} \quad \text{faible étoile dans } L^\infty(0, T ; V)$$

La suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est donc uniformément bornée dans $L^\infty(0, T ; V)$. Ce fait ainsi que la cyompacité de $V \longrightarrow H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ implique qu'il existe une sous suite notée encore par $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$y_n \longrightarrow \tilde{y} \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T ; V)$$

Puis de (5.27)

$$\|\tilde{y}\|_{C(0,T;H_{\Gamma_1}^1(\Omega))} = 1$$

De plus par (5.28)

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) \left| \frac{\partial \tilde{y}(x, t)}{\partial t} \right|^2 d\Gamma dt = 0$$

Donc

$$\frac{\partial \tilde{y}(x, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T)$$

Posons $v(x, t) = \frac{\partial \tilde{y}(x, t)}{\partial t}$, alors v résoud le problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= i\Delta^2 v(x, t) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v(x, 0) &= v_0(x) && \text{dans } \Omega, \\ v(x, t) &= \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \Delta v(x, t) &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial \Delta v(x, t)}{\partial \nu} &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T). \end{aligned}$$

Notons que le v -problème diffère de y -problème (5.4) – (5.8) seulement par la dernière condition au bord, alors nous pouvons exprimer l'identité (B.11) en termes de v

$$\begin{aligned} 4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta v(x, t)|^2 dx dt &= \text{Im} \left[\int_{\Omega} v(x, t) m(x) \cdot \nabla \overline{v(x, t)} dx \right]_0^T \\ -2 \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Delta v(x, t)}{\partial \nu} m(x) \cdot \nabla \overline{v(x, t)} d\Gamma dt &- n \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} v(x, t) \frac{\partial \Delta \overline{v(x, t)}}{\partial \nu} d\Gamma dt \\ - \text{Im} \int_0^T \int_{\Gamma_0} v(x, t) \frac{\partial \overline{v(x, t)}}{\partial t} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt &+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta v(x, t)|^2 m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt \end{aligned}$$

L'insertion de la condition au bord $\frac{\partial \Delta v(x, t)}{\partial \nu} = 0$ sur $\Gamma_0 \times (0, T)$ implique que

$$\begin{aligned} 4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta v(x, t)|^2 dx dt &= \text{Im} \left[\int_{\Omega} v(x, t) m(x) \cdot \nabla \overline{v(x, t)} dx \right]_0^T \\ - \text{Im} \int_0^T \int_{\Gamma_0} v(x, t) \frac{\partial \overline{v(x, t)}}{\partial t} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt &+ \\ \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta v(x, t)|^2 m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt & \end{aligned} \quad (5.29)$$

et puisque

$$\int_{\Omega} |\Delta v(x, t)|^2 dx = \int_{\Omega} |\Delta v(x, 0)|^2 dx$$

Alors, on déduit de (5.29) que

$$(4T - C) \int_{\Omega} |\Delta v(x, 0)|^2 dx \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left\{ |v(x, t)|^2 + \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|^2 \right\} d\Gamma dt$$

Cette estimation avec le fait que

$$v(x, t) = \frac{\partial \tilde{y}(x, t)}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T)$$

implique que pour T assez grand

$$v(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

Donc \tilde{y} dépend seulement de x , i.e.

$$\tilde{y}(x, t) = \tilde{y}(x)$$

et par conséquent satisfait

$$\begin{aligned} i\Delta^2 \tilde{y}(x) &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \tilde{y}(x) = \frac{\partial \tilde{y}(x)}{\partial \nu} &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \\ \Delta \tilde{y}(x) = \frac{\partial \Delta \tilde{y}(x)}{\partial \nu} &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \end{aligned}$$

et donc $\tilde{y}(x) = 0$ dans Ω ce qui contredit (5.27). Ceci montre (5.26).

Etape 6. De (5.25) et (5.26), on obtient l'estimation d'observabilité suivante

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) \left| \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|^2 d\Gamma dt \quad (5.30)$$

(5.30) conjointement avec (5.17) implique que

$$E(T) \leq \frac{1}{1+C} E(0)$$

Ce qui implique l'estimation de stabilité désirée (5.9) puisque $0 < \frac{1}{1+C} < 1$ (voir [12], p.299, proposition 1.7).

6.4 Démonstration du résultat de la stabilité interne

On a besoin de l'estimation d'observabilité suivante.

Proposition 6.1 *Soient Ω et ω comme indiqué dans le théorème 3. Alors pour chaque $T > 0$, il existe une constante positive C telle que*

$$\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi(x, t)|^2 dx dt \quad (5.31)$$

pour chaque solution régulière de

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = i\Delta^2 \varphi(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.32)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.33)$$

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T). \quad (5.34)$$

Preuve. Nous procédons en plusieurs étapes.

