RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ BATNA 2

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur en Sciences

Spécialité : MÉCANIQUE

Option : METALLURGIE PHYSIQUE

Par

Abdellah BOURIH

THÈME

Etude de la plasticité des matériaux poreux : Effet du phénomène de percolation

Soutenue publiquement le 19.12.2017 devant le:

MIHI Abdelkader	Professeur (Université de Batna 2)	Président
MADANI Salah	Professeur (Université de Batna 2)	Rapporteur
BENTEMAME Hachemi	Professeur (Université de Biskra)	Examinateur
ABBASSI Ammar	Professeur (Université de Batna 2)	Examinateur
ZEDIRA Hamma	Professeur (Université de Khenchela)	Examinateur
DJEBAILI Hamid	Professeur (Université de Khenchela)	Examinateur

DEDICACES

Je dédie ce travail à :

La mémoire de mes chèrs parents

Ma femme

Mes fils Billel et Mohamed

Ma fille Kaouther

Mes freres et soeurs

Tous les membres de la famille

Tous mes amis

Abdellah BOURIH

REMERCIEMENTS

Au terme de ce document j'ai pris un recul pour réfléchir et essayer d'énumérer dans l'espace de quelques lignes les gens dont l'influence a façonné ce travail. Je vais certainement manquer de citer des personnes et à eux je demanderais des excuses à l'avance.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance et mes vifs remerciements à mon Directeur de thèse, le professeur **Salah MADANI**. Je voudrais vous remercier, Professeur, pour avoir permis de mener à bien mes recherches et pour m'avoir incité et donner le courage pour y arriver.

Je voudrais aussi adresser mes remerciements au professeur **Toufik KANIT** qui m'a ouvert les portes de la recherche en m'ayant assisté tout au long de ce travail avec non seulement ses interventions dans les moments difficiles mais aussi pour sa gentillesse et sa noblesse. Avec les mêmes sentiments de respect et de reconnaissance j'adresse au professeur **Abdelatif IMAD** mes vifs remerciéments pour sa contribution dans la réalisation de ce travail.

Je voudrais remercier le professeur **Abdelkader MIHI** pour avoir accepté de présider le jury chargé d'évaluer mon travail Je remercie vivement les membres de jury les professeurs : **Ammar ABBASSI**, **Hamid DJEBAILI**, **Hamma ZEDIRA**, **Hachemi BEN TEMAME** pour m'avoir honoré par leur présence et accepté de juger mon travail.

Je tiens a remercier le Directeur du labo Lamsm, le professeur **Toufik OUTTAS** pour avoir mis à notre disposition tout ce dont on a besoin pour arriver au terme de ce travail.

Mes remerciements et ma gratitude vont aussi au Docteur **Wahid KADDOURI**, dont la contribution dans ce travail est inestimable. Ces relations humaines, sa conduite, sa simplicité et sa compétence font du Docteur **W.Kaddouri** une image de marque exceptionnelle.

Je remercie le Docteur **Mahieddine NAOUN** pour son aide préçieuse qui m'a été d'une importance capitale dans la réalisation de ce travail.

Je remercie mon ami **Mohamed MASMOUDI** qui a été l'ami du parcours et qui, avec son comportement exemplaire et son sérieux, m'a poussé à arriver au terme de mon Doctorat.

Je voudrais aussi présenter mes chaleureux remerciements à mon ami le professeur **Mourad BRIOUA** pour m'avoir encourager et inciter à terminer mon travail.

Je voudrais aussi exprimer mes remerciements à mes amis **Ahmed BOUSSAHA, Rafik MAKHLOUFI**, **Abdenour BENHIZIA** et **Samir ACHOURI** pour m'avoir soutenu le long de mon travail.

Je remercie fortement ma fille **Kaouther**, dont l'aide qu'elle m'a apporté reste inestimable, les membres de ma famille et tous mes amis.

Nomenclature

σ_{ij}	Tenseur du deuxieme ordre des contraintes du matériau hétérogène
ε_{ij}	Tenseur du deuxieme ordre des déformations du matériau hétérogène
Σ_{ij}	Tenseur du deuxieme ordre des contraintes macroscopiques du matériau homogène
E_{ij}	Tenseur du deuxieme ordre des déformations macroscopiques du matériau homogène
$<>$	La moyenne
c_{ijkl}	Tenseur local d'élasticité
s_{ijkl}	Tenseur local de souplesse
C_{ijkl}	Tenseur apparent d'élasticité
S_{ijkl}	Tenseur apparent de souplesse
p	Fraction volumique
k	Module de compressibilité
μ	Module de cisaillement
ν	Coéfficient de poisson
V	Volume du domaine 3D
∂V	Les limites du domaine 3D
VER	Volume élémentaire représentatif
MHE	Milieu homogène équivalent
i	Indice correspondant à l'inclusion.
m	Indice correspondant à la matrice

ph	Indice de la phase
d	Taille de l'hétérogéneité
l	Taille du VER
L	Taille de la structure
A_{ijkl}	Tenseur de localisation des déformations
B_{ijkl}	Tenseur de localistion des contraintes
I_{ijkl}	Tenseur unité d'ordre 4
S^E	Tenseur d'Eshelby d'ordre 4
$d\varepsilon$	L'incrément élastique
N	Nombre de vide
n	Nombre de réalisation
Σ_{eq}	la contrainte macroscopique équivalente de Von Mises
Σ_m	La contrainte macroscopique hydrostatique
E_{eq}	La déformation macroscopique équivalente de Von Mises
α, β	Paramètres de chargment
q_i	Paramètre de fittage

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Dans notre environnement, tous les matériaux sont poreux. De part leurs techniques de fabrication, les matériaux plastiques et composites sont ceux contenant le plus d'inclusions d'air. Cela n'exclut pas les métaux qui sont également poreux, et on cite les métaux frittés dont le taux de porosité peut atteindre 10%, les aciers élaborés présentent une porosité de 0.01% ou moins. Les critères employés pour modéliser un matériau non poreux, comme le critère de Von mises, prévoient une résistance infinie pour un chargement purement hydrostatique, ce qui n'est pas le cas pour un matériau poreux. C'est pourquoi, des critères spécifiques aux matériaux poreux tenant compte de ce paramètre supplémentaire, ont été élaborés. Le critère le plus largement accepté est le critère de [Gurson, 1977], qui a été élaboré sur la base de la méthode d'homogénéisation et traite le comportement d'un matériau parfaitement plastique présentant un seul vide. L'objectif principal de ce travail est l'étude de la prédiction effective de la réponse mécanique des milieux hétérogènes élasto-plastiques. Le comportement mécanique de tout milieu hétérogène dépend de sa microstructure hétérogène. Cependant, l'analyse de grandes structures au niveau microstructural est clairement un problème insoluble, en particulier dans le cas d'une microstructure aléatoire. Des méthodes ont donc été développées pour cerner ce problème en analysant une section représentative de la microstructure hétérogène, qui est universellement appelée volume élémentaire représentatif (VER). En tant que méthode alternative puissante, l'homogénéisation numérique, réalisée directement sur toute la microstructure, peut être utilisée pour estimer la réponse matérielle effective des milieux hétérogènes aléatoires. En effet, la cellule unitaire généralement invoquée pour vérifier la validité des modèles analytiques ne peut représenter qu'une microstructure périodique. Cependant, un autre exemple important de milieu aléatoire réside dans les matériaux présentant une porosité. Même ce sujet a été largement étudié ; néanmoins, Il y a quelques questions intéressantes qui doivent être clarifiées, comme l'effet des formes vides sur le seuil de plasticité globale et l'effet d'une population multiple de vides en chevauchement. Le matériau modélisé est donc un matériau vérifiant les hypothèses du critère de Gurson : la matrice est rigide parfaitement plastique, les cavités se trouvent en chevauchement. Pour mieux prendre en charge le comportement des milieux poreux renfermant plusieurs vides qui se chevauchent et distribués aléatoirement, le critère que Gurson à subit des modifications, notamment par[Needleman and V, 1984] pour prendre en compte les interactions entre les cavités et la coalescence. Puis [M.Gologanu et al., 1994] ont incorporé l'effet de la forme des cavités. Ensuite,[Pardoen and Hutchinson, 2000] ont ajouté un paramètre de distance inter-cavités, permettant de prévoir le début de la coalescence. Ces modèles tiennent aussi compte de paramètres tels que l'écrouissage de la matrice, la nucléation des cavités et la coalescence, les effets d'interactions et de taille des cavités, et l'anisotropie plastique initiale. Par ailleurs, d'autres auteurs comme Rousselier (1987) et [Castaneda, 2002] ont pris un point de départ différent pour élaborer des critères originaux. Rousselier est parti d'une approche thermodynamique tandis que le modèle de Ponte-Castañeda utilise sa théorie d'homogénéisation dite du second ordre.

Le travail est divisé en :

Chapitre 1 : homogénéisation en élastoplasticité

Chapitre 2 : effet de la percolation des vides sur le seuil de plasticité des milieux poreux

Chapitre 3 : l'effet de la forme des vides sur le comportement plastique des milieux poreux

Chapitre 1

Méthodes d'Homogénéisation

1.1 Introduction

Le présent chapitre est composé de deux parties. Dans la première, une présentation de plusieurs notions théoriques indispensables pour une bonne compréhension de la partie simulation numérique. Des généralités sur les matériaux hétérogènes seront exposées, ensuite les techniques d'homogénéisation seront explicitées. Les étapes de l'homogénéisation seront décrites, la notion du V.E.R. dans un matériau hétérogène sera introduite et les différentes méthodes analytiques ainsi que les bornes de l'encadrement analytique feront l'objet d'une description détaillée. Ces notions seront suivies par une présentation du principe de l'homogénéisation numérique.

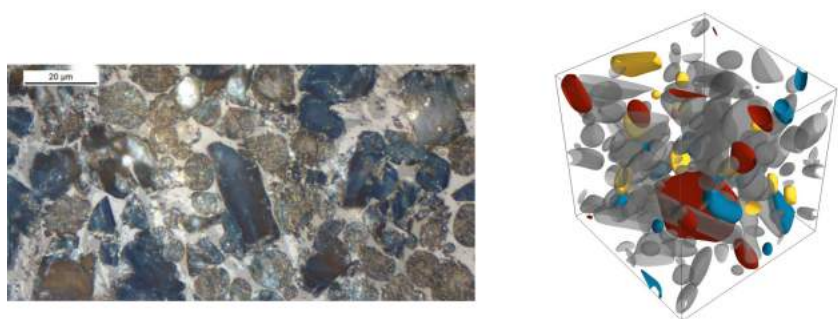
La seconde partie de ce chapitre sera consacrée à des rappels sur le comportement élastoplastique des structures à travers la définition de l'élastoplasticité, de la règle d'écrouissage, des méthodes de résolution du comportement non-linéaire et notamment des méthodes incrémentales, itératives, mixtes ainsi que celles de Newton-Raphson. Le chapitre sera clôturé par la présentation des différents modèles de changement d'échelles utilisés en mécanique non-linéaire.

Première partie

Homogénéisation en élasticité

1.2 Généralités sur les matériaux hétérogènes

Les matériaux hétérogènes sont des matériaux qui possèdent deux (biphasés) ou plusieurs phases (multiphase), Figure 1.1. L'avantage essentiel de ce type de matériaux est les propriétés structurales importantes que leurs constituants élémentaires ne possèdent pas individuellement, et leur permettent de remplir de nombreuses fonctions techniques. Les exemples sont nombreux : les composites fibreux ou particulaires, les matériaux poreux, les matériaux granulaires, les mousses métalliques ou céramiques, les matériaux de construction en génie civil et les matériaux vivants [MOUMEN, 2014]. Pratiquement, tous les matériaux hétérogènes sont constitués d'éléments discontinus appelés hétérogénéités, noyés dans une phase continue appelée matrice.



(a) (b)

FIGURE 1.1 – Exemple de matériaux hétérogènes multiphasiques : (a) réel (Institut Mines-Télécom), (b) virtuel (simulé, Mines Pris-Tech)

1.2.1 Matériaux composites

C'est l'association de plusieurs matériaux de propriétés différentes appelées phases. Une phase matrice, généralement continue et les autres dites renforts habituellement dures de forme différente. La Figure 1.2 schématise un exemple de composites hétérogènes biphasés avec différentes formes de renforts. Dans un composite, on distingue deux types de renforts : fibre ou particule. Ces renforts ont le caractère d'être compatible avec la matrice afin d'avoir un comportement global homogène. Les composites permettent d'améliorer la qualité des matériaux pour une certaine utilisation, du fait de leur légèreté, rigidité, etc... En raison de la large utilisation de ces composites, un effort particulier est fait pour la réduction des coûts, augmenter la durée de vie, prévoir leur rupture et optimiser les propriétés d'usage.

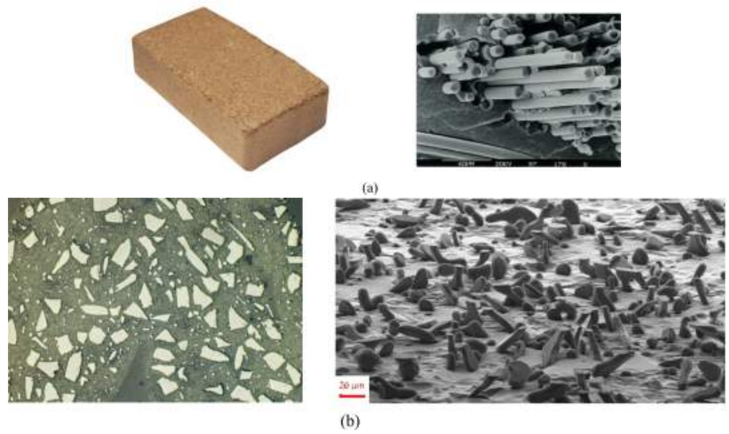


FIGURE 1.2 – Composites hétérogènes de renforts : (a) fibres (MT Aerospace AG, Augsbourg) et (b) particules (Lermps, utbm).

1.2.2 Matériaux poreux

Un matériau poreux est un milieu hétérogène biphasé constitué d'une phase solide et d'une phase de vide nommée "pore". A l'échelle globale, ces matériaux sont caractérisés comme un milieu continu en introduisant l'effet de la porosité. Cette porosité peut prendre différentes formes de type sphérique, allongée, aplatie, etc...La Figure 1.3 montre des exemples de matériaux (milieux) hétérogènes poreux à différentes échelles d'observation. La description géométrique montre qu'on peut envisager deux échelles d'espace distinctes, i.e. l'échelle à laquelle on distingue les domaines occupés par le solide et le fluide. Cependant, cette échelle est plus fine que l'échelle macroscopique pour les applications pratiques. On doit noter qu'un milieu à porosité très élevé (0.75-0.95) est connu sous le nom de mousses et défini comme un milieu poreux de microstructures complexes avec une fraction volumique des pores très élevée, ce qui les a rendus ultralégers.

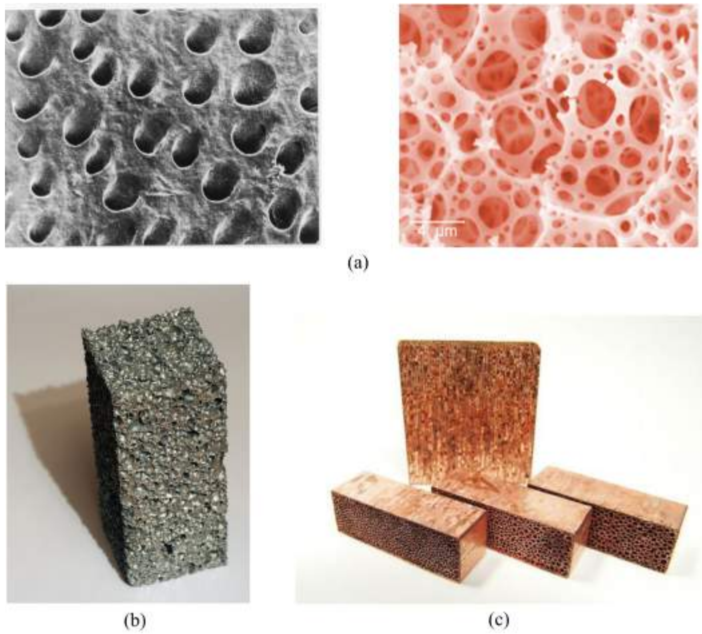


FIGURE 1.3 – Milieux poreux : (a) microstructures, (b) mousse métallique, (c) cuivre poreux type Lotus (CNRS Photothèque/ISM)

1.3 Effet d'échelles dans les matériaux hétérogènes

Dans le cadre de la mécanique, une (micro)structure peut être décrite par trois échelles :

- échelle macroscopique où le comportement est homogène,
- échelle mésoscopique (intermédiaire) où le comportement est hétérogène,
- échelle microscopique où le comportement est hétérogène.

L'échelle microscopique ou locale permet de suivre la distribution, l'orientation et les contacts des particules. Dans l'échelle mésoscopique, on trouve les microstructures dans lesquelles on parle de grain, de fibre et de pore. L'échelle macroscopique est l'échelle de l'échantillon, c'est la taille du volume à partir duquel le comportement macroscopique est calculé tenant compte des informations des deux autres échelles. Le passage d'une échelle à une autre plus grande nécessite l'opération d'homogénéisation qui est composée de plusieurs étapes gouvernée par un ensemble d'équations.

1.4 Principe et objectif de l'homogénéisation

L'homogénéisation regroupe l'ensemble des opérations de moyenne et de détermination du comportement effectif équivalent du matériau hétérogène. Elle consiste à déterminer le comportement d'un matériau hétérogène à partir des comportements de ses différents constituants élémentaires. Cette opération est connue sous le nom du passage Micro-Macro[MOUMEN, 2014], [Kaddouri et al., 2016].

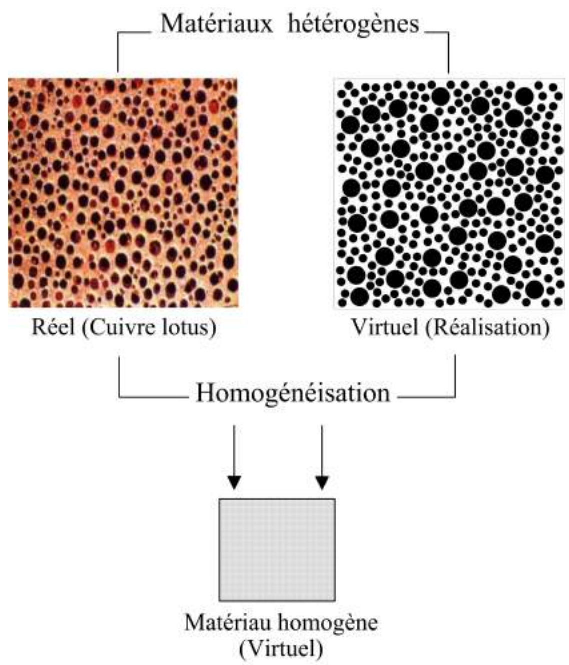


FIGURE 1.4 – Principe d'homogénéisation d'une microstructure hétérogène

La Figure 1.4 montre la description de l'approche d'homogénéisation et les éléments nécessaires pour le passage Micro-Macro et pour l'analyse multi-échelle. Il faut noter que la méthode d'homogénéisation consiste à substituer un matériau hétérogène par un matériau homogène dit matériau homogène équivalent (MHE) qui répond globalement à un chargement quelconque de la même façon. Bien entendu, ces méthodes s'appliquent à de nombreux problèmes aussi bien physiques comme la conduction thermique, l'électromagnétisme que mécanique comme l'élasticité linéaire, la plasticité ou la viscoplasticité. La méthodologie d'homogénéisation s'effectue en trois étapes [Bornert et al., 2010] :

1.4.1 Représentation

La technique d'homogénéisation repose sur le choix d'un plus petit volume élémentaire qui doit être représentatif du comportement macroscopique au niveau microscopique. Ce volume est appelé Volume Elémentaire Représentatif (VER), qui est décrit par [Chaboche and Suquet, 1998]. Cette étape est la plus importante de l'homogénéisation, elle consiste à déterminer le nombre de phases contenues dans le VER et par la suite à caractériser le comportement, la géométrie, la répartition spatiale et la proportion de chaque phase. Si d est la taille caractéristique des hétérogénéités et L est la taille caractéristique de la structure macroscopique considérée, Figure 1.5, alors la taille caractéristique l du VER est soumise à deux conditions :

- $l \ll L$: condition pour que le matériau soit un milieu continu ce qui permet de déterminer des champs continus de contraintes et de déformations.
- $l \gg d$: condition nécessaire pour pouvoir considérer un comportement macroscopique du VER bien qu'il soit hétérogène à l'échelle méso/microscopique.

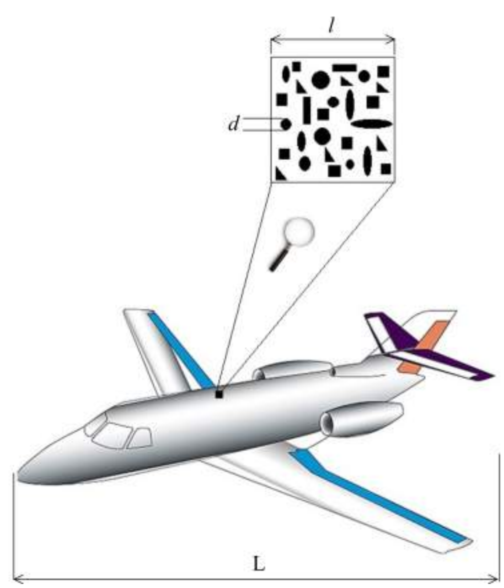


FIGURE 1.5 – Echelles de représentation en homogénéisation

En élasticité, le comportement microscopique de chaque phase « ph » est donné par :

$$(\sigma_{ij})_{ph} = (c_{ijkl})_{ph}(\varepsilon_{kl})_{ph} \tag{1.1}$$

et

$$(\varepsilon_{ij})_{ph} = (s_{ijkl})_{ph}(\sigma_{kl})_{ph} \tag{1.2}$$

avec

$$(c_{ijkl})_{ph} = (s^{-1}_{ijkl})_{ph} \tag{1.3}$$

où : $(\sigma_{ij})_{ph}$ et $(\varepsilon_{ij})_{ph}$ représentent respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations locales de chaque phase "*ph*".

$(c_{ijkl})_{ph}$ et $(s_{ijkl})_{ph}$ sont respectivement les tenseurs d'ordre 4 de rigidité et de souplesse de chaque phase "*ph*".

1.4.2 Localisation

Cette deuxième étape consiste à relier les grandeurs microscopiques locales, définies dans l'étape de représentation, aux grandeurs macroscopiques.
En élasticité linéaire, on définit les relations entre les déformations moyennes locales de chaque phase $< \varepsilon_{ij} >_{ph}$ et le tenseur des déformations macroscopiques E_{kl} imposées par :

$$< \varepsilon_{ij} >_{ph} = (A_{ijkl})_{ph} E_{kl} \tag{1.4}$$

où : $(A_{ijkl})_{ph}$ désigne le tenseur de localisation des déformations de la phase "ph".
avec :

$$< \varepsilon_{ij} >_{ph} = \frac{1}{V_{ph}} \int\limits_{V_{ph}} (\varepsilon_{ij})_{ph} dV \tag{1.5}$$

De même, on définit les relations entre les contraintes, équation (1.5) moyennes locales de chaque phase $< \sigma_{ij} >_{ph}$ et les contraintes macroscopiques Σ_{kl} imposées par :

$$< \sigma_{ij} >_{ph} = (B_{ijkl})_{ph} \Sigma_{kl} \tag{1.6}$$

où : $(B_{ijkl})_{ph}$ désigne le tenseur d'ordre 4 de concentration des contraintes.
avec :

$$< \sigma_{ij} >_{ph} = \frac{1}{V_{ph}} \int\limits_{V_{ph}} (\sigma_{ij})_{ph} dV \tag{1.7}$$

1.4.3 Homogénéisation

La dernière étape consiste à déterminer le comportement équivalent du matériau hétérogène. Dans cette étape, le tenseur moyen des contraintes sur tout le$V.E.R$ est exprimé par :

$$< \sigma_{ij} > = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph} < \sigma_{ij} >_{ph} \tag{1.8}$$

De même le tenseur moyen des déformations sur tout le $V.E.R$ est exprimé par :

$$< \varepsilon_{ij} > = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph} < \varepsilon_{ij} >_{ph} \tag{1.9}$$

Le comportement apparent sera détaillé dans la section après avoir mis l'accent sur les conditions aux limites.

1.4.4 Condition de HILL

En élasticité linéaire, la condition de *HILL* impose l'égalité entre le travail macroscopique et la moyenne des travaux microscopiques

$$\frac{1}{2} < \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} > = \frac{1}{2} E_{ij}\Sigma_{ij} \tag{1.10}$$

cela est assuré par l'égalité :

$$< \varepsilon_{ij} > = E_{ij} \; et \; < \sigma_{ij} > = \Sigma_{ij} \tag{1.11}$$

Ainsi pour assurer la condition de *HILL* et l'équivalence du comportement effectif, des conditions aux limites particulières aux bords du $V.E.R$ sont nécessaires. Conditions aux limites et moyenne des champs locaux

Pour calculer les propriétés effectives du matériau homogène équivalent (MHE) et étudier la convergence des propriétés apparentes, plusieurs conditions aux limites peuvent être appliquées ; Les plus classiquement proposées dans la littérature sont : les conditions homogènes sur le contour en déformation ($KUBC$), les conditions homogènes sur le contour en contraintes ($SUBC$) et les conditions périodiques (PBC).

On considère une microstructure de volume V. Pour déterminer les propriétés effectives de ce volume, on impose des conditions aux limites sur sa frontière notée ∂V. On présente dans ce qui suit les trois types de conditions aux limites utilisés dans les calculs par éléments finis pour la détermination des propriétés effectives.

– ***Conditions homogènes sur le contour en déformation (*KUBC*)***

  Dans ces conditions, on applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u_i qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisées E_{ij} correspondant à la moyenne des déformations locales dans le volume par :

$$\begin{cases} u_i = E_{ij}.x_j & \forall\, x \,\epsilon\, \partial V \\ E_{ij} =< \varepsilon_{ij} >= \frac{1}{V} \int\limits_V \varepsilon_{ij} dV \end{cases} \tag{1.12}$$

Le tenseur des contraintes macroscopiques est alors obtenu par la moyenne des contraintes locales dans tout le volume V :

$$\Sigma_{ij} =< \sigma_{ij} >= \frac{1}{V} \int\limits_V \sigma_{ij}\, dV \tag{1.13}$$

– ***Conditions homogènes sur le contour en contraintes (*SUBC*)***

Dans ce cas, on applique sur la surface extérieure ∂V du volume V un effort volumique $\sigma.n$ qui s'écrit à partir du tenseur des contraintes homogénéisées Σ_{ij} correspondant à la moyenne des contraintes locales dans le volume par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}.n = \Sigma_{ij}.n & \forall\, x \,\epsilon\, \partial V \\ \Sigma_{ij} =<\sigma_{ij}>= \frac{1}{V}\int\limits_V \sigma_{ij} dV \end{cases} \tag{1.14}$$

Le tenseur des déformations macroscopiques est alors obtenu par la moyenne des déformations locales dans tout le volume V :

$$E_{ij} =<\varepsilon_{ij}>= \frac{1}{V}\int\limits_V \varepsilon_{ij} dV \tag{1.15}$$

– ***Conditions aux limites périodiques (*PBC*)***

Dans ce cas on applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisées E et d'une fluctuation périodique v_i par :

$$\begin{cases} u_i = E_{ij}.x_j + v_i & \forall\, x \,\epsilon\, \partial V \\ E_{ij} =<\varepsilon_{ij}>= \frac{1}{V}\int\limits_V \varepsilon_{ij} dV \end{cases} \tag{1.16}$$

La fluctuation v est périodique car elle prend la même valeur en deux points homologues de faces opposées. De même, les efforts $\sigma.n$ en deux points homologues sont opposés.

1.4.5 Propriétés apparentes et effectives

A partir des conditions aux limites décrites précédemment, les déformations et les contraintes locales vérifient les relations :

$$E_{ij} =<\varepsilon_{ij}> \tag{1.17}$$

et

$$\Sigma_{ij} =< \sigma_{ij} > \tag{1.18}$$

Par conséquent, les tenseurs A_{ijkl} et B_{ijkl} présentent les propriétés suivantes :

$$\sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(A_{ijkl})_{ph} = I_{ijkl} \tag{1.19}$$

et

$$\sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(B_{ijkl})_{ph} = I_{ijkl} \tag{1.20}$$

où I_{ijkl} est le tenseur unité d'ordre 4.

La relation constitutive pour le matériau hétérogène est donnée par :

$$< \sigma_{ij} >= C_{ijkl}^{app} < \varepsilon_{kl} > \tag{1.21}$$

Avec :

$$\sum_{ph=1}^{N} P_{ph} < \sigma_{ij} >_{ph}= C_{ijkl}^{app} < \varepsilon_{kl} >$$

$$\Leftrightarrow \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(c_{ijkl})_{ph} < \varepsilon_{kl} >_{ph}= C_{ijkl}^{app} E_{kl}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(c_{ijmn})_{ph}(A_{mnkl})_{ph} E_{kl} = C_{ijkl}^{app} E_{kl}$$

$$\Rightarrow C_{ijkl}^{app} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(c_{ijmn})_{ph}(A_{mnkl})_{ph} \tag{1.22}$$

Où C_{ijmn}^{app}et S_{ijkl}^{app} sont respectivement les tenseurs apparents d'élasticité et de souplesse pour un volume V.

On obtient ainsi le tenseur de rigidité équivalent C^{app}_{ijkl} exprimé en fonction des tenseurs de rigidité $(C_{ijkl})_{ph}$ et des tenseurs de localisation $(A_{mnkl})_{ph}$ de la déformation dans chaque phase « *ph* ».

Dans le cas particulier d'un milieu hétérogène constitué de N phases de type inclusions noyées dans une matrice dominante, et grâce à l'égalité sur la moyenne des tenseurs de localisation.

les tenseurs apparents d'élasticité et de souplesse, peuvent êtres écrits, en notant m l'indice de la phase constituant la matrice par :

$$C^{app}_{ijkl} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m)(A_{mnkl})_{ph} \tag{1.23}$$

et

$$S^{app}_{ijkl} = (S_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}((S_{ijmn})_{ph} - (S_{ijmn})_m)(B_{mnkl})_{ph} \tag{1.24}$$

Il a été observé pratiquement que les résultats apparents diffèrent d'une condition aux limites à l'autre, mais convergent avec l'augmentation de la taille du $V.E.R$ en se rapprochant de la taille du $V.E.R$ ([Kanit et al., 2003] ; [Qi, 2006] ; [Kari et al., 2007]). Cette convergence est plus ou moins lente selon le cas étudié. Ainsi, il est démontré que les conditions homogènes $KUBC$ et $SUBC$ fournissent un encadrement du comportement apparent [Huet, 1991] exprimé par :

$$S^{app-1}_{ijkl_\Sigma} \leq C^{eff}_{ijkl} \leq C^{app}_{ijkl_E} \tag{1.25}$$

et que les conditions aux limites périodiques (CLP) donnent une meilleure estimation des propriétés apparentes par rapport aux conditions homogènes $KUBC$, $SUBC$ ([Hazanov and Huet, 1994] ; [Kanit et al., 2003]) donnée par :

$$S^{app-1}_{ijkl_{\Sigma}} \leq S^{app-1}_{ijkl_{\Sigma per}} \leq C^{eff}_{ijkl} \leq C^{app}_{ijkl_{Eper}} \leq C^{app}_{ijkl_{E}} \tag{1.26}$$

Lorsque le $V.E.R$ est suffisamment grand, les propriétés apparentes du matériau hétérogène ne dépendent plus du type de conditions aux limites et coïncident avec les propriétés effectives [Sab, 1992].

$$S^{app-1}_{ijkl_{\Sigma}} = S^{app-1}_{ijkl_{\Sigma per}} = C^{eff}_{ijkl} = C^{app}_{ijkl_{Eper}} = C^{app}_{ijkl_{E}} \tag{1.27}$$

Pour les propriétés isotropiques effectives il y a des cas spéciaux des conditions aux limites $KUBC$, $SUBC$ et PBC pour lesquelles on choisit les valeurs de E_{ij} et Σ_{ij}.

– Propriétés élastiques :

Pour la détermination du module de compressibilité k^{app} sur le volume V et pour résoudre les problèmes micromécaniques $KUBC$, le tenseur des déformations macroscopiques E^{k}_{ij} suivant est appliqué :

$$E^{k}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

et pour la détermination du module de cisaillement μ^{app} sur le volume V , le tenseur des déformations macroscopiques E^{μ}_{ij} suivant est appliqué :

$$E^{\mu}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Le module de compressibilité k^{app} et le module de cisaillement μ^{app} peuvent être défini comme :

$$k^{app} =< \sigma_{ij} > E^k_{ij} = \frac{1}{3} trace < \sigma_{ij} > \tag{1.30}$$

$$\mu^{app} =< \sigma_{ij} > E^\mu_{ij} = trace < \sigma_{ij} > \tag{1.31}$$

Pour le cas de la condition aux limites $SUBC$, on prend :

$$E^k_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

et

$$E^\mu_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

dans ce cas le module de compressibilité k^{app} et le module de cisaillement μ^{app} peuvent être définis comme suit :

$$\frac{1}{k^{app}} = E^k_{ij} < \varepsilon_{ij} >= trace < \varepsilon_{ij} > \tag{1.34}$$

$$\frac{1}{\mu^{app}} = E^\mu_{ij} < \varepsilon_{ij} >= 2 < \varepsilon_{12} > \tag{1.35}$$

1.5 Techniques d'homogénéisation

Les techniques d'homogénéisation sont classées en deux grandes catégories : analytiques et numériques [Jean, 2009].

