



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BATNA 2
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GENIE MÉCANIQUE

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur en Sciences

Spécialité : MÉCANIQUE

Option : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

Par

Wahid KADDOURI

THEME

**Construction d'un modèle unique pour les milieux
hétérogènes à morphologies aléatoires et périodiques
- Application aux matériaux composites -**

Soutenue publiquement le 26/06/2016 devant le jury composé de :

Kamel ZIDANI	Professeur, Université de Batna 2	Président
Salah MADANI	Professeur, Université de Batna 2	Rapporteur
Toufik KANIT	M.Conférences HDR, Université de Lille I - France	Co-rapporteur
Toufik OUTTAS	Professeur, Université de Batna 2	Examineur
Salim MEZIANI	Professeur, Université Mentouri - Constantine	Examineur
Mabrouk HECINI	Professeur, Université Mohamed Khider - Biskra	Examineur

Dédicace

A la mémoire de mon père

A toute ma famille

Wahid

Remerciements

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit a été réalisé en collaboration entre le Laboratoire de Mécanique des Structures et Matériaux (**LaMSM**) de l'Université de Batna 2, Algérie et le Laboratoire de Mécanique de Lille (**LML**) de l'université de Lille 1, France.

Je souhaite exprimer mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse **Salah MADANI** et **Toufik KANIT** pour leurs conseils, leur soutien et leur disponibilité tout au long de ce travail. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

J'adresse mes remerciements les plus vifs à monsieur **Kamel ZIDANI** qui a accepté d'examiner et de présider mon jury de thèse.

Mes vifs remerciements sont également adressés à messieurs **Toufik OUTTAS**, **Salim MEZIANI** et **Mabrouk HECINI** d'avoir accepté de juger ce travail.

Je souhaite également remercier particulièrement toutes les personnes qui ont pris part à la relecture du manuscrit, mes amis **Mohamed MASMOUDI** et **Abelraouf BENGHOZAL**.

Je remercie aussi et chaleureusement la contribution fructueuse de Mr **Ahmed El MOUMEN** et du Mr **Imad ABDELATIF** à la rédaction de l'article ainsi que Mr **Mohamed Belmrikhi** de l'école polytechnique de Lille et de Mr **Mohieddine NAOUN** à la relecture minutieuse de cet article.

Un grand merci à mes collègues du bureau, **Abdellah BOURIH**, **Ahmed BOUSSAHA** et **Mohamed MASMOUDI**, pour leur patience, leur soutien et surtout pour la bonne ambiance.

Mes remerciements s'adressent également à tous les collègues enseignants et doctorants du département de mécanique et du laboratoire qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Je remercie notamment **Mohamed Said BOUTAANI** surtout pour l'outil graphique qui nous a permis la génération de toutes les microstructures étudiées et **Kamel FEDDAOUI**, spécialement, pour le « fameux » script qui nous a « sauvé la vie » en nous facilitant considérablement les calculs.

Une pensée particulière à mes enseignants Mrs **Rachid ABDESSAMED**, **Hocine**

BENMOUSSA, Salah DERRADJI, Brahim MOHAMEDI, Boudjemaa BOUHZILA et Boubaker ZAOUCH ainsi que mes amis **Rafik MAKHLOUFI, Youcef TAMENE, Yassine DEMAGH, Ghazali MEBARKI, Djamel BATACHE, Belkacem CHEFRI et Samir ACHOURI** pour leurs encouragements et soutient moral.

Et pour finir, je remercie ma famille de m'avoir soutenu et supporté durant ces années de thèse et qui ont su me soutenir pendant les moments difficiles.

Nomenclature

σ_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des contraintes du matériau hétérogène
ε_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des déformations du matériau hétérogène
Σ_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des contraintes macroscopiques du matériau homogène
E_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des déformations macroscopiques du matériau homogène
$\langle \rangle$	La moyenne
c_{ijkl}	Tenseur local d'élasticité
s_{ijkl}	Tenseur local de souplesse
C_{ijkl}	Tenseur apparent d'élasticité
S_{ijkl}	Tenseur apparent de souplesse
P	Fraction volumique
k	Module de compressibilité
μ	Module de cisaillement
u	Déplacement
V	Volume du domaine 3D
∂V	Les limites du domaine 3D
S	Surface du domaine 2D
∂S	Les limites de la surface 2D
VER	Volume élémentaire représentatif
SER	Surface élémentaire représentative
E	module d'élasticité
ν	Coefficient de poisson
λ	Coefficient de la conductivité thermique
ρ	Coefficient de la résistivité thermique
i	Indice correspondant à l'inclusion.
m	Indice correspondant à la matrice
ph	Indice de la phase
T	Température
∇T ou g	Gradient de température local

q	Flux de chaleur local
d	Taille de l'hétérogénéité
l	Taille du VER
L	Taille de la structure
A_{ijkl}	Tenseur de localisation des déformations
B_{ijkl}	Tenseur de localisation des contraintes
G_i	Tenseur macroscopique du gradient de température
Q_i	Tenseur macroscopique du flux de chaleur
a_{ij}	Tenseur de localisation du gradient de température
b_{ij}	Tenseur de localisation du flux de chaleur
A_n	La portée intégrale
A_{th}	Modèle proposé de la portée intégrale
A_{fit}	La portée intégrale obtenue par fittage
A, B	Parametres de fittage
a, b, c	Parametres de fittage

Table des matières

Introduction générale	1
1 Homogénéisation	3
1.1 Introduction	3
1.2 Techniques d'homogénéisation	4
1.2.1 Les Méthodes analytiques	4
1.2.2 Les Méthodes numériques	4
1.2.2.1 Les Méthodes intégrées	4
1.2.2.2 Les Méthodes séquencées	5
1.3 Principes de l'homogénéisation	5
1.3.1 Représentation :	5
1.3.1.1 Elasticité linéaire	6
1.3.1.2 Conductivité thermique	7
1.3.2 Localisation	7
1.3.2.1 Elasticité linéaire	7
1.3.2.2 Conductivité thermique	8
1.3.3 Homogénéisation	8
1.3.3.1 Elasticité linéaire	8
1.3.3.2 Conductivité thermique	9
1.3.4 Condition de HILL	9
1.3.5 Conditions aux limites et moyenne des champs locaux	
10	
1.3.5.1 Elasticité linéaire	10
1.3.5.2 Conductivité thermique	11
1.3.5.3 Propriétés apparentes et effectives	12

1.4	Estimations analytiques des propriétés élastiques	18
1.4.1	Estimations analytiques	19
1.4.1.1	Einstein (1906-1911)	19
1.4.1.2	Smallwood (1944)	19
1.4.1.3	Guth-Gold (1938)	19
1.4.1.4	Budiansky (1965)	19
1.4.2	Modèles analytiques de changement d'échelles.	20
1.4.2.1	Problème de l'inclusion d'Eshelby	20
1.4.2.2	Schéma des distributions diluées	20
1.4.2.3	Modèle auto-cohérent	21
1.4.2.4	Mori-Tanaka (1973)	22
1.4.3	Encadrement analytique	23
1.4.3.1	Bornes d'ordre zéro	23
1.4.3.2	Bornes du premier ordre	24
1.4.3.3	Bornes du second ordre [Dirrenberger, 2012]	26
1.5	Estimations analytiques des propriétés thermiques	28
1.5.1	Modèles analytiques de changement d'échelles	28
1.5.1.1	Problème de l'inclusion d'Eshelby	28
1.5.1.2	Schéma des distributions diluées :	29
1.5.1.3	Modèle auto-cohérent	29
1.5.1.4	Schéma de Mori-Tanaka	29
1.5.2	Estimations théoriques	30
1.5.2.1	Estimation de Maxwell -Garnett	30
1.5.2.2	Modèle auto-cohérent de Bruggeman	31
1.5.3	Encadrements analytiques des propriétés thermiques	32
1.5.3.1	Bornes d'ordre 0	32
1.5.3.2	Bornes d'ordre 1	32
1.5.3.3	Bornes d'ordre 2	33
1.6	Synthèse	34
2	Homogénéisation en Elasticité Linéaire	35
2.1	Introduction	35
2.2	Représentation de la microstructure	36

2.2.1	Description de la microstructure	36
2.2.2	Propriétés physiques utilisées	38
2.3	Outils numériques	38
2.3.1	Technique de maillage utilisée	38
2.3.2	Détermination de la densité du maillage	39
2.4	Propriétés élastiques apparentes et effectives	40
2.4.1	Notion de la portée intégrale	40
2.4.2	Stationnarité et Ergodicité	41
2.4.3	Fluctuation des propriétés apparentes	42
2.4.4	Propriétés élastiques apparentes et effectives	43
2.4.5	Estimation numérique de la portée intégrale et proposition du modèle	54
2.5	Validation et exploitation du modèle	65
2.5.1	Concept de la morphologie équivalente	65
2.5.2	Notion du matériau le plus hétérogène	66
2.6	Synthèse	67
3	Homogénéisation en Conductivité Thermique	69
3.1	Introduction	69
3.2	Modèles théoriques	70
3.3	Homogénéisation numérique de la conductivité thermique	71
3.3.1	Représentation de la microstructure	71
3.3.2	Propriétés physiques	73
3.3.3	Technique de maillage utilisée	74
3.3.4	Détermination de la densité du maillage	74
3.3.5	Conditions aux limites	75
3.4	Résultats de l'homogénéisation numérique	76
3.5	Propriétés thermiques apparentes et effectives	76
3.5.1	Fluctuation des propriétés apparentes	77
3.5.2	Conductivités thermiques apparentes et effectives	78
3.5.3	Conductivité thermique effective vs morphologie des inclusions	80
3.5.3.1	Expression reliant la conductivité thermique des matériaux poreux à la forme des inclusions	85
3.6	Synthèse	90