Etape 1. Appliquant l'identité (B.6) au φ -problème avec un champ de vecteur $h(.,.)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \nu(x) & (x, t) &\in \Gamma_0 \times (\varepsilon, T - \varepsilon), \\ h(x, t) \cdot \nu(x) &\geq 0 & (x, t) &\in \Gamma \times (0, T), \\ h(x, 0) &= h(x, T) = 0 & x &\in \Omega, \\ h(x, t) &= 0 & (x, t) &\in (\Omega \setminus \widehat{\omega}) \times (0, T), \end{aligned}$$

où $\widehat{\omega}$ est un autre voisinage de $\overline{\Gamma_0}$ tel que $(\Omega \cap \widehat{\omega}) \subset \omega$, on obtient

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} |\Delta \varphi(x, t)|^2 d\Gamma dt \leq C \int_0^T \int_{\widehat{\omega}} |\Delta \varphi(x, t)|^2 dx dt$$

qui combiné avec le théorème 1.1 de [52] donne

$$\|\varphi_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\widehat{\omega}} |\Delta \varphi(x, t)|^2 dx dt \quad (5.35)$$

Etape 2. A partir de (5.35) on obtient

$$\|\varphi_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \|\varphi(t)\|_{H^2(\widehat{\omega})}^2 dt \quad (5.36)$$

De plus, nous avons ■

Lemme 6.1 Soit $f \in H^{-2}(\Omega)$ et supposons que $u \in H_0^2(\Omega)$ est la solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x) &= f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de f telle que

$$\|u\|_{H^2(\widehat{\omega})}^2 \leq C \{ \|f\|_{H^{-2}(\omega)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \} \quad (5.37)$$

Preuve du lemme. Supposons que $\eta(\cdot)$ est une $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -fonction satisfaisant

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \widehat{\omega} \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \widehat{\omega} \end{cases}$$

Ainsi la fonction $v = \eta u$ vérifie

$$\begin{cases} \Delta^2 v = (\Delta^2 \eta) u + \eta f + 4 \nabla \Delta u \cdot \nabla \eta + 4 \nabla u \cdot \nabla \Delta \eta + 2 \Delta \eta \Delta u + 4 \sum_{k,i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_k \partial x_i} & \text{dans } \omega, \\ v \in H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Puisque Δ^2 est un isomorphisme de $H_0^2(\omega)$ sur $H^{-2}(\omega)$, alors

$$\|v\|_{H^2(\omega)} \leq C \{ \|f\|_{H^{-2}(\omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \}$$

et par conséquent

$$\|u\|_{H^2(\widehat{\omega})} \leq C \{ \|f\|_{H^{-2}(\omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \}$$

parceque

$$\|u\|_{H^2(\widehat{\omega})} = \|v\|_{H^2(\widehat{\omega})} \leq \|v\|_{H^2(\omega)}$$

Maintenant, combinant (5.36) et (5.37), on obtient

$$\|\varphi_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \left\| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right\|_{H^{-2}(\omega)}^2 dt + \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \quad (5.38)$$

Etape 3. On montre par contradiction que

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \int_0^T \left\| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right\|_{H^{-2}(\omega)}^2 dt \quad (5.39)$$

Supposons que (5.39) n'est pas satisfaite, alors il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de solutions de (5.32) – (5.34) avec

$$\varphi_n(x, 0) = \varphi_n^0(x) \quad x \in \Omega$$

telle que

$$\|\varphi_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 = 1 \quad \text{pour tout } n, \quad (5.40)$$

$$\text{et } \int_0^T \left\| \frac{d\varphi_n}{dt}(t) \right\|_{H^{-2}(\omega)}^2 dt \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty. \quad (5.41)$$

De (5.38), on déduit que $\{\varphi_n^0\}$ est bornée dans $H_0^2(\Omega)$ uniformément en n . Donc il existe une sous suite, encore notée par $\{\varphi_n\}$ telle que

$$\varphi_n^0 \longrightarrow \varphi^0 \text{ dans } H_0^2(\Omega) \quad \text{faiblement.}$$

Soit φ la solution de (5.32) – (5.34) correspondante à la condition initiale φ_0 . Alors

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \text{dans } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \quad \text{faible étoile.} \quad (5.42)$$

Il s'ensuit de (5.42) que $\{\varphi_n\}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$. Ce fait avec la compacité de l'inclusion $H_0^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ implique

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \text{fortement dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

De (5.40), on obtient

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 = 1 \quad (5.43)$$

D'autre part, on a de (5.41), on a

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } \omega \times (0,T).$$

Posons

$$\sigma(x,t) = \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \quad (5.44)$$

Alors σ résoud le problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} &= i\Delta^2 \sigma(x, t) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \sigma(x, 0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) && \text{dans } \Omega, \\ \sigma(x, t) &= \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Gamma \times (0, T). \end{aligned}$$

et satisfait

$$\Delta \sigma(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T). \quad (5.45)$$

Rappelant le théorème 1.1 de [52], on obtient de (5.45)

$$\sigma(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (5.46)$$

(5.46) combiné avec (5.32) et (5.34) implique que

$$\begin{aligned} i\Delta^2 \varphi(x) &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \varphi(x) &= \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

et donc

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

qui contredit (5.43).