1.5.1 Les méthodes analytiques

Parmi les nombreuses méthodes analytiques, on peut citer les premières théories mathématiques de l'homogénéisation qui utilisent des développements asymptotiques des grandeurs mécaniques telles que la contrainte et la déformation [Beran, 1968], [Sanchez-Palencia, 1974], [Bensoussen and Papanicolaou, 1978].

Il existe également un ensemble de bornes et estimations largement utilisé par les mécaniciens et les physiciens. Les bornes, supérieure et inférieure, encadrent les propriétés d'un matériau hétérogène. Il existe plusieurs types de bornes qui se différencient par la finesse de description des échelles. En effet, ces bornes sont d'autant plus resserrées que la connaissance de la microstructure est fine.

Enfin les estimations théoriques permettent, sous certaines hypothèses spécifiques, d'évaluer les propriétés effectives d'un matériau hétérogène. Elles présentent l'avantage d'approcher avec plus de précision le comportement du matériau hétérogène contrairement aux bornes qui fournissent un encadrement. On peut écrire une estimation à partir d'une approche micromécanique comme dans le cas du modèle autocohérent [Berveiller and Zaoui, 1979], ou à partir de principes variationnels [Castaneda, 1989].

1.5.2 Les méthodes numériques

Les méthodes numériques sont connues sous deux grandes classes : les méthodes intégrées et les méthodes séquencées.

1.5.2.1 Les méthodes intégrées

Elles consistent à prendre en compte simultanément les deux échelles, microscopique et macroscopique, dans le calcul par éléments finis. La méthode FE^2[Feyel and Chaboche, 2000] est la méthode la plus citée dans la littérature. C'est une méthode qui présente plusieurs niveaux de calculs par éléments finis caractérisant différentes échelles physiques.

1.5.2.2 Les méthodes séquencées

Par ces méthodes, on cherche à estimer les propriétés macroscopiques d'un matériau en effectuant un ou plusieurs calculs d'une description pertinente de la microstructure correspondante. La plupart des travaux ont été menés sur des cas bidimensionnels comme le cas traité par [Zeman and Sejnoha, 2001], cas des fibres de carbone dans une matrice polymère. Une modélisation tridimensionnelle par les polygones de Voronoï est utilisée dans le cas des polycristaux afin d'assurer une bonne représentation de la morphologie réelle de la microstructure. Ceci permettrait une meilleure estimation des propriétés macroscopiques. Certaines microstructures sont tellement compliquées qu'il faut recourir aux images tridimensionnelles obtenues par microtomographie [Madi et al., 2007], [Burteau et al., 2007].

Les propriétés effectives d'un matériau hétérogène sont déterminées en moyennant les champs locaux sur un Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.) caractérisé par une taille et une description géométrique suffisantes de la microstructure. La détermination du VER est assurée par la méthode statistique [Kanit et al., 2003] qui consiste à calculer les propriétés apparentes de microstructures de tailles croissantes avec plusieurs réalisations de la microstructure à taille donnée et à caractériser la représentativité statistique de la grandeur mesurée vis-à-vis de la taille et du nombre de réalisations. Pour le calcul par éléments finis de microstructures, on impose des conditions aux limites qui sont propres à l'homogénéisation.

1.5.3 Notion de VER dans un matériau hétérogène

La description d'un matériau doit être suffisamment riche et réaliste pour estimer correctement les comportements macroscopiques. Pour cela, on cherche la taille et la description géométrique suffisantes de la microstructure représentative pour la propriété que l'on souhaite estimer. On parle ici de VER [MOUMEN, 2014].

Le VER joue un rôle important pour l'estimation de la réponse globale dans un matériau hétérogène. La connaissance de la taille du VER représente un élément incontournable pour la détermination des propriétés effectives. Cette taille dépend de la nature et des constituants

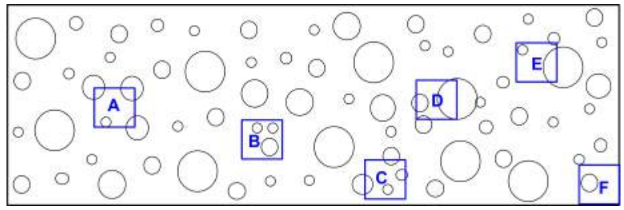


Figure 1.6 – Exemple de VERs d'une microstructure hétérogène,[Gitman et al., 2007].

du matériau.

Plusieurs définitions ont été proposées pour le concept VER. Ces définitions sont regroupés dans le travail de [Gitman et al., 2007]. Par exemple la taille du VER se doit d'être beaucoup plus grande que la plus grosse des hétérogénéités et négligeable aussi devant la taille de la microstructure. Il faut noter ici que l'utilisation des méthodes d'homogénéisation nécessite la connaissance de la taille du VER. La Figure 1.6 montre des exemples de VERs dans une microstructure biphasique étudiée par [Gitman et al., 2007]. Dans la même microstructure on peut distinguer plusieurs situations, dites réalisations, pour représenter la taille d'un VER. La différence entre ces réalisations est le nombre des hétérogénéités entouré par le volume, sa forme, leur disposition et finalement la distribution et la nature.

Toutefois, afin de répondre à des questions sur l'existence et la définition d'un VER, on présente sur le tableau 1.1 quelques définitions proposés dans la littérature.

Il est à noter que le VER est un paramètre qui est d'importance primordiale pour l'étude numérique des matériaux hétérogènes. Il est de nature élémentaire parce qu'il est considéré comme un point matériel du milieu équivalent et représentatif parce qu'il est possible de déterminer un seul comportement macroscopique unique pour ce volume. Pour être représentatif, ce VER doit contenir le maximum des hétérogénéités, et pour être élémentaire, le volume doit être petit devant la structure. Deux conditions doivent guider et piloter le choix de l'échelle et les dimensions du VER : ne pas descendre à un niveau plus fin et ne pas monter jusqu'à l'échelle macroscopique.

Références	Définitions
[Sab, 1992]	C'est un volume suffisamment grand pour que la détermination des propriètés effectives à partir de ce volume ne dépend pas du type de conditions aux limites utilisées.
[Drugan and Willis, 1996]	It is the smallest material volume element of the composite for which the usual spatially constant (overall modulus) macroscopic constitutive representation is a sufficiently accurate model to represent mean constitutive response.
[Terada et al., 1998]	C'est un volume cubique suffisamment grand par rapport à la microstructure et suffisamment petit par rapport à l'échelle macroscopique.
[Evesque, 2000]	Le VER doit être assez grand par rapport à la taille des grains afin de définir les quantités globales telles que la contrainte ou la déformation, mais cette dimension devrait être également assez petite pour ne pas cacher l'hétérogénéité macroscopique.
[Kanit et al., 2003]	Une définition purement statistique et numérique. La taille est liée aux paramètres morphologiques, mécaniques et statistiques de la microstructure; comme la fraction volumique, le contraste, les propriétés mécaniques (élasticité et plasticité) et l'erreur absolue.

TABLE 1.1 – Définitions du VER selon certaines références

1.6 Estimations analytiques des propriétés élastiques

Les méthodes d'analyse sont disponibles pour estimer les propriétés des matériaux hétérogènes. Elles impliquent généralement des hypothèses concernant la microstructure. Dans le domaine de la mécanique, les développements asymptotiques [Sanchez-Palencia, 1974], [Bensoussen and Papanicolaou, 1978] et les bornes variationnelles[Hashin and Shtrikman, 1962], [Beran, 1968] sont des exemples des approches analytiques. Pour un matériau élastique hétérogène, l'homogénéisation consiste à résoudre le problème micromécanique de localisation (cas de déformation imposée) ou de concentration (cas de contrainte imposée). Cela peut se faire numériquement ou analytiquement en utilisant certaines hypothèses. C'est ainsi que les estimations et les bornes ont été développées. Nous présenterons dans la section suivante quelques estimations et bornes pour les propriétés élastiques et thermiques.

1.6.1 Estimations analytiques

1.6.1.1 Einstein (1906-1911)

La première et la plus simple des estimations évoquées ici est celle d'Einstein ([Einstein, 1906] et [Einstein, 1911]) qui estima les propriétés d'un fluide visqueux de type plasma contenant des particules sphériques incompressibles et isolées en suspension par :

$$\mu_{Einstein} = \mu_m \left(1 + 2.5 P_i\right) \tag{1.36}$$

1.6.1.2 Smallwood (1944)

Smallwood [Smallwood, 1944] utilisa la même approche qu'Einstein pour décrire le module d'Young en petites déformations d'un matériau solide renforcé par des particules sphériques rigides. Cette estimation ne reste valable que pour de faibles fractions volumiques de particules.

$$E_{Smallwood} = E_m \left(1 + 2.5 P_i\right) \tag{1.37}$$

1.6.1.3 Guth-Gold (1938)

Guth et Gold [Guth and Gold, 1938], contrairement aux estimations d'Einstein et de Smallwood, proposèrent de prendre en compte les phénomènes d'interaction entre particules et pour de plus fortes fractions volumiques ils ajoutent un terme quadratique à l'équation 1.37 :

$$E_{Guth-Gold} = E_m \left(1 + 2.5P_i + 14.1P_i^2\right) \tag{1.38}$$

1.6.1.4 Budiansky (1965)

Une estimation auto-cohérente du module de Young a été développée par Budiansky [Budiansky, 1965] qui s'applique dans le cas de particules rigides dans une matrice incompressible :

$$E_{\mathbf{Budiansky}} = \frac{E_m}{(1 - 2.5P_i)} \tag{1.39}$$

1.6.2 Modèles analytiques de changement d'échelles.

Cette section est consacrée à la présentation des modèles théoriques de changement d'échelles, destinés à l'estimation des propriétés effectives d'un matériau hétérogène, dérivés de la solution du problème de l'inclusion hétérogène d'Eshelby. Nous commençons par la présentation de la solution du problème de l'inclusion hétérogène Shelley, suivie des différents modèles qui en sont dérivés, à citer : la solution diluée, la méthode Auto-cohérente et le modèle de Lori-Katakana.

1.6.2.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby

Eshelby a résolu le problème de l'équilibre mécanique d'une inclusion I de forme ellipsoïdale, plongée dans une matrice infinie M, possédant les mêmes propriétés mécaniques que la matrice et soumise à une déformation libre [Eshelby, 1957]. Par analogie à cette première solution, il a donné la solution du problème de l'inclusion hétérogène. Si on considère une inclusion de rigidité C_{ph} plongée dans une matrice infinie de rigiditéC_m initialement soumise à aucune déformation ni contrainte comme illustré par la Figure 1.7.

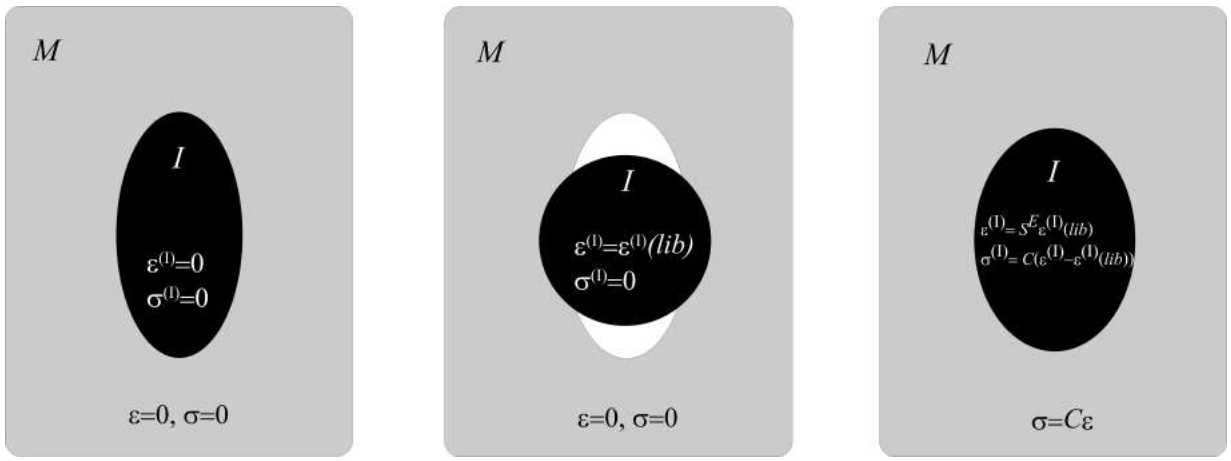


FIGURE 1.7 – Problème de l'inclusion d'Eshelby

On cherche la déformation dans l'inclusion et la matrice à l'équilibre. Eshelby a montré que la déformation de l'inclusion à l'équilibre est homogène et uniforme et qu'il existe un tenseur d'ordre 4 reliant la déformation libre à la déformation de l'inclusion :

$$\varepsilon_{ij}^{(I)} = S^E \varepsilon_{ij}^{(I)}(lib)$$

l'expression de la matrice de localisation dans l'hétérogénéité sera :

$$A_{ph} = (I + S^E : C_m^{-1} : (C_{ph} - C_m))^{-1} \tag{1.40}$$

où S^E est le tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'Eshelby, dépendant des propriétés mécaniques de la matrice C_m et de la forme de l'inclusion.

Donc le comportement apparent est obtenu grâce à l'équation 1.23 qui devient :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m)\,(A_{mnkl})_{ph} \tag{1.41}$$

1.6.2.2 Schéma des distributions diluées

Dans cette solution, chaque inclusion est considérée comme une seule entité noyée dans une matrice infinie. La solution diluée est valable si les inclusions sont suffisamment éloignées les unes des autres, donc, aucune interaction entre les inclusions n'est considérée. Par conséquent, elle s'applique seulement aux matériaux hétérogènes contenant une faible fraction volumique P.

Il s'agit donc d'appliquer le résultat du problème de l'hétérogénéité, équation 1.40, à chaque inclusion afin d'obtenir les tenseurs de localisation de chaque phase

$$A_{ph} = (I + S_{ph}^{E} : C_m^{-1} : (C_{ph} - C_m))^{-1} \tag{1.42}$$

Le comportement homogénéisé est obtenu grâce au tenseur des rigidités effectif exprimé par :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m)\,(A_{mnkl})_{ph} \tag{1.43}$$

Pour un composite à 2 phases, avec des inclusions sphériques noyées dans une matrice, les coefficients de compressibilité k et de cisaillement μ équivalents sont donnés par :

$$k^{dl} = k_m + P_i \frac{(k_i - k_m)(3k_m + 4\mu_m)}{(3k_i + 4\mu_m)} \tag{1.44}$$

$$\frac{\mu^{dl}}{\mu_m} = 1 - \frac{15P_i(1 - \frac{\mu_i}{\mu_m})(1 - \nu_m)}{7 - 5\nu_m + 2(4 - 5\nu_m)\frac{\mu_i}{\mu_m}} \tag{1.45}$$

avec m l'indice attribué à la matrice et i à l'inclusion.

1.6.2.3 Modèle auto-cohérent

Dans cette méthode, chaque phase du matériau est successivement assimilée à une inclusion ellipsoïdale noyée dans un milieu infini possédant les caractéristiques du matériau homogénéisées recherchées.

Le tenseur de localisation de chaque phase ph est exprimé par :

$$A_{ph} = [I + S_{ph}^{E} : (C^{AC})^{-1} : (C_{ph} - C^{AC})]^{-1} \tag{1.46}$$

et le tenseur des rigidités homogénéisé sera :

$$C^{AC} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph} C_{ph} : [I + S_{ph}^{E} : (C^{AC})^{-1} : (C_{ph} - C^{AC})]^{-1} \tag{1.47}$$

où la solution de cette équation implicite est, généralement, obtenue numériquement.

Pour un composite biphasé, avec des inclusions sphériques, une solution analytique permet d'exprimer les caractéristiques élastiques recherchées [Aboudi, 1991], à savoir :

$$k^{AC} = k_m + P_i \frac{(k_i - k_m)(3k^{AC} + 4\mu^{AC})}{(3k_i + 4\mu^{AC})} \tag{1.48}$$

$$\mu^{AC} = \mu_m + P_i(\mu_i - \mu_m) \frac{15(1 - \nu^{AC})}{\mu^{AC}(7 - 5\nu^{AC}) + 2(4 - 5\nu^{AC})\mu_i} \tag{1.49}$$

Pour des problèmes à deux dimensions, [Herve and Zaoui, 1995] a proposé une expression du module de compressibilité effectif k^{AC} pour des composites biphasés donnée par :

$$k^{AC} = \frac{k_1(\mu_1 + k_2) + \mu_1 P(k_2 - k_1)}{(\mu_1 + k_2) + P(k_1 - k_2)} \tag{1.50}$$

Le module de cisaillement μ^{AC} a été proposé par [Christensen and Lo, 1979] par l'expression :

$$\mu^{AC} = \mu_1 \left(1 + \frac{P}{\frac{\mu_m}{\mu_i - \mu_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3}\mu_m}{(2k_m + \frac{8}{3}\mu_m)}(1 - P)}\right) \tag{1.51}$$

1.6.2.4 Mori-Tanaka (1973)

Le schéma de Mori et Tanaka ([Mori and Tanaka, 1973] ; [Benveniste, 1987]) s'applique à des milieux hétérogènes constitués d'inclusions noyées dans une matrice. Les inclusions sont réparties de manière isotrope et se comportent, en moyenne, comme des inclusions isolées dans une matrice infinie, soumise à l'infini, à la déformation moyenne de la matrice ε_m (une inconnue du problème). La déformation de chaque inclusion est alors reliée à la déformation moyenne de la matrice par des « pseudo-tenseurs de localisation » T_{ph} équation 1.52, solution du problème de l'hétérogénéité :

$$\varepsilon_{ph} = T_{ph} : \varepsilon_m \tag{1.52}$$

Le tenseur de localisation de chaque phase aura pour expression :

$$A_{ph} = T_{ph} : \left(\sum P_{ph} T_{ph}\right)^{-1} \tag{1.53}$$

et le tenseur de rigidité homogénéisé, aura pour expression :

$$C^{MT} = C_m + \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(C_{ph} - C_m) : T_{ph} : \left(\sum P_{ph} T_{ph}\right)^{-1} \tag{1.54}$$

Dans ce modèle, les interactions entre les inclusions sont prises en compte mais de manière simplifiée, et par conséquent, ce modèle n'est valable que pour des fractions volumiques inférieure à 25%.

Pour un composite élastique linéaire à deux phases avec des inclusions sphériques, le module de compressibilité équivalent k^{MT} et le module de cisaillement équivalent μ^{MT} sont définis par les relations suivantes :

$$k^{MT} = k_m + .\frac{P_i(k_i - k_m)k_m}{\frac{(1-P_i)(k_i-k_m)3.k_m}{(3.k_i+4.\mu_m)} + k_m} \tag{1.55}$$

$$\mu^{MT} = \mu_m + .\frac{P_i(\mu_i - \mu_m)\mu_m}{(1-P_i)(\mu_i - \mu_m)\frac{6(k_m+2.\mu_m)}{5(3.k_m+4.\mu_m)} + \mu_m} \tag{1.56}$$

Dans le cas de particules infiniment rigides, les estimations de Mori-Tanaka coïncident avec les bornes inférieures d'Hashin-Shtrikman.

1.6.3 Encadrement analytique

Nous allons maintenant nous concentrer sur les bornes rigoureuses qui peuvent être définies en se basant sur les principes variationnels et les informations statistiques sur la morphologie du matériau. Les propriétés effectives sont comprises entre deux de ces limites. Une limite analytique est considérée comme optimale si sa définition utilise toutes les données statistiques disponibles. Nous allons examiner les matériaux à n phases, bien que chaque borne sera spécialisée pour les matériaux à deux phases.

1.6.3.1 Bornes d'ordre zéro

Considérant un matériau hétérogène multi-phasique, sa propriété équivalente Z^H est bornée entre la propriété Z_d de la phase la plus dure et la propriétés Z_t de la phase la plus tendre tel que :

$$Z_t \leq Z^H \leq Z_d \tag{1.57}$$

Pour les modules de compressibilité k et de cisaillement μ on aura :

$$k_t \leq k^H \leq k_d \tag{1.58}$$

$$\mu_t \leq \mu^H \leq \mu_d \tag{1.59}$$

Ces bornes sont les plus simples, car elles ne prennent en considération aucune information concernant la microstructure.

1.6.3.2 Bornes du premier ordre

– **Borne supérieure de Voigt [Voigt, 1889]**

La borne de Voigt résulte d'une approche en déformation qui suppose que la déformation est constante dans toutes les phases et égale à la déformation macroscopique imposée E_{ij} :

$$< \varepsilon_{ij}(x) >= E_{ij} \tag{1.60}$$

Le tenseur de localisation de la déformation est réduit partout au tenseur unité :

$$A_{ij}(x) = I_{ij} \tag{1.61}$$

Donc, l'expression du tenseur des rigidités équivalent sera :

$$C_{ijkl}^{Voigt} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(c_{ijkl})_{ph} \tag{1.62}$$

La borne de [Voigt, 1889] correspond au modèle en parallèle du composite pour lequel on considère les déformations uniformes dans le matériau. On obtient les relations suivantes reliant les fractions volumiques et les modules d'élasticité de chacune des phases :

$$k^{voigt} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}.k_{ph} \tag{1.63}$$

$$\mu^{voigt} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}.\mu_{ph} \tag{1.64}$$

Pour un matériau biphasé de type matrice-inclusion, ces expressions se réduisent à :

$$k^{voigt} = P_m.k_m + P_i.k_i \tag{1.65}$$

$$\mu^{voigt} = P_m.\mu_m + P_i.\mu_i \tag{1.66}$$

– **Borne inférieure de Reuss [Reuss, 1929]**

La borne de [Reuss, 1929] est l'approche en contrainte qui considère que celle ci est constante dans toutes les phases et est égale à la contrainte macroscopique imposée Σ_{ij} .

$$< \sigma_{ij}(x) >= \Sigma_{ij} \tag{1.67}$$

Le tenseur de localisation de contrainte est réduit partout au tenseur unité :

$$B_{ijkl}(x) = I_{ijkl} \tag{1.68}$$

Donc, l'expression du tenseur des souplesses équivalent sera :

$$S_{ijkl}^{Voigt} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}(c_{ijkl})_{ph}^{-1} \tag{1.69}$$

La borne de *Reuss* correspond au modèle en série du composite pour lequel on considère les contraintes uniformes dans le matériau. On obtient les relations suivantes reliant les fractions volumiques et les modules d'élasticité de chacune des phases :

$$\frac{1}{k^{Reuss}} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}.\frac{1}{k_{ph}} \tag{1.70}$$

$$\frac{1}{\mu^{Reuss}} = \sum_{ph=1}^{N} P_{ph}.\frac{1}{\mu_{ph}} \tag{1.71}$$

Pour un matériau biphasé de type matrice-inclusion, ces expressions se réduisent à :

$$k^{Reuss} = \frac{k_m k_i}{P_i k_m + P_m k_i} \tag{1.72}$$

$$\mu^{Reuss} = \frac{\mu_m \mu_i}{P_i \mu_m + P_m \mu_i} \tag{1.73}$$

Voigt et Reuss donnent deux bornes supérieure et inférieure du comportement équivalent. Ces bornes, associées à des lois de mélanges, sont des bornes du premier ordre. Elles ne supposent aucune information concernant la microstructure en dehors des fractions volumiques de chacun des constituants.

1.6.3.3 Bornes du second ordre [Dirrenberger, 2012]

Dans le cas où la répartition des phases est supposée isotrope au sein du matériau, il existe des bornes plus resserrées que les bornes de Voigt et Reuss dites bornes d'Hashin-

Shtrikman [Hashin and Shtrikman, 1963]. Le schéma de Hashin-Shtrikman-Walpole ($H.S.W$) est le même que pour la mépendant nos séjours. Merci Fayçal pour tous ces savoureux repas. thode Auto-Cohérente où le matériau homogène équivalent entourant les différents constituants est remplacé par un matériau de comparaison. Si le matériau de comparaison est plus dur, on retrouve la borne supérieure de la rigidité du composite, par contre, si le matériau comparaison est plus souple, on aboutit à la borne inférieure de la rigidité du composite.

Pour un matériau multiphasé et si le module le plus faible prend l'indice 1 et le plus fort prend l'indice n (On suppose donc que $k_{N-1} \leq k_N$ et $\mu_{N-1} \leq \mu_N$) les bornes de Hashin-Shtrikman sont définies par :

– Le module de compressibilité k :

$$k^{HS-} = k_1 + \frac{B_1}{1 + \alpha_1 B_1} \tag{1.74}$$

$$k^{HS+} = k_N + \frac{B_N}{1 + \alpha_N B_N} \tag{1.75}$$

où α_1, α_N, B_1 et B_N sont exprimés par :

$$\alpha_1 = -\frac{3}{3k_1 + 4\mu_1} \tag{1.76}$$

$$\alpha_N = -\frac{3}{3k_N + 4\mu_N} \tag{1.77}$$

et

$$B_1 = \sum_{ph=2}^{N} \frac{P_{ph}}{\frac{1}{k_{ph} - k_1} - \alpha_1} \tag{1.78}$$

$$B_N = \sum_{ph=1}^{N} \frac{P_{ph}}{\frac{1}{k_{ph} - k_N} - \alpha_N} \tag{1.79}$$

avec P_{ph} la fraction volumique de la phase.

On obtient l'encadrement suivant pour le module de compressibilité k^H homogénéisé :

$$k^{HS-} \leq k^H \leq k^{HS+} \tag{1.80}$$

– Le module de cisaillement μ :

$$\mu^{HS-} = \mu_1 + \frac{1}{2}(\frac{D_1}{1+\beta_1 D_1}) \tag{1.81}$$

$$\mu^{HS+} = \mu_N + \frac{1}{2}(\frac{D_N}{1+\beta_N D_1}) \tag{1.82}$$

avec β_1, β_N, D_1 et D_N exprimés par :

$$\beta_1 = -\frac{3(k_1+2\mu_1)}{5\mu_1(3k_1+4\mu_1)} \tag{1.83}$$

$$\beta_N = -\frac{3(k_N+2\mu_N)}{5\mu_N(3k_N+4\mu_N)} \tag{1.84}$$

$$D_1 = \sum_{ph=2}^{N} \frac{P_{ph}}{\frac{1}{2(\mu_{ph}-\mu_1)} - \beta_1} \tag{1.85}$$

$$D_N = \sum_{ph=1}^{N-1} \frac{P_{ph}}{\frac{1}{2(\mu_{ph}-\mu_N)} - \beta_N} \tag{1.86}$$

On obtient l'encadrement suivant pour le module de cisaillement homogénéisé μ^H :

$$\mu^{HS-} \leq \mu^H \leq \mu^{HS+} \tag{1.87}$$

Pour le cas d'un matériau biphasé à 3 dimensions, les deux modules sont exprimés par :

– le module de compressibilité :

$$k^{HS-} = \frac{1}{\frac{P_i}{(k_i+\frac{4\mu_i}{3})} + \frac{.P_m}{(.k_m+\frac{4.\mu_m}{3})}} - \frac{4\mu_i}{3} \tag{1.88}$$

$$k^{HS+} = \frac{1}{\frac{P_i}{(k_i+\frac{4}{3\mu_i})} + \frac{.P_m}{(.k_m+\frac{4.}{3\mu_m})}} - \frac{4\mu_i}{3} \tag{1.89}$$

– le module de cisaillement :

$$\mu^{HS-} = \mu_m. + \frac{P_i}{\frac{1}{(\mu_i-\mu_m)} + \frac{2(k_m+2.\mu_m).P_m}{5\mu_m(.k_m+\frac{4}{3}.\mu_m)}} \tag{1.90}$$

$$\mu^{HS+} = \mu_i. + \frac{P_m}{\frac{1}{(\mu_m-\mu_i)} + \frac{2(k_i+2.\mu_i).P_i}{5.\mu_i(k_i+\frac{4}{3}.\mu_i)}} \tag{1.91}$$

et pour le cas 2 dimensions, les deux modules sont exprimés par :

– le module de compressibilité :

$$k^{HS-} = k_m. + \frac{P_i}{\frac{1}{(k_i-k_m)} + \frac{3.P_m}{(3.k_m+4.\mu_m)}} \tag{1.92}$$

$$k^{HS+} = k_i. + \frac{P_m}{\frac{1}{(k_m-k_i)} + \frac{3.P_i}{(3.k_i+4.\mu_i)}} \tag{1.93}$$

– le module de cisaillement :

$$\mu^{HS-} = \mu_m. + \frac{P_i}{\frac{1}{(\mu_i-\mu_m)} + \frac{6(K_m+2.\mu_m).P_m}{5\mu_m(3.k_m+4.\mu_m)}} \tag{1.94}$$

$$\mu^{HS+} = \mu_i. + \frac{P_m}{\frac{1}{(\mu_m-\mu_i)} + \frac{6(K_i+2.\mu_i).P_i}{5.\mu_i(3.k_i+4.\mu_i)}} \tag{1.95}$$

A noter que pour une distribution isotrope d'inclusions sphériques dures diluées dans une matrice molle, la borne inférieure de Kinshasa et Shtrikman est équivalente à l'estimation de Mori-Tanaka[Mori and Tanaka, 1973] .

1.7 Homogénéisation numérique

La mécanique des matériaux hétérogènes s'est longtemps limitée aux approches analytiques. Les progrès considérables des moyens de calcul ont favorisé l'utilisation de la simulation numérique qui a permis de surmonter plusieurs difficultés et de traiter ainsi des microstructures de matériaux complexes. L'homogénéisation numérique constitue la deuxième catégorie de l'homogénéisation, elle consiste à utiliser des techniques de simulation numérique sur des échantillons de microstructures afin d'estimer leurs propriétés effectives à partir de leurs lois de comportement et des distributions spatiales de leurs différents composants. Les microstructures étudiées sont des images qui peuvent être virtuelles, c'est à dire générées par des outils numériques, ou réelles obtenues par le microscope ou par la tomographie (comme l'IRM en imagerie médicale). L'homogénéisation numérique est liée directement à la détermination de la taille du volume élémentaire représentatif (VER) qui a été largement étudié avec des outils numériques et statistiques [Sab, 1992], [Ostoja-Starzewski, 1993], [Gusev, 1997], [Terada et al., 1998], [Ostoja-Starzewski, 1998], [Segurado and Llorca, 2002], [Segurado et al., 2003], [Kanit et al., 2003], [Segurado and Llorca, 2006], [Minshnaevsky, 2004], [Sab, 2005], [Kari et al., 2007], [Kari et al., 2008], [Lachihab and Sab, 2008], [MOUMEN, 2014], [Kaddouri et al., 2016].

La Figure 1.8 résume le principe de l'homogénéisation numérique qui consiste en premier lieu à l'élaboration de l'image de la microstructure du matériau hétérogène étudiée, ensuite au choix du VER, suivi par le maillage et la simulation numérique aboutissant au comportement du matériau homogène équivalent (MHE).

1.7.1 Homogénéisation numérique par des microstructures virtuelles

Les outils numériques de génération d'images de microstructures et de calcul ont ouvert de grandes perspectives dans la micromécanique permettant la génération d'images de microstructures variées et compliquées, Figure 1.9. Ainsi, et durant ces deux dernières décennies, un nombre considérable d'études se sont intéressées à l'étude des différentes propriétés mécaniques et physiques des différents matériaux hétérogènes, composites et poreux, et ce par l'investigation des effets des différents paramètres de ces microstructures : taille du VER, nature des particules, morphologie des renforts ou des pores, leurs orientations, fraction volumique, conditions aux limites etc...On cite, entre autres, les travaux de [Kanit et al., 2003],

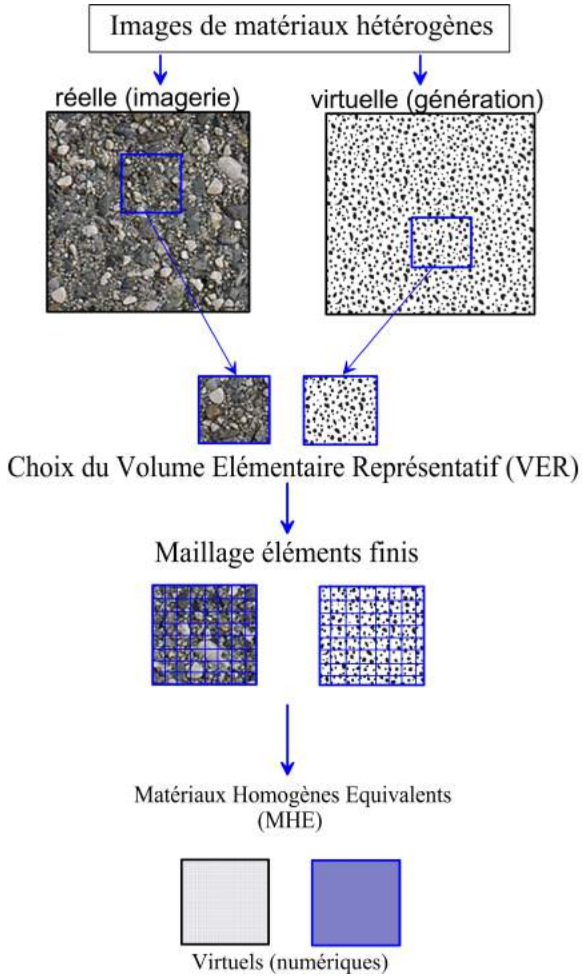


Figure 1.8 – Etapes de l'homogénéisation numérique

[Kanit et al., 2006], [Fritzen et al., 2012], [El-Moumen et al., 2013], [Khdir et al., 2013], [MOUMEN, 2014], [Benhizia et al., 2014], [El-Moumen et al., 2015], [Khdir et al., 2015], [Kaddouri et al., 2016], [Djebara et al., 2016], [Benhizia et al., 2017]. Dans ces travaux, les propriétés mécaniques élastiques telles que le module d'élasticité, le coefficient de compressibilité, coefficient de cisaillement ainsi qu'une propriété physique qui est la conductivité thermique ont été largement étudiées. Le comportement non linéaire comme l'élastoplasticité a fait aussi l'objet de certains travaux.