4	Validation du modèle proposé	91
4.1	Introduction	91
4.2	Matériaux lotus [Nakajima., 2013]	91
4.3	Cuivre Lotus comme dissipateur de chaleur [Nakajima., 2013]	93
4.4	Simulation numérique de la conductivité thermique effective du cuivre lotus	96
4.4.1	Structure du cuivre lotus et hypothèses de calcul	96
4.4.2	Effet de la taille des pores sur la conductivité thermique effective .	97
4.4.3	Présentation des résultats	101
4.4.4	Confrontation du modèle proposé aux résultats expérimentaux . . .	103
4.5	Synthese	104
	Conclusion générale	106
	Annexes	108
A	L'Approche Kanit et al.[Teixeira-Pinto, 2012]	109
A.1	Partition du volume initial	109
A.2	1 ^{ère} Méthode : Analyse déterministe	110
A.3	2 ^{ème} Méthode : Détermination statistique de la taille du <i>V.E.R</i>	111
A.4	Algorithme de détermination de la taille optimale du VER pour une propriété additive	112
	Bibliographie	113

Liste des tableaux

2.1	Les valeurs des simulations numériques, les bornes de Voigt, Les bornes de Hashin-Shtrikman HS +, le modèle auto-cohérent (AC) pour P = 10% et l'erreur relative entre la simulation et le modèle auto-cohérent.	53
2.2	Les valeurs des simulations numériques, les bornes de Voigt, Les bornes de Hashin-Shtrikman HS +, le modèle auto-cohérent (AC) pour P=30% et l'erreur relative entre la simulation et le modèle auto-cohérent.	53
2.3	Les valeurs des simulations numériques, les bornes de <i>Voigt</i> , les bornes de Hashin-Shtrikman HS +, le modèle auto-cohérent (AC) pour P=50% et l'erreur relative entre la simulation et le modèle auto-cohérent.	54
2.4	Valeurs de A_n pour la fraction volumique P = 10% et pour r = 0.2, r = 0.5 et r = 1.0	55
2.5	Valeurs de A_n pour la fraction volumique P = 30% et pour r = 0.2, r = 0.5 et r = 1.0	55
2.6	Valeurs de A_n pour la fraction volumique P = 50% et pour r = 0.5 et r = 1.0	55
3.1	Quatre structures fondamentales de modèles de la conductivité thermique effective pour les matériaux à deux phases.	71
3.2	Conductivités thermiques utilisées pour les deux composites	73
3.3	Paramètres de fittage pour les différentes conductivités thermiques de la matrice comparés au modèle de Maxwell	85
3.4	Paramètres de fittage a , b , et c pour différentes conductivités thermiques λ_m de la matrice.	87
4.1	Valeurs de conductivité thermique pour une fraction volumique totale de P = P1+P2 = 10%	101
4.2	Valeurs de conductivité thermique pour une fraction volumique totale de P = P1+P2 = 30%	102

4.3 Valeurs de conductivité thermique pour une fraction volumique totale de P
= P1+P2 = 50% 102

Table des figures

1.1	Echelles de représentation en homogénéisation	6
1.2	Illustration de la convergence de la propriété Z pour les différentes conditions aux limites	15
1.3	Illustration du principe de la solution diluée.	21
1.4	Illustration du principe du schéma Auto-cohérent	21
2.1	Exemples de microstructures étudiées pour une fraction volumique $P=10\%$ et un rapport de forme $r=0.2$. -a- 10 inclusions, -b- 100 inclusions et -c- 500 inclusions.	37
2.2	Exemples de microstructures étudiées pour une fraction volumique $P=30\%$ et un rapport de forme $r=0.5$. -a- 10 inclusions, -b- 100 inclusions et -c- 500 inclusions.	37
2.3	Exemples de microstructures étudiées pour une fraction volumique $P=50\%$ et un rapport de forme $r=1.0$. -a- 10 inclusions, -b- 100 inclusions et -c- 500 inclusions.	37
2.4	-a- Maillage régulier de densité 100×100 , -b- microstructure à 100 inclusions, $P = 50\%$ and $r = 0,3$. -c- Microstructure maillée avec 40000 EF.	39
2.5	-a- Convergence du coefficient de compressibilité k en fonction de la densité du maillage. -b- temps de calcul correspondant à chaque cas de maillage.	40
2.6	Propriété de stationnarité du domaine V	41
2.7	Propriété d'ergodicité du domaine V	41
2.8	-a- Une Microstructure à une inclusion de volume V et d'une fraction volumique de 30% considérée comme unité. -b- Une microstructure à 9 inclusions de même fraction volumique et de volume $9.V$	43
2.9	Microstructure à 10 inclusions sollicitée à la déformation uniforme KUBC. -a- Traction. -b- Cisaillement.	44

2.10	Microstructure à 10 inclusions déformée sous l'effet d'une sollicitation périodique PBC. -a- Traction. -b- Cisaillement.	44
2.11	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 10\%$ et $r = 0.2$	45
2.12	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 10\%$ et $r = 0.5$	46
2.13	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 10\%$ et $r = 1.0$	47
2.14	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 30\%$ et $r = 0.2$	48
2.15	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 30\%$ et $r = 0.5$	49
2.16	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 30\%$ et $r = 1.0$	50
2.17	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 50\%$ et $r = 0.5$	51
2.18	Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusion pour le cas $P = 50\%$ et $r = 1.0$	52
2.19	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 10\%$ et $r = 0,2$	57
2.20	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 10\%$ et $r = 0,5$	58
2.21	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 10\%$ et $r = 1,0$	59
2.22	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 30\%$ et $r = 0,2$	60
2.23	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 30\%$ et $r = 0,5$	61
2.24	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 30\%$ et $r = 1,0$	62
2.25	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 50\%$ et $r = 0,5$	63
2.26	Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et m^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 50\%$ et $r = 1,0$	64

2.27	Concept de la morphologie équivalente : -a- morphologie originale, -b- morphologie équivalente	66
2.28	Variation du VER en fonction de la fraction volumique P de et la fraction volumique P^* correspondant au matériau le plus hétérogène.	67
3.1	Paramètre de forme de l'inclusion	72
3.2	Exemples des microstructures étudiées.	73
3.3	- a - Maillage régulier de densité 100x100. - b - Exemple de microstructure à 10 inclusions maillée.	74
3.4	-a- Convergence du coefficient de conductivité thermique λ en fonction de la densité du maillage. -b- temps de calcul correspondant à chaque cas de maillage.	75
3.5	Valeurs moyennes de la conductivité thermique apparente λ^{app} pour ($P = 10\%$, $r = 0.5$) en fonction du nombre d'inclusions N pour le composite 1.	78
3.6	Valeurs moyennes de la conductivité thermique apparente λ^{app} pour ($P = 30\%$, $r = 0.2$) en fonction du nombre d'inclusions N pour le composite 1.	79
3.7	Valeurs moyennes de la conductivité thermique apparente λ^{app} pour ($P = 50\%$, $r = 0.5$) en fonction du nombre d'inclusions N pour le composite 1.	79
3.8	VER_d en fonction du rapport de forme r pour tous les cas étudiés.	80
3.9	Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 10\%$	81
3.10	Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 20\%$	81
3.11	Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 30\%$	82
3.12	Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 40\%$	82
3.13	Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 50\%$	83
3.14	Distribution locale de λ pour le composite 1, $P = 30\%$, $\lambda_m = 30[W/Km]$ et $\lambda_i = 0.026[W/Km]$: -a- $r = 0.3$, -b- $r = 0.5$ et -c- $r = 1.0$	84
3.15	Distribution locale de λ pour le composite 2, $P = 30\%$, $\lambda_m = 30[W/Km]$ et $\lambda_i = 10[W/Km]$: -a- $r = 0.3$, -b- $r = 0.5$ et -c- $r = 1.0$	84
3.16	Résultats numériques (points) et les modèles continus proposés (fittage) pour les différents cas étudiés.	86

3.17	Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 30[W/m.K]$	88
3.18	Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 100[W/m.K]$	88
3.19	Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 150[W/m.K]$	89
3.20	Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 300[W/m.K]$	89
4.1	Des exemples de micrographies optiques du cuivre poreux de type-lotus à deux fractions volumiques 44.9 % et 36.6%. [Nakajima., 2013]	92
4.2	Matériau poreux de type mousse	93
4.3	Cuivre type-lotus.[Nakajima, 2010]	94
4.4	Configuration des ailettes à rainures conventionnelles. -a- Refroidissement à l'air -b- Refroidissement à l'eau. [Nakajima., 2013]	95
4.5	Dissipateurs de chaleur de type cuivre lotus. -a- Refroidissement à l'air -b- Refroidissement à l'eau. [Nakajima., 2013]	95
4.6	Illustration des conductivités thermiques effectives perpendiculaires et parallèles aux pores	96
4.7	Vue en coupe d'un matériau lotus. [Nakajima., 2013]	97
4.8	Microstructure à deux populations : -a- $P_1 = P = 10\%$ et $P_2 = 0\%$; -b- $P_1 = 6.0\%$ et $P_2 = 4\%$.; -c- $P_1 = 4\%$ et $P_2 = 6\%$ et -d- $P_1 = 0\%$ et $P_2 = P = 10\%$	98
4.9	Microstructure à deux populations : -a- $P_1 = P = 30\%$ et $P_2 = 0\%$; -b- $P_1 = 20\%$ et $P_2 = 10\%$; -c- $P_1 = 10\%$ et $P_2 = 20\%$ et -d- $P_1 = 0\%$ et $P_2 = P = 30\%$	99
4.10	Microstructure à deux populations : -a- $P_1 = P = 50\%$ et $P_2 = 0\%$; -b- $P_1 = 30\%$ et $P_2 = 20\%$; -c- $P_1 = 20\%$ et $P_2 = 30\%$ et -d- $P_1 = 0\%$ et $P_2 = P = 50\%$	100
4.11	Distribution locale de la conductivité thermique dans un VER à deux populations de pores.	101
4.12	Conductivité thermique effective en fonction de la fraction volumique P2.	102

4.13	Morphologies équivalentes : -a- Microstructure à n populations. -b- Micro-structure à une population	103
4.14	-a- Comparaison du modèle proposé aux résultats expérimentaux établis par [Nakajima, 2010], -b- Résultats expérimentaux et modèle établis par [Nakajima, 2010]	103
4.15	Comparaison des résultats expérimentaux [Nakajima, 2010] au modèle proposé pour trois rapports de forme : $r = 1$, $r = 0.8$ et $r = 1.0$	104
A.1	Illustration d'une subdivision -a- régulière et -b- aléatoire.	110

Introduction générale

Dans ces dernières décennies, la modélisation et la simulation numérique occupent une place de plus en plus importante dans la recherche en science des matériaux. Ceci s'explique non seulement par l'amélioration continue des performances des calculateurs, mais aussi par la disponibilité de nouveaux codes et techniques de calculs. Il est désormais possible de déterminer les propriétés d'une large gamme de matériaux pour prédire leurs comportements avec une précision suffisante pour être confrontée à l'expérience, à la fois à une échelle microscopique mais aussi méso et macroscopique. Selon l'échelle d'observation, un même matériau peut être considéré comme homogène ou hétérogène. L'hétérogénéité est liée aux différents constituants élémentaires du matériau (granulats et ciments dans les bétons, fibres et résine dans un matériau composite, polycristaux dans un matériau métallique, . . .). L'homogénéisation a pour but de remplacer ce matériau hétérogène par un milieu homogène de comportement équivalent.