Etape 4. En combinant (5.39) et (5.38), et en utilisant le fait que Δ^2 est un isomorphisme de $H_0^2(\Omega)$ sur $H^{-2}(\Omega)$, on obtient l'estimation suivante

$$\left\| \frac{d\varphi}{dt}(0) \right\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \left\| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 dt \quad (5.47)$$

Etape 5. On suppose que $\varphi \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$ est la solution de (5.32) – (5.34) et on définit

$$\alpha(x, t) = \int_0^t \varphi(x, s) ds + \Phi(x)$$

où

$$\begin{cases} i\Delta^2 \Phi(x) = \varphi(x, 0) & \text{dans } \Omega, \\ \Phi(x) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors α est la solution de (5.32)–(5.34) avec $\alpha(x, 0) = \Phi(x) \in H_0^2(\Omega)$ et $\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} = \varphi(x, t)$.

Donc, en réécrivant l'estimation (5.47) pour α , on obtient

$$\|\varphi(0)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \|\varphi(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 dt \quad (5.48)$$

Etape 6. De (5.36) et (5.48), on a

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \|\varphi(t)\|_{H^2(\omega)}^2 dt, \quad (5.49)$$

$$\|\varphi(0)\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \|\varphi(t)\|_{H^{-2}(\omega)}^2 dt. \quad (5.50)$$

On montre (5.31) par interpolation. A cette fin, on définit un opérateur linéaire

$$L : H^{-2}(\Omega) \longrightarrow L^2(0, T; H^{-2}(\omega))$$

par

$$(L\varphi)(t) = S(t)\varphi|_{\omega}$$

où $S(t)$ est le C_0 –groupe dont le générateur est l'opérateur A donné par

$$D(A) = H_0^2(\Omega), \quad Af = i\Delta^2 f.$$

Il est clair que

$$\|L\varphi\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\omega))} \leq C \|\varphi\|_{H^{-2}(\Omega)}.$$

En outre, en réécrivant (5.50) en fonction de l'opérateur L , on obtient

$$\|L\varphi\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\omega))} \geq C \|\varphi\|_{H^{-2}(\Omega)}. \quad (5.51)$$

Donc L est un isomorphisme de $H^{-2}(\Omega)$ sur $X_0 = L(H^{-2}(\Omega))$. Posons $\mathbb{L} = L^{-1}$ et $Y_0 = H^{-2}(\Omega)$. Alors $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(X_0, Y_0)$.

Posons maintenant $X_1 = X_0 \cap L^2(0, T; H^2(\omega))$ et $Y_1 = H_0^2(\Omega)$. Il suit de (5.51) que $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(X_1, Y_1)$.

Appliquant le théorème d'interpolation ([33], p.32, théorème 5.4) à l'opérateur \mathbb{L} , on obtient

$$\mathbb{L} \in \mathcal{L}\left([X_0, X_1]_{\frac{1}{2}}, [Y_1, Y_0]_{\frac{1}{2}}\right).$$

On a

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_0]_{\frac{1}{2}} &= L^2(\Omega) \quad ([28], \text{ p.79, théorème 12.3}) \\ [L^2(0, T; H^2(\omega)), L^2(0, T; H^{-2}(\omega))]_{\frac{1}{2}} &= L^2\left(0, T; [H^2(\omega), H^{-2}(\omega)]_{\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad ([6], \text{ p.107, théorème 5.2.1}) \\ [H^2(\omega), H^{-2}(\omega)]_{\frac{1}{2}} &= L^2(\omega) \quad ([33], \text{ théorème 12.4, p.81}) \end{aligned}$$

Maintenant, puisque X_0 est un sous espace de $L^2(0, T; H^{-2}(\omega))$ et X_1 est un sous espace de $L^2(0, T; H^2(\omega))$, il suit de [33], p. 108, théorème 15.1, que la norme de $[X_0, X_1]$ est équivalente à la norme de $L^2(0, T; L^2(\omega))$ et par conséquent

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C \int_0^T \|\varphi(t)\|_{L^2(\omega)}^2 dt$$

Ceci met fin à la démonstration de la proposition.

6.5 Démonstration du théorème 3

On montre le théorème 3 pour donnée initiale régulière. Le cas général suit par un argument de densité.