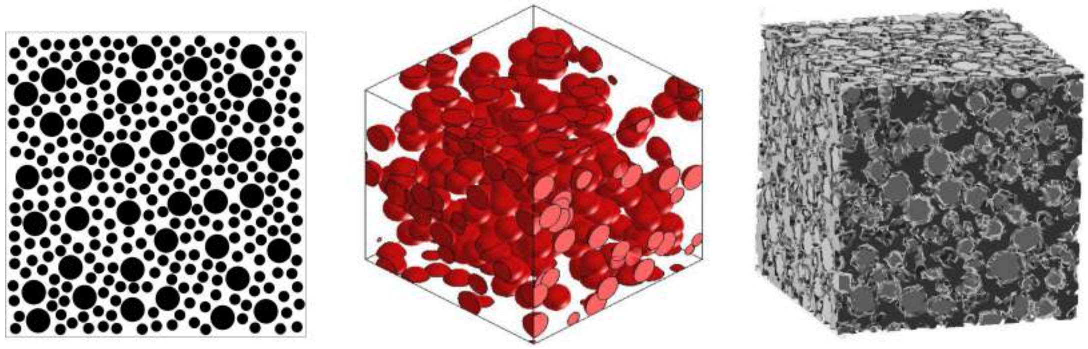


FIGURE 1.9 – Exemples de microstructures virtuelles

1.7.2 Homogénéisation numérique par des microstructures réelles

Les images des microstructures réelles sont obtenues soit par des observations microscopiques (MEB) qui fournissent des vues bidimensionnelles (2D) ou par la tomographie qui permet de reconstruire le volume d'un objet à partir d'une série de mesures effectuées par tranches depuis l'extérieur de cet objet Figure 1.10. Les images issues de ces deux techniques nécessitent un traitement spécifique afin de les améliorer.

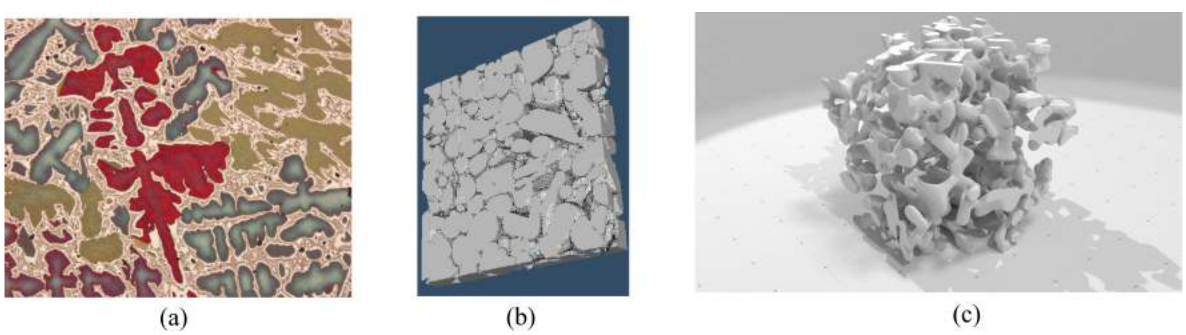


Figure 1.10: Exemples de microstructures réelles : (a) Bronze (Wikipédia), (b) Crème glacée ([Kanit et al., 2006] et Neige (Liris, CNRS)

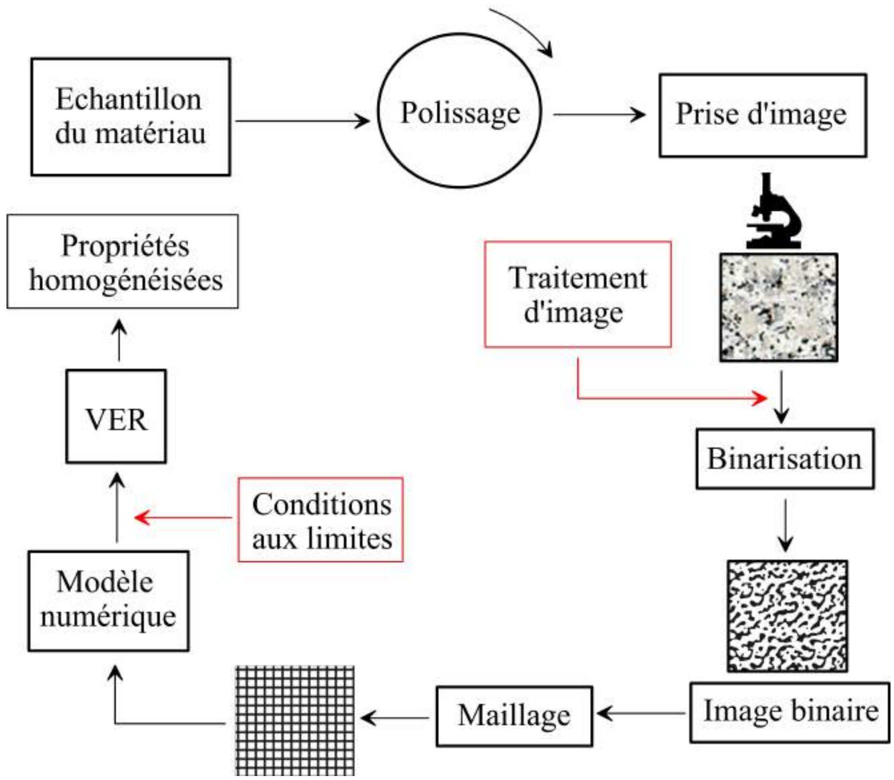


Figure 1.11: Etapes de préparation d'une microstructure réelle pour la simulation [MOUMEN, 2014]

Elles doivent ainsi passer par plusieurs étapes pour qu'elles soient exploitables pour une simulation numérique. Ces étapes sont illustrées par la Figure 1.11.

On peut citer ici, à titre d'exemple, le travail de [Kanit et al., 2006] qui a étudié les microstructures hétérogènes de la crème glacée. Une image 3D est obtenue après polissage successif des éprouvettes et une nouvelle technique, basée sur le couplage des méthodes numériques avec les moyennes des paramètres statistiques, pour l'estimation des propriétés apparentes et effectives a été proposée.

Deuxième partie

Homogénéisation en élastoplasticité

1.8 Rappel théorique du comportement élastoplastique des structures

Avant de présenter les différents modèles de changement d'échelles utilisées dans l'analyse du comportement élastoplastique des matériaux hétérogènes, il est tout de même utile de rappeler la théorie de l'élastoplasticité des structures, dont les matériaux sont supposés homogènes, et ce du fait que c'est la base de cette même théorie qui est utilisée pour l'homogénéisation en élastoplasticité. Dans cette section, il sera question de donner les notions de base ainsi que les relations essentielles dans l'analyse élastoplastique des structures. Les méthodes numériques les plus utilisées dans la résolution des systèmes non-linéaires résultants seront aussi exposées [Masmoudi, 1997].

1.8.1 Elastoplasticité

La plupart des matériaux structurels ont un comportement initial élastique (réversible, linéaire ou non) mais exhibent au delà d'une certaine limite, appelée limite élastique ou seuil plastique, Figure 1.12, des déformations irréversibles ou plastiques. Les déformations augmentent avec une petite variation de la résistance qui peut être soit positive (durcissement ou écrouissage positif) ou négative (adoucissement).
Si on décharge complètement la structure après plastification, les déformations diminuent en suivant un chemin parallèle au tronçon élastique. Si on décharge complètement la structure après plastification, les déformations diminuent en suivant un chemin parallèle au tronçon élastique. Si on recharge à partir du point C, le comportement sera élastique jusqu'au point B. La limite élastique change donc à cause de l'écrouissage. Le seuil plastique dépend de l'histoire du chargement. σ_y est appelée limite élastique initiale et σ_B est la limite élastique actuelle. Si on inverse le chargement, Figure 1.13, on observe que la limite élastique dans un sens est réduite par la plastification antérieure dans l'autre sens : c'est l'effet Bauschinger qui est également lié à l'histoire des contraintes et qui induit, donc, une anisotropie dans un matériau initialement

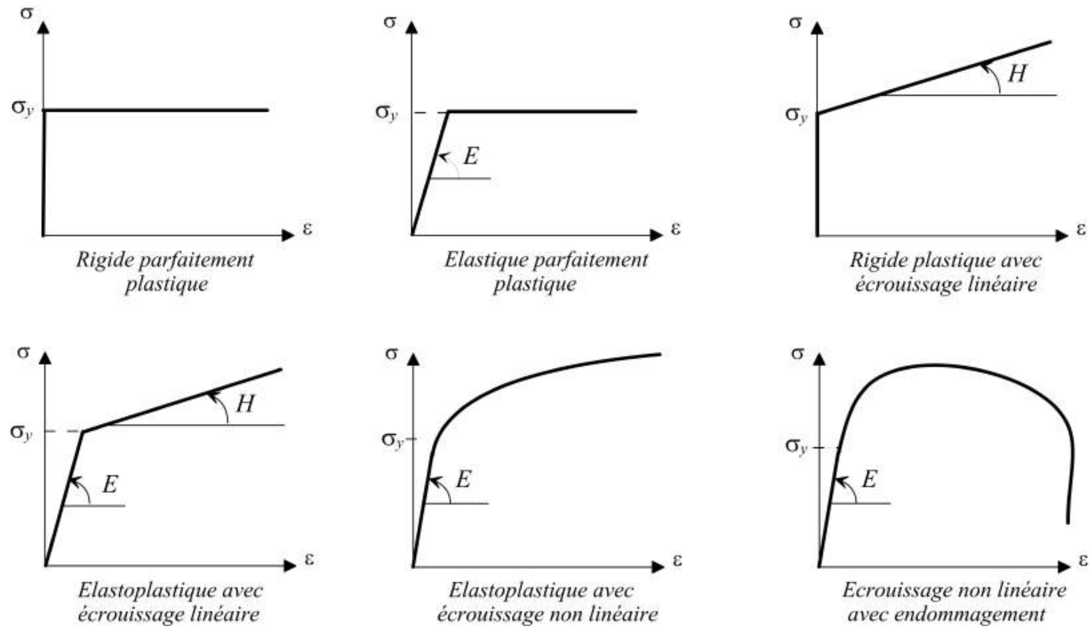


FIGURE 1.12 – Modèles de comportements mécaniques

isotrope. Pour l'acier doux dont le comportement est pratiquement élastoplastique parfait, les phénomènes d'écrouissage et de Bauschinger ne sont pas observés expérimentalement.

L'écrouissage signifie que les déformations sont élastiques et plastiques à la fois. Dans le cas uniaxial, l'élastoplasticité parfaite signifie qu'au delà de la limite élastique, le comportement réversible cesse et les déformation sont purement plastiques. La plasticité est une extension logique de l'élasticité et le critère de la limite élastique constitue la condition de plastification. Dans la théorie de l'élastoplasticité, les déformations sont indépendantes du temps.

Remarque

- Du point de vue microscopique, la déformation plastique d'un matériau est provoquée par le déplacement irréversible des dislocations (une dislocation est un défaut au sein d'un arrangement régulier d'un réseau cristallin). Pour provoquer une telle déformation, il faut vaincre les liaisons atomiques du réseau.
- L'écrouissage signifie la modification des caractéristiques mécaniques d'un matériau par suite de déformation plastique (durcissement par déformation).

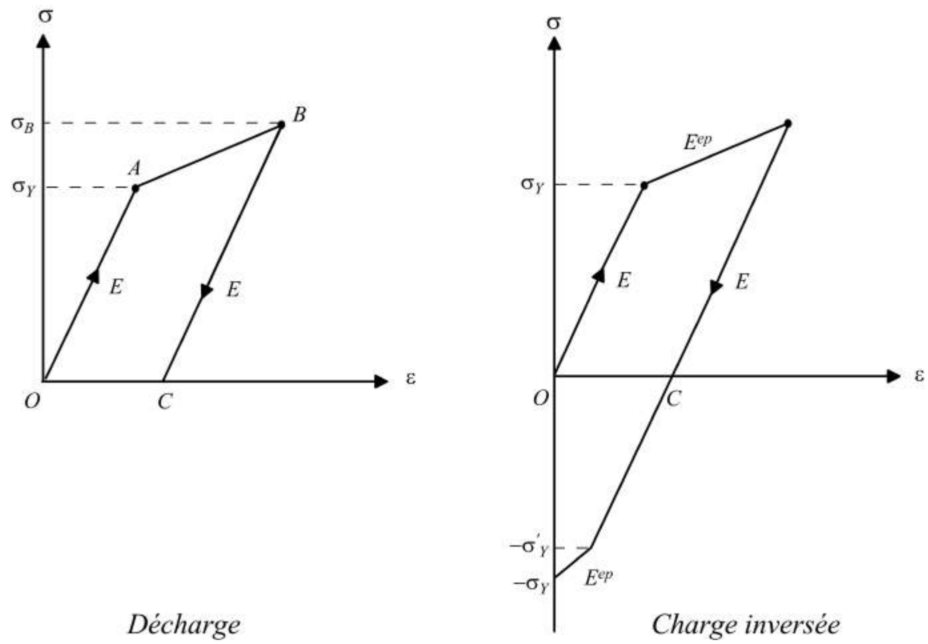


FIGURE 1.13 – Effet Bauschinger

1.8.2 Critère de limite élastique ou d'épuisement

Dans le cas unidimensionnel, le critère d'épuisement est quand la contrainte courante$|\sigma|$atteint la limite élastique$|\sigma_y|$. On peut exprimer ce critère par :

$$|\sigma| - |\sigma_y| = F(\sigma - \sigma_y) = 0 \tag{1.96}$$

Les deux contraintes sont comptées algébriquement afin de pouvoir traiter les chargements inversés éventuels.

1.8.3 Règle d'écrouissage

Cette règle doit donner la limite élastique actuelle$Y$ et décrire l'effet Bauschinger éventuel. Plusieurs règles d'écrouissage existent. La plus simple est celle qui suppose que les limites élastiques en traction et en compression sont indépendantes. Cette règle est, néanmoins, en contradiction avec les observations expérimentales. Les écrouissages les plus utilisés sont de nature isotrope, cinématique ou combinée.

1.8.3.1 Ecrouissage isotrope

Dans ce cas, Figure 1.14(a), les conditions d'épuisement en compression et en traction sont affectées de la même manière. Si on inverse le chargement à partir du point B, l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte σ_B. Il y a dans ce cas une symétrie par rapport à l'axe $\sigma = 0$. L'origine O est le centre fixe du segment entre les points limites mais celui-ci subit une expansion isotrope symétrique, Figure 1.14(b).
Cela s'exprime par :

$$F(\sigma, Y) = |\sigma| - |Y| = 0 \tag{1.97}$$

Y est la limite élastique actuelle comptée algébriquement et dépend de la déformation plastique ε^p, Figure 1.14(c).

$$Y = \sigma_Y + \int H d\varepsilon^p \tag{1.98}$$

H est une caractéristique du matériau (paramètre d'écrouissage).
Si H est constante :

$$Y = \sigma_Y + H\varepsilon^p \tag{1.99}$$

En élastoplasticité parfaite $H = 0$, donc $Y = \sigma_Y$ =constante.

1.8.3.2 Ecrouissage cinématique

Dans ce cas, on suppose que la même marge $2\sigma_Y$ est conservée quand le chargement est inversé Figure 1.15(a). Cela signifie que le segment entre les points limites garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (contrainte) δ, Figures 1.15(b) et (c).

$$F(\sigma, \delta, \sigma_Y) = F(\overline{\sigma}, \sigma_Y) = |\overline{\sigma}| - |\sigma_Y| = 0 \tag{1.100}$$

δest l'ordonnée du centre du segment. $\overline{\sigma} = \sigma - \delta$ est appelée contrainte réduite.

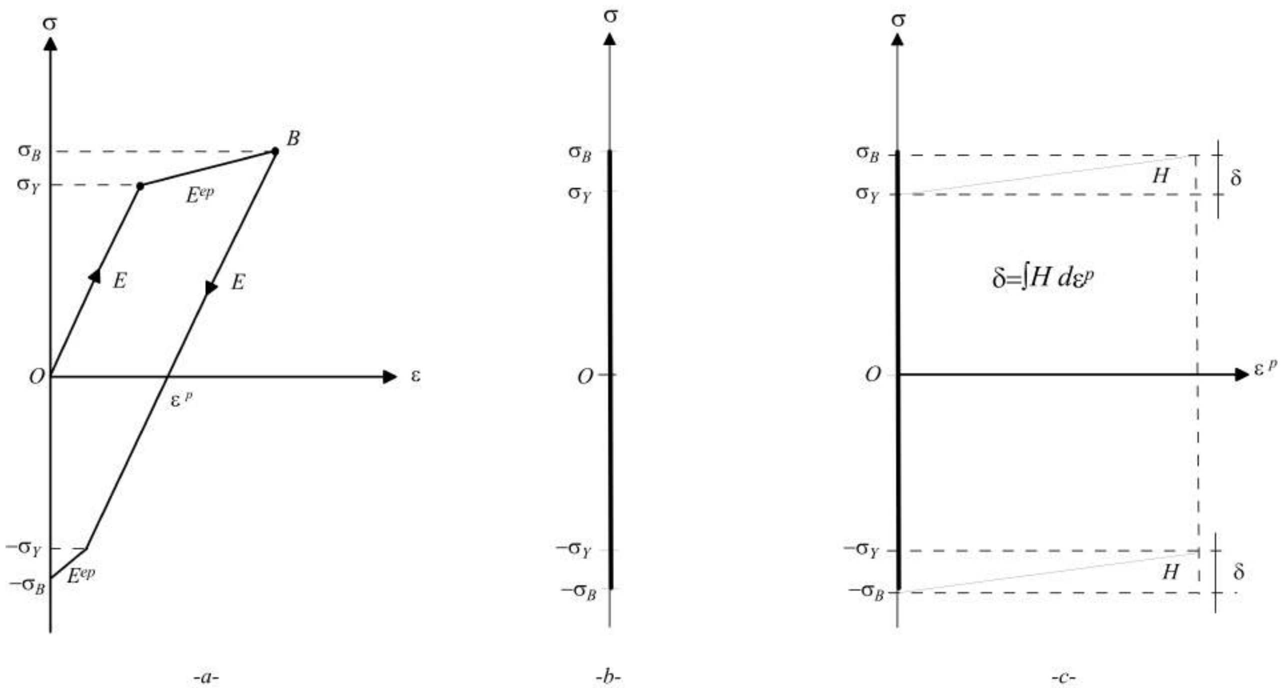


FIGURE 1.14 – Ecrouissage isotrope

$$\delta = \int b d\varepsilon^p \tag{1.101}$$

b est une caractéristique du matériau égale à H si l'écrouissage est purement cinématique, Figure 1.15(c).

Dans ce cas, l'effet Bauschinger est maximal car l'augmentation de la limite élastique par écrouissage dans un sens est totalement perdue dans l'autre sens.

1.8.4 Règle d'écoulement

A cause de la dépendance de la réponse de l'histoire du chargement et du problème de non-unicité de la solution qui peut se poser, la loi constitutive élastoplastique ne peut se formuler que de manière incrémentale. L'incrément total des déformations se compose en général de deux parties : un incrément élastique $d\varepsilon^{e1}$ et un incrément élastoplastique $d\varepsilon^{ep}$, Figure 1.16. Ce dernier se décompose lui-même en une partie élastique $d\varepsilon^{e2}$ et une partie purement plastique $d\varepsilon^p$.

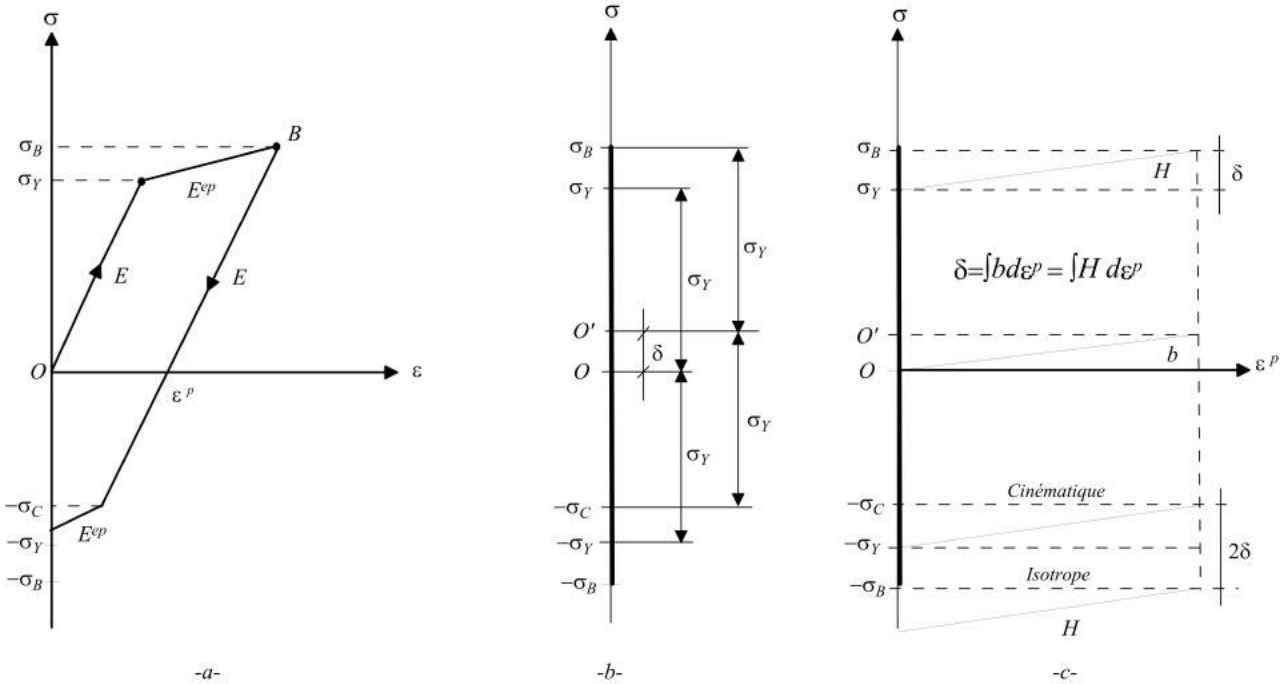


FIGURE 1.15 – Ecrouissage cinématique

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{ep} = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{e2} + d\varepsilon^{p} \tag{1.102}$$

Dans le domaine élastique ou en cas de décharge, la composante plastique est nulle. dans le domaine plastique $d\varepsilon^{e1} = 0$. L'incrément correspondant des contraintes $d\sigma$est dû aux déformations élastiques seulement.

$$d\sigma = d\sigma^{e} + d\sigma^{ep}$$

$$d\sigma = E d\varepsilon^{e} = E(d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{e2}) \tag{1.103}$$

On peut lier les contraintes et les déformations plastiques ou élasto-plastiques :

$$d\sigma^{ep} = E^{ep} d\varepsilon^{ep} \tag{1.104}$$

$$d\sigma^{ep} = H d\varepsilon^{p} \tag{1.105}$$

E^{ep}est le module tangent et H est un paramètre d'écrouissage qui ne sont pas forcément constants. En élastoplasticité parfaite $E^{ep} = H = 0$.

En substituant $d\varepsilon^{ep}$ par sa valeur dans l'équation 1.104, on aura :

$$d\sigma^{ep} = E^{ep}(d\varepsilon^{e2} + d\varepsilon^{p})$$

$$= E^{ep}(\frac{d\sigma^{ep}}{E} + \frac{d\sigma^{ep}}{H})$$

$$= E^{ep}.d\sigma^{ep}(\frac{1}{E} + \frac{1}{H})$$

Donc :

$$\frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}$$

ou bien :

$$E^{ep} = E(1 - \frac{E}{E + H})$$

$$H = \frac{E}{1 - \frac{E^{ep}}{E}} \tag{1.106}$$

La relation 1.104est la règle d'écoulement plastique, et la relation incrémentale générale est :

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \tag{1.107}$$

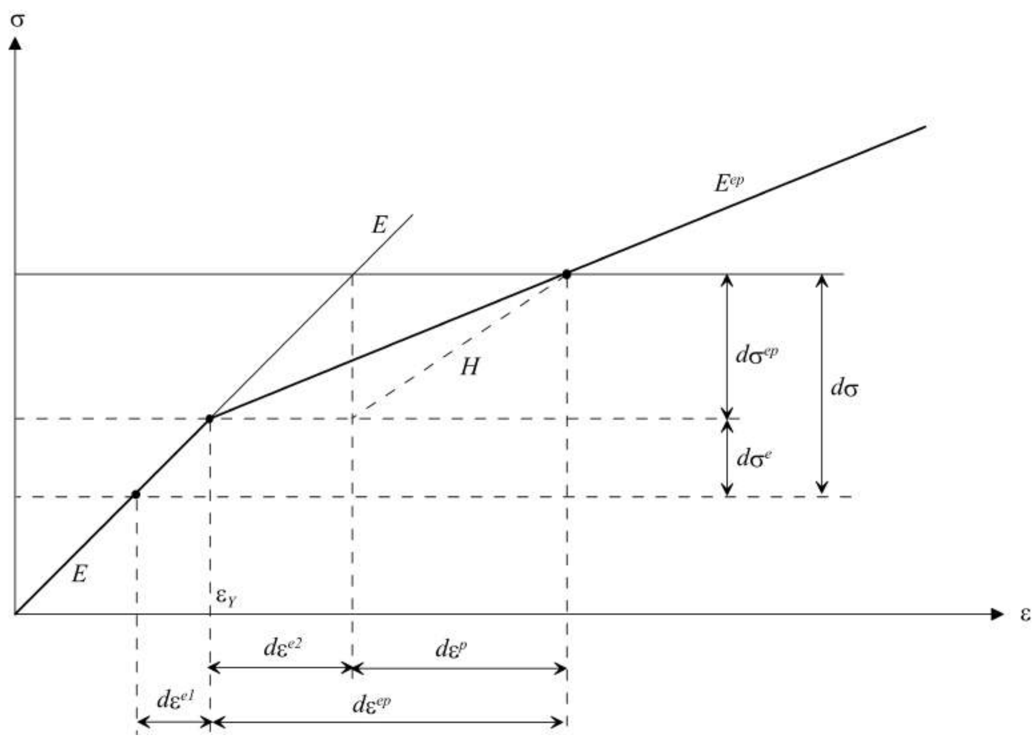


FIGURE 1.16 – Relations élastoplastiques

- En cas de chargement après épuisement : $E_t = E^{ep}$
- En cas de décharge ou dans le domaine élastique : $E_t = E$
- En cas de transition du domaine élastique au domaine plastique :

$$E_t = rE + (1 - r)E^{ep} \tag{1.108}$$

avec $0 \leq r \leq 1$.Résolution des systèmes non-linéaires

Des non linéarités apparaîssent dans la formulation de problèmes de mécanique des structures pour deux raisons :

- les paramètres physiques supposés indépendants du déplacement$U$ dans un modèle linéaire, tel que le module de Young E, deviennent des fonctions de$U$. C'est le cas de l'élastoplasticité (non-linéarité matérielle),
- des termes non-linéaires apparaîssent dans les équations aux dérivées partielles, même si les propriétés physiques sont indépendantes du déplacement$U$. C'est le cas en élasticité

avec grands déplacements où l'on doit prendre en compte les termes d'ordre supérieur dans le tenseur des déformations (non linéarité géométrique).

Il n'existe pas de méthode directe de résolution de systèmes non linéaires, elle s'effectue par des linéarisations successives tout en essayant de satisfaire les conditions non linéaires à une certaine précision. Plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes non linéaires existent, elles sont dans leur quasi-totalité basées sur un même principe : à partir d'une approximation initiale des déplacements (éventuellement nulle), on calcule les contraintes selon le modèle constitutif. Ces contraintes sont équivalentes à un système de forces nodales intérieurs F_I devant équilibrer les forces nodales extérieures. Généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée forces résiduelles ou simplement résidu : $R = F - F_I$.

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée sous la forme :

$$\{R(U)\} = \{F\} - [K(U)]\{U\} = 0 \tag{1.109}$$

où$[K]$ est la matrice de rigidité.

Dans le cas de l'élastoplasticité, seule existe une forme incrémentale de 1.109 :

$$[K(U)]\{\triangle U\} = \{\triangle F\} \tag{1.110}$$

Résoudre le système non linéaire 1.110, c'est chercher un vecteur $\{U\}$qui rend le résidu $\{R(U)\}$aussi proche que possible de zéro. En général, pour un niveau de charge donné, un certain nombre d'itérations est nécessaire pour réduire les forces résiduelles à un certain degré de précision fixé. La qualité des résultats finaux dépend des différents paramètres numériques associés à la méthode utilisée : dimension de l'incrément, procédé d'itération, précision requise, critère de convergence...

Les nombreuses méthodes non linéaires existantes peuvent être groupées en trois classes : incrémentales, itératives et mixtes.

1.8.4.1 Méthodes incrémentales

Dans ces méthodes, le chargement est subdivisé en plusieurs incréments pas forcément égaux $\lambda_1 F, \lambda_2 F, ...\lambda_i F$. Durant chaque incrément, les déplacements sont obtenus par la résolution d'un système linéaire $KU = F$ où K est déduite des résultats de l'incrément précédent, et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment. Le procédé est répété jusqu'au chargement final, Figure 1.17. Il n'y a aucune itération pour restaurer l'équilibre. L'inconvénient majeur réside dans le cumul des erreurs et dans l'impossibilité de prévoir la taille minimale des incréments pour satisfaire une tolérance fixée.

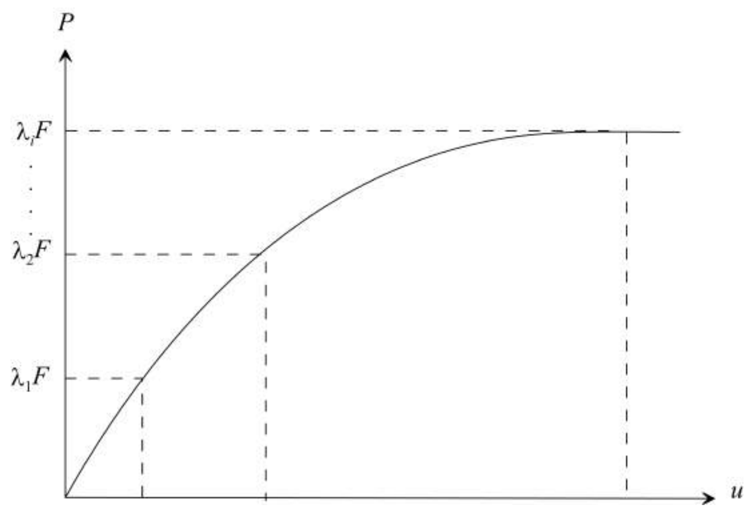


Figure 1.17 – Méthode incrémentale

1.8.4.2 Méthodes itératives

Le chargement est appliqué en un seul incrément. Les forces résiduelles déduites des résultats de l'itération précédente sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouveaux résidus. Le procédé continue jusqu'à élimination des résidus à la précision désirée. La redistribution de forces résiduelles peut se faire avec une matrice de rigidité constante ou variable (tangente ou sécante), Figure 1.18. Les méthodes itératives sont plus lentes que les méthodes incrémentales mais permettent un meilleur contrôle de la précision et le procédé itératif peut être facilement inclus dans un algorithme non linéaire. L'inconvénient principal est que les contraintes et les déformation ne sont déterminées que pour un seul incrément sans une aucune information sur le chemin non linéaire parcouru.