Deux approches de l'homogénéisation sont distinguées, les approches analytiques et les approches numériques. Les méthodes analytiques s'appuient sur une microstructure simplifiée, typiquement une inclusion dans une matrice infinie, pour permettre de calculer analytiquement des grandeurs moyennes par phase. Les méthodes numériques considèrent, elles, un élément de volume du matériau, de dimension finie, dont on simule numériquement la réponse mécanique ou thermique. Pour les milieux aléatoires, ce volume, dit Volume Élémentaire Représentatif (*V.E.R*), doit respecter des conditions spécifiques afin de permettre une bonne représentation de la microstructure réelle.

Aujourd'hui, et avec le développement technologique, une grande importance est donnée aux matériaux poreux pour leurs applications industrielles répandues, matériaux de construction (plaques de plâtre, béton cellulaire), la filtration (filtres à particules, membranes pour le traitement de l'eau), le biomédical (substituts osseux, revêtements), etc.. Cette catégorie de matériaux, fait l'objet d'un intérêt grandissant de la communauté scientifique de par sa multifonctionnalité. Leur phase poreuse peut en effet apporter, au-delà de la légèreté, une capacité d'isolation thermique, d'absorption acoustique, une surface d'échange importante pour des réactions chimiques ou pour la filtration, ou encore un accès aux fluides et aux cellules pour les biomatériaux. Néanmoins la porosité affecte les

propriétés mécaniques de ces matériaux. Il est nécessaire de caractériser ces propriétés pour assurer la tenue en service des matériaux, même si les paramètres mécaniques (modules d'élasticité, résistances) ne présentent pas des valeurs élevées que celle des matériaux non poreux. Donc l'utilisation de ces matériaux nécessite une connaissance approfondie de leurs propriétés mécaniques et physiques, quelle que soit l'application.

L'objectif principal de notre travail est l'étude de l'influence de la morphologie des pores sur les propriétés mécaniques élastiques et thermiques des matériaux poreux en utilisant l'homogénéisation numérique.

Cette thèse s'articule en quatre chapitres. Le premier chapitre est constitué principalement de rappels des méthodes et techniques d'homogénéisation des milieux hétérogènes. Les lois de comportement thermique et mécanique sont abordées, ainsi que le principe des puissances virtuelles. La notion de volume élémentaire représentatif est introduite et les conditions aux limites des problèmes d'homogénéisation sont ensuite analysées. Afin de pouvoir comparer les résultats provenant de l'homogénéisation numérique, les estimateurs et autres bornes analytiques sont aussi présentés.

Le deuxième chapitre est dédié à l'identification de la portée intégrale, un paramètre statistique purement morphologique, afin de cerner l'effet de la morphologie des pores sur les propriétés élastiques, à citer le coefficient de compressibilité k et le coefficient de cisaillement μ . L'approche, ainsi adoptée, est statistique numérique proposée par [Kanit et al., 2003]. L'étude est réalisée sur une matrice poreuse à cinq formes de porosité différentes et pour trois fractions volumiques. Les résultats trouvés ont montré l'absence de l'effet de forme vis à vis de la portée intégrale pour ce cas de matériaux et ont conduit à deux concepts : Le concept de la morphologie équivalente et celui du matériau le plus hétérogène.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation du comportement thermique, deux types de microstructures ont été étudiées, une poreuse et l'autre non poreuse. Pour les deux milieux, cinq formes de pores/inclusions différentes avec cinq fractions volumiques et quatre conductivités thermiques différentes de la matrice ont été considérées. D'après les résultats obtenus, l'effet de forme n'est constaté que pour le milieu poreux. Une formule, obtenue numériquement, permettant l'estimation de la conductivité thermique des milieux poreux tenant en compte l'effet de la forme des pores est proposée.

Le dernier chapitre sera consacré à la validation du modèle proposé dans le chapitre précédent, par sa confrontation aux résultats expérimentaux publiés dans la littérature [Nakajima, 2010].

En fin, une conclusion générale vient clôturer ce travail.

Chapitre 1

Homogénéisation

1.1 Introduction

L'augmentation constante de la puissance des ordinateurs a fait de la simulation numérique un outil incontournable pour la modélisation des phénomènes physiques de plus en plus complexes, jusqu'à arriver à la résolution des problèmes multi-physiques à toutes les échelles et même à pouvoir intégrer simultanément dans un même modèle plusieurs échelles de représentation afin de prédire l'influence du comportement des petites échelles sur le comportement d'une structure macroscopique. Cette évolution a permis, aussi, le développement d'un grand nombre de méthodes de changement d'échelles dites méthodes d'homogénéisation, permettant la prédiction du comportement des matériaux hétérogènes par des modèles homogènes. Deux approches de l'homogénéisation sont distinguées : les approches analytiques et les approches numériques. Les méthodes analytiques s'appuient sur une microstructure simplifiée, typiquement une inclusion dans une matrice infinie, pour permettre de calculer analytiquement des grandeurs moyennes par phase. Les méthodes numériques considèrent, elles, un élément de volume du matériau, de dimension finie, dont on simule numériquement la réponse thermique ou mécanique. Pour les milieux aléatoires, ce volume, dit Volume Élémentaire Représentatif (*V.E.R*), doit respecter des conditions spécifiques afin de permettre une bonne représentation de la microstructure réelle.

Dans ce chapitre, on commence par un rappel du cadre d'application de l'homogénéisation, en particulier l'hypothèse fondamentale de la séparation des échelles de représentation. Le problème sur le volume élémentaire représentatif *V.E.R* est ensuite posé, en contrainte ou en déformation pour les problèmes d'élasticité, ou en flux de chaleur et gradient de température pour la conductivité thermique. On termine par une présentation des différentes méthodes approchées d'homogénéisation qui fournissent des expressions analytiques du comportement effectif en élasticité et en thermique.

1.2 Techniques d'homogénéisation

Les techniques d'homogénéisation sont classées en deux grandes catégories, les méthodes analytiques et les méthodes numériques [Jean, 2009].

1.2.1 Les Méthodes analytiques

Parmi les nombreuses méthodes analytiques, on peut citer les premières théories mathématiques de l'homogénéisation qui utilisent des développements asymptotiques des grandeurs mécaniques telles que la contrainte et la déformation [Beran, 1968], [Sanchez-Palencia, 1974], [Bensoussan and Papanicolaou, 1978].

Il existe également un ensemble de bornes et estimations largement utilisé par les mécaniciens et les physiciens. Les bornes (*supérieure et inférieure*) encadrent les propriétés d'un matériau hétérogène. Il existe plusieurs types de bornes qui se différencient par la finesse de description des échelles. En effet, les bornes inférieure et supérieure sont d'autant plus resserrées que la connaissance de la microstructure est fine.

Enfin les estimations théoriques permettent, sous certaines hypothèses spécifiques, d'évaluer les propriétés effectives d'un matériau hétérogène. Elles présentent l'avantage d'approcher avec plus de précision le comportement du matériau hétérogène contrairement aux bornes qui fournissent un encadrement. On peut écrire une estimation à partir d'une approche micromécanique comme dans le cas du modèle auto-cohérent [Berveiller and Zaoui, 1979], ou à partir de principes variationnels [Ponte Castaneda, 1989].

1.2.2 Les Méthodes numériques

Les méthodes numériques sont connues sous deux grandes classes, les méthodes intégrées et les méthodes séquencées.

1.2.2.1 Les Méthodes intégrées

Les méthodes intégrées consistent à prendre en compte simultanément les deux échelles, microscopique et macroscopique, dans le calcul par éléments finis. La méthode FE^2 [Feyel and Chaboche, 2000] est la méthode la plus citée dans la littérature. C'est une méthode qui présente plusieurs niveaux de calculs par éléments finis caractérisant différentes échelles physiques.

1.2.2.2 Les Méthodes séquencées

Pour les méthodes séquencées, on cherche à estimer les propriétés macroscopiques d'un matériau en effectuant un ou plusieurs calculs d'une description pertinente de la microstructure correspondante. La plupart des travaux ont été menés sur des cas bidimensionnels, par exemple le cas de fibres de carbone dans une matrice polymère [Zeman and Sejnoha, 2001]. Essayant de s'approcher avec plus de précision de la morphologie réelle de la microstructure, dans le domaine des polycristaux, une modélisation tridimensionnelle utilisant les polygones de Voronoï est utilisée. Pour estimer correctement les propriétés macroscopiques, la description de la microstructure doit être suffisamment riche et réaliste. Dans certains cas, la modélisation de la microstructure est très difficile, l'utilisation des images tridimensionnelles obtenues par microtomographie s'avère indispensable [Madi et al., 2007], [Burteau et al., 2007].

Les propriétés effectives d'un matériau hétérogène sont déterminées en moyennant les champs locaux sur un Volume Élémentaire Représentatif (*V.E.R*) caractérisé par la taille et une description géométrique suffisante de la microstructure. La taille du *V.E.R* n'est à priori pas connue, sa détermination est assurée par une méthode statistique [Kanit et al., 2003]. Cette méthode consiste à calculer les propriétés apparentes de microstructures de tailles croissantes avec plusieurs réalisations de la microstructure à taille donnée, et à caractériser la représentativité statistique de la grandeur mesurée vis-à-vis de la taille et du nombre de réalisations. Pour le calcul par éléments finis de microstructures, on impose des conditions aux limites qui sont propres à l'homogénéisation.