Dérivant la fonction énergie $F(\cdot)$ et appliquant le théorème de Green, on obtient

$$\frac{d}{dt}F(t) = - \int_{\Omega} a(x) |y(x, t)|^2 dx$$

qui donne après intégration sur $(0, T)$

$$F(T) - F(0) = - \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |y(x, t)|^2 dx \quad (5.52)$$

Maintenant, on réécrit la solution y de (5.11) – (5.12) comme $y = \varphi + \psi$ où $\varphi = \varphi(x, t)$ résoud

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} &= i\Delta^2 \varphi(x, t) && \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \varphi(x, 0) &= y_0(x) && \text{dans } \Omega, \\ \varphi(x, t) &= \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

et $\psi = \psi(x, t)$ satisfait

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= i\Delta^2 \psi(x, t) - a(x) y(x, t) && \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \psi(x, 0) &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \psi(x, t) &= \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, on a

$$\|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi(x, t)|^2 dx dt \quad (5.53)$$

Combinant (5.52), (5.53) et (5.10), on obtient

$$\begin{aligned}
F(T) &\leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi(x, t)|^2 dx dt \\
&\leq \frac{C}{a_0} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\varphi(x, t)|^2 dx dt \\
&\leq \frac{C}{2a_0} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |y(x, t)|^2 dx dt + \frac{C}{2a_0} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\psi(x, t)|^2 dx dt \\
&\leq \frac{C}{2a_0} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |y(x, t)|^2 dx dt + \frac{C \|a\|_{L^\infty(\Omega)}}{2a_0} \int_0^T \int_{\Omega} |\psi(x, t)|^2 dx dt \quad (5.54)
\end{aligned}$$

Des estimations d'énergie sur l'équation de Schrödinger de quatrième ordre, on a

$$\|\psi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |y(x, t)|^2 dx dt. \quad (5.55)$$

En inserant (5.55) dans (5.54) et en rappelant (5.52), on obtient

$$F(T) \leq \frac{C}{1+C} F(0)$$

à partir de laquelle suit le résultat de stabilité désiré.

Appendice 6A

Proposition 6.2 *Les opérateurs A et A^* définis respectivement par (5.14) et (5.15) sont dissipatifs.*

Preuve. Soit $\varphi \in D(A)$. Alors

$$\langle \varphi, A\varphi \rangle_V = \int_{\Omega} \Delta\varphi(x) \overline{\Delta(A\varphi)(x)} dx.$$

D'après le théorème de Green, on a

$$\langle \varphi, A\varphi \rangle_V = \int_{\Gamma} \Delta\varphi(x) \frac{\partial \overline{(A\varphi)(x)}}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta\varphi(x)}{\partial \nu} \overline{(A\varphi)(x)} d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta^2\varphi(x) \overline{(A\varphi)(x)} dx \quad (A1)$$

En utilisant (5.14), on obtient de (A1)

$$\langle \varphi, A\varphi \rangle_V = - \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |\Delta^2\varphi(x)|^2 d\Gamma - i \int_{\Omega} |\Delta^2\varphi(x)|^2 dx.$$

Donc

$$\operatorname{Re} \langle \varphi, A\varphi \rangle_V = - \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |\Delta^2\varphi(x)|^2 d\Gamma \leq 0$$

Alors A est dissipatif. La dissipativité de A^* est prouvée d'une manière similaire.

■

Appendice 6B

Démonstration de l'identité (5.18)

Soit $h(\cdot, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^n)$. Multipliant les deux membres de (5.4) par $h(x, t) \cdot \overline{\nabla y(x, t)}$ et intégrant sur $\Omega \times (0, T)$, on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - i\Delta^2 y(x, t) \right) h(x, t) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx dt = 0 \quad (\text{B.1})$$

Pour la première intégrale du membre gauche de (B.1), on a après intégration par parties en t

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} h(x, t) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx dt \\ &= \left[\int_{\Omega} y(x, t) h(x, t) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx \right]_0^T - \\ & \int_0^T \int_{\Omega} y(x, t) \cdot \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} y(x, t) h(x, t) \cdot \nabla \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right) dx dt \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Rappelant le théorème de Green, on obtient de (B.2)

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} h(x,t) \cdot \nabla \overline{y(x,t)} dx dt \\
&= \left[\int_{\Omega} y(x,t) h(x,t) \cdot \nabla \overline{y(x,t)} dx \right]_0^T - \\
& \int_0^T \int_{\Omega} y(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \cdot \nabla \overline{y(x,t)} dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Gamma} y(x,t) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} h(x,t) \cdot \nu(x) d\Gamma dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \overline{y(x,t)} h(x,t) \cdot \nabla y(x,t) dx dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \overline{y(x,t)} y(x,t) \operatorname{div} h(x,t) dx dt
\end{aligned} \tag{B.3}$$