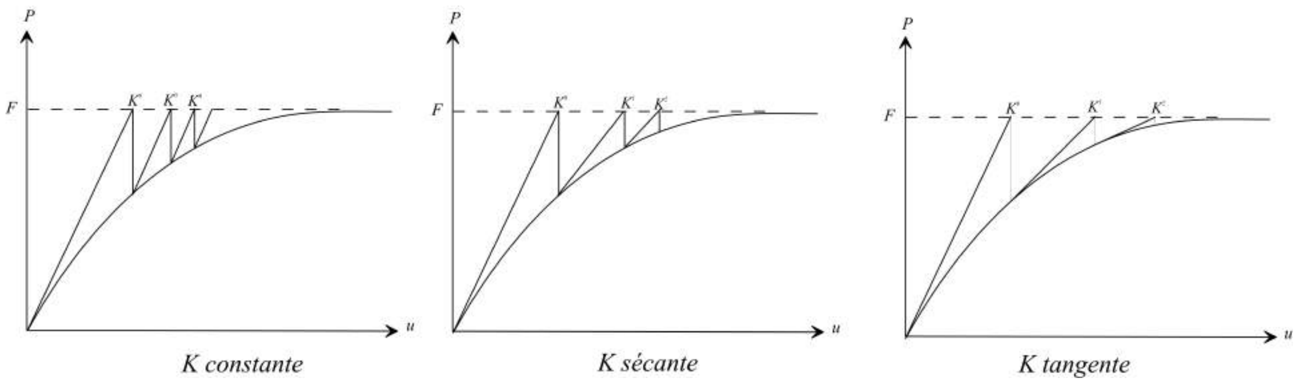


FIGURE 1.18 – Méthodes itératives

1.8.4.3 Méthodes mixtes

Incrémentales et itératives à la fois, elles combinent les avantages des deux méthodes précédentes et sont toutefois plus lentes. Le chargement est appliqué par incrément et dans chaque incrément plusieurs itérations sont effectuées afin d'assurer la convergence, Figure 1.19.

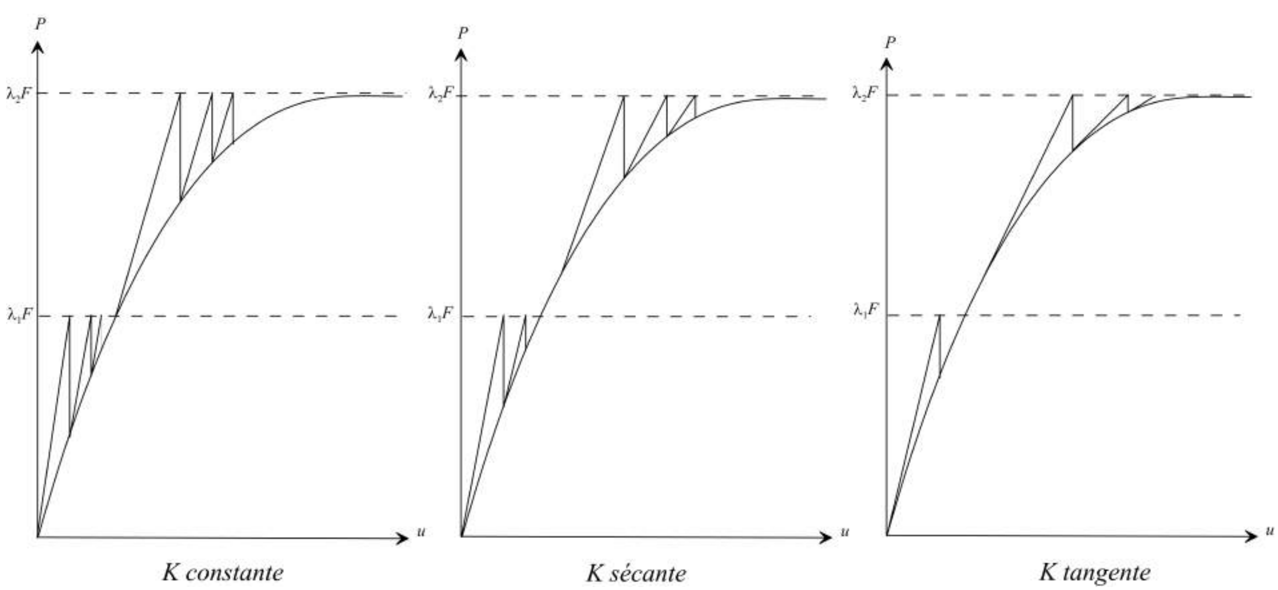


FIGURE 1.19 – Méthodes mixtes (incrémentales/itératives)

En pratique, il n'existe pas de méthode générale pour tous les cas ; la stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience, à une classe de problèmes donnée en faisant appel à une combinaison des méthodes citées précédemment. Les principales méthodes utilisées sont exposées dans les sections suivantes.

1.8.4.4 Méthode itérative directe

Cette méthode, Figure 1.20 consiste à construire une suite de solutions $\{U^0\},\{U^1\},...\{U^i\}$. $\{U^i\}$ étant calculé à partir de $\{U^{i-1}\}$en résolvant le système linéaire :

$$\left[K(U^{i-1})\right]\left\{U^i\right\}=\{F\} \tag{1.111}$$

$$i=1,2,3,...$$

Ce qui peut s'écrire sous forme incrémentale en introduisant le résidu $\{R^{i-1}\}$ et connaissant les conditions initiales F^0, U^0 et $K(U^0)$:

Résidu : $R^{i-1}=F-K^{i-1}U^{i-1}$

Résoudre : $K^{i-1}\triangle U^i=R^{i-1}$déduire $\triangle U^i$

Cumuler : $U^i=U^{i-1}+\triangle U^i$ déduire K^i et R^i

Test de convergence (norme des forces ou des déplacements).

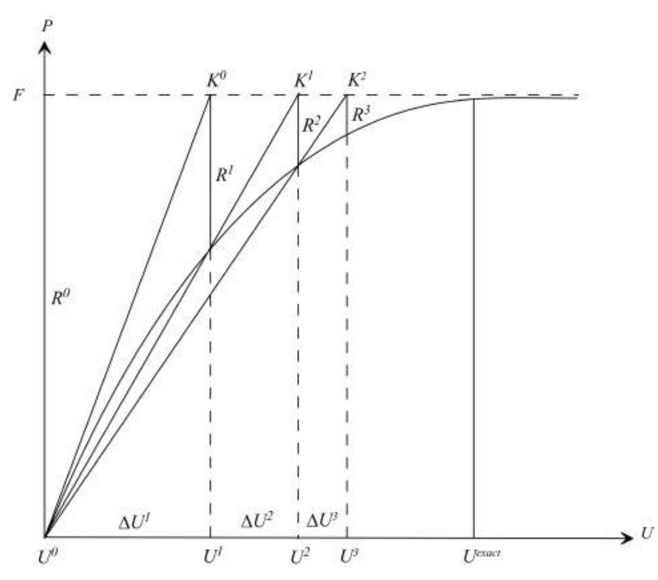


FIGURE 1.20 – Méthode itérative directe

1.8.4.5 Méthode de Newton-Raphson

La méthode est illustrée par la Figure 1.21. Les conditions initiales F^0, U^0et K_t^0 étant connus (F^0, U^0sont éventuellement nuls). Le résidu qu'on doit éliminer est R^0.

On calcule ce résidu par : $R^0 = F - F^0 = F - K_t^0 U^0$.

On résout :$K_t^0 \triangle U^1 = R^0$ et on déduit $\triangle U^1$.

Le déplacement est : $U^1 = U^0 + \triangle U^1$et on déduit F^1et K_t^1.

On calcule le nouveau résidu : $R^1 = F - F^1$

On résout : $K_t^1 \triangle U^2 = R^1$et on déduit $\triangle U^2$

Le nouveau déplacement est : $U^2 = U^1 + \triangle U^2$ et on déduit F^2et K_t^2,...........

Ainsi, l'algorithme de cette méthode est :

Résidu $R^{i-1} = F - F^{i-1}$

Résoudre $K_t^{i-1} \triangle U^i = R^{i-1}$ et déduire $\triangle U^i$

Cumuler $U^i = U^{i-1} + \triangle U^i$ et déduire F^iet K_t^i .

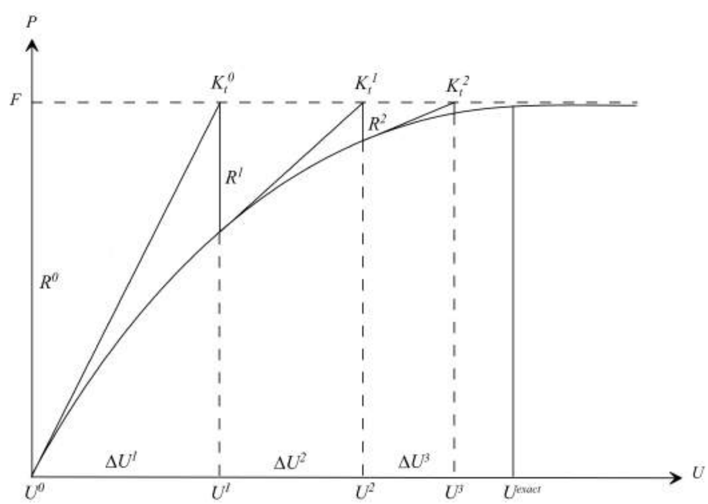


FIGURE 1.21 – Méthode de Newton-Raphson

1.8.4.6 Méthode de la rigidité initiale ou de Newton-Raphson modifiée

Pour éviter les coûteuses actualisations de K et les autres inconvénients de la méthode précédente, on utilise ici une matrice de rigidité constante, Figure 1.22.

L'algorithme est le suivant :

Résidu : $R^{i-1} = F - F^{i-1}$

Résoudre $K^0 \triangle U^i = R^{i-1}$ et déduire F^i .

Cumuler $U^i = U^{i-1} + \triangle U^i$ et déduire F^i

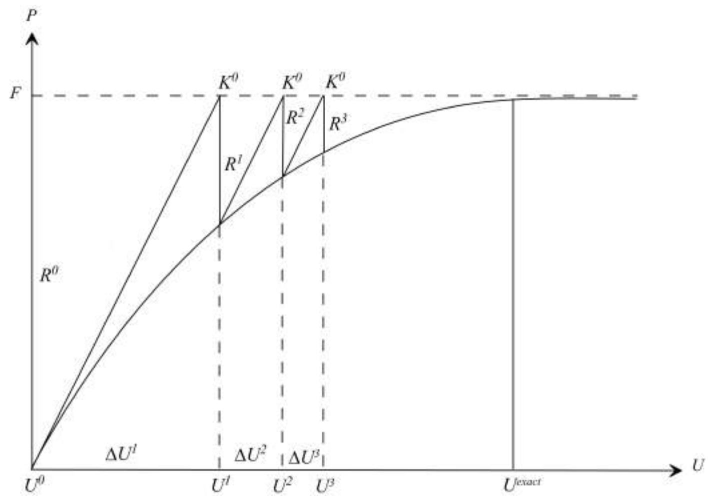


FIGURE 1.22 – Méthode de la rigidité initiale (ou de Newton-Raphson modifiée)

Bien que plus lente, cette méthode est plus économique car elle évite les actualisations répétées de K. La rigidité utilisée peut être relative à la configuration initiale (méthode de la rigidité initiale). Cependant, la variante la plus intéressante de cette technique est celle qui consiste à actualiser périodiquement la rigidité.

Dans cette méthode, on utilise la même matrice de rigidité K^0pour chaque itération. Il suffit, donc, de factoriser celle-ci une seule fois. L'avantage de cette méthode est donc évident mais elle est lente.

1.8.4.7 Critères de convergence

Le critère de convergence contrôle le nombre d'itérations dans un incrément. Le nombre d'itérations, le critère utilisé ainsi que la tolérance exigée influent sur les résultats. Toutefois, imposer une limite exagérée risque de coûter cher pour une précision inutile. Les critères de convergence sont formulés soit directement en fonction des forces résiduelles ou bien indirectement à travers les autres grandeurs (déplacements, déformations ou contraintes). Il est très difficile et très cher de vérifier la convergence de toutes les composantes des forces, déplacements ou autres grandeurs. On utilise une estimation globale avec les normes (moindres carrés en général). Les critères les plus utilisés sont :

– Convergence en forces :

$$\frac{\|\triangle F^i\|}{\|F^i\|} \leq T_F$$

où : T_F est la tolérance en forces,

avec :

$$\|F\| = (F^T.F)^{\frac{1}{2}}, \|\triangle F\| = (\triangle F^T.F)^{\frac{1}{2}}$$

– Convergence en déplacements :

$$\frac{\|\triangle U^i\|}{\|U^i\|} \leq T_D$$

où : T_D est la tolérance en déplacements.

1.8.4.8 Risques de divergence et remèdes

La convergence dans un problème non linéaire ne peut jamais être garantie notamment dans les analyses avec un nombre de degrés de liberté élevé. La divergence est toujours possible. Le choix de la solution initiale est primordial. Il peut accélérer la convergence comme il peut entrainer une divergence. Il est donc recommandé de faire un bon choix de départ, d'utiliser de petits incréments et de toujours prévoir un nombre maximal d'itérations pour éviter le déroulement indéfini des calculs en cas de divergence.

1.9 Modèles de changement d'échelles en mécanique non linéaire

Les approches de champ moyen reposent sur l'hypothèse d'un comportement de matériau élastique linéaire et ne peut pas être directement appliqué à la plupart des matériaux communs, du fait qu'ils montrent souvent un comportement non linéaire. Par conséquent, certaines considérations doivent être prises en compte pour étendre les méthodes d'homogénéisation à des comportements non linéaires telles que l'élastoplasticité. Les matériaux élastoplastiques montrent une forte dépendance vis-à-vis des chemins de chargement et notamment de nettes fluctuations des micro-champs pour chaque phase. Ces deux facteurs conduisent à des comportements différents de chaque point matériel dans une phase élastoplastique puisque chacun suit une trajectoire différente dans l'espace de contrainte. Par conséquent, le matériau non homogène devrait être théoriquement traité comme un matériau multiphasique, dans lequel chaque point de la microstructure peut être considéré comme une phase différente. Ce fait entraine l'impossibilité d'utiliser la loi des moyennes de phase pour décrire le comportement mécanique du matériau inhomogène, comme cela est fait pour le cas élastique linéaire [Ortolano et al., 2013]. Le développement de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes peut être attribué aux importants travaux de Kröner [Kröner, 1961], [Hashin and Shtrikman, 1963], [Hill, 965b], [Mori and Tanaka, 1973]ou encore [Willis, 1983] entre autres. Les premiers élargissements aux problèmes non linéaires, comme l'élastoplasticité, l'élasticité non linéaire et la viscoélasticité, ont été initiés par [Hill, 965a] et [Hutchinson, 1976]. D'autres améliorations récentes et intéressantes furent établies par [Nemat-Nasser and Hori, 2013], [Castaneda, 2002], [Lahellec and Suquet, 2013], [Willis, 1994] ou [Zaoui and Masson, 2000] parmi d'autres.

Motivée par le développement rapide des outils numériques au cours des dernières années, des progrès majeurs ont été réalisés par l'introduction des méthodes numériques dans les approches d'homogénéisation, en particulier pour surmonter les difficultés dues aux comportements non linéaires complexes des matériaux hétérogènes, ainsi que pour permettre de pousser les études vers des échelles de plus en plus fines afin de fournir des modèles aussi précis que possible.

Ainsi, plusieurs méthodes numériques d'homogénéisation ont été proposées, où des calculs numériques couplés à deux échelles sont effectués pour fournir la réponse d'une structure hétérogène non linéaire. Dans ce qui suit, une description de quelques unes de ces techniques est présentée.

1.9.1 Approches par champs moyens

Dans le domaine des comportements mécaniques non linéaires, les modèles de changement d'échelles développés s'appuient sur une linéarisation du comportement afin de pouvoir appliquer les schémas d'homogénéisation de l'élasticité linéaire [Paola, 2010]. Ces approches permettent de prendre en compte le comportement non linéaire de chaque phase en leur affectant des caractéristiques linéarisées associées à leurs déformation ou contrainte moyenne. On raisonne donc seulement sur le comportement moyen de chaque phase. Les résultats du problème d'Eshelby ont permis l'extension des modèles linéaires à l'élastoplasticité, la viscoélasticité et la viscoélastoplasticité. Ces comportements peuvent être approchés par une formulation sécante, tangente ou affine.

1.9.2 Approches par champs de transformation

L'analyse par champs de transformation (Transformation Field Analysis, FTA) a été développée par [Dvorak, 1992] qui a proposé une méthode qui permet de généraliser la localisation dans le domaine non linéaire. Il est supposé une redistribution purement élastique, dans le VER, du champ de déformation macroscopique. Les déformations plastiques sont considérées comme des déformations libres et le VER est subdivisé en sous volumes, où les champs plastiques sont supposés uniformes, constituant des parties homogènes du VER. Plus de détails de cette approche sont expliqués dans la référence citée ci-dessus.

1.9.3 Analyse par champs de transformation non uniforme

Connue sous le nom (Nonuniform Transformation Field Analysis, NTFA), c'est une extension de la précédente. Dans cette approche, il est proposé une décomposition non uniforme des déformations plastiques. Une comparaison entre les résultats données par les deux approches TFA et NTFA est donnée dans la référence [Roussette., 2005].

Les approches analytiques qui ont été proposées depuis les travaux pionniers de Hill ont pour objectif d'estimer ou de borner le comportement des matériaux hétérogènes non linéaires. Dans le cas des matériaux non linéaires en petites déformations, des extensions au cas non linéaire de certaines techniques classiques dans le cadre linéaire ont été proposées voir par exemple [Nemat-Nasser and Hori, 2013] ; [Torquato, 2001] ; [Milton and Serkov, 2000], les travaux de [Willis, 1994], [Dvorak, 1992], [Qiu and Weng, 1992], [Castaneda, 2002] et [Hu., 1996]. Dans le cas des grandes déformations, plusieurs auteurs ont également étendu certaines approches d'homogénéisation analytiques issues du cadre linéaire pour des cas spécifiques. Dans une série de travaux, des estimations et des solutions exactes pour certaines classes de composites hyper élastiques ont été dérivées. [Castaneda, 2002] a proposé une méthode d'homogénéisation du second ordre pour déterminer la loi de comportement effective de matériaux composites non linéaires poreux et renforcés, suivi par plusieurs autres auteurs. Quelques-unes de ces techniques sont décrites ci-dessous.

1.9.4 Modèle de Kröner (1961)

La première tentative d'homogénéisation pour les composites élastoplastiques a été réalisée par [Kröner, 1961] qui a étendu le schéma auto-cohérent à l'élastoplasticité pour décrire le comportement des polycristaux [Bornert et al., 2001]. L'idée est de supposer que chaque famille de grains de même orientation cristalline se comporte comme une inclusion ellipsoïdale, uniformément plastifiée $(\varepsilon_{ij}^p)_{ph}$, plongée dans une matrice infinie, également uniformément plastifiée (E_{ij}^p), possédant les propriétés du MHE. La résolution du schéma auto-cohérent conduit à la loi de localisation suivante :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -C_{ijkl} : \left(I_{ijkl} - S_{ijkl}^E\right)\left((\varepsilon_{ij}^p)_{ph} - (E_{ij}^p)\right) \tag{1.112}$$

Si les inclusions sont considérées sphériques, l'expression précédente se ramène :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -2\mu\,(1-\beta)\left((\varepsilon_{ij}^p)_{ph} - (E_{ij}^p)\right) \tag{1.113}$$

oùμest le module de cisaillement isotrope et où $\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}$.
Ce modèle s'avère trop raide car il suppose que l'accommodation des déformations entre la matrice et l'inclusion se fait de manière purement élastique.

1.9.5 Formulation incrémentale de Hill (1965)

[Hill, 965b] propose de résoudre le problème posé par le modèle de Kröner en utilisant une linéarisation incrémentale de la loi d'écoulement dans le cas de l'élastoplasticité :

$$(\dot{\sigma}_{ij})_{ph} = (L_{ijkl})_{ph} : (\dot{\varepsilon}_{ij})_{ph} \tag{1.114}$$

où $(L_{ijkl})_{ph}$est le module tangent (supposé uniforme) de la phase ph correspondant à l'état de déformation moyen $(\varepsilon_{ij})_{ph}$. Il s'agit d'une loi "multibranche", dont l'expression dépend de l'état actuel du matériau, ainsi que du type de chargement (deux expressions différentes en charge ou en décharge plastique). Cependant, chaque est linéarisable selon cette formulation incrémentale. On se ramène ainsi à un problème d'homogénéisation linéaire incrémental : sa résolution se fait pas à pas, l'état mécanique local étant connu au début de chaque pas et sa résolution sur un pas se faisant comme pour un problème d'homogénéisation linéaire [Bornert et al., 2001]. Pour une vitesse de déformation macroscopique $\dot{E}_{ij}^{0}$ imposée, la vitesse de déformation locale est obtenue par la relation de la localisation :

$$(\dot{\varepsilon}_{ij})_{ph} = (A_{ijkl})_{ph} : \dot{E}_{ij}^{0} \tag{1.115}$$

La vitesse de contrainte macroscopique est alors définie par :

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \langle(\dot{\sigma}_{ij})_{ph}\rangle = \langle(L_{ijkl})_{ph} : (A_{ijkl})_{ph}\rangle : \dot{E}_{ij}^{0} = (L_{ijkl})^{eff} : \dot{E}_{ij}^{0} \tag{1.116}$$

où est le module tangent effectif. La résolution du problème auto-cohérent de Kröner par l'approche incrémentale de Hill aboutit à la loi de localisation suivante, qui fournit une meilleure estimation de l'accommodation plastique :

$$(\dot{\sigma}_{ij})_{ph} - \dot{\Sigma}_{ij} = -L^*_{ijkl} : \Big((\dot{\varepsilon}_{ij})_{ph} - (\dot{E}^p_{ij})\Big) \tag{1.117}$$

avec : $L^* = L^{eff} : \big((S^E)^{-1} - I\big)$, est le tenseur de Hill.

1.9.6 Hutchinson (1976). Formulation sécante

[Hutchinson, 1976] a étendu la formulation incrémentale de Hill au cas de la viscosité-plasticité des polycristaux. En choisissant un comportement en loi puissance pour le monocristal et un schéma d'homogénéisation linéaire auto-cohérent, Hutchinson montre que la mise en œuvre de la formulation incrémentale mène au même résultat que celle d'une formulation sécante [Bornert et al., 2001].

[Berveiller and Zaoui, 1979] proposent une version simplifiée de l'approche de Hill dans le cas d'un chargement radial et monotone et pour un comportement macroscopique isotrope. Comme dans le modèle de Kröner, on considère que chaque grain ph peut être modélisé par une inclusion sphérique, uniformément plastifiée $(\varepsilon^p_{ij})_{ph}$ entourée d'un milieu infini, également uniformément plastifiée (E^p_{ij}), possédant les propriétés du MHE et un comportement élasto-plastique de type Hencky-Mises. La loi de localisation obtenue est semblable à celle de Kröner avec la présence d'un terme d'accommodation α :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -2\mu\,(1-\beta)\,\alpha\,\big((\varepsilon^p_{ij})_{ph} - (E^p_{ij})\big) \tag{1.118}$$

avec :

$$\tfrac{1}{\alpha} = 1 + \tfrac{3}{2}\mu\tfrac{p(E^p_{ij})}{J_2(\Sigma_{ij})}$$

où :

$$p(E^p_{ij}) = \sqrt{\tfrac{2}{3}(E^p_{ij}) : (E^p_{ij})}$$

est la déformation plastique équivalente cumulée,

et :

$$J_2(\Sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{2}{3}(\Sigma_{ij}^d) : (\Sigma_{ij}^d)} \ , \ (\Sigma_{ij}^d)$$

étant la partie déviatorique deΣ_{ij} .

Le coefficient α décroît progressivement de 1 vers 0 lorsque la déformation plastique équivalente cumulée croît. Ainsi, la contrainte a tendance à s'homogénéiser à mesure que la déformation macroscopique augmente. La formulation sécante présente l'intérêt de simplifier la résolution du problème d'homogénéisation : elle permet d'estimer directement la réponse globale à une sollicitation macroscopique donnée sans passer par un traitement pas à pas. Cependant, contrairement à la formulation incrémentale (où les états locaux et globaux avant chaque pas sont connus), elle nécessite de déterminer les champs mécaniques locaux qui sont solutions d'un système d'équation implicites. La résolution requiert donc, tout de même, une procédure numérique pour le calcul des champs locaux [Bornert et al., 2001].

1.9.7 Berveiller et Zaoui (1979). Loi en β

On citera également une méthode dérivée de celle de [Berveiller and Zaoui, 1979] intitulée "loi en β" [Cailletaud and Pilvin, 1994] et [Pilvin, 1997] où la contrainte $(\sigma_{ij})_{ph}$ est proportionnelle, non plus à la une différence entre déformations plastiques microscopiques et macroscopiques, mais à celle entre deux variables d'accommodations, notées $(\beta_{ij})_{ph}$ et β_{ij} , qui évoluent de façon non linéaire en fonction de la déformation plastique :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -C_{ijkl} : \left(I_{ijkl} - S_{ijkl}^E\right) : ((\beta_{ij})_{ph} - \beta_{ij}) \tag{1.119}$$

avec :

$$\beta_{ij} = \sum_{ph} c_{ph}(\beta_{ij})_{ph} \tag{1.120}$$

et où la loi d'évolution des variables $(\beta_{ij})_{ph}$est écrite de manière retrouver le modèle de Kröner au début de l'écoulement plastique, puis à restituer une accommodation non-linéaire des déformations lorsque la plasticité se généralise au sein du matériau :

$$(\dot{\beta}_{ij})_{ph} = (\dot{\varepsilon}^{p}_{ij})_{ph} - Dp\left((\dot{\varepsilon}^{p}_{ij})_{ph}\right)\left((\beta_{ij})_{ph} - \delta(\varepsilon^{p}_{ij})_{ph}\right) \tag{1.121}$$

Dans le cas où l'on considère une distribution spatiale isotrope des familles de grain, le terme $C_{ijkl} : \left(I_{ijkl} - S^{E}_{ijkl}\right)$de l'équation 1.119 devient $2\mu\,(1-\beta)$. Les paramètres D et δpeuvent être identifiés de manière à assurer un caractère auto-cohérent au schéma ou à partir de calculs d'agrégats polycristallins.où : T_F est la tolérance en forces,

1.9.8 Formulation affine

Proposée par [Molinari et al., 1987] pour les matériaux viscoplastiques. Durant la procédure d'homogénéisation, c'est le champ de contrainte qui est considéré et non pas son incrément. Une extension aux matériaux élastoplastiques a été développée par [Zaoui and Masson, 2000] et [Masson et al., 2000] où il est possible de linéariser le comportement selon une méthode affine. Le comportement non linéaire de chaque phase ph $\left((\sigma_{ij})_{ph} = f_{ph}(\varepsilon^{p}_{ij})_{ph}\right)$est remplacée, pour une déformation de référence par un $(\varepsilon^{(0)}_{ij})_{ph}$ par un comportement linéaire caractérisé par un tenseur des modules tangents $(L^{(0)}_{ijkl})_{ph}$ et une précontrainte $(\tau^{(0)}_{ij})_{ph}$:

$$(\sigma_{ij})_{ph} = (L^{(0)}_{ijkl})_{ph} : (\varepsilon_{ij}) + (\tau^{(0)}_{ij})_{ph} \tag{1.122}$$

avec :

$$(L^{(0)}_{ijkl})_{ph} = \tfrac{df_i}{d\varepsilon_{ij}}(\varepsilon^{(0)}_{ij})_{ph}$$

la matrice tangente pour la déformation de référence $(\varepsilon^{(0)}_{ij})_{ph}$

et :

$$(\tau^{(0)}_{ij})_{ph} = f_i\left((\varepsilon^{(0)}_{ij})_{ph}\right) - (L^{(0)}_{ijkl})_{ph} : (\varepsilon^{(0)}_{ij})_{ph}$$

est l'ordonnée à l'origine correspondante.

Le problème peut donc être traité par analogie à un problème thermo-élastique linéaire où la précontrainte $(\tau_{ij}^{(0)})_{ph}$ peut être identifiée au terme $-(\kappa_{ij})_{ph}\Delta T_i$ de la contrainte d'origine thermique. Le comportement macroscopique s'exprime alors selon l'équation suivante :

$$\Sigma_{ij} = L_{ijkl}^{(0)hom} : E_{ij} + T_{ij}^{(0)}, \tag{1.123}$$

avec :

$$L_{ijkl}^{(0)hom} = \left\langle (L_{ijkl}^{(0)})_{ph} : (A_{ijkl}^{(0)})_{ph} \right\rangle_V \text{ et } T_{ij}^{(0)} = \left\langle (\tau_{ij}^{(0)})_{ph} : (A_{ijkl}^{(0)})_{ph} \right\rangle_V .$$

Chaque milieu non linéaire peut être donc remplacé par un milieu thermo-élastique de comparaison. Il est alors possible d'utiliser une méthode d'homogénéisation de l'élasticité pour obtenir le comportement effectif et les tenseurs de localisation $(A_{ijkl}^{(0)})_{ph}$ (pour la déformation de référence $(\varepsilon_{ij}^{(0)})_{ph}$). Cependant, comme en thermo-élasticité, il est nécessaire d'affecter des caractéristiques uniformes à chaque phase et de raisonner sur les valeurs moyennes des champs locaux par phase. L'inconvénient des approches à champs moyens apparaît dans le cas où les champs locaux présentent une forte hétérogénéité au sein d'une même phase.

1.9.9 Pedro Ponte Castañeda (1992)

[Pedro and Castaneda, 1992] a proposé un nouveau principe variationnel pour estimer les propriétés effectives des systèmes hétérogènes non linéaires. Ce principe variationnel a été donné dans un contexte d'éloctrostatique non linéaire mais qui est applicable à bon nombre de disciplines non linéaires analogues, et qui peut être utilisé pour déterminer les bornes et les estimations exactes des propriétés effectives des systèmes hétérogènes non linéaires. Il exprime les fonctions effectives de la densité d'énergie des systèmes hétérogènes non linéaires en termes d'un problème d'optimisation impliquant les fonctions effectives d'énergie de systèmes hétérogènes linéaires de comparaison. Ainsi, ces nouveaux principes variationnels se prêtent à des approximations utiles dans l'une des deux façons. Si la structure est spécifiée en fraction volumique, le principe variationnel peut être utilisé pour estimer, soit exactement ou sous forme de bornes, l'énergie effective des systèmes non linéaires en termes d'estimations exactes de l'énergie effective des systèmes linéaires de comparaison. Si d'un autre côté, la microstructure n'est pas complètement spécifiée, les bornes optimales caractérisant le comportement effectif des systèmes linéaires de comparaison peuvent être utilisées pour générer des bornes pour le comportement effectif des systèmes non linéaires avec des microstructures identiques.

1.9.10 Méthode FE^2

Connue sous le nom de "Méthode d'Eléments Finis au carré" (FE^2), c'est une méthode d'homogénéisation numérique à deux niveaux, elle est très répandue aujourd'hui, introduite par Feyel (Feyel (1999) ; Feyel et Chaboche (2000) ; Feyel (2003)). Dans cette technique, les problèmes mécaniques sont couplés à deux échelles simultanément : l'un à l'échelle microscopique, l'autre à l'échelle macroscopique. L'idée très simple de cette technique numérique est d'associer à chaque point d'intégration de la structure macroscopique un volume élémentaire représentatif. Au cours de la procédure itérative de recherche d'équilibre de la structure, les contraintes doivent être déterminées aux points d'intégration de Gauss du calcul éléments finis, à une itération de Newton Raphson, connaissant les déformations. Pour cela, un calcul local doit être effectué sur le volume élémentaire représentatif (VER) : les déformations macroscopiques au point d'intégration sont imposées sur le bord du VER ; le problème local est alors résolu numériquement. Les contraintes obtenues sont alors moyennées pour fournir les contraintes macroscopiques au point d'intégration. Cette procédure est alors répétée pour tous les points d'intégration, et pour toutes les itérations avant équilibre de la structure macroscopique. Le principal avantage de cette méthode est de s'affranchir totalement des limitations sur les lois de comportement locales, la morphologie des inclusions, voir une possible évolution de la microstructure. L'inconvénient majeur est le coût de calcul lié au couplage entre les échelles, bien que des techniques aient été proposées pour réduire les calculs [Nezamabadi, 2009]. La méthode peut être résumée comme suit :

1. Une modélisation du VER à l'échelle microscopique.

2. Des conditions aux limites imposées sur le VER en fonction des déformations macro en chaque point d'intégration.

3. Une résolution complète du problème non linéaire sur le VER en chaque point d'intégration pour calculer par moyenne la contrainte macroscopique.