1.3 Principes de l'homogénéisation

Pour tous les matériaux, il existe une échelle à partir de laquelle le matériau est hétérogène. Cependant, aux échelles plus hautes où le calcul de structure se réalise, si toutes les hétérogénéités sont prises en compte, le calcul numérique deviendra trop long et trop coûteux. Par conséquent, l'homogénéisation multi-échelle est née dans le but de fournir une approche des matériaux hétérogènes par un modèle homogène équivalent qui diminue significativement le calcul numérique. La méthodologie d'homogénéisation d'après [Bornert M. and P., 2010] se résume en trois étapes :

1.3.1 Représentation :

Dans cette étape, la plus importante de l'homogénéisation, on est amené à déterminer le nombre de phases contenues dans le *V.E.R*. et par la suite à caractériser le comportement, la géométrie, la répartition spatiale et la proportion de chaque phase. Trois longueurs

caractéristiques, microstructure/V.E.R./structure, de la microstructure étudiée sont à distinguer [Besson et al., 2009] :

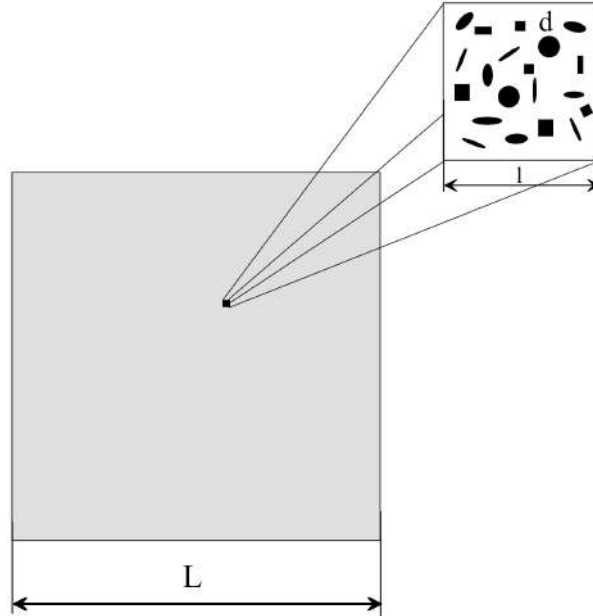


FIGURE 1.1: Echelles de représentation en homogénéisation

- La taille d des hétérogénéités ;
- La taille l du *V.E.R.* ;
- La taille L de la structure à calculer à l'aide du modèle homogène.

1.3.1.1 Elasticité linéaire

En élasticité, le comportement microscopique de chaque phase « ph » est donné par :

$$(\sigma_{ij})_{ph} = (c_{ijkl})_{ph} (\varepsilon_{kl})_{ph} \quad (1.1)$$

et

$$(\varepsilon_{ij})_{ph} = (s_{ijkl})_{ph} (\sigma_{kl})_{ph} \quad (1.2)$$

avec

$$(c_{ijkl})_{ph} = (s_{ijkl}^{-1})_{ph} \quad (1.3)$$

où : $(\sigma_{ij})_{ph}$ et $(\varepsilon_{ij})_{ph}$ représentent respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations locales de chaque phase "ph".

$(c_{ijkl})_{ph}$ et $(s_{ijkl})_{ph}$ sont respectivement les tenseurs d'ordre 4 de rigidité et de souplesse de chaque phase "ph".

1.3.1.2 Conductivité thermique

Dans le cas la conductivité thermique, si on considère g_i et q_i les vecteurs gradients de température et du flux de chaleur de chaque phase respectivement, le comportement local en thermique linéaire stationnaire d'un matériau hétérogène s'écrit :

$$(q_i)_{ph} = -(\lambda_{ij})_{ph}(g_j)_{ph} \quad (1.4)$$

et

$$(g_i)_{ph} = -(\rho_{ij})_{ph}(q_j)_{ph} \quad (1.5)$$

où λ_{ij} et ρ_{ij} sont les tenseur de conductivité thermique et de résistivité thermique respectivement tel que :

$$\lambda_{ik} \cdot \rho_{kj} = I_{ij} \quad (1.6)$$

où : I_{ij} est le tenseur identité d'ordre 2.

1.3.2 Localisation

Cette deuxième étape consiste à relier les grandeurs microscopiques locales, définies dans l'étape de représentation, aux grandeurs macroscopiques.

1.3.2.1 Elasticité linéaire

En élasticité linéaire, on définit les relations entre les déformations moyennes locales de chaque phase $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph}$ et le tenseur des déformations macroscopiques E_{kl} imposées par :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph} = (A_{ijkl})_{ph} E_{kl} \quad (1.7)$$

où : $(A_{ijkl})_{ph}$ désigne le tenseur de localisation des déformations de la phase "ph".

avec :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph} = \frac{1}{V_{ph}} \int_{V_{ph}} (\varepsilon_{ij})_{ph} dV \quad (1.8)$$

De même, on définit les relations entre les contraintes moyennes locales de chaque phase $\langle \sigma_{ij} \rangle_{ph}$ et les contraintes macroscopiques Σ_{kl} imposées par :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} = (B_{ijkl})_{ph} \Sigma_{kl} \quad (1.9)$$

où : $(B_{ijkl})_{ph}$ désigne le tenseur d'ordre 4 de concentration des contraintes.

avec :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} = \frac{1}{V_{ph}} \int_{V_{ph}} (\sigma_{ij})_{ph} dV \quad (1.10)$$

1.3.2.2 Conductivité thermique

Pour la conductivité thermique, cette étape permet de lier les moyennes des gradients de températures locales de chaque phase $\langle g_i \rangle_{ph}$ au vecteur gradient de température macroscopique G_i imposé.

$$\langle g_i \rangle_{ph} = \langle \nabla T \rangle_{ph} = (a_{ij})_{ph} G_j \quad (1.11)$$

De même, la relation reliant les moyennes de flux de chaleur locaux de chaque phase $\langle q_i \rangle_{ph}$ au vecteur flux de chaleur macroscopique Q_i imposé s'écrit :

$$\langle q_i \rangle_{ph} = (b_{ij})_{ph} Q_j \quad (1.12)$$

où : a_{ij} et b_{ij} sont les tenseurs de localisation du gradient de température et de concentration des flux de chaleur respectivement.

1.3.3 Homogénéisation

La dernière étape consiste à déterminer le comportement équivalent du matériau hétérogène.

1.3.3.1 Elasticité linéaire

Dans cette étape, le tenseur moyen des contraintes sur tout le $V.E.R$ est exprimé par :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} \quad (1.13)$$

De même le tenseur moyen des déformations sur tout le $V.E.R$ est exprimé par :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph} \quad (1.14)$$

Le comportement apparent sera détaillé dans la section 1.3.5.3 après avoir mis l'accent sur les conditions aux limites.

1.3.3.2 Conductivité thermique

En conductivité thermique, on exprime le tenseur moyen des gradients de températures sur tout le *V.E.R* par :

$$\langle g_i \rangle = \langle \nabla T \rangle = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle g_i \rangle_{ph} \quad (1.15)$$

et le tenseur moyen des flux de chaleur sur tout le *V.E.R* par :

$$\langle q_i \rangle = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle q_i \rangle_{ph} \quad (1.16)$$

1.3.4 Condition de HILL

En élasticité linéaire, la condition de *HILL* impose l'égalité entre le travail macroscopique et la moyenne des travaux microscopiques [Bornert M. and P., 2010] :

$$\frac{1}{2} \langle \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{2} E_{ij} \Sigma_{ij} \quad (1.17)$$

cela est assuré par l'égalité :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = E_{ij} \text{ et } \langle \sigma_{ij} \rangle = \Sigma_{ij} \quad (1.18)$$

Dans le cas de la conductivité thermique équivalente et par analogie au comportement élastique, la condition de *HILL* s'écrit :

$$\langle -q_i \nabla T \rangle = Q_i G_i \quad (1.19)$$

ce qui est assuré par :

$$\langle q_i \rangle = Q_i \text{ et } \langle \nabla T \rangle = G_i \quad (1.20)$$

Ainsi pour assurer la condition de *HILL* et l'équivalence du comportement effectif, des conditions aux limites particulières aux bords du *V.E.R* sont nécessaires.

1.3.5 Conditions aux limites et moyenne des champs locaux

Pour calculer les propriétés effectives du matériau homogène équivalent (*MHE*) et étudier la convergence des propriétés apparentes, plusieurs conditions aux limites peuvent être appliquées; Les plus classiquement proposées dans la littérature ([Zaoui, 2000]; [Bornert M. and P., 2010]) sont : les conditions homogènes sur le contour en déformation (*KUBC*), les conditions homogènes sur le contour en contraintes (*SUBC*) et les conditions périodiques (*PBC*). D'une façon analogue, les conditions aux limites du gradient de temperature homogène sur le contour (*UGT*), Les conditions aux limites du flux de chaleur homogène sur le contour (*UHF*) et les conditions aux limites périodiques (*CLP*) sont imposées pour le cas des propriétés thermiques.

1.3.5.1 Elasticité linéaire

On considère une microstructure de volume V . Pour déterminer les propriétés effectives de ce volume, on impose des conditions aux limites sur sa frontière notée ∂V . On présente dans ce qui suit les trois types de conditions aux limites utilisés dans les calculs par éléments finis pour la détermination des propriétés effectives.