L'insertion de (B.3) dans (B.1) donne

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\Omega} y(x,t) h(x,t) \cdot \nabla \overline{y(x,t)} dx \right]_0^T - \\
& \int_0^T \int_{\Omega} y(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \cdot \nabla \overline{y(x,t)} dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Gamma} y(x,t) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} h(x,t) \cdot \nu(x) d\Gamma dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \overline{y(x,t)} h(x,t) \cdot \nabla y(x,t) dx dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \overline{y(x,t)} y(x,t) \operatorname{div} h(x,t) dx dt - \\
& i \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 y(x,t) h(x,t) \cdot \nabla \overline{y(x,t)} dx dt \\
& = 0
\end{aligned}$$

qui implique à son tour

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 y(x, t) h(x, t) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} dx dt \\
&= \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) h(x, t) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} dx \right]_0^T - \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} y(x, t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \cdot \nabla \overline{y(x, t)} dx dt - \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Gamma} y(x, t) \frac{\partial \overline{y(x, t)}}{\partial t} h(x, t) \cdot \nu(x) d\Gamma dt - \\
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \overline{y(x, t)} y(x, t) \operatorname{div} h(x, t) dx dt
\end{aligned} \tag{B.4}$$

On calcule l'intégrale du membre de gauche de (B.4). Du théorème de Green, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 y(x, t) h(x, t) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial \nu} h(x, t) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} d\Gamma dt - \\
& \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial h_j(x, t)}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial y(x, t)}}{\partial x_j} dx dt - \\
& \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial x_k} h_j(x, t) \frac{\overline{\partial^2 y(x, t)}}{\partial x_k \partial x_j} dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial \nu} h(x, t) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} d\Gamma dt - \\
& \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) \frac{\partial h_j(x, t)}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial y(x, t)}}{\partial x_j} \nu_k(x) d\Gamma dt + \\
& \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) \frac{\partial^2 h_j(x, t)}{\partial x_k^2} \frac{\overline{\partial y(x, t)}}{\partial x_j} dx dt + \\
& 2 \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) \frac{\partial h_j(x, t)}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial^2 y(x, t)}}{\partial x_k \partial x_j} dx dt - \\
& \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) h_j(x, t) \frac{\overline{\partial^2 y(x, t)}}{\partial x_k \partial x_j} \nu_k(x) d\Gamma dt \\
& + \sum_j \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) h_j(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\Delta y(x, t)} dx dt
\end{aligned} \tag{B.5}$$

En utilisant (B.5) dans (B.4), on obtient

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial \nu} h(x, t) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} d\Gamma dt - \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k, j} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) \frac{\partial h_j(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{y(x, t)}}{\partial x_j} \nu_k(x) d\Gamma dt + \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k, j} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) \frac{\partial^2 h_j(x, t)}{\partial x_k^2} \frac{\partial \overline{y(x, t)}}{\partial x_j} dx dt + \\
& 4 \operatorname{Re} \sum_{k, j} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) \frac{\partial h_j(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \overline{y(x, t)}}{\partial x_k \partial x_j} dx dt - \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k, j} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) h_j(x, t) \frac{\partial^2 \overline{y(x, t)}}{\partial x_k \partial x_j} \nu_k(x) d\Gamma dt + \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_j \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) h_j(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\Delta y(x, t)} dx dt \\
& = \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) h(x, t) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} dx \right]_0^T - \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Omega} y(x, t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \cdot \nabla \overline{y(x, t)} dx dt - \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Gamma} y(x, t) \frac{\partial \overline{y(x, t)}}{\partial t} h(x, t) \cdot \nu(x) d\Gamma dt - \\
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 \overline{y(x, t)} y(x, t) \operatorname{div} h(x, t) dx dt
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Si $h(x, t) = m(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} m(x) &= n, \\
\frac{\partial m_j(x)}{\partial x_k} &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}, \\
\frac{\partial^2 m_j(x, t)}{\partial x_k^2} &= 0 \quad \text{pour tout } j, k
\end{aligned}$$

et (B.6) devient

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial \nu} m(x) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} d\Gamma dt - \\
& 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) \frac{\overline{\partial y(x, t)}}{\partial \nu} d\Gamma dt + \\
& 4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt - \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) m_j(x) \frac{\partial^2 \overline{y(x, t)}}{\partial x_k \partial x_j} \nu_k(x) d\Gamma dt + \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_j \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) m_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\Delta y(x, t)} dx dt \\
& = \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) m(x) \cdot \nabla \overline{y(x, t)} dx \right]_0^T - \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Gamma} y(x, t) \frac{\overline{\partial y(x, t)}}{\partial t} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt - \\
& n \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} y(x, t) \Delta^2 \overline{y(x, t)} dx dt
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Mais d'après le théorème de Green, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} y(x, t) \Delta^2 \overline{y(x, t)} dx dt = \int_0^T \int_{\Gamma} y(x, t) \frac{\partial \overline{\Delta y(x, t)}}{\partial \nu} d\Gamma dt - \\
& \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial y(x, t)}{\partial \nu} \overline{\Delta y(x, t)} d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_j \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(x, t) m_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\Delta y(x, t)} dx dt \\
& = \int_0^T \int_{\Gamma} |\Delta y(x, t)|^2 m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt - n \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt
\end{aligned}$$