4. Une résolution de type Newton-Raphson au niveau macro. La résolution du problème macroscopique non linéaire nécessite d'évaluer l'opérateur tangent en chaque point d'intégration. Une façon d'évaluer ce tenseur est d'utiliser une méthode de perturbation (différences finies) à partir des calculs de contraintes moyennes sur le VER. [Hoang., 2015]

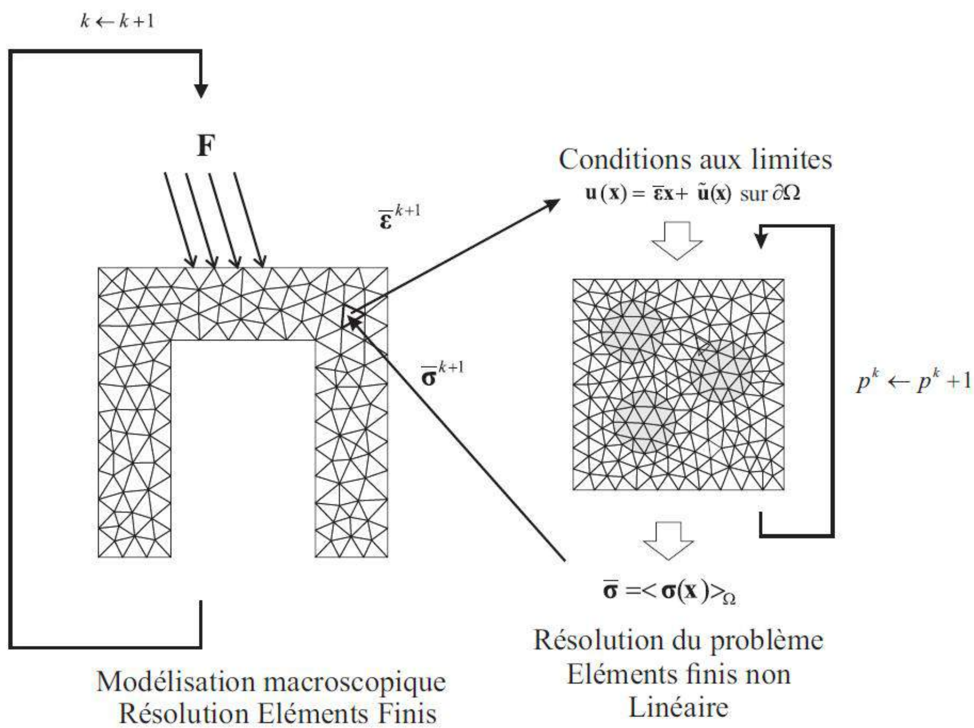


FIGURE 1.23 – Représentation schématique de la méthode (FE^2) [Hoang., 2015].

1.10 Synthèse

La technique d'homogénéisation a été présentée à travers ses principes, ses étapes ainsi que ses différents modèles et bornes aussi bien en élasticité linéaire qu'en élastoplasticité. La notion du volume élémentaire représentatif a été décrite. Des rappels théoriques relatifs au comportement élastoplastique des structures ont été introduits par la description de l'écrouissage isotrope et cinématique et enfin par la présentation les modèles de changement d'échelles les plus utilisés en mécanique non linéaire.

Chapitre 2

Seuil de plasticité effectif des milieux poreux

2.1 Introduction

Au cours des quatre dernières décennies,le développement mathématique traitant les critères du seuil de plasticité pour les solides poreux a été largement étudié,[Rice and Tracey, 1969], [Gurson, 1977], [Tvergaard, 1982], [Needleman and V, 1984], [Becker et al., 1988], [Koplik and Needleman, 1988], [Y.Sun and D.Wang, 1989], [Castaneda, 1991], [Michel and Suquet, 1992], [Gologanu et al., 1993], [Garajeu, 1996], [Zuo et al., 1996], [Garajeu and Suquet, 1997], [Gologanu et al., 1997], [Faleskog et al., 1998], [Ma and Kishimoto, 1998], [Corigliano et al., 2000], [Pardoen and Hutchinson, 2000], [Zhang et al., 2000], [Gologanu et al., 2001], [Negre et al., 2003], [Kim et al., 2004], [Wen et al., 2005], [F.Zairi et al., 2005], [McElwain et al., 2006], [Monchiet et al., 2007], [Zairi et al., 2008b], [Besson et al., 2009], [Laiarinandrasana et al., 2009], [Yaning et al., 2009], [Nielsen and Tvergaard, 2009], [Vadillo and Saez, 2009], [Zadpoor et al., 2009], [Lin et al., 2010], [Li et al., 2011], [Mroginski et al., 2011], [Madou and Leblond, 2012a], [Madou and Leblond, 2012b], [Fei et al., 2012], [Fritzen et al., 2012], [Yan Y. and H, 2013], [Benhizia et al., 2014], [Khdir et al., 2014] et [Khdir et al., 2015].

Essentiellement, en raison du rôle des porosités dans le processus de rupture ductile, ces vides sont la conséquence des processus de fabrication. Les dérivations mathématiques de ces critères sont généralement basées sur l'approche micromécanique, dont le point de départ est la représentation de la microstructure du milieu poreux. La non trivialité du problème théorique conduit à définir une cellule unitaire de base contenant un vide centré dans le volume de matériau utilisé pour représenter la microstructure.

[Gurson, 1977] a proposé le critère du seuil de plasticité basé sur l'approche micromécanique le plus largement utilisé pour analyser le comportement plastique des milieux poreux contenant des vides sphériques. Le modèle de Gurson est basé sur les hypothèses suivantes : isotropie, incompressibilité de la matrice environnante et la rigidité du seuil de plasticité local du matériau de la matrice environnante qui obéit au critère de von Mises. Le critère de Gurson relatif au seuil de plasticité macroscopique résultant du milieu poreux, dépend de la pression hydrostatique à charge. Il intègre la fraction volumique des porosités en tant que paramètre du modèle et tient compte d'une éventuelle croissance des vides entraînée par la déformation plastique locale du matériau de la matrice environnante. Comme l'a souligné [Tvergaard, 1982], le modèle Gurson donne une limite supérieure de la limite élastique macroscopique en fonction de la contrainte moyenne pour un arrangement périodique de vides. Afin de se rapprocher des résultats de simulation en éléments finis bidimensionnels sur une cellule unitaire périodique, [Tvergaard, 1982] a proposé d'introduire des paramètres heuristiques dans le critère de Gurson. Ces paramètres ajustables n'ont pas de signification physique directe, mais peuvent être corrélés aux effets d'interaction entre les vides. L'extension du modèle de Gurson par Tvergaard , connu sous le nom de Gurson Tvergaard Needleman modèle (GTN), a été largement utilisée par les chercheurs pour vérifier sa capacité à mettre en évidence le comportement poro-plastique de nombreux matériaux poreux. [Benzerga and Leblond, 2010] et [Besson, 2010] ont examiné les différentes extensions du modèle de Gurson basées sur des approches micromécaniques améliorées ou sur des généralisations phénoménologiques pour prendre en considération la forme de vide ou les caractéristiques du matériau de matrice telles que l'isotropie, la cinématique, la visco-plasticité, la compressibilité et l'anisotropie. En utilisant des approches micromécaniques, [Castaneda, 1991]et[Y.Sun and D.Wang, 1989]ont proposé respectivement des limites supérieures et inférieures pour le seuil de plasticité global des milieux poreux. En utilisant la technique variationnelle, introduite par [Castaneda, 1991],[Garajeu and Suquet, 1997] ont proposé une autre borne supérieure qui surmonte les inconvénients fondamentaux bien connus du critère de Gurson aux faibles valeurs de triaxialité de contrainte. L'effet de la forme du vide sur le seuil de plasticité macroscopique des milieux poreux a été étudié par plusieurs auteurs. Pour plus de détails,voir [Gologanu et al., 1993], [Garajeu, 1996], [Yee and Mear, 1996], [Gologanu et al., 1997], [Gologanu et al., 2001], [Li and Huang, 2005], [Li and Steinmann, 2006], [Monchiet et al., 2007], [Son and Kim, 2003], [Siruguet and Leblond, 2004], [L.Flandi and Leblond, 2005], [X. Gao et al., 2009], [Keralavarma and Benzerga, 2010], [Lin et al., 2010], [Lecarme et al., 2011], [F.Scheyvaerts et al., 2011], [Zairi et al., 2011], [Danas and Aravas, 2012], [Madou and Leblond, 2012a], [Khdir et al., 2014] et [Khdir et al., 2015].

Certaines études portant sur l'influence de l'invariant du tenseur de contrainte macroscopique ont été présentées par[Hsu et al., 2009] et [X. Gao et al., 2009],[Gao X. and C, 2011]. Bien que les développements mathématiques ont atteint un haut degré de sophistication, les critères du seuil de plasticité résultants impliquent généralement un certain nombre de paramètres sans importance physique. Cela peut s'expliquer par le fait que ces modèles basés sur l'approche micromécanique considèrent, en tant qu'élément de volume de matériau, un élément de volume élémentaire contenant un seul vide. Lorsque les vides sont dilués dans le matériau de la matrice, les interactions entre eux sont négligées. Pour être statistiquement représentatif, l'élément de volume de matière doit contenir suffisamment d'informations sur la microstructure poreuse, en particulier la distribution des vides. Le seuil de plasticité des milieux poreux a été également étudié en utilisant l'approche micromécanique. Cette approche apparaît comme un outil puissant pour une meilleure compréhension des effets de la distribution des vides et des phénomènes d'interaction sur le comportement mécanique des milieux poreux aléatoires. Le principal avantage de l'homogénéisation numérique est sa capacité à calculer directement les champs mécaniques sur les supports poreux aléatoires en représentant explicitement les caractéristiques de la microstructure telles que la forme, l'orientation et la distribution des vides. Bien que de nombreuses études aient été consacrées à l'élaboration de critères des seuils de plasticité pour les milieux poreux, seules quelques œuvres ont été consacrées à l'homogénéisation numérique tridimensionnelle impliquant de multiples vides. Au meilleur de notre connaissance, seuls [Bilger et al., 2005, Bilger et al., 2007], [Fritzen et al., 2012], [Khdir et al., 2014], [Vincent et al., 2014b] et [Khdir et al., 2015] ont utilisé cette approche pour estimer le seuil de plasticité global des matériaux poreux. Leurs calculs se sont limités aux vides ayant des formes sphériques et ellipsoïdales, [Vincent et al., 2014b] et [Khdir et al., 2015]. Les calculs de [Bilger et al., 2005, Bilger et al., 2007], [Moulinec and Suquet, 1994] et [Moulinec and Suquet, 1998] ont été réalisés sur la base de la transformation rapide de Fourier. L'effet de regroupement des pores sur le seuil de plassticité global a été le point clé de leurs recherches. [Fritzen et al., 2012] ont supposé le milieu poreux aléatoire comme un volume de matériau poreux, qui est disposé périodiquement. Les résultats mis en évidence par [Fritzen et al., 2012]ont conduit à l'extension du critère de rendement GTN afin de surmonter les écarts analytiques / numériques. Dans les travaux de Vincent et al [Vincent et al., 2014b], des simulations numériques ont été effectuées sur des cellules contenant de nombreux vides sphériques ou ellipsoïdaux dans une matrice von Mises ou GTN. Les cavités, dans cette étude, ne peuvent pas se chevaucher (chaque vide est entouré par une coquille sphérique de matrice pour éviter le chevauchement) et la méthode numérique est basée sur la transformée rapide de Fourrier . [Khdir et al., 2014] ont concentré leurs recherches sur les matériaux poreux contenant deux populations de vides. Leurs résultats ont montré qu'il n'y a pas de différence significative entre une double et une seule population de vides pour une fraction identique de porosités. Une homogénéisation numérique des milieux poreux aléatoires, comprenant des vides sphériques identiques en chevauchement, est utilisée pour déterminer leur seuil de plasticité global. [Vincent et al., 2014a, Vincent et al., 2014b] ont donné une expression analytique simple du seuil de palsticité effectif obtenu en généralisant l'approche de [M.Gologanu et al., 1994]sur les matériaux compressibles. La matière considérée présente deux populations de vides, où les plus petits vides sont des vides sphériques et les plus grands sont sphéroïdaux et orientés de manière aléatoire à l'intérieur du matériau. Les calculs effectués dans le cadre de cette étude sont liés au couplage complexe entre la distribution des vides, la forme de vide (avec ou sans chevauchement) et le mode de chargement externe, afin de comparer les résultats de simulation avec certains critères de rendement du type Gurson et vérifier l'extension du critère de GTN fourni par [Fritzen et al., 2012]dans le cas des milieux poreux aléatoires contenant des vides sphériques en chevauchement.

2.2 Homogénéisation numérique

2.2.1 Microstructures poreuses

Les milieux poreux pris en compte dans les calculs sont faits de matrice parfaitement plastique, obéissant au critère du seuil de plasticité isotrope de von Mises communément utilisé. La limite d'élasticité de la matrice est considérée constante pour toutes les microstructures étudiées. Tous les résultats (les contraintes effectives) peuvent être normalisés par rapport à cette condition. Afin de ne pas tenir compte des effets de durcissement cités dans la littérature et de comparer les résultats de simulation avec les modèles analytiques les plus courants, l'écoulement plastique est considéré comme parfait. La prise en considération de la plasticité qui dépend du chemin et de la contrainte élastique matérielle est une différence notable par rapport aux ouvrages existants où peu d'études ont expliqué ces effets. Le matériau constituant la matrice est suffisamment rigide pour vaincre les effets de déformations élastiques. Les vides sont supposés être sans pression. Les supports poreux sont représentés par des cellules cubiques en 3D contenant un grand nombre de produits identiques, superposés et répartis d'une manière aléatoire, (des pores sphériques), Figure 2.1, afin d'assurer que l'élément de volume de matériau étudié soit suffisamment grand par rapport à des porosités. Quatre microstructures sont étudiées avec différents taux de porosités. p = 0.13, 0.23, 0.4 et 0.5. Contrairement à la littérature existante, [Bilger et al., 2005, Bilger et al., 2007],[Fritzen et al., 2012] et [Khdir et al., 2014], les effets des vides en percolation sont étudiés dans ce travail.

2.2.2 Morphologie et maillage des élements finis

Le procédé de calcul d'un matériau poreux élasto-plastique, contenant des vides sphériques en chevauchement et distribués aléatoirement , est utilisé. Pour générer nos microstructures, nous avons d'abord choisi des points aléatoires, $M_1, M_2, \ldots..M_i, \ldots\ldots M_N$, selon le procédé de Poisson, voir [Jeulin and Ostoja-Starzewski, 2001], [Kanit et al., 2003], [Kanit et al., 2011], [El-Moumen et al., 2013], [Moumen et al., 2015b], [Moumen et al., 2015a] et [Kaddouri et al., 2016]. Ensuite, nous construisons chaque vide sphérique i avec (i=1, 2, ...N), (2, ...,) pour chaque centre indépendamment de la distance de répulsion dans la construction de matériaux avec des vides en chevauchement. La Figure 2.2 montre des exemples de matériau poreux utilisé avec des vides sphériques se chevauchant et distribués aléatoirement. Une approximation standard de petite contrainte a été utilisée pour les simulations. Une description géométriquement linéaire est utilisée pour permettre la comparaison avec des modèles analytiques existants qui ne sont valables que dans le cadre linéaire. Le tenseur de contrainte infinitésimal est défini comme la partie symétrique du gradient du champ de déplacement. Les pores sont supposés sans être sous pression. Plus précisément, la surface des pores est supposée comme limite libre et le vecteur de traction est nul sur cette surface. On notera que dans le réglage géométrique linéaire donné, on ne tient pas compte de l'évolution de la porosité due au chargement appliqué. La méthode des éléments finis avec la technique d'élément multi-phase a été choisie pour les calculs numériques. Le maillage des éléments finis, associé à l'image de la microstructure, est obtenu en utilisant la technique dite d'élément multi-phase. Cette méthode a été développée par [Lippmann et al., 1997]et largement utilisée pour l'homogénéisation d'images virtuelles et réelles par plusieurs auteurs, en élasticité linéaire et en conductivité thermique par [Kanit et al., 2003], [Kanit et al., 2006], [Kanit et al., 2011], [El-Moumen et al., 2013], [Moumen et al., 2014], [Moumen et al., 2015b], [Moumen et al., 2015a], [Kaddouri et al., 2016], [Djebara et al., 2016] et dans le cas de la plasticité, ces procédés sont étendus pour rapprocher le comportement élastique-plastique des composites renforcés par des particules, comme le montrent [Khdir et al., 2013], [Khdir et al., 2014], [Benhizia et al., 2014], [Khdir et al., 2015] ou pour le comportement des agrégats polycristallins dans [Barbe et al., 2001]. Dans la technique des éléments multiphasiques, une image de la microstructure est utilisée pour attribuer la propriété de la phase appropriée à chaque point d'intégration d'un maillage régulier, en fonction de la couleur du voxel sous-jacent. Il consiste à superposer une grille régulière d'éléments finis, Figure 2.3(a), sur l'image de la microstructure, Figure 2.3(b). La microstructure maillée obtenue est présentée à la Figure 2.3(c). Le principal inconvénient de cette technique simple est que dans le même élément fini deux phases différentes peuvent être présentes. Les bords des éléments ne suivent pas nécessairement les interfaces des phases (matrice et vides) dans la microstructure. Pour une meilleure représentativité de la microstructure, et pour plus de précision, nous avons utilisé un élément fini quadratique de 20 nœuds avec une intégration complète de 27 points d'intégration. Tout d'abord, on effectue un essai de taille de maille, sur un élément de volume représentatif (VER) avec N vides et une porosité p=0.13, Figure 2.2, pour déterminer la grille de maille optimale. Pour en faire cela, nous mettons en réseau la même microstructure, avec des grilles différentes en augmentant leur taille de 125 à 42875 éléments finis, la Figure 2.4. Le temps de calcul et la mémoire requise en termes de nombre d'éléments finis sont présentés à la Figure 2.5. Pour effectuer ce test, on utilise la sixième charge du Tableau 2.1 caractérisée par les deux paramètres de chargement ($\alpha = 1; \beta = 1/2$). La convergence de la propriété macroscopique en fonction du nombre d'éléments finis est présentée à la Figure 2.5. La densité de maillage retenu est celle qui permet la détermination de la propriété macroscopique avec une bonne précision dans un temps minimum. Il semble que la stabilité de la courbe commence à partir de 8000 éléments finis pour N=200. Cette maille estime la propriété macroscopique avec une précision d'environ 3% en 240 heures. Le maillage de 27 000 éléments finis estime la propriété macroscopique avec une précision d'environ 1% en 810 heures. A la suite de la convergence, une densité de maille de 27 000 éléments finis a été adoptée dans cette étude pour toutes les simulations. Comme résultat de la convergence, la densité de maille de 27000 éléments finis (729000 points d'intégration) a été suffisante pour représenter avec précision la géométrie de la porosité et à assurer la convergence globale de la réponse. Cette densité de maille a été adoptée dans cette étude pour toutes les simulations.

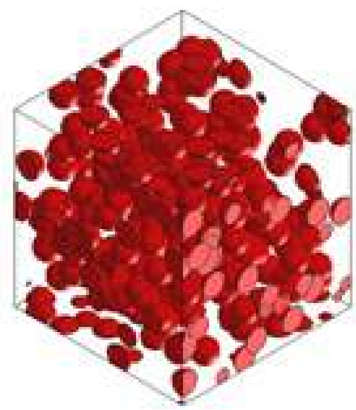


FIGURE 2.1 – Microstructures poreuse avec 200 vides sphériques en chevauchement.

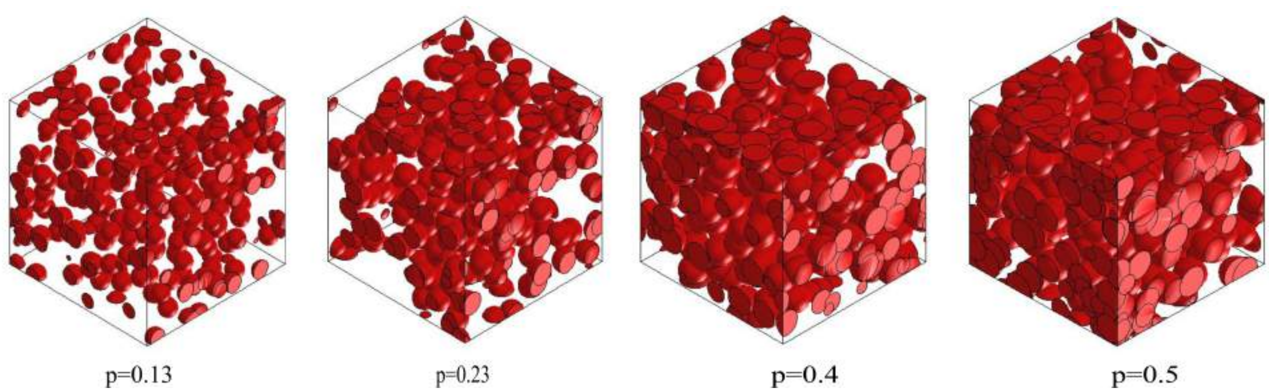


FIGURE 2.2 – Microstructures poreuses avec des vides en percolation disposés aléatoirement.

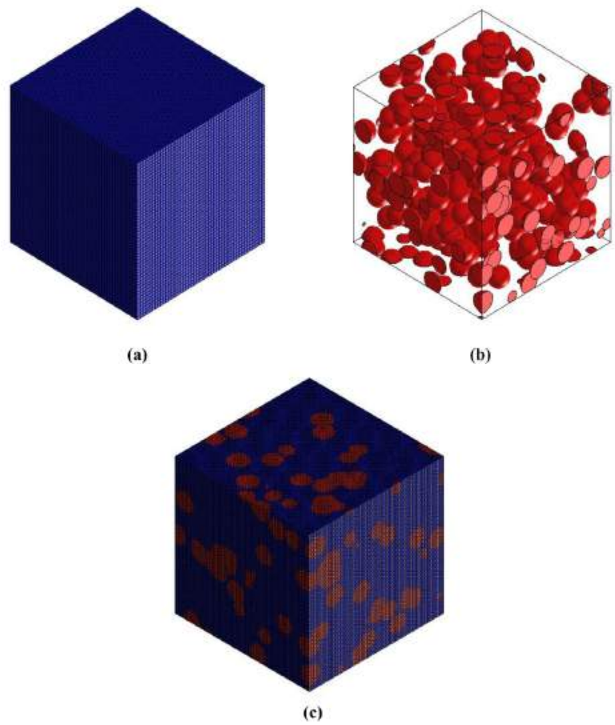


FIGURE 2.3 – Les matériaux de maillage contenant 200 vides sphériques : (a) la grille des éléments finis, (b) la microstructure initiale et (c) maillages structurés.

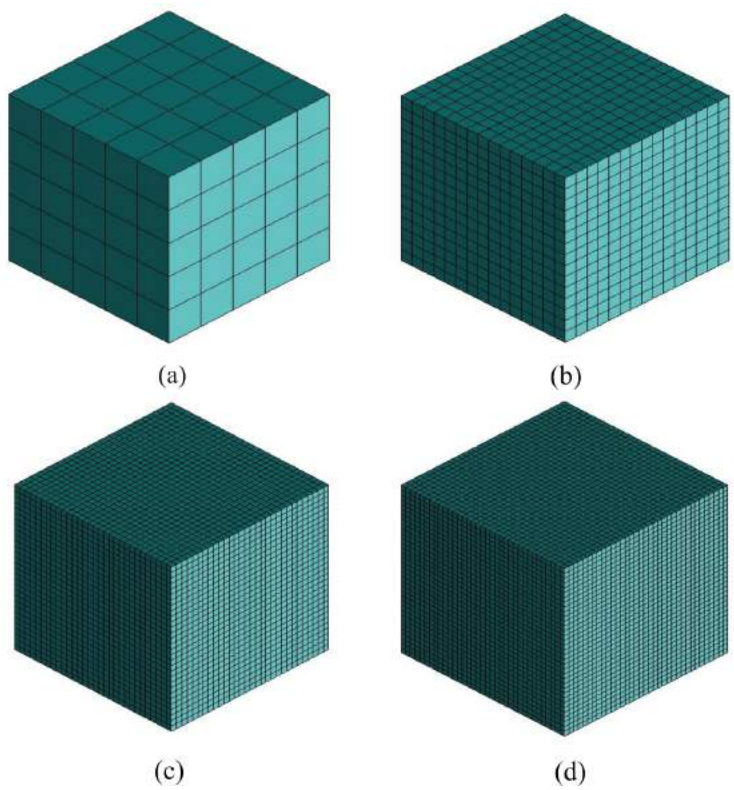


FIGURE 2.4 – grilles d'éléments finis, (a) 5x5x5 éléments finis ; (b) 10x10x10 éléments finis ;30x30x30 éléments finis ;35x35x35 éléments finis

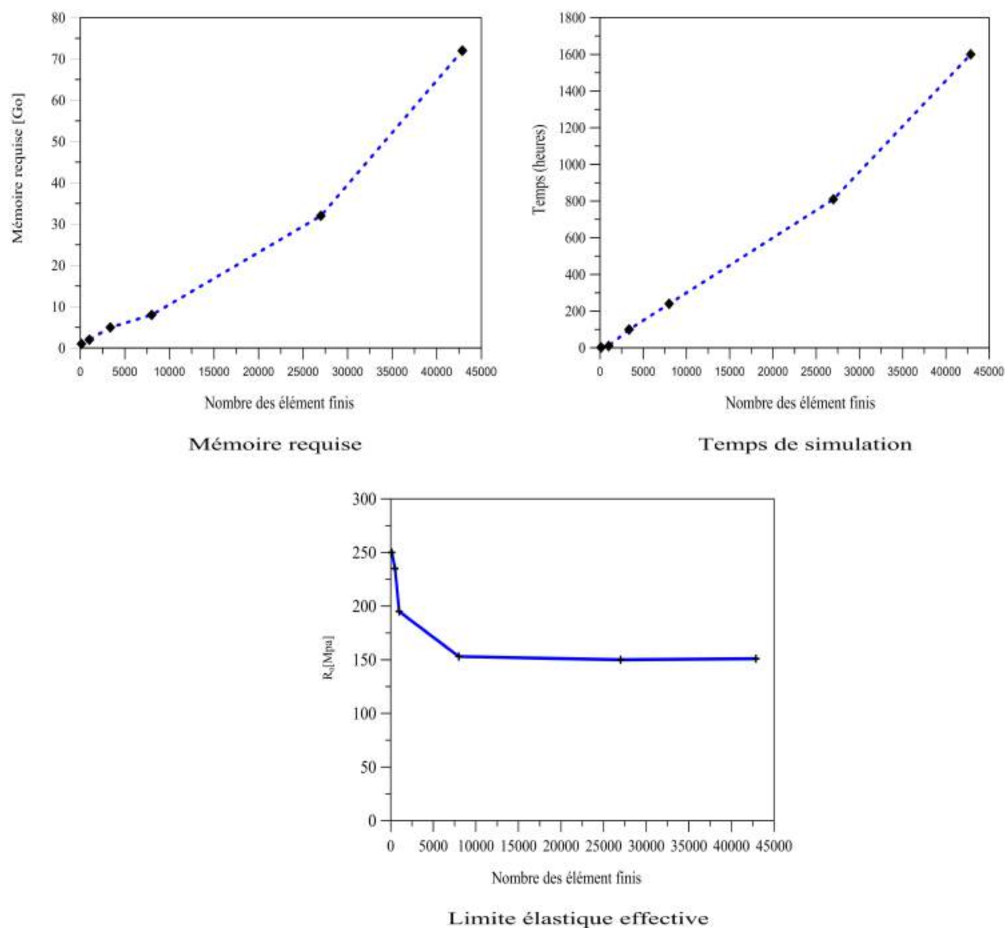


FIGURE 2.5 – Test de convergence

2.2.3 Nombre de réalisations et les tailles du VER

Dans l'approche statistique utilisée dans notre étude, le maillage de n différentes réalisations pour chaque volume N de matériau poreux est dur et long à réaliser avec un maillage libre, alors que ce procédé peut être automatisé avec un maillage régulier. La technique, développée par [Kanit et al., 2003], est utilisée pour déterminer la taille VER de différentes microstructures avec des vides qui se chevauchent. Pour le cas de vides qui ne se chevauchent pas, la taille VER est évaluée par [Khdir et al., 2013]. Le VER est le volume qui permet d'estimer la propriété effective avec une réalisation. Cette technique utilise les calculs d'éléments finis sur des réalisations différentes de même taille. Notons que les réalisations dans la même configuration ont le même nombre de vides N. Le nombre de réalisations n nécessaires pour chaque nombre de vides N dans chaque volume est défini selon l'approche statistique donnée par [Kanit et al., 2003], et sont résumés dans le Tableau 2.1. Le nombre n des différentes réalisations considérées pour chaque taille de volume N est donné dans le Tableau 2.1. Ce nombre est choisi de sorte que la valeur moyenne obtenue de la surface d'écoulement de notre matériau poreux étudié et la variance, ne varient pas jusqu'à une précision donnée (moins de 2% ici). Il en résulte que le seuil de plasticité global dans un matériau poreux peut être déterminé soit par un petit nombre de mesures sur de grands volumes, soit par de nombreuses réalisations pour de petits volumes de matériau, voir[Kanit et al., 2003] et [Khdir et al., 2013].

n	1	5	20	50	100	200
N	216	27	8	8	8	3

TABLE 2.1 – Nombre n de différentes réalisations utilisées pour chaque nombre fixe N de vides sphériques

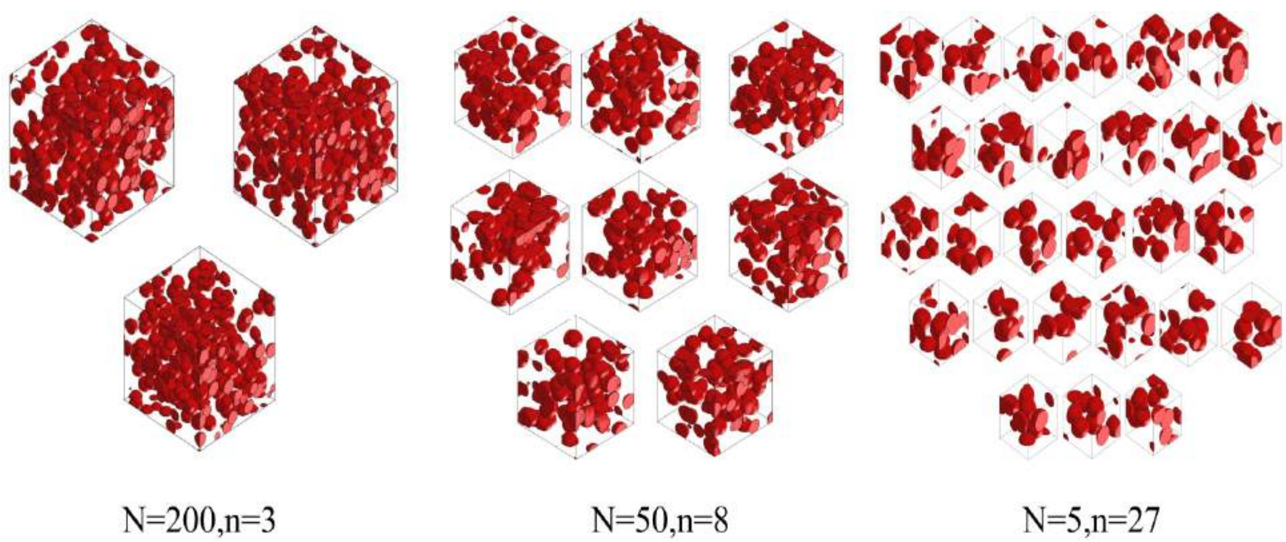


FIGURE 2.6 – Exemples de microstructures pour la fraction volumique p=0.23

La Figure 2.6 présente un exemple de trois réalisations d'un volume contenant 200 vides, 8 réalisations de volume contenant 50 vides et 27 réalisations de volume contenant 5 vides.

La convergence des propriétés apparentes aux propriétés effectives permettant la détermination de la taille VER est déduite de l'étude du seuil de plasticité effectif des deux fractions volumiques extrêmes p = 0.13 et p = 0.5. Différentes réalisations sont utilisées pour évaluer la valeur moyenne de la propriété apparente pour chaque volume. Dans cet essai, le sixième chargement caractérisé par les deux paramètres de chargement ($\alpha = 1, \beta = 1/2$) est également utilisé. Il faut mentionner ici que la propriété apparente est le résultat donné par des volumes inférieurs à la taille VER. Ensuite, les valeurs moyennes et les intervalles de tolérance sont tracés en termes de nombre de vides N. La Figure 2.7 montre que la dispersion des résultats diminue lorsque la taille du volume augmente. Les barres d'erreur diminuent lorsque la taille du volume augmente et tend vers zéro pour la taille VER. Les barres d'erreur N, pour chaque nombre de vides n, sont déterminées avec des réalisations telles que définies dans le Tableau 2.1. Dans le cas de p = 0.13, le VER est dans la plage de 50 vides mais pour p = 0.5 le VER a une taille de l'ordre de 100 vides. Pour une meilleure précision, nous adoptons pour toutes les simulations un VER de 200 vides.

2.2.4 Conditions aux limites et chargement

Etant donné que le milieu poreux dépend de la pression hydrostatique, les conditions limites imposées au VER devraient impliquer un large éventail de rapports de triaxialité de contraintes. Le paramètre de triaxialité de contrainte $T = \Sigma_m/\Sigma_{eq}$ est défini comme le rapport entre la contrainte hydrostatique globale Σ_m et la contrainte équivalente totale de Von MisesΣ_{eq}, donnée par$\Sigma_m = trace\Sigma/3$ et $\Sigma_{eq} = \sqrt{2(\Sigma' : \Sigma')/3}$. Ou Σ est le tenseur de contrainte macroscopique appliqué et dénote sa partie déviatoire. En raison de la robustesse de calcul, les conditions de limites mixtes suivantes sont imposées : $E_{11}(t) = t\dot{\varepsilon}_0(\beta + \alpha)$,$E_{22}(t) = t\dot{\varepsilon}_0(\beta - \alpha)$, $E_{33}(t) = t\dot{\varepsilon}_0\beta$ et $E_{11} = E_{13} = E_{23} = 0$.