Conditions homogènes sur le contour en déformation (*KUBC*)

Dans ces conditions, on applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u_i qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisées E_{ij} correspondant à la moyenne des déformations locales dans le volume par :

$$\begin{cases} u_i = E_{ij} \cdot x_j & \forall x \in \partial V \\ E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \end{cases} \quad (1.21)$$

Le tenseur des contraintes macroscopiques est alors obtenu par la moyenne des contraintes locales dans tout le volume V :

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (1.22)$$

Conditions homogènes sur le contour en contraintes (*SUBC*)

Dans ce cas, on applique sur la surface extérieure ∂V du volume V un effort volu-

mique $\sigma.n$ qui s'écrit à partir du tenseur des contraintes homogénéisées Σ_{ij} Correspondant à la moyenne des contraintes locales dans le volume par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}.n = \Sigma_{ij}.n \\ \Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \end{array} \right. \quad \forall x \in \partial V \quad (1.23)$$

Le tenseur des déformations macroscopiques est alors obtenu par la moyenne des déformations locales dans tout le volume V :

$$E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (1.24)$$

Conditions aux limites Periodiques (*PBC*)

Dans ce cas on applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisées E et d'une fluctuation périodique v_i par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = E_{ij}.x_j + v_i \\ E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \end{array} \right. \quad \forall x \in \partial V \quad (1.25)$$

La fluctuation v est périodique car elle prend la même valeur en deux points homologues de faces opposées. De même, les efforts $\sigma.n$ en deux points homologues sont opposés.

1.3.5.2 Conductivité thermique

Pour les problèmes thermiques, la température, le vecteur gradient de température et le flux de chaleur sont notés T , ∇T et q respectivement. Le flux de chaleur et le gradient de température sont liés pour le cas isotrope, d'après la loi de Fourier, par :

$$q = -\lambda.\nabla T \quad (1.26)$$

où : λ est la conductivité thermique pour la phase considérée.

Conditions aux limites du gradient de temperature homogène sur le contour (*UGT*)

On applique sur le volume extérieur ∂V du volume V un gradient de température ∇T qui correspond à la moyenne des gradients locaux dans le volume ainsi :

$$\begin{cases} T = G_i \cdot x_i & \forall x \in \partial V \\ G_i = \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla T dV \end{cases} \quad (1.27)$$

où G_i est un tenseur d'ordre 1 constant indépendant de x .

Le vecteur flux macroscopique est alors obtenu par la moyenne des flux locaux dans tout le volume V :

$$Q_i = \langle q_i \rangle = \frac{1}{V} \int_V q_i \cdot dV \quad (1.28)$$

Conditions aux limites du flux de chaleur homogène sur le contour (UHF)

Dans ce cas on applique sur le volume extérieur ∂V du volume V un flux de chaleur Q_i correspondant à la moyenne des flux locaux q_i dans le volume par :

$$\begin{cases} q_i \cdot n = Q_i \cdot x_i & \forall x_i \in \partial V \\ Q_i = \langle q_i \rangle = \frac{1}{V} \int_V q_i dV \end{cases} \quad (1.29)$$

Le vecteur gradient de température macroscopique G_i est alors obtenu par la moyenne des gradients locaux g_i :

$$G_i = \langle g_i \rangle = \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla T \cdot dV \quad (1.30)$$

Conditions aux limites Périodiques (PBC)

Dans ce cas, la température prend la forme :

$$\begin{cases} T = G_i \cdot x_i + t & \forall x_i \in \partial V \\ G_i = \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla T dV \end{cases} \quad (1.31)$$

où la fluctuation t de la température est périodique.

1.3.5.3 Propriétés apparentes et effectives

Elasticité linéaire

A partir des conditions aux limites décrites précédemment, les déformations et les contraintes locales vérifient les relations :

$$E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (1.32)$$

et

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle \quad (1.33)$$

Par conséquent, les tenseurs A_{ijkl} et B_{ijkl} présentent les propriétés suivantes :

$$\sum_{ph=1}^N P_{ph} (A_{ijkl})_{ph} = I_{ijkl} \quad (1.34)$$

et

$$\sum_{ph=1}^N P_{ph} (B_{ijkl})_{ph} = I_{ijkl} \quad (1.35)$$

où I_{ijkl} est le tenseur unité d'ordre 4.

La relation constitutive pour le matériau hétérogène est donnée par :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{app} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (1.36)$$

D'après les équations 1.1, 1.7 et 1.13 on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} = C_{ijkl}^{app} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \\ \Leftrightarrow & \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijkl})_{ph} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_{ph} = C_{ijkl}^{app} E_{kl} \\ \Leftrightarrow & \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijmn})_{ph} (A_{mnkl})_{ph} E_{kl} = C_{ijkl}^{app} E_{kl} \\ \Rightarrow & C_{ijkl}^{app} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijmn})_{ph} (A_{mnkl})_{ph} \end{aligned} \quad (1.37)$$

où C_{ijmn}^{app} et S_{ijkl}^{app} sont respectivement les tenseurs apparents d'élasticité et de souplesse pour un volume V .

On obtient ainsi le tenseur de rigidité équivalent C_{ijkl}^{app} exprimé en fonction des tenseurs de rigidité $(C_{ijkl})_{ph}$ et des tenseurs de localisation $(A_{mnkl})_{ph}$ de la déformation dans chaque phase « ph ».

Dans le cas particulier d'un milieu hétérogène constitué de N phases de type inclusions noyées dans une matrice dominante, et grâce à l'égalité sur la moyenne des tenseurs de localisation 1.34 et 1.35, les tenseurs apparents d'élasticité et de souplesse, peuvent être écrits, en notant m l'indice de la phase constituant la matrice par :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} ((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m) (A_{mnkl})_{ph} \quad (1.38)$$

et

$$S_{ijkl}^{app} = (S_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} ((S_{ijmn})_{ph} - (S_{ijmn})_m) (B_{mnkl})_{ph} \quad (1.39)$$

Il a été observé pratiquement que les résultats apparents diffèrent d'une condition aux limites à l'autre, mais convergent avec l'augmentation de la taille du $V.E$ en se rapprochant de la taille du $V.E.R$ ([Kanit et al., 2003]; [Qi, 2006]; [Kari et al., 2007]). Cette convergence est plus ou moins lente selon le cas étudié. Ainsi, il est démontré que les conditions homogènes $KUBC$ et $SUBC$ fournissent un encadrement du comportement apparent [Huet, 1991] exprimé par :

$$S_{ijkl\Sigma}^{app-1} \leq C_{ijkl}^{eff} \leq C_{ijklE}^{app} \quad (1.40)$$

et que les conditions aux limites périodiques (CLP) donnent une meilleure estimation des propriétés apparentes par rapport aux conditions homogènes - $KUBC$, $SUBC$ ([Hazanov and Huet, 1994]; [Kanit et al., 2003]) donnée par :

$$S_{ijkl\Sigma}^{app-1} \leq S_{ijkl\Sigma_{per}}^{app-1} \leq C_{ijkl}^{eff} \leq C_{ijklE_{per}}^{app} \leq C_{ijklE}^{app} \quad (1.41)$$

Lorsque le $V.E.R$ est suffisamment grand (voir figure 1.2), les propriétés apparentes du matériau hétérogène ne dépendent plus du type de conditions aux limites et coïncident avec les propriétés effectives [Sab, 1992].

$$S_{ijkl\Sigma}^{app-1} = S_{ijkl\Sigma_{per}}^{app-1} = C_{ijkl}^{eff} = C_{ijklE_{per}}^{app} = C_{ijklE}^{app} \quad (1.42)$$

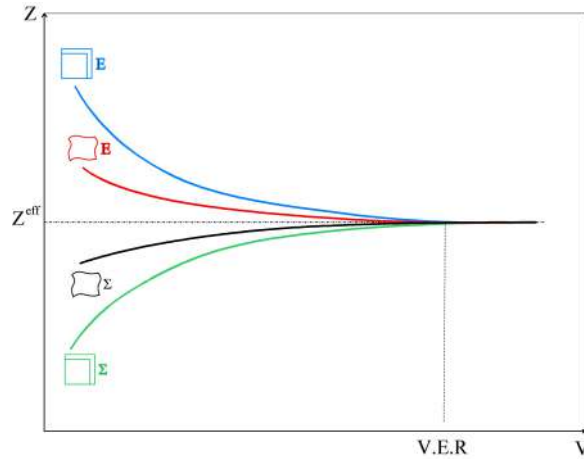


FIGURE 1.2: Illustration de la convergence de la propriété Z pour les différentes conditions aux limites

Pour les propriétés isotropiques effectives il y a des cas spéciaux des conditions aux limites $KUBC$, $SUBC$ et PBC pour lesquelles on choisit les valeurs de E_{ij} et Σ_{ij} .

Propriétés élastiques :

Pour la détermination du module de compressibilité k^{app} sur le volume V et pour résoudre les problèmes micromécaniques $KUBC$, le tenseur des déformations macroscopiques E_{ij}^k suivant est appliqué :

$$E_{ij}^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

et pour la détermination du module de cisaillement μ^{app} sur le volume V , le tenseur des déformations macroscopiques E_{ij}^μ suivant est appliqué :

$$E_{ij}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Le module de compressibilité k^{app} et le module de cisaillement μ^{app} peuvent être défini comme :

$$k^{app} = \langle \sigma_{ij} \rangle E_{ij}^k = \frac{1}{3} \text{trace} \langle \sigma_{ij} \rangle \quad (1.45)$$

$$\mu^{app} = \langle \sigma_{ij} \rangle E_{ij}^\mu = \text{trace} \langle \sigma_{ij} \rangle \quad (1.46)$$

Pour le cas de la condition aux limites *SUBC*, on prend :

$$E_{ij}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

et

$$E_{ij}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

dans ce cas le module de compressibilité k^{app} et le module de cisaillement μ^{app} peuvent être définis comme suit :

$$\frac{1}{k^{app}} = E_{ij}^k \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \text{trace} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (1.49)$$

$$\frac{1}{\mu^{app}} = E_{ij}^\mu \langle \varepsilon_{ij} \rangle = 2 \langle \varepsilon_{12} \rangle \quad (1.50)$$

Conductivité thermique

En thermique, par analogie avec l'élasticité et à partir des conditions aux limites décrites précédemment, le flux de chaleur et le gradient de température locaux vérifient les relations :

$$G_i = \langle g_i \rangle = \langle \nabla T \rangle \quad (1.51)$$

et

$$Q_i = \langle q_i \rangle \quad (1.52)$$

La relation constitutive pour le matériau hétérogène est donnée par :

$$\langle q_i \rangle = -\lambda_{ij}^{app} \langle g_i \rangle \quad (1.53)$$

D'après les équations 1.4, 1.11 et 1.16, on aura :

$$\sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle q_i \rangle_{ph} = -\lambda_{ij}^{app} \langle g_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{ph=1}^N P_{ph}(\lambda_{ij})_{ph} \langle g_i \rangle_{ph} = \lambda_{ij}^{app} G_i \\
&\Leftrightarrow \sum_{ph=1}^N P_{ph}(\lambda_{in})_{ph} (a_{nj})_{ph} G_j = \lambda_{ij}^{app} G_j \\
&\Rightarrow \lambda_{ij}^{app} = \sum_{ph=1}^N P_{ph}(\lambda_{in})_{ph} (a_{nj})_{ph} \tag{1.54}
\end{aligned}$$

On obtient le tenseur de la conductivité thermique équivalente λ_{ij}^{app} qui s'exprime en fonction des conductivités thermiques $(\lambda_{ij})_{ph}$ et des tenseurs de localisation $(a_{ij})_{ph}$ de chaque phase.