Par conséquent (B.7) peut être écrite comme suit

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta y(x, t)}{\partial \nu} m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} d\Gamma dt - \\
& 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) \frac{\overline{\partial y(x, t)}}{\partial \nu} d\Gamma dt + \\
& 4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x, t)|^2 dx dt - \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k,j} \int_0^T \int_{\Gamma} \Delta y(x, t) m_j(x) \frac{\overline{\partial^2 y(x, t)}}{\partial x_k \partial x_j} \nu_k(x) d\Gamma dt + \\
& \int_0^T \int_{\Gamma} |\Delta y(x, t)|^2 m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt \\
& = \operatorname{Im} \left[\int_{\Omega} y(x, t) m(x) \cdot \overline{\nabla y(x, t)} dx \right]_0^T - \\
& \operatorname{Im} \int_0^T \int_{\Gamma} y(x, t) \frac{\overline{\partial y(x, t)}}{\partial t} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt - \\
& n \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} y(x, t) \frac{\overline{\partial \Delta y(x, t)}}{\partial \nu} d\Gamma dt + \\
& n \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial y(x, t)}{\partial \nu} \overline{\Delta y(x, t)} d\Gamma dt. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

De plus, puisque $y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial \nu} = 0$ sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, alors

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T),$$

et

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x_k} \right) \nu_j(x), \quad j, k = 1, \dots, n \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \tag{B.9}$$

qui impliquent

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k} m_j(x) \frac{\partial^2 \overline{y(x,t)}}{\partial x_j \partial x_k} \nu_j(x) &= \sum_{j,k} m_j(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \overline{y(x,t)}}{\partial x_k} \right) \nu_j(x) \nu_k(x) \\
&= m(x) \cdot \nu(x) \sum_k \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \overline{y(x,t)}}{\partial x_k} \right) \nu_k(x) \quad (\text{d'après B.9}), \\
&= m(x) \cdot \nu(x) \sum_k \frac{\partial^2 \overline{y(x,t)}}{\partial x_k^2}, \\
&= m(x) \cdot \nu(x) \overline{\Delta y(x,t)}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

En substituant (5.6), (5.7) et (B.10) dans (B.8), on obtient

$$\begin{aligned}
&4 \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta y(x,t)|^2 dx dt \\
&= \text{Im} \left[\int_{\Omega} y(x,t) m(x) \cdot \nabla \overline{y(x,t)} dx \right]_0^T - \\
&2 \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial \nu} m(x) \cdot \nabla \overline{y(x,t)} d\Gamma dt - \\
&n \text{Re} \int_0^T \int_{\Gamma_0} y(x,t) \frac{\partial \overline{\Delta y(x,t)}}{\partial \nu} d\Gamma dt - \\
&\text{Im} \int_0^T \int_{\Gamma_0} y(x,t) \frac{\partial \overline{y(x,t)}}{\partial t} m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt + \\
&\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\Delta y(x,t)|^2 m(x) \cdot \nu(x) d\Gamma dt. \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] B. Allibert, *Contrôle analytique de l'équation des ondes et de l'équation de Schrödinger sur des surfaces de révolution*, Comm. Partial Differential Equations. 23 (1998), no. 9-10, pp. 1493-1556.
- [2] G. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Contrôle et stabilisation dans les problèmes hyperboliques*, Appendix II dans Lions, J. L, (9),pp.497-537.
- [3] G. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, Control and Stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., 30(5) (1992), pp. 1024-1065.
- [4] J. Bartolomeo, *Uniform stabilization of the Euler-Bernoulli equation with active Dirichlet and non-active Neumann boundary feedback controls*, Thesis, University of Florida, USA, 1988.
- [5] J. Bartolomeo and R. Triggiani, *Uniform energy decay rates for Euler-Bernoulli equations with feedback operators in the Dirichlet/Neumann boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), pp. 46-71.
- [6] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, New Yourk, 1976.
- [7] H. Brézis and T. Gallouet, *Nonlinear Schrödinger evolution equations*, Nonlinear Anal. 4 (1980), no. 4, pp. 677-681.
- [8] N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds*, Amer. J. Math. 126 (2004), no.3, pp. 569-605.