Les composantes de cisaillement attribuées aux valeurs du tenseur de contrainte global sont nulles. Les termes α et β , introduits pour contrôler les composantes diagonales du tenseur de déformation global E, sont deux paramètres de chargement,$\dot{\varepsilon_0} > 0$ est un taux de déformation prescrit, et t est le temps de simulation. Ces conditions sont réalisées numériquement en imposant seulement le déplacement moyen normal sur la surface de la cellule unitaire. Sous les charges données, les tractions de cisaillement moyen sur les surfaces disparaissent et les composantes de cisaillement du tenseur de contrainte macroscopique sont toujours nulles. Ainsi, les contraintes de Von Mises et les contraintes hydrostatiques ne dépendent que des composantes diagonales de contraintes macroscopiques. La triaxialité de contraintes est indirectement attribuée par les deux mesures de contraintes, Σ_m et Σ_{eq}qui sont implicitement définies par les conditions de frontières mixtes à travers les deux paramètres de charge α et β . En raison du chargement mixte choisi, les deux mesures de contraintes ne contiennent que trois paramètres indépendants. Les différentes valeurs de α et β utilisées pour obtenir les différents rapports de triaxialité de contrainte sont énumérées dans le Tableau 2.2.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	1	1	1	1	1	1	1	0.5	0
β	0	0.05	0.1	0.15	0.25	0.5	1.0	1.0	1.0

TABLE 2.2 – Paramètres de chargement utilisés dans les simulations

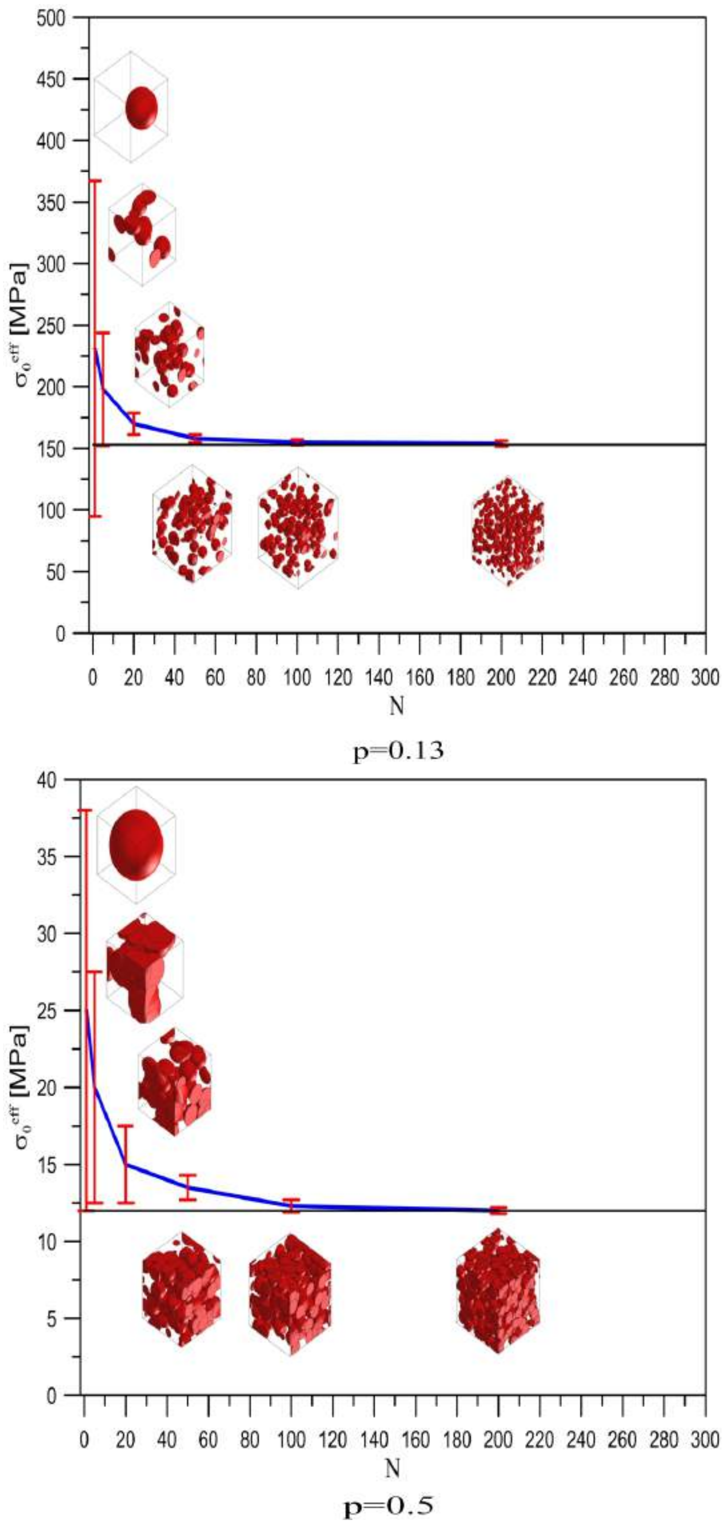


FIGURE 2.7 – Variation du seuil de plasticité effectif avec l'évolution de la taille du volume des microstructures renfermant des vides sphériques en chevauchement.

2.3 Bref aperçu des modèles analytiques utilisés

2.3.1 Critère de Gurson

En 1977, Gurson a développé un modèle permettant de déterminer le potentiel d'un matériau poreux. Ce modèle est basé sur l'étude d'une cavité isolée dans une matrice isotrope, rigide et parfaitement plastique ($\sigma_{vm} = \sigma_0$) obéissant au critère de von Mises. L'étude porte sur deux géométries différentes, une cavité cylindrique de section circulaire d'une part et d'une cavité sphérique de l'autre part. L'ensemble a été soumis à un chargement axisymétrique conduisant au critère macroscopique exprimé comme suit :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2p cosh\left(\frac{3\Sigma_m}{2\sigma_0}\right) - 1 - p^2 = 0 \tag{2.1}$$

[Gurson, 1977]obtient un seuil de plasticité macroscopique qui dépend de la contrainte équivalente de Von Mises Σ_{eq}, de la contrainte hydrostatique Σ_m, de la limite élastique de la matrice σ_0 et de la fraction volumique des vides p.

2.3.2 Critère Gurson Tvergaard

Les modifications du modèle initial de Gurson effectuées par [Tvergaard, 1982] pour les milieux poreux impliquant l'introduction des paramètres q_i pour décrire les propriétés plastiques du matériau en tenant compte de l'interaction entre les cavités, sont données par la fonction suivante :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2q_1 p cosh\left(\frac{3q_2\Sigma_m}{2\sigma_0}\right) - 1 - q_3 p^2 = 0 \tag{2.2}$$

Plusieurs valeurs des paramètres q_i, ont été déterminées et proposées par de nombreux auteurs pour approximer le comportement réel des structures, voir Tableau 2.3.

References	q_1	q_2
Gurson (1977)	1.00	1.00
Tvergaard (1982)	1.5	1.00
Koplik and Needleman (1988)	1.25	1.00
Zuo et al. (1996)	1.40	1.00
Faleskog et al. (1998)	1.46	0.93
Ma and Kishimoto (1998)	1.35	0.95
Corigliano et al. (2000)	1.08	0.99
Zhang et al. (2000)	1.25	1.00
Negre et al. (2003)	1.50	1.20
Kim et al. (2004)	1.58	0.91
McElwain et al. (2006)	1.31	1.16
Nielsen and Tvergaard (2009)	2.00	1.00
Vadillo and Fernandez Saez (2009)	1.46	0.93
Dunand and Mohr (2011)	1.00	0.70
Fei et al. (2012)	1.80	1.00
Yan et al. (2013)	1.55	0.90

TABLE 2.3 – Différentes valeurs des paramètres du modèle GTN,$q_3 = q_1^2$

2.4 Résultats et discussion

Dans cette section, nous présentons et discutons l'étude numérique que nous avons mené. Nous commençons d'abord par la réponse aux contraintes asymptotiques, puis nous passons à un paragraphe sur la manière représentative, et nous terminons par les champs de déformation plastique locale.

2.4.1 Réponse asymptotique aux contraintes

La réponse asymptotique des microstructures poreuses parfaitement plastiques a été systématiquement examinée en traçant l'ensemble des contraintes équivalentes et hydrostatiques de Von Mises normalisées en fonction de la contrainte équivalente totale de Von Mises. Pour chaque microstructure considérée présentée dans la Figure 2.2 ; ces deux mesures de contraintes sont tracées pour chaque fraction volumique : p= 0.13, 0.23, 0.4 et 0.5, Figure 2.8. Les flèches illustrent l'évolution des deux mesures de contraintes pour les neuf cas de chargement donnés dans le Tableau 2.2, montrant que les contraintes équivalentes macroscopiques de von Mises et les contraintes hydrostatiques varient inversement pour les neuf différents cas de chargement. La Figure 2.8 montre que les microstructures poreuses sont soumises à une réponse stationnaire au-delà d'une certaine contrainte. Des observations analogues sur des calculs de grands volumes ont été signalées par [Fritzen et al., 2012], [Khdir et al., 2014] et[Khdir et al., 2015]. Ce résultat est évident (il ya une limite asymptotique), parce que nous supposons que la géométrie est fixe. En réalité, celle-ci peut évoluer au cours des calculs, de sorte que les cavités peuvent se développer au cours du chargement, et, dans ce cas, il n'y a plus de réponse stationnaire. Afin de définir les points de rendement numériques, les contraintes globales à la fin de la simulation sont considérées.

2.4.2 Représentativité

La taille du VER est conditionnée par le nombre de vides qui devrait être assez grand pour s'assurer que l'élément de volume est représentatif. Cette représentativité a été étudiée en termes de réponses mécaniques par [Huet., 1990], [Drugan and Willis, 1996], [Kanit et al., 2003], [Kanit et al., 2006], [Jiang et al., 2010], [Kanit et al., 2011], [Moumen et al., 2014], [Moumen et al., 2015b], [Moumen et al., 2015a], [Djebara et al., 2016] et [Kaddouri et al., 2016]. Ces auteurs ont étudié les effets de la taille des éléments de volume sur la rigidité élastique. [Khdir et al., 2013] ont étudié ces effets sur la réponse élasto- plastique. [Vincent et al., 2014a] ont proposé une nouvelle mesure pour l'écart de l'isotropie par rapport au seuil effectif de l'écoulement plastique. Dans ce dernier cas, constitué de deux phases avec des propriétés très contrastées, [Khdir et al., 2013] ont montré que la taille minimale de l'élément de volume dans la région plastique doit être supérieure à la taille minimale requise dans le domaine élastique. Cette question, qui se pose dans le calcul de l'homogénéisation tridimensionnelle, doit être systématiquement prise en compte pour plusieurs porosités de plusieurs éléments de volume de différentes tailles (c'est-à-dire contenant un nombre différent de pores).

2.4.3 Champs de déformation plastique locaux

Des exemples de distribution de champs de déformation plastique local pour les porosités étudiées : 0.13 , 0.23, 0.4 et 0.5 sont illustrés sur la Figure 2.9. Les cas $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ correspondant à $\Sigma_m = 0$ et $\Sigma_{eq} = 0$ et , sont les rapports de triaxialité les plus bas et les plus élevés respectivement et le cas $(\alpha, \beta) = (1, 1/4)$ correspond au cas intermédiaire. Les observations sont présentées à la fin du chargement prescrit. La principale observation est la différence dans les champs locaux entre les différentes porosités. Nous remarquons que les zones plastiques sont plus importantes pour les faibles fractions de volume, diminuant progressivement à mesure que la fraction de volume augmente. Les valeurs maximales de déformation plastique accumulées sont observées quelle que soit la fraction volumique. Par conséquent, nous avons la même quantité de contrainte plastique accumulée qui se concentre dans la matrice indépendamment des fractions volumiques. La triaxialité de contraintes qui fait référence au rapport de la contrainte équivalente et de la contrainte moyenne n'est pas suffisante pour présenter le comportement réel du matériau. Pour les polycristaux viscoplastiques isotropes, l'invariant peut influencer la réponse constitutive effective, voir [Bohlke, 2004]. Pour les milieux poreux, les recherches de [Kim et al., 2004], [K.Danas et al., 2008] et [Cazacu et al., 2013]ont abordé cette question. Habituellement, l'invariant est considéré dans le contexte de l'angle Lode. Dans le présent travail, l'influence de l'invariant doit être éliminée des résultats présentés. Nous avons donc évalué l'angle de Lode pour les différentes réalisations soumises au même chargement. Les petites fluctuations trouvées confirment le choix des conditions aux limites mixtes.

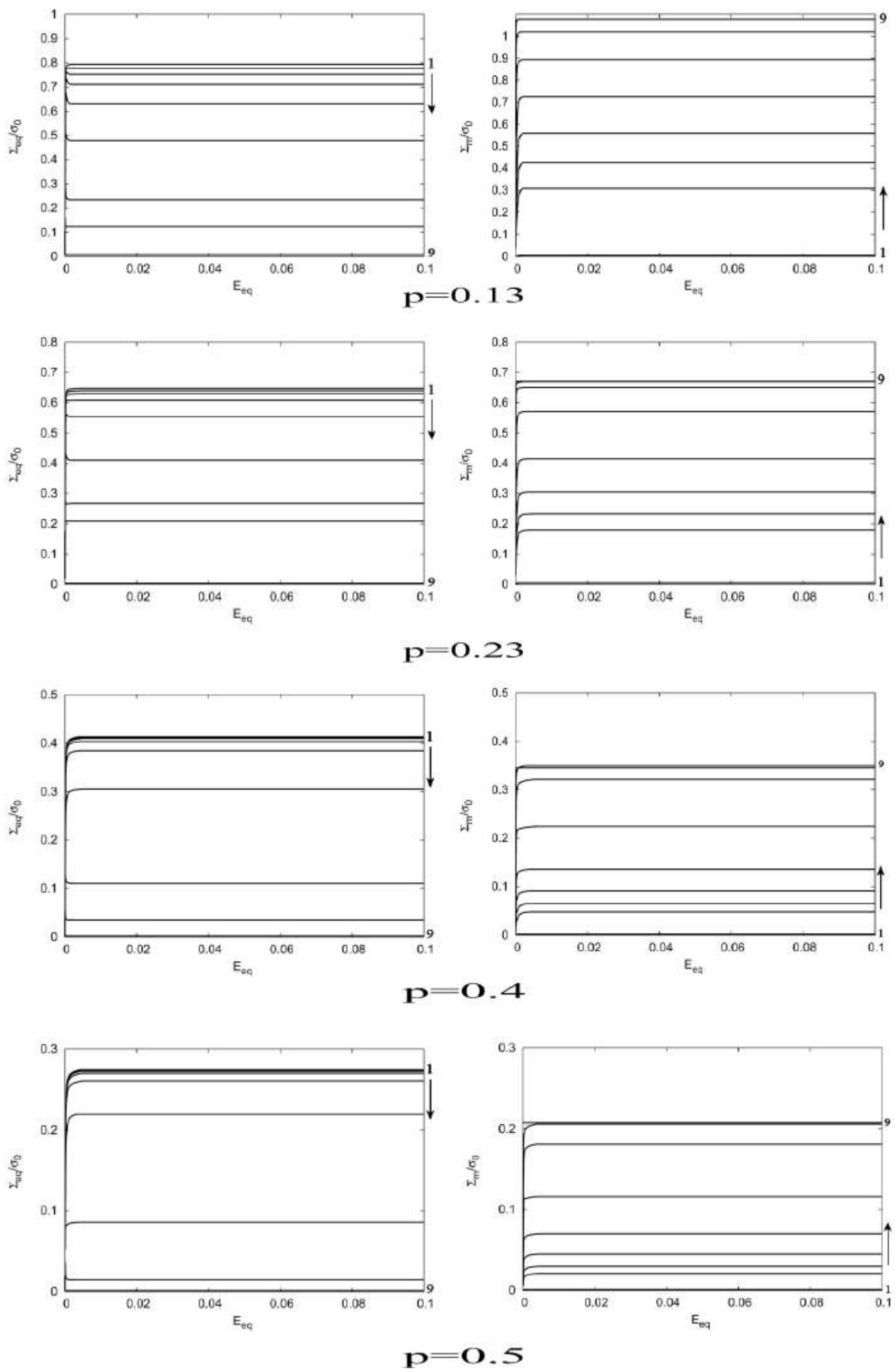


FIGURE 2.8 – Contrainte macroscopique équivalente normalisée de von Mises Σ_{eq}/σ_0 et la contrainte macroscopique hydrostatique normalisée Σ_m/σ_0 en fonction de la déformation macroscopique équivalente de von Mises E_{eq}

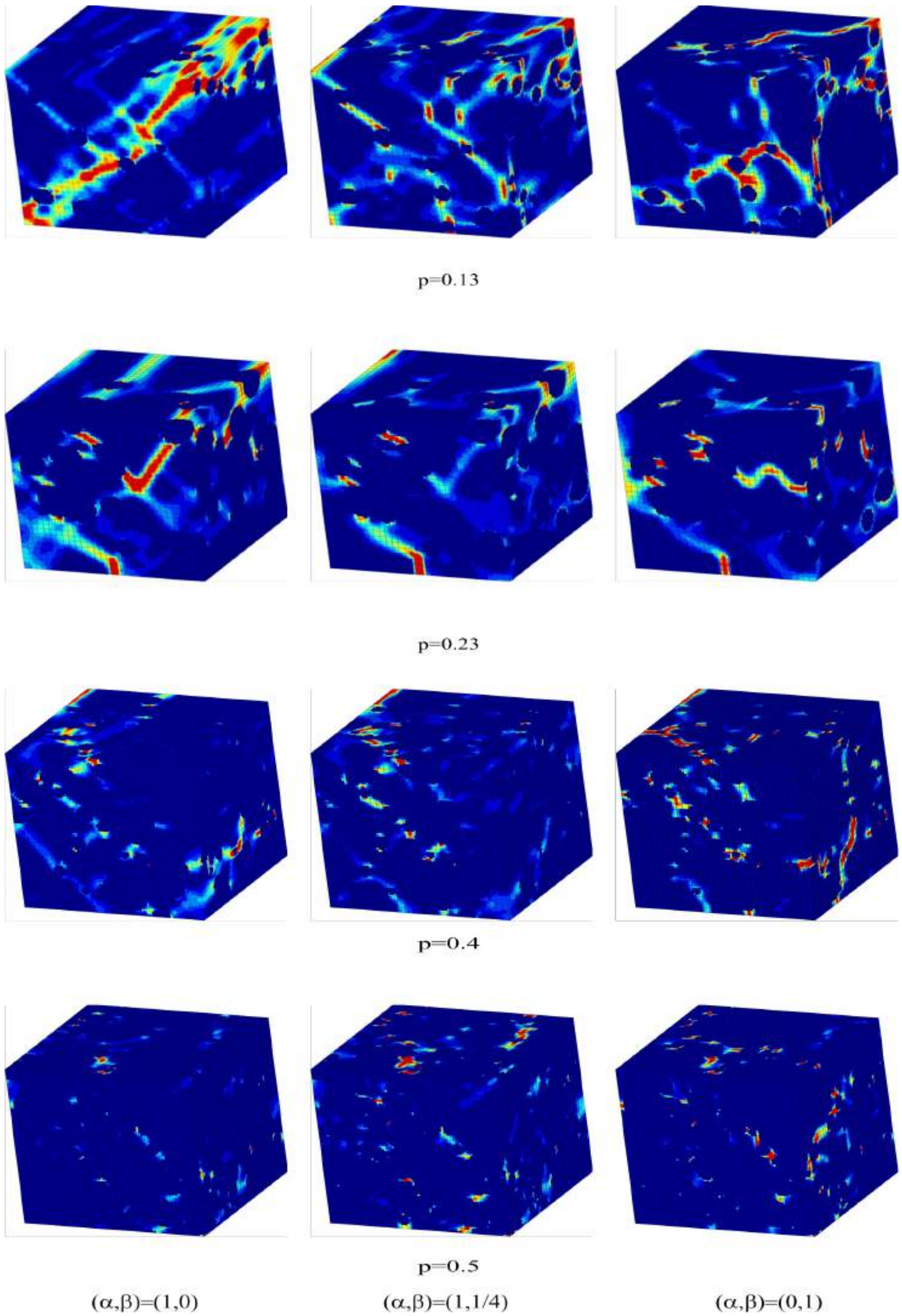


FIGURE 2.9 – Distribution de la déformation plastique accumulée à différentes porosités et à différents cas de chargement

2.4.4 Comparaison entre les résultats numériques et les critères analytiques

Le seuil de plasticité effectif, représenté par la contrainte équivalente de von Mises en fonction de la contrainte hydrostatique, est adoptée pour illustrer les données de calcul. Dans les Figure 2.10 - 2.13, on peut voir un exemple de la relation entre ces deux mesures de contraintes pour des valeurs de porosité réelles données : p=0.13 ,0.23 ,0.4 et 0.5

La normalisation est effectuée par rapport à la contrainte d'élasticité σ_0 de la matrice. La dépendance de la pression hydrostatique et du seuil de plasticité macroscopique du matériau poreux est clairement indiquée sur les Figures 2.10 - 2.13. Bien qu'une réponse asymptotique soit atteinte par la cellule cubique parfaitement plastique,Figure 2.8., la relation entre les deux mesures de contrainte ne décrit pas une droite mais un parcours non proportionnel assez complexe, comme l'ont également observé[Fritzen et al., 2012]. Les points représentants le seuil de plasticité obtenus à la fin de la simulation indiquent qu'il n'ont aucune concordance avec le modèle classique de Gurson.

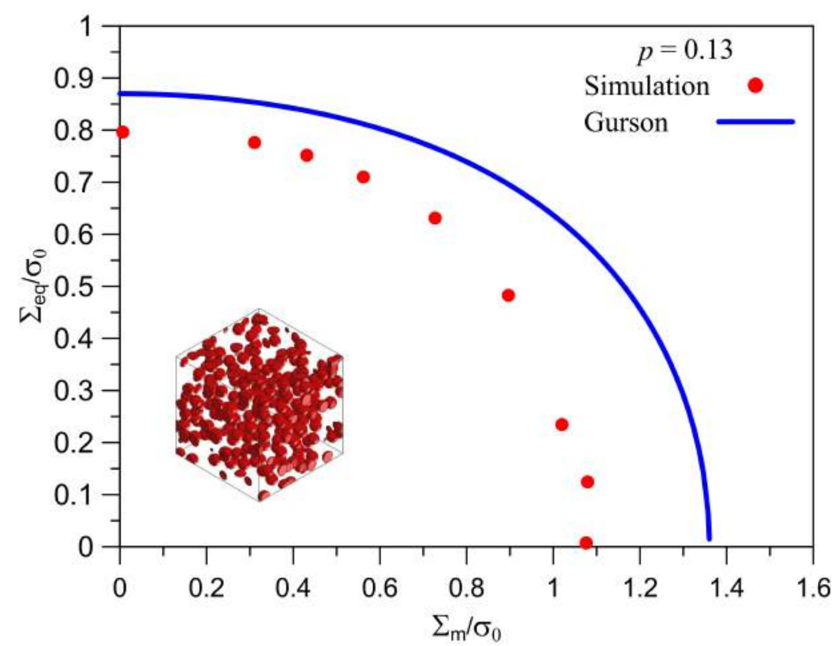


FIGURE 2.10 – Résultats numériques comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.13

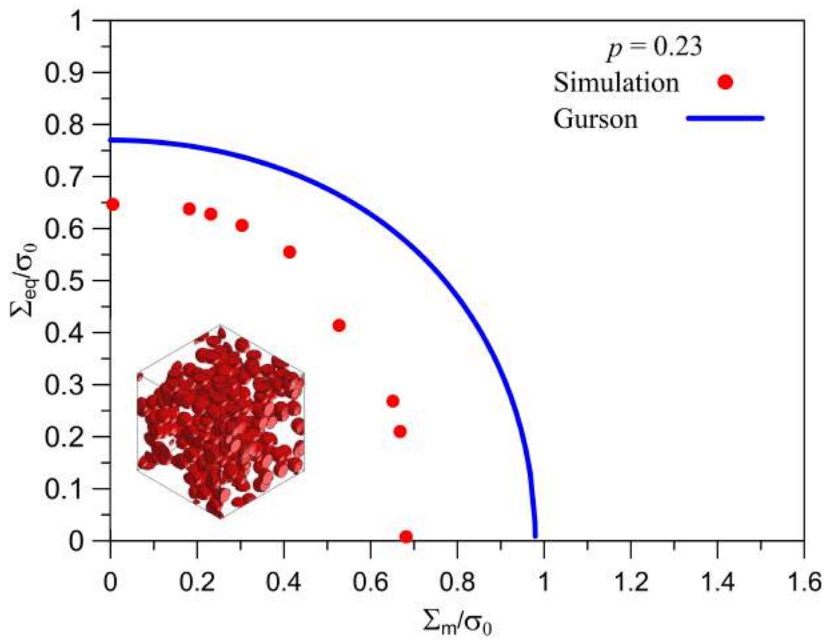


FIGURE 2.11 – Résultats numériques comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.23

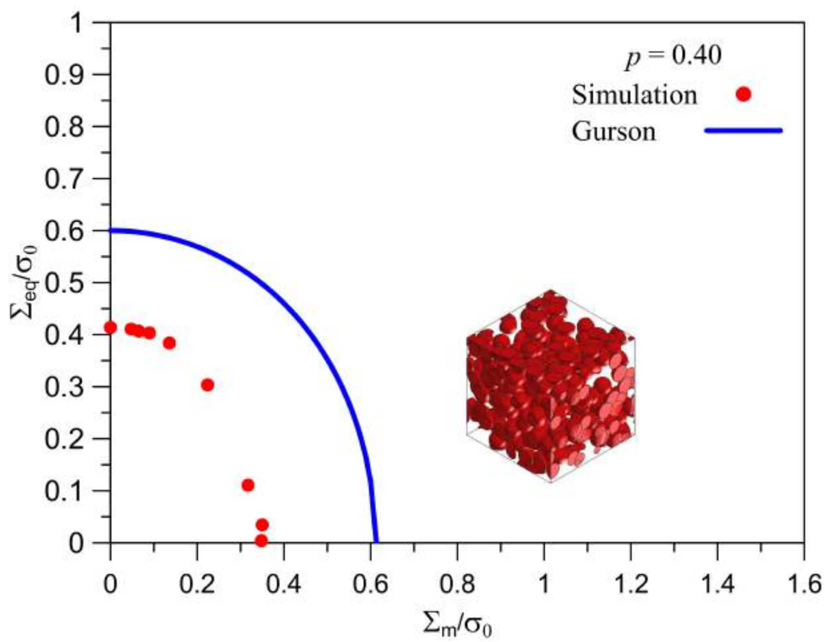


FIGURE 2.12 – Résultats numériques comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.40

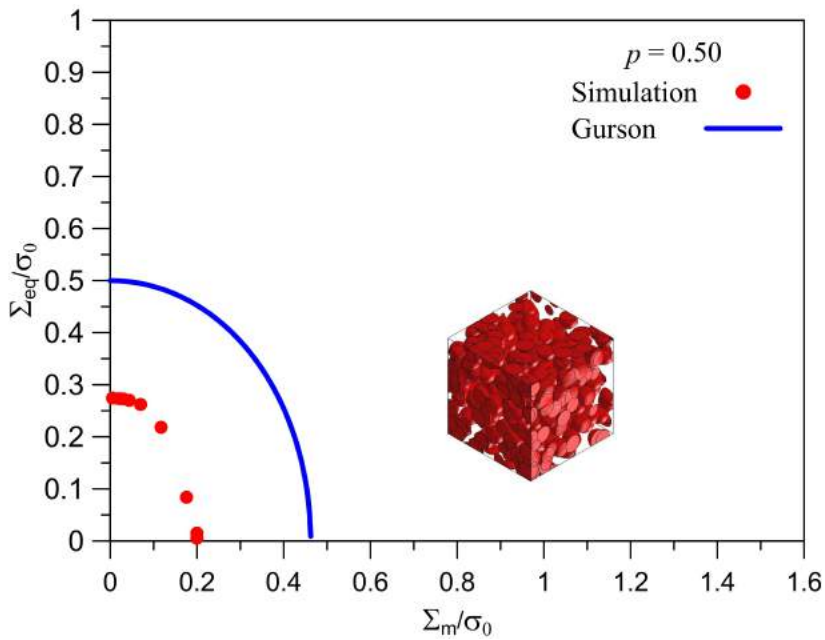


FIGURE 2.13 – Résultats numériques comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.50

2.4.5 Modèle GTN pour les milieux poreux aléatoires

Pour améliorer son accord avec les résultats de calcul, le modèle GTN peut être comparé et calibré en utilisant nos données calculées. Les paramètres du modèle GTN sont les suivants : $q_1 = 1.6 - p$,$q_2 = 0.9$, et $q_3 = q_1^2$. Le modèle représente toutes les données calculées d'une manière très satisfaisante, comme le montre la Figure 2.11. Nous obtenons les mêmes expressions que celles trouvées par [Fritzen et al., 2012]. Cet étalonnage peut être comparé avec les valeurs indiquées dans le Tableau 2.3, obtenues habituellement par étalonnage sur des résultats de simulation en éléments finis bidimensionnels utilisant des modèles de contraintes planes ou de cellules unitaires périodiques symétriques. La Figure 2.11 montre qu'il n'y a pas d'effet significatif des vides de formes sphériques, avec ou sans chevauchement, sur le seuil de plasticité effectif. Ce résultat ne correspond pas aux critères de rendement analytiques basés sur l'approche micromécanique développée dans la littérature ;Voir par ex [Gologanu et al., 1993, M.Gologanu et al., 1994, Gologanu et al., 1997, Gologanu et al., 2001], [Madou and Leblond, 2012a, Madou and Leblond, 2012b]. Cette différence est due au fait que les résultats de l'auteur cité portent sur des vides ellipsoïdaux qui ne se chevauchent pas, contrairement à notre cas où l'on considère les vides sphériques en chevauchement. Pour les représentations, les développements théoriques ne considèrent qu'une cellule unitaire, et par conséquent le milieu est supposé périodique . D'un point de vue analytique basé sur l'approche micromécanique, la réponse globale d'un milieu poreux aléatoire est évalué à partir de la moyenne des réponses des différentes cellules avec leurs différentes orientations ; Voir [Zairi et al., 2008a] et[Vincent et al., 2009]. La dépendance de forme est ainsi préservée dans les modèles analytiques basés sur l'approche micromécanique. Pour déterminer le VER on a effectué (selon le tableau 2.1) une série de calculs sur un nombre de microstructures égale à : 216 + 27 x 5 + 2 x 20 + 8 x 50 + 8 x 100 + 3 x 200. Si le grand volume de calculs (calculs 80876) réalisé dans cette étude ne montre aucun effet significatif de la forme vide sur le comportement moyen en volume, cela pourrait être une conséquence de la microstructure cubique dans laquelle les pores sont simultanément répartis et orientés aléatoirement dans l'espace. Cependant, cette déclaration doit être vérifiée pour une plus grande gamme de rapports de forme.