Dans le cas particulier d'un milieu hétérogène constitué de n phases en inclusions noyées dans une matrice dominante, les tenseurs apparents de conductivité et de resistivité thermique, peuvent être écrits, en notant m l'indice de la phase constituant la matrice par :

$$\lambda_{ij}^{app} = (\lambda_{ij})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph}((\lambda_{ij})_{ph} - (\lambda_{ij})_m)(a_{mn})_{ph} \tag{1.55}$$

et

$$\rho_{ij}^{app} = (\rho_{ij})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph}((\rho_{ijmn})_{ph} - (\rho_{ijmn})_m)(b_{mnkl})_{ph} \tag{1.56}$$

et ceci pour les problèmes *UGT* et *UHF* respectivement.

Selon la condition aux limites imposée, le tenseur de conductivité apparent peut être défini par :

$$\lambda_{ijG}^{app} = \langle \lambda_{im} \cdot a_{mj} \rangle \tag{1.57}$$

et

$$\lambda_{ijQ}^{app-1} = \langle \rho_{im} \cdot b_{mj} \rangle \tag{1.58}$$

Là encore, sur un volume hétérogène V , en faisant un calcul pour chaque condition aux limites, on peut encadrer la conductivité thermique effective par les conductivités apparentes associées à chaque condition aux limites.

$$\rho_{ijQ}^{app-1} \leq \rho_{ijQper}^{app-1} \leq \lambda_{ij}^{eff} \leq \lambda_{ijGper}^{app} \leq \lambda_{ijG}^{app} \tag{1.59}$$

Les conductivités apparentes sont égales à la conductivité effective lorsque le volume V est assez grand.

$$\rho_{ijQ}^{app-1} = \rho_{ijQper}^{app-1} = \lambda_{ij}^{eff} = \lambda_{ijGper}^{app} = \lambda_{ijG}^{app} \quad (1.60)$$

Pour le cas des propriétés effectives isotropes, les gradient de température et de flux de température sont donnés par :

$$G_i = (111)^T \quad (1.61)$$

et

$$Q_i = (111)^T \quad (1.62)$$

Ainsi la conductivités thermiques apparentes peuvent être déterminées par :

$$\lambda^{app} = \frac{1}{3} \text{trace} \langle q_i \rangle \quad (1.63)$$

$$\lambda^{app-1} = \frac{1}{3} \text{trace} \langle \nabla T \rangle \quad (1.64)$$

1.4 Estimations analytiques des propriétés élastiques

Les méthodes d'analyse sont disponibles pour estimer les propriétés des matériaux hétérogènes. Elles impliquent généralement des hypothèses concernant la microstructure. Dans le domaine de la mécanique, les développements asymptotiques [Sanchez-Palencia, 1974], [Bensoussan and Papanicolaou, 1978] et les bornes variationnelles [Hashin and Shtrikman, 1962], [Beran, 1968] sont des exemples des approches analytiques. Pour un matériau élastique hétérogène, l'homogénéisation consiste à résoudre le problème micromécanique de localisation (cas de déformation imposée) ou de concentration (cas de contrainte imposée). Cela peut se faire numériquement ou analytiquement en utilisant certaines hypothèses. C'est ainsi que les estimations et les bornes ont été développées. Nous présenterons dans la section suivante quelques estimations et bornes pour les propriétés élastiques et thermiques.

1.4.1 Estimations analytiques

1.4.1.1 Einstein (1906-1911)

La première et la plus simple des estimations évoquées ici est celle d'Einstein ([Einstein, 1906] et [Einstein, 1911]) qui estima les propriétés d'un fluide visqueux de type plasma contenant des particules sphériques incompressibles et isolées en suspension par :

$$\mu_{Einstein} = \mu_m (1 + 2.5P_i) \quad (1.65)$$

1.4.1.2 Smallwood (1944)

Smallwood [Smallwood, 1944] utilisa la même approche qu'Einstein pour décrire le module d'Young en petites déformations d'un matériau solide renforcé par des particules sphériques rigides. Cette estimation ne reste valable que pour de faibles fractions volumiques de particules.

$$E_{Smallwood} = E_m (1 + 2.5P_i) \quad (1.66)$$

1.4.1.3 Guth-Gold (1938)

Guth et Gold [Guth and Gold, 1938], contrairement aux estimations d'Einstein et de Smallwood, proposèrent de prendre en compte les phénomènes d'interaction entre particules et pour de plus fortes fractions volumiques ils ajoutent un terme quadratique à l'équation 1.66 :

$$E_{Guth-Gold} = E_m (1 + 2.5P_i + 14.1P_i^2) \quad (1.67)$$

1.4.1.4 Budiansky (1965)

Une estimation auto-cohérente du module de Young a été développée par Budiansky [Budiansky, 1965] qui s'applique dans le cas de particules rigides dans une matrice incompressible :

$$E_{Budiansky} = \frac{E_m}{(1 - 2.5P_i)} \quad (1.68)$$

1.4.2 Modèles analytiques de changement d'échelles.

Cette section est consacrée à la présentation des modèles théoriques de changement d'échelles, destinés à l'estimation des propriétés effectives d'un matériau hétérogène, dérivés de la solution du problème de l'inclusion hétérogène d'Eshelby. Nous commençons par la présentation de la solution du problème de l'inclusion hétérogène d'Eshelby, suivie des différents modèles qui en sont dérivés, à citer : la solution diluée, la méthode Auto-cohérente et le modèle de Mori-Tanaka.

1.4.2.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby

Dans une première étape, Eshelby a résolu le problème de l'équilibre mécanique d'une inclusion de forme ellipsoïdale, plongée dans une matrice infinie possédant les mêmes propriétés mécaniques que la matrice et soumise à une déformation libre [Eshelby, 1957]. Par analogie à cette première solution, il a donné la solution du problème de l'inclusion hétérogène.

Si on considère une inclusion de rigidité C_{ph} plongée dans une matrice infinie de rigidité C_m , l'expression de la matrice de localisation dans l'hétérogénéité sera :

$$A_{ph} = (I + S^E : C_m^{-1} : (C_{ph} - C_m))^{-1} \quad (1.69)$$

où S^E est le tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'Eshelby, dépendant des propriétés mécaniques de la matrice C_m et de la forme de l'inclusion.

Donc le comportement apparent est obtenu grâce à l'équation 1.38 devient :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} ((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m) (A_{mnkl})_{ph} \quad (1.70)$$

1.4.2.2 Schéma des distributions diluées

Dans cette solution, chaque inclusion est considérée comme une seule entité noyée dans une matrice infinie. La solution diluée est valable si les inclusions sont suffisamment éloignées les unes des autres, donc, aucune interaction entre les inclusions n'est considérée. Par conséquent, elle s'applique seulement aux matériaux hétérogènes contenant une faible fraction volumique P .

Il s'agit donc d'appliquer le résultat du problème de l'hétérogénéité, équation 1.69, à chaque inclusion afin d'obtenir les tenseurs de localisation de chaque phase :

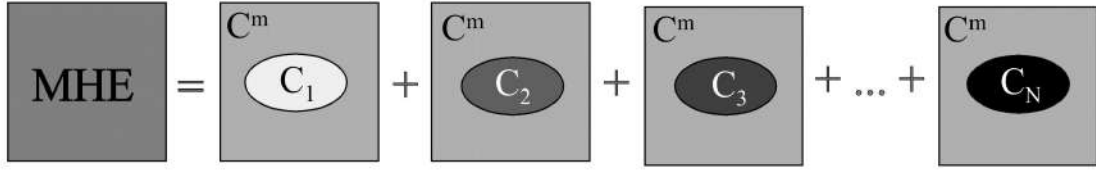


FIGURE 1.3: Illustration du principe de la solution diluée.

$$A_{ph} = (I + S_{ph}^E : C_m^{-1} : (C_{ph} - C_m))^{-1} \quad (1.71)$$

Le comportement homogénéisé est obtenu grâce au tenseur des rigidités effectif exprimé par :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} ((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m) (A_{mnkl})_{ph} \quad (1.72)$$

Pour un composite à 2 phases, avec des inclusions sphériques noyées dans une matrice, les coefficients de compressibilité k et de cisaillement μ équivalents sont donnés par :

$$k^{dl} = k_m + P_i \frac{(k_i - k_m)(3k_m + 4\mu_m)}{(3k_i + 4\mu_m)} \quad (1.73)$$

$$\frac{\mu^{dl}}{\mu_m} = 1 - \frac{15P_i(1 - \frac{\mu_i}{\mu_m})(1 - \nu_m)}{7 - 5\nu_m + 2(4 - 5\nu_m)\frac{\mu_i}{\mu_m}} \quad (1.74)$$

avec m l'indice attribué à la matrice et i à l'inclusion.

1.4.2.3 Modèle auto-cohérent

Dans cette méthode, chaque phase du matériau est successivement assimilée à une inclusion ellipsoïdale noyée dans un milieu infini possédant les caractéristiques du matériau homogénéisé recherché.