- [9] N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov, *On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinear. 21 (2004), no.3, pp. 295-318.
- [10] B. Dehman, P. Gérard, and G. Lebeau, *Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface*, Mathematische Zeitschrift, 254(4) (2006), pp. 729-749.
- [11] B. Dehman and G. Lebeau, *Analysis of the HUM control operator and exact controllability for semilinear waves in uniform time*, SIAM J. Cont Optim, 48(2) (2009), pp. 521-550.
- [12] H-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [13] C. Fabre, *Quelques résultats de contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger*, Application à l'équation des plaques vibrantes, C.R. Acad. Sci. Paris, 312 (1991), pp. 61-66.
- [14] B.Z. Guo and Z.C. Shao, *Regularity of an Euler-Bernoulli equation with Neumann control and collocated observation*, J. Dyn. Control Systems, 12 (2006), pp. 405-418.
- [15] C. Hao, L. Hsiao, and B. Wang, *Well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl., 320 (2006), pp. 246-265.
- [16] C. Hao, L. Hsiao, and B. Wang, *Well-posedness of Cauchy problem for the fourth order nonlinear Schrödinger equations in multi-dimensional spaces*, J. Math. Anal. Appl., 328 (2007), pp. 58-83.
- [17] R. Illner, H. Lange and H. Teismann, *A note on the exact internal control of nonlinear Schrödinger equations*, CRM Proc. Lecture Notes 33 (2003), pp. 127-137.
- [18] S. Jaffard, *Contrôle interne des vibrations d'une plaque rectangulaire*, Portugal Math. 47 (1990), pp. 423-429.
- [19] V.I. Karpman, *Stabilization of soliton instabilities by higher-order dispersion : Fourth order nonlinear Schrödinger-type equations*, Phys. Rev. E53(2) (1996), pp.1336-1339.

- [20] V.I. Karpman and A.G. Shgalov, *Stability of soliton described by nonlinear Schrödinger-type equations with higher-order dispersion*, Phys. Rev. D.144 (2000), pp. 194-210.
- [21] G. Lebeau, *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, J. Math. Pures Appl, 71(1992), pp. 267-291.
- [22] H. Lange and H. Teismann, *Controllability of nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state*, Math. Methods Appl. Sci. 30 (2007), pp. 1483-1505.
- [23] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Exact controllability and uniform stabilization of Euler-Bernoulli plates with boundary controls only in $\Delta y|_{\Sigma}$* , Boll. Un. Math.Ital.1991.
- [24] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Uniform exponential energy decay of the wave equation in a bounded region with $L^2(0, \infty; L^2(\Gamma))$ -feedback control in the Dirichlet boundary condition*, J. Differential Equations 66 (1987), pp. 340-390.
- [25] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with controls in the Dirichlet and Neumann boundary conditions-a nonconservative case*, SIAM J. Control Optim, 27 (1989), pp. 330-373.
- [26] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Exact controllability and Uniform Stabilization of Kirchoff plates with boundary control only on $\Delta y|_{\Sigma}$ and homogeneous boundary displacement*, J. Differential Equations 93 (1991), pp. 62-101.
- [27] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equation with Dirichlet control*, Differential Integral Equations. 5 (1992), pp. 521-535.
- [28] I. Lasiecka, R. Triggiani, X.Zhang, *Carleman estimates at the $H^1(\Omega)$ -and $L^2(\Omega)$ -level for nonconservative Schrödinger equations with unobserved Neumann B.C.*, Arch. Inequal. Appl.2 (2-3) (2004), pp. 215-338.
- [29] C. Laurent, *Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on some compact manifolds of dimension 3*, SIAM J. Math. Anal, 42(2) (2010), pp. 785-832.

- [30] C. Laurent, *Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on an interval*, ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations, 16(2) (2010), pp. 356-379.
- [31] J.L.Lions, *Contrôlabilité exacte, Perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Tome 1 (Masson, 1988).
- [32] J.L.Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbation for distributed systems*, SIAM Rev., 30(1988), pp. 1-68.
- [33] J.L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites Non Homogènes et applications*, Tome 1, Dunod, Paris, 1968.
- [34] E. Machtyngier, *Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de l'équation de Schrödinger*, C.R. Acad. Sci. Paris, 310 (1990), pp. 806-811.
- [35] E. Machtyngier, *Exact controllability for the Schrödinger equation*, SIAM J. Control Optim. 32 (1994), pp. 24-34.
- [36] E. Machtyngier and E. Zuazua, *Stabilization of the Schrödinger equation*, Portugaliae Mat. 51 (1994), pp. 243-246.
- [37] N. Ourada and R. Triggiani, *Uniform stabilization of the Euler-Bernoulli equation with feedback operator only in the Neumann boundary conditions*, Differential Integral Equations 4 (1991), pp. 277-292.
- [38] B. Pausader, *Global well-posedness for energy critical fourth order Schrödinger equation in the radial case*, Dyn. Partial Differential Equations. 4 (2007), pp. 197-225.
- [39] B. Pausader, *The cubic fourth order Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. 256 (2009), pp. 2473-2517.
- [40] A. Pazy, *Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New Yourk, 1983.
- [41] K.-D. Phung, *Observability and control of Schrödinger equation*, SIAM J. Control Optim., 40 (2001), pp. 211-230.