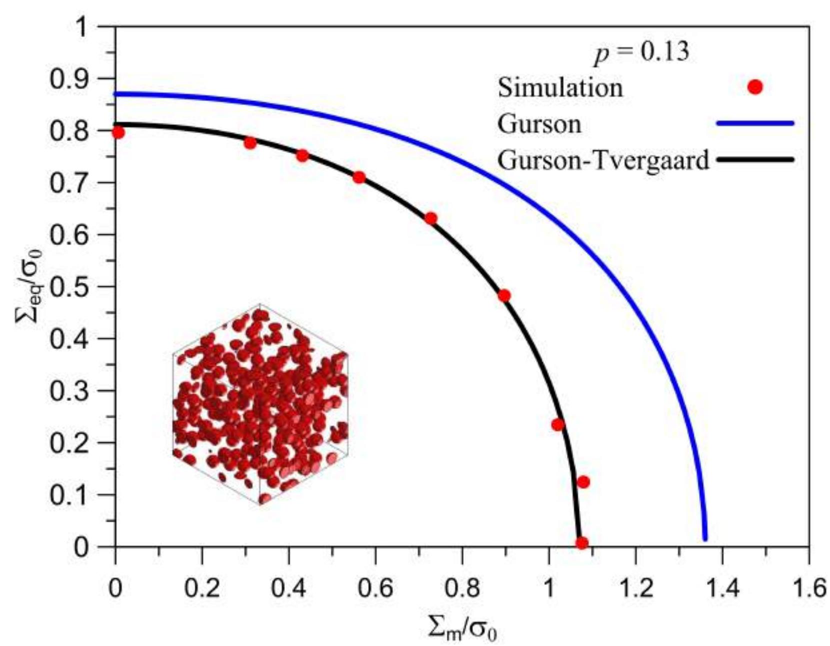


FIGURE 2.14 – Modèle de Gurson-Tvergaard pour les résultats numériques obtenus, comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.13

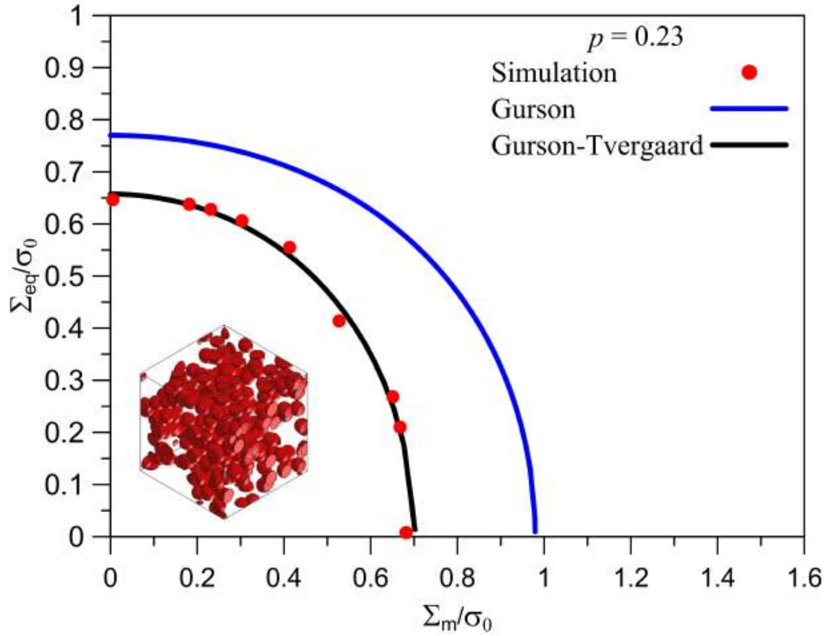


FIGURE 2.15 – Modèle de Gurson-Tvergaard pour les résultats numériques obtenus, comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.23

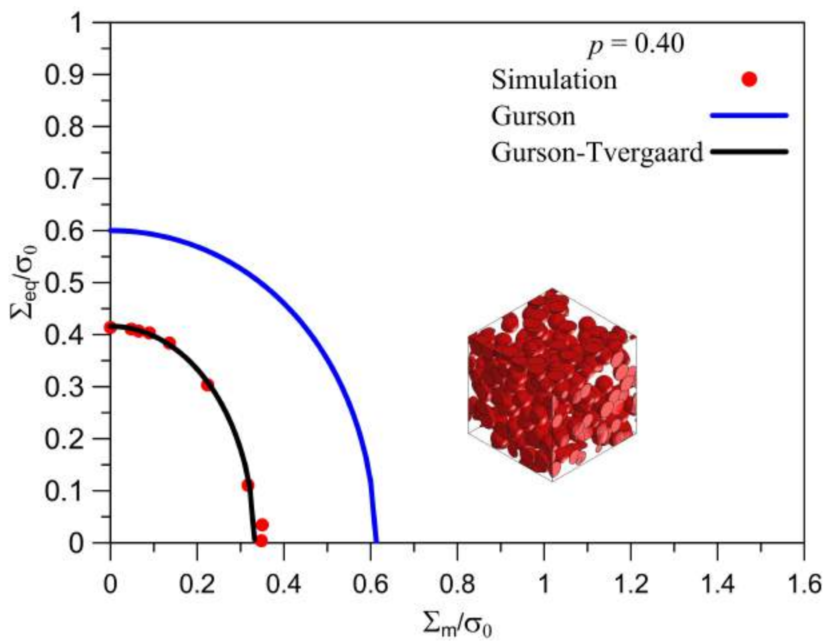


FIGURE 2.16 – Modèle de Gurson-Tvergaard pour les résultats numériques obtenus, comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.40

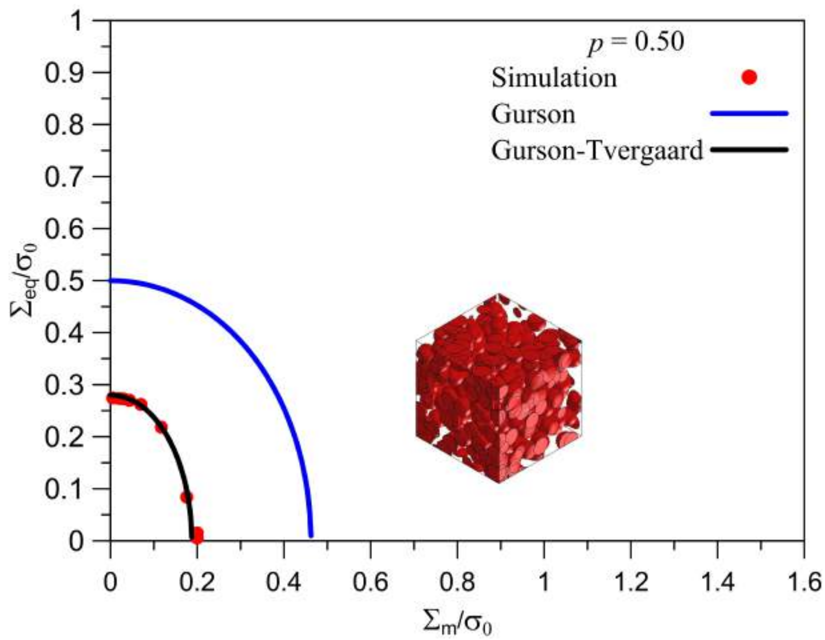


FIGURE 2.17 – Modèle de Gurson-Tvergaard pour les résultats numériques obtenus, comparés au modèle de Gurson pour la fraction volumique p=0.50

2.5 Conclusion

Le comportement mécanique macroscopique des matériaux poreux parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises est étudié sur une base de calcul. Le seuil de plasticité global des milieux poreux, avec des vides sphériques identiques en chevauchement, a été étudié numériquement par la micromécanique. Les microstructures aléatoires constituées de vides sphériques qui se chevauchent sont utilisées dans des simulations par éléments finis et les contraintes limites déviatoriques et hydrostatiques sont capturées pour tous les calculs. Pour la classe de matériaux poreux considérée, on constate que les prédictions analytiques trouvées dans la littérature exhaustive sur le sujet sont toutes assez proches de la prédiction numérique pour les fractions de petits volumes de pores. Notamment, les modèles analytiques sont plutôt proches des résultats numériques pour les fractions de pores allant jusqu'à 2,5%. Pour les fractions de pores plus élevées, on observe des écarts significatifs entre les différents modèles. Par conséquent, nos résultats numériques sont comparés à une modification du modèle GTN par des calculs attractifs donnés dans [Fritzen et al., 2012]. Cette extension est attrayante en raison de sa capacité à s'adapter, dans une mesure excellente, à tous les points calculés. Sur la base des résultats statistiques et des résultats obtenus pour différents types de conditions aux limites et le nombre de pores, les résultats de calcul peuvent être considérés comme représentatifs dans les hypothèses constitutives énoncées. Les résultats numériques ont été étudiés en termes de représentativité et ont été liés aux critères de rendement de type Gurson. Nos résultats numériques pour les matériaux poreux en chevauchement sont proches des résultats obtenus par les critères de plasticité de type Gurson donnés dans [Fritzen et al., 2012]. Les surfaces d'écoulement globales ont été trouvées presque identiques pour des vides sphériques avec ou sans chevauchement, à condition qu'ils soient distribués de manière aléatoire dans un élément de volume représetatif. On déduit donc qu'il n'y a pas de différence entre le matériau présentant des pores avec ou sans chevauchement si la porosité est la même. Des recherches futures peuvent être consacrées à la prise en compte de conditions de chargement plus générales et au rôle joué par l'invariant du tenseur de contrainte.

Chapitre 3

Effet de la forme des vides sur le seuil de plasticité des milieux poreux

3.1 Introduction

Une étude d'homogénéisation numérique sur des cellules cubiques tridimensionnelles est présentée pour estimer le seuil de globaleplasticité global des milieux poreux aléatoires. Dans ce chapitre nous avons effectué une étude sur l'effet de la forme des vides sur le seuil de plasticité des milieux poreux . A cet effet, nous avons choisi un milieu poreux constitué d'une matrice parfaitement plasique obéissant au critèrde von Mises contenant des vides distribués aléatoirement. Cette étude constitue une extension aux travaux élaborés par [Khdir et al., 2014]. Dans leur travaux de recherches[Khdir et al., 2014] ont examiné d'une manière assez vaste l'effet de la forme des vides sur le comportement en plasticité des milieux poreux en considérant une matrice parfaitement plastique contenant des vides sphériques avec des rapports de forme différents.

Les résultats de leurs recherches montrent que la forme du vide n'exerce aucune influence sur le seuil de plasticité des milieux poreux considérés. Néanmoins, pour généraliser et justifier ce constat, des calculs plus approfondis sont recommandés. A cet effet nous avons repris les calculs en imposant des rapports de forme plus petits (a = b = c), (b) (a=b = 0,2c) ; sur une matrice parfaitement plastique contenant des vides. La représentativité des estimations du seuil de plasticité global est examinée à l'aide de cellules cubiques contenant des vides orientés et distribués de manière aléatoire avec une fractions volumique de vides de 0.10 et deux formes de vide (sphérique ; ellipsoidale). Les résultats de calcul sont comparés à ceux du critère de Gurson.

3.2 Homogénéisation numérique

3.2.1 Microstructures poreuses

Pour pouvoir comparer les résultats de simulation avec les modèles analytiques les plus courants, le milieu poreux considéré doit être fait d'une matrice parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises, ayant une contrainte d'élasticité constante (dans notre cas elle est égale à 290MPa) et d'un flux de plasticité parfait pour éviter les effets de durcissement. Le matériau de la matrice est suffisamment rigide pour surmonter les effets de déformation. Les milieux poreux sont représentés par des cellules cubiques tridimensionnelles contenant un grand nombre de pores, afin de s'assurer que l'élément de volume de matériau étudié est suffisamment grand par rapport aux porosités. Les vides sont répartis au hasard et orientés dans l'espace dans la cellule cubique. En outre, ils sont identiques et sans chevauchement. La question des effets des vides p est examinée dans ce travail. La fraction volumique des N sphéroïdes dans une cellule cubique de volume V est donnée par :

$$p_{sphéroidal} = \frac{4}{3}\frac{N\pi abc}{V} \tag{3.1}$$

Où a est le rayon polaire le long de l'axe y du vide sphéroïdal et b et c sont les rayons équatoriales le long des axes z et x respectivement Figure 3.1. Les effets de la forme du vide sont examinés dans ce travail, ce qui constitue une différence remarquable par rapport à la littérature existante [Bilger et al., 2005, Bilger et al., 2007], [Fritzen et al., 2012, Fritzen et al., 2013], [Khdir et al., 2014].

La Figure 3.1 présente les microstructures poreuses conçues. Les cas des pores sphériques (a = b = c) et (a=b=0,2c) sont examinés. Dans notre étude nous avons choisi deux rapports de forme : il s'agit pour le premier cas d'une sphère parfaite ayant un rapport de forme égal à 1 et pour le deuxième cas d'une sphère aplatie dont le rapport de forme est égal à 0.2 appliqués sur une fraction volumique de vides p égale à 0.10. La méthode des éléments finis a été choisie pour les calculs numériques à l'aide du logiciel Zebulon. Une approximation standard de petite déformation a été utilisée pour les simulations. Le maillage utilisé était assez bon pour représenter avec précision la géométrie de la porosité et pour assurer la convergence globale des réponses.

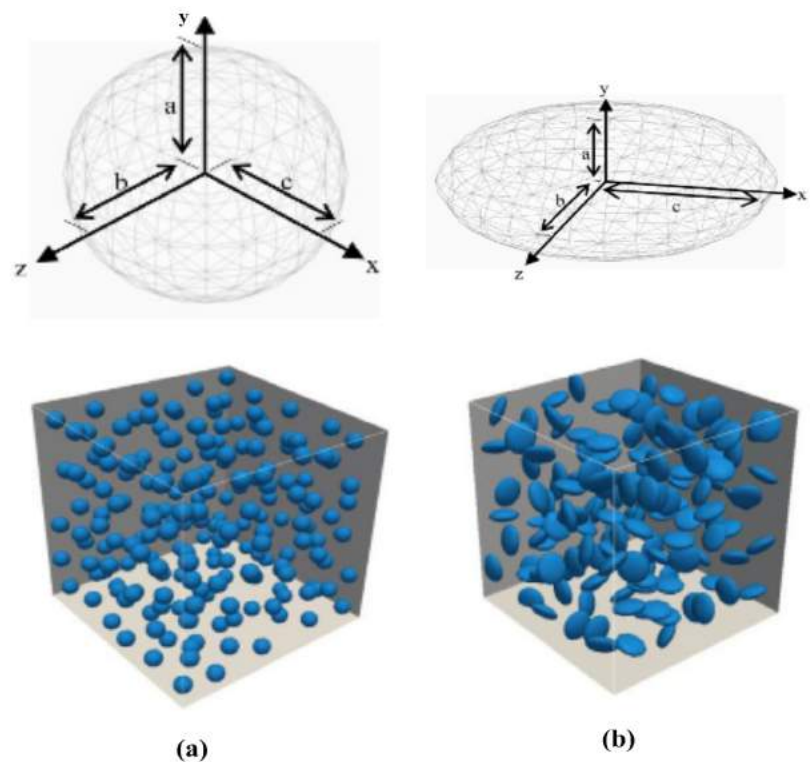


FIGURE 3.1 – Milieu poreux examiné pour ;200 et p = 0.10 : (a) sphérique (a = b = c), (b) élipsoide (a=b = 0,2c)

3.2.2 Conditions aux limites

Le milieu poreux étant hydrostatique dépendant de la pression, les conditions aux limites imposées à l'élément représentatif conçu devraient impliquer un large éventail de rapports de triaxialité de contrainte à explorer. Le paramètre de triaxialité de contrainte $T = \Sigma_m/\Sigma_{eq}$ est défini comme le rapport de la contrainte hydrostatique globale Σ_m et la contrainte globale de Von Mises Σ_{eq}, respectivement, donné par :

$$\Sigma_m = \frac{1}{3}tr\left(\Sigma\right) et \Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\Sigma' : \Sigma')^{1/2} \tag{3.2}$$

Où Σ est le tenseur de contrainte macroscopique (ensemble-volume moyen) et Σ' désigne sa partie déviatorique. Des conditions de contrainte ou de contraintes sont habituellement utilisées dans la littérature. Dans cet article, en raison de la robustesse des calculs, les conditions de limites mixtes suivantes ont été imposées.

$$\begin{cases} E_{11}(t) = t\dot{\varepsilon}_0(\beta + \alpha) \\ E_{11}(t) = t\dot{\varepsilon}_0(-\alpha + \beta) \\ E_{11}(t) = t\dot{\varepsilon}_0\beta \\ \Sigma_{12}(t) = \Sigma_{13}(t) = \Sigma_{23}(t) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans lequel les valeurs attribuées aux composants de cisaillement du tenseur de contrainte global sont nulles. Les termes α et β , introduits pour contrôler les composantes diagonales du tenseur de contrainte global E, sont deux paramètres de chargement, $\dot{\varepsilon} > 0$ est un taux de déformation prescrit et t est le temps de simulation. La triaxialité du stress est indirectement attribuée par les deux mesures du stress, données par l'équation 3.2, qui sont définies implicitement par les conditions limites mixtes à travers les deux paramètres de chargement αet β . Les différentes valeurs de α et β utilisées pour obtenir différents rapports de triaxialité de stress sont listées dans le Tableau 2.2.

3.3 Résultats et discussion

3.3.1 Réponse asymptotique

La réponse asymptotique des microstructures poreuses parfaitement plastiques a été systématiquement examinée en traçant les contraintes globales de Von Mises et hydrostatiques en fonction de la contrainte équivalente globale de von Mises. Ces deux mesures de contrainte sont tracées dans la Figure 3.2 et la Figure 3.3 dans le cas d'une valeur de porosité de 0.10 et pour les deux formes de vides. Ces figures montrent que les microstructures poreuses sont soumises à une réponse stationnaire au-delà d'une certaine valeur de contrainte. Des observations similaires sur des calculs à grand volume ont été soulignées par [Fritzen et al., 2012, Fritzen et al., 2013] et par[Khdir et al., 2014].

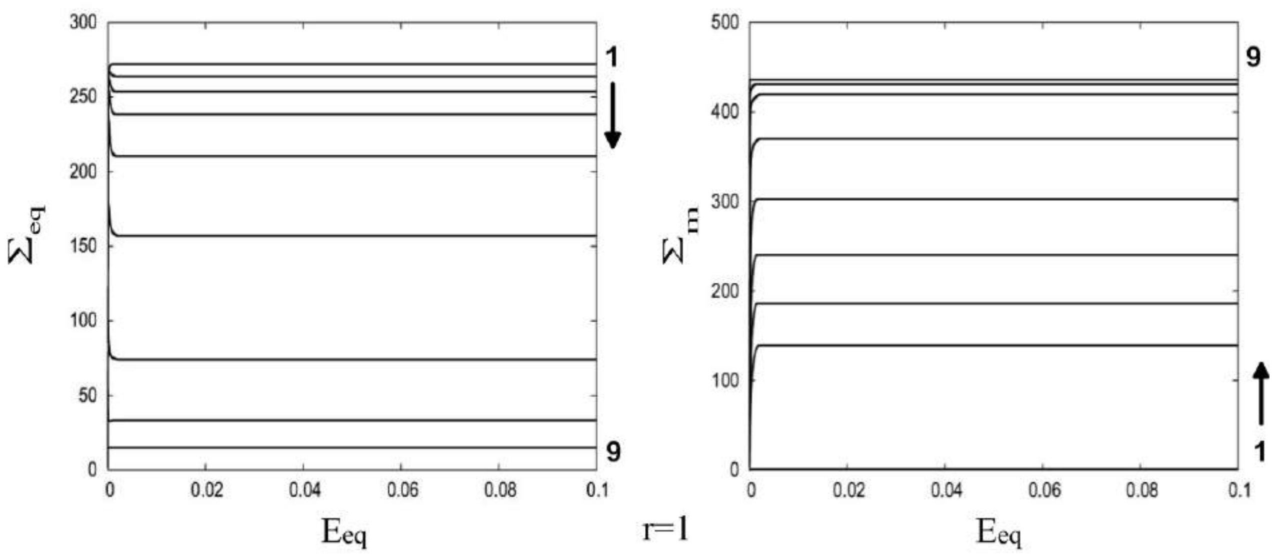


FIGURE 3.2 – Contrainte macroscopique équivalente de von Mises Σ_{eq} et la contrainte macroscopique hydrostatique Σ_m en fonction de la déformation macroscopique équivalente de von Mises E_{eq} pour rapport de forme r=1

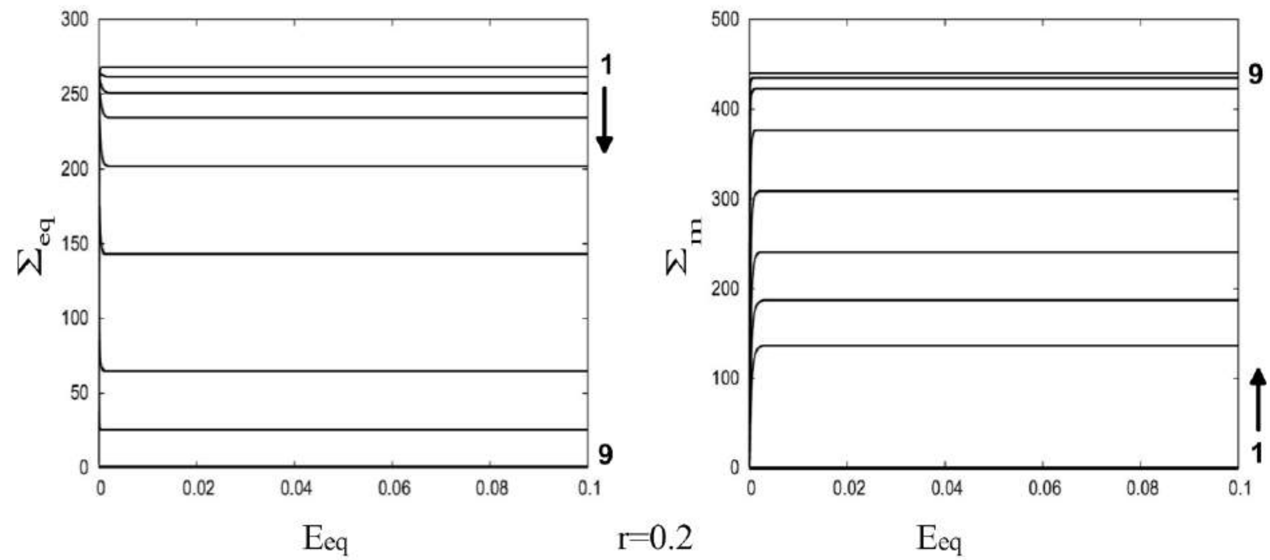


FIGURE 3.3 – Contrainte macroscopique équivalente de von Mises Σ_{eq} et la contrainte macroscopique hydrostatique Σ_m en fonction de la déformation macroscopique équivalente de von Mises E_{eq}pour rapport de forme r=0.2

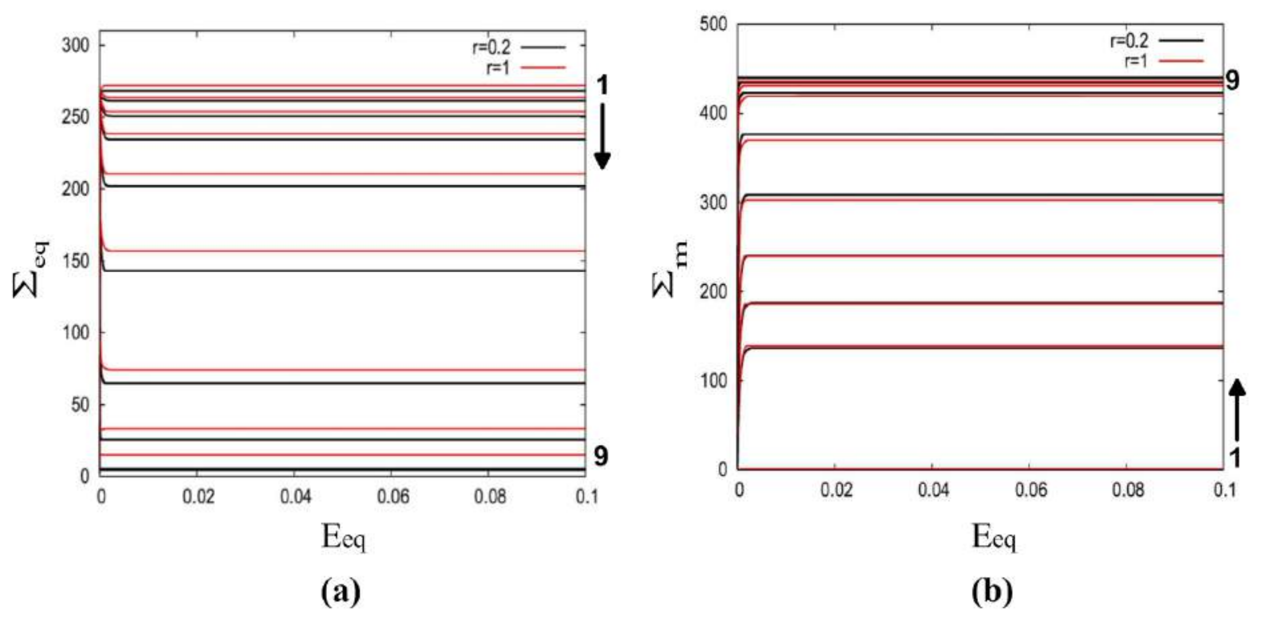


FIGURE 3.4 – Comparaison des Contrainte macroscopique équivalente de von Mises (a) Σ_{eq} et de la contrainte macroscopique hydrostatique (b) Σ_m

Les courbes de la Figure 3.4 illustrent une représentation commune des seuil de plasticité des deux rapports de forme étudiés (la couleur rouge pour r =1 et la couleur noire pour r =0.2). Les deux tracés dans les deux cas de contraintes montrent une même allure avec presque les mêmes valeurs qui restent staionnaires au dessus d'une certaine valeur de contrainte. De telles observations confirment la non dépendance entre le seuil de plasticité et la forme des vides.

3.3.2 Comparaison entre les deux rapports de forme étudiés

Dans cette étude nous avons considérer deux formes de pores : sphériques et élipsoidaux de rapports de forme a=b=0.2c. La représentation du seuil de plasticité global des milieux poreux pour illustrer les donnés de calcul consiste à tracer la contrainte équivalente globale de von Mises en fonction de la contrainte hydrostatique globale.

la Figure 3.5 montre la relation entre les deux mesures de contrainte pour une valeur de porosité égale à 0.10.

Les données calculées relatives au seuil de plasticité sont comparées au modèle de Gurson.

Le modèle de Gurson étant spécifique, puisqu'il traite un cas particulier des milieux poreux, d'autres modèles ont été trouvés pour le rendre plus général. Parmi ces modèles on retrouve [Tvergaard, 1982] qui a introduit des paramètres q_i pour généraliser le modèle classique de Gurson pour déterminer le seuil de plasticité des matériaux poreux en tenant compte entre autre des interactions entre les cavités, équation 2.2. pour approximer le seuil de plasticité réel, de nombreux auteurs, ont déterminé des valeurs des paramètres q_i pour différents cas structures poreuses.Taleau 2.3.

Dans notre travail, nous avons effectués des calculs qui ont abouti à la détermination de nouveaux parmètres qi pour valoriser l'effet de la forme des vides sur le seuil de des milieux plasticité des milieux poreux. Bien que le cas a été étudié par [Khdir et al., 2014]ou les rapports de formes considérés restent insuffisants pour montrer l'effet des porosités sur le seuil de plasticité surtout pour de grands rapports de forme.

Les résultats de simulation pour les deux rapports de forme étudiés r =1 et r = 0.2 nous ont permis d'ajuster les paramètres de fittage q_1 et q_2. Ainsi pour r = 1 :$q_1 = 0{,}80$; $q_2 = 1.12$ et $q_3 = q_1^2$ et pour r = 0.2 : $q_1 = 0{,}84$; $q_2 = 1.10$ et $q_3 = q_1^2$.

la Fgure 3.4 illustre les courbes obtenues aprés la détermination des paramètres de fittage q_i pour chaque cas. les points rouges représentent les résultats de simulation pour r =1, les points en bleu représentent les résultats de simulations pour r = 0.2, tandis que les deux courbes en bleu et noir continues représentent celle de Gurson pour les mileiux poreux et celle obtenue après fittage.

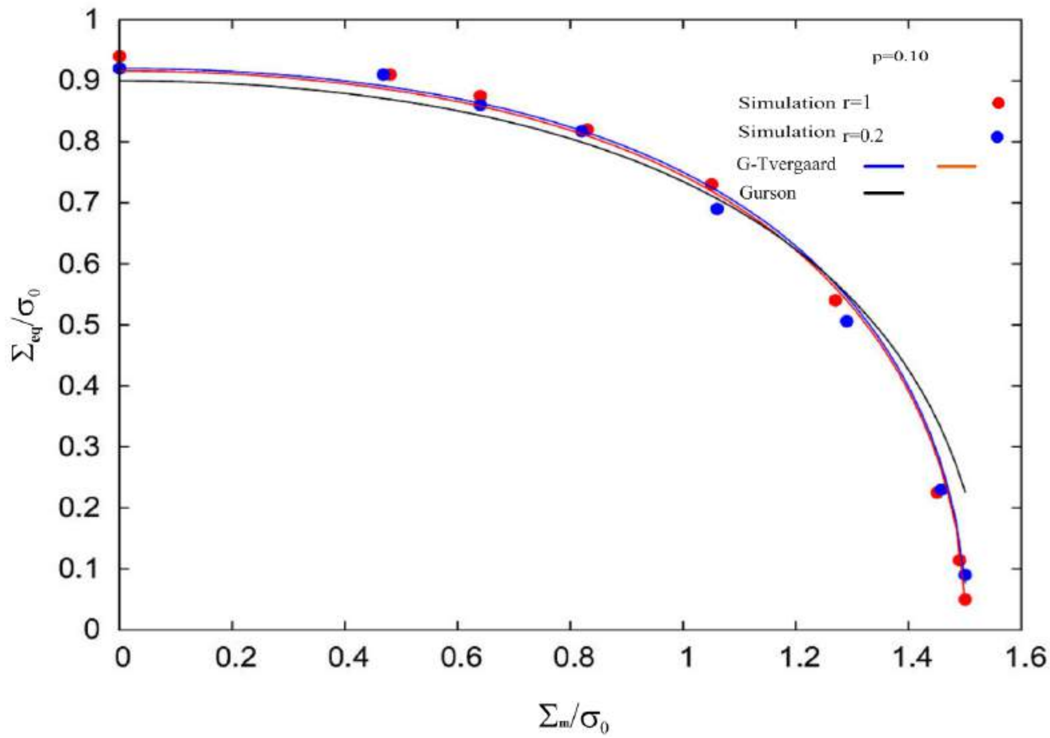


FIGURE 3.5 – Ajustement du modèle de Gurson-Tvergard avec les résultats de simulation pour r=1 et r=0.2

On voit clairement que les courbes de simulation pour les deux rapports de forme sont trés proches l'une de l'autre et la courbe de GT représentant les résultats numériques est très proche de celle de Gurson. Ces observations nous mènent à rejoindre l'idée de khdir et affirmer qu'il n'ya aucune dépendance entre la forme des vides et le seuil de plasticité global des milieux poreux.

3.4 Remarques finales

Le seuil de plasticité global des milieux poreux a été étudié par l'approche micromécanique. Les résultats de calcul ont été interprétés en termes de représentativité et étaient liés à certains critères existants de type Gurson. Les résultats numériques obtenus ont montré que le seuil de plasticité pour les deux cas étudiés est identique à condition que les vides soient répartis et orientés de manière aléatoire dans un VER. D'autres calculs sont cependant nécessaires pour étudier d'autres formes telles que cubiques et leurs influences sur le comportement plastique des milieux poreux.

Conclusion générale

Cette thèse de doctorat est une contribution au calcul d'homogénéisation des milieux aléatoires avec une matrice élasto-plastique. Les composites particulaires et les matériaux poreux on été étudiés par cette méthode. Dans la première partie de ce travail, une méthode d'homogénéisation numérique a été utilisée pour estimer la réponse élastique-plastique effective des composites particulaires. La méthode a été basée sur les calculs de petits volumes limités de taille fixe extraits d'un plus grand et contenant différentes réalisations de la microstructure aléatoire. Les deux partitions chevauchantes et non chevauchantes extraites de l'élément de volume le plus grand en sous-volumes ont été considérées. Si un petit sous-volume ne présente pas nécessairement une réponse isotrope (même si la microstructure est censée être macroscopique Isotrope) nous avons montré que la réponse moyenne d'un nombre suffisant de réalisations différentes est isotrope. Une dispersion significative dans le régime plastique des courbes contrainte-déformation apparente a été observée pour des sous-volumes trop petits. Il a été montré que la dispersion des résultats diminue lorsque la taille du domaine augmente. On a également constaté que pour un nombre donné de réalisations, le chevauchement des sous-volumes diminue significativement la dispersion. Enfin, on a également montré que l'élément élémentaire en volume (VER) contenant une inclusion centrée, même largement utilisée dans la littérature, représente une borne mineure de la réponse mécanique réelle.

Dans la seconde partie de ce travail, le seuil de plasticité effectif des milieux poreux en percolation a été étudié. Les résultats numériques ont été étudiés en termes de représentativité et étaient liés à certains critères de rendement du type Gurson existants pour les populations de vides en percolation. L'importance de la taille des éléments de volume pour estimer le seuil de plasticité a été soulignée. Le comportement mécanique macroscopique des matériaux poreux parfaitement plastique obéissant au critère de Von Mises parfaitement est étudié sur une base de calcul. Le seuil de plasticité des milieux poreux, avec des vides sphériques identiques en chevauchement, a été étudié par la micromécanique . Les microstructures aléatoires constituées de vides sphériques qui se chevauchent sont utilisées dans des simulations par éléments finis et les contraintes limites déviatoriques et hydrostatiques sont capturées pour tous les calculs. Pour la classe de matériaux poreux considérée, on constate que les prédictions analytiques trouvées dans la littérature sur le sujet sont toutes assez proches de la prédiction numérique pour les fractions de petits volumes de pores. Pour les fractions de pores plus élevées, on observe des écarts significatifs entre les différents modèles. Par conséquent, nos résultats numériques sont comparés à une modification du modèle GTN par des calculs attractifs donnés dans [Fritzen et al., 2012]. Cette extension est attrayante en raison de sa capacité à s'adapter, dans une mesure excellente, à tous les points calculés. Sur la base des résultats statistiques et des résultats obtenus pour différents types de conditions aux limites et le nombre de pores, les résultats de calcul peuvent être considérés comme représentatifs dans les hypothèses constitutives énoncées. Les résultats numériques ont été étudiés en termes de représentativité et ont été liés aux critères de rendement de type Gurson. Nos résultats numériques pour les matériaux poreux en chevauchement sont proches des résultats obtenus par les critères de rendement de type Gurson donnés dans [Fritzen et al., 2012]. Les seuils d'écoulement plastique ont été trouvées presque identiques pour des vides sphériques avec ou sans chevauchement, à condition qu'ils soient distribués de manière aléatoire dans un élément de grand volume. On déduit donc qu'il n'ya pas de différence entre le matériau poreux avec ou sans chevauchement si la porosité est la même. D'autre part les calculs consacrés à l'étude de l'effet de la forme des vides sur le comportement plastique des milieux poreux, montrent qu'il n'ya aucune dépendance entre eux. Des recherches futures peuvent être consacrées à la prise en compte de conditions de chargement plus générales et au rôle joué par l'invariant du tenseur de contrainte.