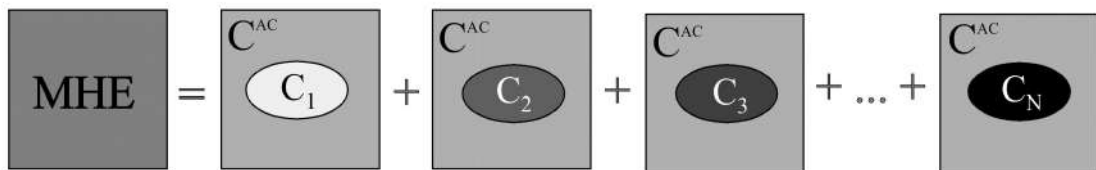


FIGURE 1.4: Illustration du principe du schéma Auto-cohérent

Le tenseur de localisation de chaque phase ph est exprimé par :

$$A_{ph} = [I + S_{ph}^E : (C^{AC})^{-1} : (C_{ph} - C^{AC})]^{-1} \quad (1.75)$$

et le tenseur des rigidités homogénéisé sera :

$$C^{AC} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} C_{ph} : [I + S_{ph}^E : (C^{AC})^{-1} : (C_{ph} - C^{AC})]^{-1} \quad (1.76)$$

où la solution de cette équation implicite est, généralement, obtenue numériquement.

Pour un composite biphasé, avec des inclusions sphériques, une solution analytique permet d'exprimer les caractéristiques élastiques recherchées [Aboudi, 1991], à savoir :

$$k^{AC} = k_m + P_i \frac{(k_i - k_m)(3k^{AC} + 4\mu^{AC})}{(3k_i + 4\mu^{AC})} \quad (1.77)$$

$$\mu^{AC} = \mu_m + P_i (\mu_i - \mu_m) \frac{15(1 - \nu^{AC})}{\mu^{AC}(7 - 5\nu^{AC}) + 2(4 - 5\nu^{AC})\mu_i} \quad (1.78)$$

Pour des problèmes à deux dimensions, [Herve and Zaoui, 1995] a proposé une expression du module de compressibilité effectif k^{AC} pour des composites biphasés donnée par :

$$k^{AC} = \frac{k_1(\mu_1 + k_2) + \mu_1 P(k_2 - k_1)}{(\mu_1 + k_2) + P(k_1 - k_2)} \quad (1.79)$$

Le module de cisaillement μ^{AC} a été proposé par [Christensen and Lo, 1979] par l'expression :

$$\mu^{AC} = \mu_1 \left(1 + \frac{P}{\frac{\mu_m}{\mu_i - \mu_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3}\mu_m}{(2k_m + \frac{8}{3}\mu_m)}(1 - P)} \right) \quad (1.80)$$

1.4.2.4 Mori-Tanaka (1973)

Le schéma de Mori et Tanaka ([Mori and Tanaka, 1973]; [Benveniste, 1987]) s'applique à des milieux hétérogènes constitués d'inclusions noyées dans une matrice. Les inclusions sont réparties de manière isotrope et se comportent, en moyenne, comme des inclusions isolées dans une matrice infinie, soumise, à l'infini à la déformation moyenne de la matrice ε_m (une inconnue du problème). La déformation de chaque inclusion est alors reliée à la déformation moyenne de la matrice par des « pseudo-tenseurs de localisation » T_{ph} équation 1.81, solution du problème de l'hétérogénéité :

$$\varepsilon_{ph} = T_{ph} : \varepsilon_m \quad (1.81)$$

Le tenseur de localisation de chaque phase aura pour expression :

$$A_{ph} = T_{ph} : \left(\sum P_{ph} T_{ph} \right)^{-1} \quad (1.82)$$

et le tenseur de rigidité homogénéisé, aura pour expression :

$$C^{MT} = C_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} (C_{ph} - C_m) : T_{ph} : \left(\sum P_{ph} T_{ph} \right)^{-1} \quad (1.83)$$

Dans ce modèle, les interactions entre les inclusions sont prises en compte mais de manière simplifiée, et par conséquent, ce modèle n'est valable que pour des fractions volumiques inférieure à 25%.

Pour un composite élastique linéaire à deux phases avec des inclusions sphériques, le module de compressibilité équivalent k^{MT} et le module de cisaillement équivalent μ^{MT} sont définis par les relations suivantes :

$$k^{MT} = k_m + \frac{P_i(k_i - k_m)k_m}{\frac{(1-P_i)(k_i - k_m)3.k_m}{(3.k_i + 4.\mu_m)} + k_m} \quad (1.84)$$

$$\mu^{MT} = \mu_m + \frac{P_i(\mu_i - \mu_m)\mu_m}{(1 - P_i)(\mu_i - \mu_m) \frac{6(k_m + 2.\mu_m)}{5(3.k_m + 4.\mu_m)} + \mu_m} \quad (1.85)$$

Dans le cas de particules infiniment rigides, les estimations de Mori-Tanaka coïncident avec les bornes inférieures d'Hashin-Shtrikman.

1.4.3 Encadrement analytique

Nous allons maintenant nous concentrer sur les bornes rigoureuses qui peuvent être définies en se basant sur les principes variationnels et les informations statistiques sur la morphologie du matériau. Les propriétés effectives sont comprises entre deux de ces limites. Une limite analytique est considérée comme optimale si sa définition utilise toutes les données statistiques disponibles. Nous allons examiner les matériaux à n phases, bien que chaque borne sera spécialisée pour les matériaux à deux phases.

1.4.3.1 Bornes d'ordre zéro

Considérant un matériau hétérogène multi-phasique, sa propriété équivalente Z^H est bornée entre la propriété Z_d de la phase la plus dure et la propriétés Z_t de la phase la plus

tendre tel que :

$$Z_t \leq Z^H \leq Z_d \quad (1.86)$$

Pour les modules de compressibilité k et de cisaillement μ on aura :

$$k_t \leq k^H \leq k_d \quad (1.87)$$

$$\mu_t \leq \mu^H \leq \mu_d \quad (1.88)$$

Ces bornes sont les plus simples, car elles ne prennent en considération aucune information concernant la microstructure.

1.4.3.2 Bornes du premier ordre

– *Borne supérieure de Voigt* [Voigt, 1889]

La borne de *Voigt* résulte d'une approche en déformation qui suppose que la déformation est constante dans toutes les phases et égale à la déformation macroscopique imposée E_{ij} :

$$\langle \varepsilon_{ij}(x) \rangle = E_{ij} \quad (1.89)$$

Le tenseur de localisation de la déformation est réduit partout au tenseur unité :

$$A_{ij}(x) = I_{ij} \quad (1.90)$$

Donc, l'expression du tenseur des rigidités équivalent sera :

$$C_{ijkl}^{Voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijkl})_{ph} \quad (1.91)$$

La borne de *Voigt* [Voigt, 1889] correspond au modèle en parallèle du composite pour lequel on considère les déformations uniformes dans le matériau. On obtient les relations suivantes reliant les fractions volumiques et les modules d'élasticité de chacune des phases :

$$k^{voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot k_{ph} \quad (1.92)$$

$$\mu^{voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot \mu_{ph} \quad (1.93)$$

Pour un matériau biphasé de type matrice-inclusion, ces expressions se réduisent à :

$$k^{voigt} = P_m \cdot k_m + P_i \cdot k_i \quad (1.94)$$

$$\mu^{voigt} = P_m \cdot \mu_m + P_i \cdot \mu_i \quad (1.95)$$

– *Borne inférieure de Reuss* (1929)

La borne de *Reuss* [Reuss, 1929] est l'approche en contrainte qui considère que celle-ci est constante dans toutes les phases et est égale à la contrainte macroscopique imposée Σ_{ij} .

$$\langle \sigma_{ij}(x) \rangle = \Sigma_{ij} \quad (1.96)$$

Le tenseur de localisation de contrainte est réduit partout au tenseur unité :

$$B_{ijkl}(x) = I_{ijkl} \quad (1.97)$$

Donc, l'expression du tenseur des souplesses équivalent sera :

$$S_{ijkl}^{Voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijkl})_{ph}^{-1} \quad (1.98)$$

La borne de *Reuss* correspond au modèle en série du composite pour lequel on considère les contraintes uniformes dans le matériau. On obtient les relations suivantes reliant les fractions volumiques et les modules d'élasticité de chacune des phases :

$$\frac{1}{k^{Reuss}} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot \frac{1}{k_{ph}} \quad (1.99)$$

$$\frac{1}{\mu^{Reuss}} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot \frac{1}{\mu_{ph}} \quad (1.100)$$

Pour un matériau biphasé de type matrice-inclusion, ces expressions se réduisent à :

$$k^{Reuss} = \frac{k_m k_i}{P_i k_m + P_m k_i} \quad (1.101)$$

$$\mu^{Reuss} = \frac{\mu_m \mu_i}{P_i \mu_m + P_m \mu_i} \quad (1.102)$$

Voigt et Reuss donnent deux bornes supérieure et inférieure du comportement équivalent. Ces bornes, associées à des lois de mélanges, sont des bornes du premier ordre. Elles ne supposent aucune information concernant la microstructure en dehors des fractions volumiques de chacun des constituants.

1.4.3.3 Bornes du second ordre [Dirrenberger, 2012]

Dans le cas où la répartition des phases est supposée isotrope au sein du matériau, il existe des bornes plus resserrées que les bornes de Voigt et Reuss dites bornes d'Hashin-Shtrikman [Hashin and Shtrikman, 1963]. Le schéma de Hashin-Shtrikman-Walpole (*H.S.W*) est le même que pour la méthode Auto-Cohérente où le matériau homogène équivalent entourant les différents constituants est remplacé par un matériau de comparaison. Si le matériau de comparaison est plus "*dur*", on retrouve la borne supérieure de la rigidité du composite, par contre, si le matériau de comparaison est plus "*souple*", on aboutit à la borne inférieure de la rigidité du composite.