- [42] S.E. Rebiai, *Uniform stabilization of the Euler-Bernoulli equation with variable coefficients*, Proceedings (CD-ROM) of the 16th international symposium on mathematical theory of networks and systems, Leuven, Belgium (2004).
- [43] L. Rosier and B.-Y. Zhang, *Exact boundary controllability of the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations 246 (2009), pp. 4129-4153.
- [44] L. Rosier and B.Y. Zhang, *Local exact controllability and stabilizability of the nonlinear Schrödinger equation on a bounded interval*, SIAM J. Control Optim., 48(2) (2009), pp. 972-992.
- [45] L. Rosier and B.Y. Zhang, *Control and stabilization of the nonlinear Schrödinger equation on rectangles*, M3AS : Mth, Models Method Appl. Sci., 21(2) (2011).
- [46] D. Salamon, *Infinite dimensional linear systems with unbounded control and observation, A functional analytic approach*, Trans. Amer. Math. Sci. 300 (1987), pp.383-431.
- [47] M. Tsutsumi, *On smooth solutions to the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation in two space dimensions*, Nonlinear Anal. 13 (1989), no.9, pp. 1051-1056.
- [48] G. Weiss, *Regular linear systems with feedback*, Mathematics Control, Signal & systems. 7 (1994), pp. 25-57.
- [49] G. Weiss, O. Staffans and M. Tucsnak, *Well-posed linear systems - a Survey with emphasis on conservative systems*, Internat. J. Appl. Math. Comput. Sci. 11 (2001), pp.7-34.
- [50] R. Wen, S. Chai, B.Z. Guo, *Well-posedness and exact controllability of fourth order Schrödinger equation with boundary control and collocated observation*, SIAM J. Control Optim. 52 (2014), pp. 365-396.
- [51] C. Zheng, *Inverse problems for the fourth order Schrödinger equation on a finite domain*, Math. Control Relat. Fields 5 (2015), pp. 177-189.

- [52] C. Zheng and Z.C. Zhou, *Exact controllability for the fourth order Schrödinger equation*, Chin. Ann. Math. Ser. B 33(2012), pp. 395-404.
- [53] E. Zuazua, *Remarks on the controllability of the Schrödinger equation*, *Quantum Control : Mathematical and Numerical Challenges*, CRM Proc. Lect. Notes Ser., 33, AMS Publication, Providence, R. I., (2003), pp. 181-199.

ملخص

الهدف من هذه الرسالة دراسة بعض مسائل المراقبة الدقيقة والإستقرارية المنتظمة لنظام مسير بمعادلة شرودنجر من الرتبة الرابعة معرفة على مجموعة محدودة Ω من \mathbb{R}^n .
أولاً نبين نتيجتين للمراقبة الدقيقة في مدة زمنية قصيرة كيفية.

- النتيجة الأولى مبينة في الفضاء الثنوي $V \hookrightarrow \dot{V}$ بمراقبين $y = u_1$, $\Delta y = u_2$ على Σ حيث Γ على $V = \{\varphi \in H^3(\Omega) / \varphi = \Delta\varphi = 0\}$

- النتيجة الثانية مبينة في الفضاء $H^{-2}(\Omega)$ بمراقب $\frac{\partial y}{\partial \nu} = u$, $y = 0$ على Σ .
طريقة البرهان تعتمد في كلتا الحالتين على طريقة HUM (طريقة الوجدانية الهلبارتية) المقدمة من طرف Lions وتقنيات المضاعف وحجة التراص/الوجدانية.

من جهة اخرى نبين تحت شروط هندسية على المجموعة Ω نتائج الايستقرارية النظامية : على Σ وبالداخل.

- من أجل الإيستقرارية على Σ نبين باستعمال شروط تبديد مناسبة أن الحل يتناقص أسياً في فضاء طاقة مناسب و من أجل الإيستقرارية بالداخل نفرض أن حد الإرجاع فعال في جوار جزء من Σ ,
في هذه الحالة نبين أن الحل يتناقص أسياً في فضاء الطاقة $L^2(\Omega)$. البرهان في كلتا النتيجتين يعتمد على تقنيات المضاعف و حجة التراص/الوجدانية.

مفاتيح الكلمات: معادلة شرودنجر من الرتبة الرابعة, المراقبة الدقيقة, الإيستقرارية المنتظمة, المراقب على الحافة, المراقب بالداخل.