Bibliographie

[Aboudi, 1991] Aboudi, J. (1991). A unified micromechanical approach. *Mechanics of Composite Materials. Elsevier.*

[Barbe et al., 2001] Barbe, F., Decker, L., Jeulin, D., and Cailletaud, G. (2001). Inter-granular and intra-granular behavior of polycrystalline aggregates, part 1,. *International Journal of Plasticity, v17, p513-536.*

[Becker et al., 1988] Becker, R., Needleman, A., Richmond, O., and Tvergaard, V. (1988). Void growth and failure in notched bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v36, p317-351.*

[Benhizia et al., 2014] Benhizia, A., Outtas, T., Kanit, T., and Imad, A. (2014). Computation of effective behavior of isotropic transverse compositein nonlinear problems. *Mechanics Research Communications.*

[Benhizia et al., 2017] Benhizia, A., Outtas, T., Kanit, T., and Imad, A. (2017). Optimal design and nonlinear computation of mechanical behavior of sphere reinforced composites. *Composites Part B : Engineering*, 126(Supplement C) :38 – 48.

[Bensoussen and Papanicolaou, 1978] Bensoussen, A. Lions, J. L. and Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures.*

[Benveniste, 1987] Benveniste, Y, A. (1987). New approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6 :147–157.

[Benzerga and Leblond, 2010] Benzerga, A. A. and Leblond, J.-B. (2010). Ductile fracture by void growth to coalescence. In Aref, H. and van der Giessen, E., editors, *Advances in Applied Mechanics*, volume 44 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 169 – 305. Elsevier.

[Beran, 1968] Beran, M. J. (1968). *Statistical Continuum Theories.* J. Wiley, New York.

[Berveiller and Zaoui, 1979] Berveiller, M. and Zaoui, A. (1979). An extension of the self consistant scheme to plasticity-flowing polycristals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26 :325–344.

[Besson, 2010] Besson, J. (2010). Continuum models of ductile fracture. *Int. J. Damage Mech., v19, p3-52.*

[Besson et al., 2009] Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J. L., Forest, S., and Blétry, M. (2009). Non-linear mechanics of materials. *Solid Mechanics and Its Applications, Springer ISBN : 978-90-481-3355-0, 433 p.*, 167.

[Bilger et al., 2005] Bilger, N., Auslender, F., Bornert, M., Michel, J., H. Moulinec, P. S., and Zaoui, A. (2005). Effect of a non-uniform distribution of voids on the plastic response of voided materials, a computational and statistical analysis. *Int. J. Solids Struct., v42, p517-538.*

[Bilger et al., 2007] Bilger, N., Auslender, F., Bornert, M., Moulinec, H., and Zaoui, A. (2007). Bounds and estimates for the effective yield surface of porous media with a uniform or a non-uniform distribution of voids. *Mech. A/Solids, v26, p. 810-836.*

[Bohlke, 2004] Bohlke, T. (2004). The voigt bound of the stress potential of isotropic visco-plastic fcc polycrystals, archive of mechanics. *Archive of Mechanics, v56(6), 423-443.*

[Bornert et al., 2001] Bornert, M., Bretheau, T., and Gilormini, P. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2-Comportements non linéaires et problèmes ouverts.*

[Bornert et al., 2010] Bornert, M., Bretheau, T., and Gilormini, P. (2010). Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. *Série : Alliages Métalliques, Hermes Science Publications, ISBN : 2-7462-0199-2.*

[Budiansky, 1965] Budiansky, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, 13 :223–227.

[Burteau et al., 2007] Burteau, A., Bartout, J.-D., NGuyen, F., Forest, S., Bienvenu, Y., and Naumann, D. (2007). *Investigation of representative volume element size for the mechanical properties of open-cell nickel foams.* National Research Council of Canada.

[Cailletaud and Pilvin, 1994] Cailletaud, G. and Pilvin, P. (1994). Utilisation de modéles polycristallins pour le calcul par éléments finis. In *Revue Européenne des Éléments Finis 3.*

[Castaneda, 1991] Castaneda, P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids, v1, p45-71.*

[Castaneda, 1989] Castaneda, P. P. (1989). The overall constitutive behaviour of nonlinear elastic composites. *Proc. R. Soc. Lond., pages*, A422 :147–171.

[Castaneda, 2002] Castaneda, P. P. (2002). Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*

[Cazacu et al., 2013] Cazacu, O., Baudard, B. R., Lebensohn, R. A., and Garajeu, M. (2013). On the combined effect of pressure and third invariant on yielding of porous solids with von mises matrix, journal of applied mechanics. *Journal of Applied Mechanics, v80(6), 064501.*

[Chaboche and Suquet, 1998] Chaboche, J. L. and Suquet, P. (1998). Endommagement, interfaces. ecole d'été méthode d'homogénéisation en mécanique des matériaux. Technical report, La Londe-les-Maures.

[Christensen and Lo, 1979] Christensen, R. M. and Lo, K. H. (1979). Solutions for effective shear properties of three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 :315–330.

[Corigliano et al., 2000] Corigliano, A., Mariani, S., and Orsatti, B. (2000). Identification of gurson tvergaard material model parameters via kalman filtering techniquei, i.theory. *Int. J. Fract., v104, p349-373.*

[Danas and Aravas, 2012] Danas, K. and Aravas, N. (2012). Numerical modeling of elasto-plastic porous materials with void shape effects at finite deformations. *Composites Part B : Engineering*, 43(6) :2544 – 2559. Homogenization and Micromechanics of Smart and Multifunctional Materials.

[Dirrenberger, 2012] Dirrenberger, J. (2012). Propriétés effectives de matériaux architecturés. *Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris.*

[Djebara et al., 2016] Djebara, Y., Moumen, A. E., Kanit, T., Madani, S., and Imad, A. (2016). Modeling of the effect of particles size, particles distribution and particles number on mechanical properties of polymer-clay nano-composites : Numerical homogenization versus experimental results. *Composites Part B : Engineering*, 86(Supplement C) :135 – 142.

[Drugan and Willis, 1996] Drugan, W. and Willis, J. (1996). A micromechanics-based nonlocal constitutive equations and estimates of representative volume element size for elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 44 :497–524.

[Dvorak, 1992] Dvorak, G. (1992). Transformation fields analysis of inelastic composite materials. In *Proceeding of the Royal Society A 437*.

[Einstein, 1906] Einstein, A. (1906). Eine neue bestimmung der molekuldimensionen. *Annalen der Physik*, 324 n 2 :289–306.

[Einstein, 1911] Einstein, A. (1911). Berichtigung zu meiner arbeit : "eine neue bestimmung der molekuldimensionen". *Annalen der Physik*, 339 n 3 :591–592.

[El-Moumen et al., 2013] El-Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and EL-Minor, H. (2013). Effect of overlapping inclusions on effective elastic propertiesof composites. *Mechanics Research Communications.*

[El-Moumen et al., 2015] El-Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and El-Minor, H. (2015). Computational thermal conductivity in porous materials using homogenization techniques : Numerical and statistical approaches. *Computational Materials Science.*

[Eshelby, 1957] Eshelby, J, D., editor (1957). *The determination of elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. Proceeding of Royal Society A 421.*

[Evesque, 2000] Evesque, P. (2000). Fluctuation, correlation and representative elemelement volume (rve) in granular materials. *Poudre and grains.*

[Faleskog et al., 1998] Faleskog, J., Gao, X., and Shih, C. F. (1998). Cell model for nonlinear fracture analysis i. micromechanics calibration. *Int. J. Fract., v89, p355-373.*

[Fei et al., 2012] Fei, H., Yazzie, K., Chawla., N., and Jiang, H. (2012). The effect of random voids in the modified gurson model. *J. Electron. Mater, v41, p177-183.*

[Feyel and Chaboche, 2000] Feyel, F. and Chaboche, J. (2000). Fe^2 multiscale approach for modeling the elastoviscoplastic behavior of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :309–330.

[Fritzen et al., 2012] Fritzen, F., Forest, S., Bohlke, T., Kondo, D., and Kanit, T. (2012). Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*, 29(Supplement C) :102 – 119.

[Fritzen et al., 2013] Fritzen, F., Forest, S., kondo, D., and Bohlke, D. (2013). computational homogenization of porous materials of green type. *Comput.Mesh. 52.121-134.*

[F.Scheyvaerts et al., 2011] F.Scheyvaerts, P.R.Onck, C.Tekogulu, and Pardoen., T. (2011). The growth and coalescence of ellipsoidal voids in plane strain under combined shear and tension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2) :373 – 397.

[F.Zairi et al., 2005] F.Zairi, Abdelaziz, M. N., Woznica, K., and Gloaguen, J. M. (2005). Constitutive equations for the viscoplastic damage behavior of a rubber-modified polymer. *Eur. J. Mech. A / Solids, v24, p169-182.*

[Gao X. and C, 2011] Gao X., Zhang T., Z. J. G. S. M. H. M. and C, R. (2011). On stress-state dependent plasticity, significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule. *Int. J. of Plasticity, v27(2), 217-231.*

[Garajeu, 1996] Garajeu, M. (1996). Effective behavior of porous viscoplastic materials containing axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Comptes Rendus de l'AcadÃ©mie des Sciences, SÃ©rie IIB, v323, p307-314.*

[Garajeu and Suquet, 1997] Garajeu, M. and Suquet, P. (1997). Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles. *J. Mech. Phys. Solids, v45, p873-902.*

[Gitman et al., 2007] Gitman, I., Askes, H., and Sluys, L. (2007). Représentative volume : existence and size determination. *Engineering fracture mechanics.*

[Gologanu et al., 1993] Gologanu, M., Leblond, J., and Devaux, J. (1993). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids-case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids, v41, p1723-1754.*

[Gologanu et al., 1997] Gologanu, M., Leblond, J., and H. Perrin, J. D. (1997). Recent extensions of gurson's model for porous ductile metals, in suquet, p. ed. *Continuum Micromechanics, Springer-Verlag, Berlin, p61-130.*

[Gologanu et al., 2001] Gologanu, M., Leblond, J. B., and H. Perrin, J. D. (2001). Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids i. coalescence in layers. *Int. J. Solids Struct., v38, p5581-5594.*

[Gurson, 1977] Gurson, A. L. (1977). theory of ductile rupture by void nucleation and growth, part i, yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mater. Technol., v99, p2-15.*

[Gusev, 1997] Gusev, A. (1997). Representative volume element size for elastic composites : a numerical study. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1449–1459.

[Guth and Gold, 1938] Guth, E. and Gold (1938). On the hydrodynamical theory of the viscosity of suspensions. *Phys. Rev.*, 53 :322.

[Hashin and Shtrikman, 1962] Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1962). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :343–352.

[Hashin and Shtrikman, 1963] Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127 – 140.

[Hazanov and Huet, 1994] Hazanov, S. and Huet, C. (1994). Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *J. Mech. Phys. Solids,*, 42 :1995–2011.

[Herve and Zaoui, 1995] Herve, E. and Zaoui, A. (1995). Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites. *International Journal of Engineering Sciences*, 33 :1419–1433.

[Hill, 965a] Hill, R. (1965a). A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, 13 :213–222.

[Hill, 965b] Hill, R. (1965b). Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*

[Hoang., 2015] Hoang., T. (2015). *Approches d'homogénéisation numériques incrémentales pour le calcul des structures hétérogǹes élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques.* PhD thesis, Université Paris-Est.

[Hsu et al., 2009] Hsu, C., Lee, B., and Mear, M. (2009). Constitutive models for power-law viscous solids containing spherical voids. *Int. J. of Plasticity, v25(1), 134-160.*

[Hu., 1996] Hu., G. (1996). A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber-reinforced composites. *Int. J. Plasticity.*

[Huet., 1990] Huet., C. (1990). Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *J. Mech. Phys. Solids*, 38 :813–841.

[Huet, 1991] Huet, C. (1991). Hierarchies and bounds for size effects in heterogeneous bodies. In *Proc. Sixth Symposium on Continum moels and Discrete Systems, Dijon, 1989 (ed. G.Maugin). vol. 2 pp 127-134.*

[Hutchinson, 1976] Hutchinson, J. (1976). Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. In *Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials.*

[Jean, 2009] Jean, A. (2009). Etude d'un élastomère chargé de la nanostructure au micro-comportement. *Thèse de doctorat de l'Ecole nationale superieure des mines de paris.*

[Jeulin and Ostoja-Starzewski, 2001] Jeulin, D. and Ostoja-Starzewski, M. (2001). *Mechanics of random and multiscale microstructures.* SpringerWienNewYork.

[Jiang et al., 2010] Jiang, Q. F., Y. Brunet, T., and Kanit (2010). Microstructure of the solid phase in fluidized beds for non-stokes regimes. *European J. of Mech. B - Fluids, v29(6), p435-441.*

[Kaddouri et al., 2016] Kaddouri, W., El Moumen, A., Kanit, T., Madani, S., and Imad, A. (2016). On the effect of inclusion shape on effective thermal conductivity of heterogeneous materials. *Mechanics of Materials.*

[Kanit et al., 2006] Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., and Jeulin, D. (2006). Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : Representativity of samples of two materials from food industry. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, (195) :3960–3982.

[Kanit et al., 2011] Kanit, T., Forest, S., Jeulin, D., N'Guyen, F., and Singleton, S. (2011). Virtual improvement of ice cream properties by computational homogenization of microstructures. *Mechanics Research Communications*, 38(2) :136 – 140.

[Kanit et al., 2003] Kanit, T., Forest, S., Mounoury, V., and Jeulin, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. Journal of Solids and Structures,*, 40 :3647–3679.

[Kari et al., 2008] Kari, S., Berger, H., Gabbert, U., Guinovart-Diaz, R., Bravo-Castillero, J., and Rodriguez-Ramos, R. (2008). Evaluation of influence of interphase material pparameter on effective material properties of three pahse composites. *Composites Science and Technology.*

[Kari et al., 2007] Kari, S., Berger, H., Rodriguez-Ramos, R., and U., G. (2007). Computational evaluation of effective material properties of composites reinforced by randomly distributed spherical particules. *Composite Structures*, 77 :pages 223–231.

[K.Danas et al., 2008] K.Danas, M.Idiart, and Castaneda, P. P. (2008). A homogenization-based constitutive model for isotropic viscoplastic porous media. *Int. J. of Solids and Structures, v45(11,12), 3392-3409.*

[Keralavarma and Benzerga, 2010] Keralavarma, S. and Benzerga, A. (2010). A constitutive model for plastically anisotropic solids with non-spherical voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(6) :874 – 901.

[Khdir et al., 2013] Khdir, Y., Kanit, T., Zairi, F., and Nait-Abdelaziz, M. (2013). Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 50(18) :2829 – 2835.

[Khdir et al., 2014] Khdir, Y. K., Kanit, T., Zairi, F., and Nait Abdelaziz, M. (2014). Computational homogenization of plastic porous media with two populations of voids. *Mater. Sci. Eng., v597, p324-330.*

[Khdir et al., 2015] Khdir, Y.-K., Kanit, T., Zairi, F., and Nait-Abdelaziz, M. (2015). A computational homogenization of random porous media : Effect of void shape and void content on the overall yield surface. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 49(Supplement C) :137 – 145.

[Kim et al., 2004] Kim, J., Gao, X., and Srivatsan, T. S. (2004). Modeling of void growth in ductile solids, effects of stress triaxiality and initial porosity. *Eng. Fract. Mech., v71, p379-400*, 28(3) :723 – 731. Twelfth International Workshop on Computational Mechanics of Materials.

[Koplik and Needleman, 1988] Koplik, J. and Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids. *Int. J. Solids Struct., v24, p835-853.*

[Kröner, 1961] Kröner, E. (1961). Zur plastischen verformung des vielkristalls (for the plastic deformation of the polycrystal). *Acta metallurgica.*

[Lachihab and Sab, 2008] Lachihab, A. and Sab, K. (2008). Does a representative volume element exists for fatigue life prediction ? the case of aggregate composites. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32, issue 9 :1005–1021.

[Lahellec and Suquet, 2013] Lahellec, N. and Suquet, P. (2013). Effective response and field statistics in elastoplastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non-radial loadings. *International Journal of Plasticity.*

[Laiarinandrasana et al., 2009] Laiarinandrasana, L., Besson, J., Lafarge, M., and Hochstetter, G. (2009). Temperature dependent mechanical behaviour of pvdf : Experiments and numerical modelling. *International Journal of Plasticity*, 25(7) :1301 – 1324.

[Lecarme et al., 2011] Lecarme, L., Tekoglu, C., and Pardoen., T. (2011). Void growth and coalescence in ductile solids with stage iii and stage iv strain hardening. *International Journal of Plasticity*, 27(8) :1203 – 1223.

[L.Flandi and Leblond, 2005] L.Flandi and Leblond, J. B. (2005). A new model for porous nonlinear viscous solids incorporating void shape effects. *Theory, Eur. J. Mech. A / Solids, v24, p537-551.*

[Li et al., 2011] Li, H., Fu, M. W., Lu, J., and Yang, H. (2011). Ductile fracture, experiments and computations. *Int. J. Plasticity, v27, p147-180.*

[Li and Huang, 2005] Li, Z. and Huang, M. (2005). Combined effects of void shape and void size oblate spheroidal micro-void embedded in infinite non-linear solid. *Int. J. Plasticity, v21, p625-650.*

[Li and Steinmann, 2006] Li, Z. and Steinmann, P. (2006). Rve-based studies on the coupled effects of void size and void shape on yield behavior and void growth at micron scales. *Int. J. Plasticity, v22, p1195-1216.*

[Lin et al., 2010] Lin, J., Kanit, T., Monchiet, V., Shao, J., and Kondo, D. (2010). Numerical implementation of a recent improved gurson-type model and application to ductile fracture. *Computational Materials Science*, 47(4) :901 – 906.

[Lippmann et al., 1997] Lippmann, N., Steinkopff, T., Schmauder, S., and Gumbsch., P. (1997). 3d-finite-element-modelling of microstructures with the method of multiphase elements. *Computational Materials Science*, 9(1) :28 – 35. Selected papers of the Sixth International Workshop on Computational Mechanics of Materials.

[Ma and Kishimoto, 1998] Ma, F. and Kishimoto, K. (1998). On yielding and deformation of porous plastic material. *Mech. Mater., v30, p55-68.*

[Madi et al., 2007] Madi, K., Forest, S., Boussuge, M., Gaillègue, S., Lataste, E., Buffière, J.-Y., Bernard, D., and Jeulin, D. (2007). Finite element simulations of the deformation of fused-cast refractories based on x-rau computed tomography. *Computational Materials Science*, 39 :224–229.

[Madou and Leblond, 2012a] Madou, K. and Leblond, J. B. (2012a). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids, i - limit-analysis of some representative cell. *J. Mech. Phys. Solids, v60(5), p1020-1036.*

[Madou and Leblond, 2012b] Madou, K. and Leblond, J. B. (2012b). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids, ii - determination of yield criterion parameters. *journal of the Mechanics and Physics of Solids, v60, p1037-1058.*

[Masmoudi, 1997] Masmoudi, M. (1997). Analyse elasto plastique par modélisation multicouche des éléments finis poutres de timoshenko. Master's thesis, Université de Batna.

[Masson et al., 2000] Masson, R., Bornert, M., Suquet, P., and Zaoui, A. (2000). An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*

[McElwain et al., 2006] McElwain, D., Roberts, A. P., and Wilkins, A. H. (2006). Yield criterion of porous materials subjected to complex stress states. *Acta Materialia*, 54(8) :1995 – 2002.

[M.Gologanu et al., 1994] M.Gologanu, Leblond, J., and Devaux, J. (1994). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids-case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *J. Eng. Mater. Technol., v116, p290-297.*

[Michel and Suquet, 1992] Michel, J. C. and Suquet, P. (1992). The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v40, p783-812.*

[Milton and Serkov, 2000] Milton, G. and Serkov, S. (2000). Bounding the current in nonlinear conducting composites. *J. Mech. Phys. Solids.*

[Minshnaevsky, 2004] Minshnaevsky, J. L. (2004). Three dimensional numerical testing of microstructures of particle reinforced composites. *Acta.*

[Molinari et al., 1987] Molinari, A., Canova, G., and Ahzi, S. (1987). A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metallurgica.*

[Monchiet et al., 2007] Monchiet, V., E.Charkaluk, and Kondo, D. (2007). An improvement of gurson-type models of porous materials by using eshelby-like trial velocity fields. *Comptes Rendus MÃ©canique, v335, p32-41.*

[Mori and Tanaka, 1973] Mori, T. and Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5) :571 – 574.

[Moulinec and Suquet, 1994] Moulinec, H. and Suquet, P. (1994). A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, v318(11), p1417-1423.*

[Moulinec and Suquet, 1998] Moulinec, P. and Suquet, P. (1998). A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v157(1), p 69-94.*

[MOUMEN, 2014] MOUMEN, A. E. (2014). *Prévision du comportement des matériaux hétérogènes basée sur l'homogénéisation numérique : modélisation, visualisation et étude morphologique*. PhD thesis, Université Lille 1.

[Moumen et al., 2014] Moumen, A. E., Imad, A., T. Kanit, E. M. H., and Minor, H. E. (2014). A multiscale approach and microstructure design of the elastic composite behavior reinforced with natural particles. *Composites Part B - Engineering, v66, p247-254.*

[Moumen et al., 2015a] Moumen, A. E., Kanit, T., Imad, A., and Minor, H. E. (2015a). Computational thermal conductivity in porous materials using homogenization techniques : Numerical and statistical approaches. *Computational Materials Science*, 97(Supplement C) :148 – 158.

[Moumen et al., 2015b] Moumen, A. E., Kanit, T., Imad, A., and Minor, H. E. (2015b). Effect of reinforcement shape on physical properties and representative volume element of particles-reinforced composites : Statistical and numerical approaches. *Mechanics of Materials*, 83(Supplement C) :1 – 16.

[Mroginski et al., 2011] Mroginski, J. L., Etse, G., and Vrech, S. M. (2011). A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media. *International Journal of Plasticity*, 27(4) :620 – 634.

[Needleman and V, 1984] Needleman, A. and V, V. T. (1984). An analysis of ductile rupture in notched bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v32, p461-490.*

[Negre et al., 2003] Negre, P., Steglich, D., Brocks, W., and Kosak, M. (2003). Numerical simulation of crack extension in aluminum welds. *Comput. Mater. Sci., v28, p723-731.*

[Nemat-Nasser and Hori, 2013] Nemat-Nasser, S. and Hori, M. (2013). *Micromechanics : Overall Properties of Heterogenous Materials.* Elsevier.

[Nezamabadi, 2009] Nezamabadi, S. (2009). *Méthode Asymptotique Numérique pour l'étude multi échelle des instabilités dans les matériaux hétérogènes.* PhD thesis, Université Paul Verlaine, Metz.

[Nielsen and Tvergaard, 2009] Nielsen, K. L. and Tvergaard, V. (2009). Effect of a shear modified gurson model on damage development in a fsw tensile specimen. *Int. J. Solids Struct., v46, p587-601.*

[Ortolano et al., 2013] Ortolano, J. M., Hernández, J., and Oliver, J. (2013). A comparative study on homogenization strategies for multi-scale analysis of materials. Technical report, International Center for Numerical Methods in Engineering Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Spain.

[Ostoja-Starzewski, 1993] Ostoja-Starzewski, M. (1993). Micromechanics as basis of random elastic continium approximations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 8 :107–114.

[Ostoja-Starzewski, 1998] Ostoja-Starzewski, M. (1998). Random field models of heterogeneous materials. *Int. J. Solids Structures*, 35 :2429–2455.

[Paola, 2010] Paola, F. D. (2010). *Modélisation multi-échelles du comportement thermo-élastique de composites Ã particules sphériques*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris.

[Pardoen and Hutchinson, 2000] Pardoen, T. and Hutchinson, J. W. (2000). An extended model for void growth and coalescence. *J. Mech. Phys. Solids, v48, p2467-2512.*

[Pedro and Castaneda, 1992] Pedro and Castaneda, P. (1992). A new variational principle and its application to nonlinear heterogeneous systems. *SIAM J. appl. Math.*

[Pilvin, 1997] Pilvin, P. (1997). Une approche inverse pour l'identification d'un modéle polycristallin élastoviscoplastique. In *Presses Académiques de l'Ouest.*

[Qi, 2006] Qi, B. (2006). Simulation numérique du comportement mécanique de composites à particules. rapport de stage de master 2,. *Ecole Centrale Paris.*

[Qiu and Weng, 1992] Qiu, Y. and Weng, G. (1992). A theory of plasticity for porous materials and particle-reinforced composites. *Int. J. Plasticity.*

[Reuss, 1929] Reuss, A. (1929). Berechnung der fliessgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitatsbedingung fur einekristalle. *Z. Angew. Math. Mech.*, 9 :49–59.

[Rice and Tracey, 1969] Rice, J. R. and Tracey, D. (1969). the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*.

[Roussette., 2005] Roussette., S. (2005). *Analyse par champs de transformation de matériaux élastoviscoplastiques multiphases - application aux combustibles mox*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.

[Sab, 1992] Sab, K. (1992). On the homogenization and the simulation of random materials. *Eur. J. Mech. Solids*, 11 :585–607.

[Sab, 2005] Sab, K. (2005). Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Compte Rendu de Mecanique 333, 187-195.*

[Sanchez-Palencia, 1974] Sanchez-Palencia, E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Engrg. Sci.*, 12 :331–351.

[Segurado et al., 2003] Segurado, J., Gonzalez, C., and Llorca, J. (2003). A niumerical investigation of the effect of particle clustering on the mechanical properties of composites. *Acta*.

[Segurado and Llorca, 2002] Segurado, J. and Llorca, J. (2002). A numerical approximation to the elastic properties of shere-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*.

[Segurado and Llorca, 2006] Segurado, J. and Llorca, J. (2006). Computational moicromechanics of composites : The effect of particle spatial distribution. *Mechanics of materials*.

[Siruguet and Leblond, 2004] Siruguet, K. and Leblond, J.-B. (2004). Effect of void locking by inclusions upon the plastic behavior of porous ductile solids - 1 : theoretical modeling and numerical study of void growth. *International Journal of Plasticity*, 20(2) :225 – 254.

[Smallwood, 1944] Smallwood, H. (1944). Limiting law of the reinforcement of rubber. *J. Appl. Phys*, 15 :758–766.

[Son and Kim, 2003] Son, H. S. and Kim, S. (2003). Prediction of forming limits for anisotropic sheets containing prolate ellipsoidal voids. *Int. J. Mech. Sci., v45, p1625-1643.*

[Terada et al., 1998] Terada, K., Ito, T., and Kikuchi, N. (1998). Characterisation of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method. *Comput. Methods Appl. Engng.*, 153 :223–257.

[Torquato, 2001] Torquato, S. (2001). Random heterogeneous materials : Microstructure and macroscopic properties. Technical report, Springer.

[Tvergaard, 1982] Tvergaard, V. (1982). On localization in ductile materials containing spherical voids. *Int. J. Fract., v18(4), p237-252.*

[Vadillo and Saez, 2009] Vadillo, G. and Saez, J. F. (2009). An analysis of gurson model with parameters dependent on triaxiality based on unitary cells. *Eur. J. Mech. A/Solids, v28, p417-427.*

[Vincent et al., 2009] Vincent, P., Monerie, Y., and Suquet, P. (2009). Porous materials with two populations of voids under internal pressure, i. instantaneous constitutive relations. *International Journal of Solids and Structures, v46(3-4),p480 a 506.*

[Vincent et al., 2014a] Vincent, P.-G., Suquet, P., Monerie, Y., and Moulinec, H. (2014a). Effective flow surface of porous materials with two populations of voids under internal pressure : I. a gtn model. *International Journal of Plasticity*, 56(Supplement C) :45 – 73.

[Vincent et al., 2014b] Vincent, P.-G., Suquet, P., Monerie, Y., and Moulinec, H. (2014b). Effective flow surface of porous materials with two populations of voids under internal pressure : Ii. full-field simulations. *International Journal of Plasticity*, 56(Supplement C) :74 – 98.

[Voigt, 1889] Voigt, W. (1889). Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitatsconstanten isotroper korper. *Annalen der Physik und Chemie*, 38 :573–587.

[Wen et al., 2005] Wen, J., Huang, Y., Hwang, K. C., Liu, and Li, M. (2005). The modified gurson model accounting for the void size effect. *Int. J. Plasticity, v21, p381-395.*

[Willis, 1983] Willis, J. (1983). The overall response of composite materials. *ASME J. Appl. Mech.*

[Willis, 1994] Willis, J. (1994). Upper and lower bounds for non-linear composite behaviour. *Materials Science and Engineering*.

[X. Gao et al., 2009] X. Gao, T. Z., Hayden, M., and Roe, C. (2009). Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy. *Int. J. Plasticity, v25, p2366-2382*.

[Yan Y. and H, 2013] Yan Y., Sun Q., C. J. and H, P. (2013). The initiation and propagation of edge cracks of silicon steel during tandem cold rolling process based on the gurson-tvergaard-needleman damage model. *J. Mater. Process Technol., v213, p598-605*.

[Yaning et al., 2009] Yaning, L., Dale, and Karr, G. (2009). Prediction of ductile fracture in tension by bifurcation, localization, and imperfection analyses. *International Journal of Plasticity*, 25(6) :1128 – 1153.

[Yee and Mear, 1996] Yee, K. C. and Mear, M. E. (1996). Effect of void shape on the macroscopic response of nonlinear porous solids. *Int. J. Plasticity, v12, p45-68*.

[Y.Sun and D.Wang, 1989] Y.Sun and D.Wang (1989). A lower bound approach to the yield loci of porous materials. *Acta Mech., v5, p237-243*.

[Zadpoor et al., 2009] Zadpoor, A., Sinke, J., and Benedictus, R. (2009). Formability prediction of high strength aluminum sheets. *Int. J. Plasticity, v25, p2269-2297*.

[Zairi et al., 2008a] Zairi, F., Nait-Abdelaziz, M., Gloaguen, J., and A. Bouaziz, a. J. L. (2008a). Micromechanical modelling and simulation of chopped random fiber reinforced polymer composites with progressive debonding damage. *International Journal of Solids and Structures*, 45(20) :5220 – 5236.

[Zairi et al., 2008b] Zairi, F., Nait-Abdelaziz, M., Gloaguen, J. M., and Lefebvre, J. M. (2008b). Modelling of the elasto-viscoplastic damage behaviour of glassy polymers. *International Journal of Plasticity*, 24(6) :945 – 965.

[Zairi et al., 2011] Zairi, F., Nait-Abdelaziz, M., Gloaguen, J. M., and Lefebvre, J. M. (2011). A physically-based constitutive model for anisotropic damage in rubber-toughened glassy polymers during finite deformation. *International Journal of Plasticity*, 27(1) :25 – 51.

[Zaoui and Masson, 2000] Zaoui, A. and Masson, R. (2000). Micromechanics-based modeling of plastic polycrystals : an affine formulation. *Materials Science and Engineering*.

[Zeman and Sejnoha, 2001] Zeman, J. and Sejnoha, M. (2001). Numerical evaluation of effective elastic properties of graphit fibre tow impregnated by polymer matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :69–90.

[Zhang et al., 2000] Zhang, Z., Thaulow, C., and Odegard, O. (2000). A complete gurson model approach for ductile fracture. *Eng. Fract. Mech., v67, p155-168*.

[Zuo et al., 1996] Zuo, J. Z., Lou, Z. W., and Kuang, Z. B. (1996). A yield function for porous ductile materials. *Eng. Fract. Mech., v53, p557-559*.

ملخص

تتناول هذه الأطروحة دراسة عددية على خلايا وحدة ثلاثية الأبعاد مع فراغات كروية الواردة في مصفوفة خاضعة لمعيار فون ميسيس. الهدف من ذلك هو تقدير عتبة اللدونة للبنية المجهرية لحالتين : اثار الفراغات المتداخلة وكذالك شكلها على عتبة اللدونة . تتمثل اصالة هذا العمل في دراسة فراغات كروية متداخلة متطابقة تغطي مجموعة واسعة من الاجهادات و في الحالة الثانية، لدراسة آثار شكل الفراغات على عتبة اللدونة .

Abstract

The present thesis concerns a numerical study on three-dimensional unit cells with spherical voids contained in a matrix obeying the von Mises criterion.

the objective is to estimate the effective microstructure (3D) plasticity threshold for two cases: the effects of percolating voids and the shape of the voids on the effective plasticity threshold.

The originality of this work, for the first case, is to treat identical spherical overlapping voids covering a wide range of stress triaxiality ratios, and for the second case, to examine the effects of the shape of the voids on the threshold. of effective plasticity.

Résumé

La présente thèse concerne une étude numérique sur des cellules unitaire tri dimensionnelle avec des vides sphériques contenu dans une matrice obéissant au critère de von Mises.

L’objectif est d'estimer le seuil de plasticité effectif des microstructures (3D) pour deux cas: les effets des vides en percolation et la forme des vides sur le seuil de plasticité effectif.

L'originalité de ce travail, pour le premier cas, est de traiter des vides sphériques identiques en chevauchement couvrant une large gamme de rapports de triaxialité de contrainte, et pour le deuxième cas, examiner l'effets de la forme des vides sur le seuil de plasticité effectif.