Pour un matériau multiphasé et si le module le plus faible prend l'indice 1 et le plus fort prend l'indice n (On suppose donc que $k_{N-1} \leq k_N$ et $\mu_{N-1} \leq \mu_N$) les bornes de Hashin-Shtrikman sont définies par :

– Le module de compressibilité k :

$$k^{HS-} = k_1 + \frac{B_1}{1 + \alpha_1 B_1} \quad (1.103)$$

$$k^{HS+} = k_N + \frac{B_N}{1 + \alpha_N B_N} \quad (1.104)$$

où α_1 , α_N , B_1 et B_N sont exprimés par :

$$\alpha_1 = -\frac{3}{3k_1 + 4\mu_1} \quad (1.105)$$

$$\alpha_N = -\frac{3}{3k_N + 4\mu_N} \quad (1.106)$$

et

$$B_1 = \sum_{ph=2}^N \frac{P_{ph}}{\frac{1}{k_{ph} - k_1} - \alpha_1} \quad (1.107)$$

$$B_N = \sum_{ph=1}^N \frac{P_{ph}}{\frac{1}{k_{ph}} - \alpha_N} \quad (1.108)$$

avec P_{ph} la fraction volumique de la phase.

On obtient l'encadrement suivant pour le module de compressibilité k^H homogénéisé :

$$k^{HS-} \leq k^H \leq k^{HS+} \quad (1.109)$$

– Le module de cisaillement μ :

$$\mu^{HS-} = \mu_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{1 + \beta_1 D_1} \right) \quad (1.110)$$

$$\mu^{HS+} = \mu_N + \frac{1}{2} \left(\frac{D_N}{1 + \beta_N D_1} \right) \quad (1.111)$$

avec β_1 , β_N , D_1 et D_N exprimés par :

$$\beta_1 = -\frac{3(k_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3k_1 + 4\mu_1)} \quad (1.112)$$

$$\beta_N = -\frac{3(k_N + 2\mu_N)}{5\mu_N(3k_N + 4\mu_N)} \quad (1.113)$$

$$D_1 = \sum_{ph=2}^N \frac{P_{ph}}{\frac{1}{2(\mu_{ph} - \mu_1)} - \beta_1} \quad (1.114)$$

$$D_N = \sum_{ph=1}^{N-1} \frac{P_{ph}}{\frac{1}{2(\mu_{ph} - \mu_N)} - \beta_N} \quad (1.115)$$

On obtient l'encadrement suivant pour le module de cisaillement homogénéisé μ^H :

$$\mu^{HS-} \leq \mu^H \leq \mu^{HS+} \quad (1.116)$$

Pour le cas d'un matériau biphasé à 3 dimensions, les deux modules sont exprimés par :

– le module de compressibilité :

$$k^{HS-} = \frac{1}{\frac{P_i}{(k_i + \frac{4\mu_i}{3})} + \frac{P_m}{(k_m + \frac{4\mu_m}{3})}} - \frac{4\mu_i}{3} \quad (1.117)$$

$$k^{HS+} = \frac{1}{\frac{P_i}{(k_i + \frac{4\mu_i}{3})} + \frac{P_m}{(k_m + \frac{4\mu_m}{3})}} - \frac{4\mu_i}{3} \quad (1.118)$$

– le module de cisaillement :

$$\mu^{HS-} = \mu_m \cdot + \frac{P_i}{\frac{1}{(\mu_i - \mu_m)} + \frac{2(k_m + 2, \mu_m) \cdot P_m}{5\mu_m \cdot (k_m + \frac{4}{3} \cdot \mu_m)}} \quad (1.119)$$

$$\mu^{HS+} = \mu_i \cdot + \frac{P_m}{\frac{1}{(\mu_m - \mu_i)} + \frac{2(k_i + 2, \mu_i) \cdot P_i}{5 \cdot \mu_i \cdot (k_i + \frac{4}{3} \cdot \mu_i)}} \quad (1.120)$$

et pour le cas 2 dimensions, les deux modules sont exprimés par :

– le module de compressibilité :

$$k^{HS-} = k_m \cdot + \frac{P_i}{\frac{1}{(k_i - k_m)} + \frac{3 \cdot P_m}{(3 \cdot k_m + 4 \cdot \mu_m)}} \quad (1.121)$$

$$k^{HS+} = k_i \cdot + \frac{P_m}{\frac{1}{(k_m - k_i)} + \frac{3 \cdot P_i}{(3 \cdot k_i + 4 \cdot \mu_i)}} \quad (1.122)$$

– le module de cisaillement :

$$\mu^{HS-} = \mu_m \cdot + \frac{P_i}{\frac{1}{(\mu_i - \mu_m)} + \frac{6(K_m + 2, \mu_m) \cdot P_m}{5\mu_m \cdot (3 \cdot k_m + 4 \cdot \mu_m)}} \quad (1.123)$$

$$\mu^{HS+} = \mu_i \cdot + \frac{P_m}{\frac{1}{(\mu_m - \mu_i)} + \frac{6(K_i + 2, \mu_i) \cdot P_i}{5 \cdot \mu_i \cdot (3 \cdot k_i + 4 \cdot \mu_i)}} \quad (1.124)$$

A noter que pour une distribution isotrope d'inclusions sphériques dures diluées dans une matrice molle, la borne inférieure de Hashin et Shtrikman est équivalente à l'estimation de Mori-Tanaka [Mori and Tanaka, 1973].

1.5 Estimations analytiques des propriétés thermiques

De nombreux modèles analytiques permettent la détermination de la conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction des conductivités thermiques des constituants et de leurs fractions volumiques.

Dans le cas d'un matériau biphasé de type matrice inclusion, de conductivités thermiques λ_1 et λ_{ph} de la matrice et de l'inclusion respectivement, les modèles les plus couramment utilisés sont présentés dans ce qui suit.

1.5.1 Modèles analytiques de changement d'échelles

1.5.1.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby

Par analogie à l'élasticité, la solution du problème d'inhomogénéité d'Eshelby constitue une plateforme pour la construction des différents schémas d'estimation de la conductivité thermique effective.

1.5.1.2 Schéma des distributions diluées :

Dans ce cas, la fraction volumique est considérée faible et les interactions entre les différentes hétérogénéités (*phases*) ne sont pas prises en compte. En conséquence, le tenseur de concentration moyen de chaque phase ph est donné par :

$$a_{ph} = \langle [I + (\lambda_{ph} - \lambda_1) \cdot H_{ph}]^{-1} \rangle \quad (1.125)$$

où H_i est le tenseur de HILL.

L'estimation des vecteurs de la conductivité thermique homogène sera exprimée par :

$$\lambda^{dl} = \lambda_1 + \sum_{ph=2}^N P_{ph} (\lambda_{ph} - \lambda_1) \cdot a_{ph} \quad (1.126)$$

1.5.1.3 Modèle auto-cohérent

Dans cette méthode, pour tenir compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, on suppose que le milieu entourant chaque inclusion est un milieu infini possédant les caractéristiques du matériau homogénéisé recherché.

En supposant que le milieu équivalent soit soumis au gradient thermique homogène au contour, on obtient :

$$\langle \nabla T \rangle_{ph} = a_{ph}^{AC} \cdot E \quad (1.127)$$

avec

$$a_{ph}^{AC} = \langle [I + (\lambda_{ph} - \lambda^{AC}) \cdot H_{ph}^{AC}]^{-1} \rangle \quad (1.128)$$

l'estimation des vecteurs de la conductivité thermique homogène est exprimée par :

$$\lambda^{AC} = \lambda_1 + \sum_{ph=2}^N P_{ph} (\lambda_{ph} - \lambda_1) \cdot a_{ph}^{AC} \quad (1.129)$$

1.5.1.4 Schéma de Mori-Tanaka

Pour tenir compte de l'interaction des inclusions, le schéma de Mori-Tanaka [Mori and Tanaka, 1973] est utilisé. Le principe de ce schéma est de considérer l'inhomogénéité ellipsoïdale immergée dans la matrice soumise à un gradient thermique fictif G^0 .

La solution du problème de l'inhomogénéité permet d'écrire :

$$\langle \nabla T \rangle_m = G^0 \quad (1.130)$$

$$\langle \nabla T \rangle_{ph} = a_{ph} G^0 \quad (1.131)$$

et en prenant en compte la valeur moyenne $\langle \nabla T \rangle = G$, on obtient la relation entre G^0 et G

$$G^0 = a_{int}^{MT} G \quad (1.132)$$

avec :

$$a_{int}^{MT} = \left[\left(1 - \sum_{ph=2}^N P_{ph} \right) . I + \sum_{ph=2}^N P_{ph} . a_{ph} \right]^{-1} \quad (1.133)$$

Des équations 1.131 et 1.132, on obtient le tenseur de localisation de la phase ph comme :

$$a_{ph}^{MT} = a_{ph} . a_{int}^{MT} \quad (1.134)$$

où : a_{ph}^{MT} est le tenseur de localisation de Mori-Tanaka

a_{ph} est tenseur de localisation de chaque phase

a_{int}^{MT} est le tenseur de localisation de Mori-Tanaka Intermédiaire.

L'estimation des vecteurs de la conductivité thermique homogène est exprimée par :

$$\lambda^{MT} = \lambda_1 + \sum_{ph=2}^N . P_{ph} (\lambda_{ph} - \lambda_1) . a_{ph} \left[\left(1 - \sum_{ph=2}^N P_{ph} \right) . I + \sum_{ph=2}^N P_{ph} . a_{ph} \right]^{-1} \quad (1.135)$$

1.5.2 Estimations théoriques

Les estimations les plus utilisées dans la littérature, dans le domaine de la conductivité thermique, sont explicitement présentées dans ce qui suit :

1.5.2.1 Estimation de Maxwell -Garnett

J.C Maxwell [Maxwell Garnett, 1904] a donné une approximation de la conductivité thermique effective d'une seule inclusion sphérique intégrée dans une matrice infinie. Sur la base de ce résultat, JC Maxwell-Garnett a proposé une extension de dimension à i inclusions sphériques de conductivité λ_i et de fraction volumique P dans

une matrice infinie de conductivité λ_m , en supposant aucune interaction entre les inclusions [Maxwell Garnett, 1904].

Ainsi, par superposition de la contribution de chaque inclusion, il en résulte :

$$\frac{\lambda^{MG} - \lambda_m}{\lambda^{MG} + (d-1)\lambda_m} = P_V^i \left(\frac{\lambda_i - \lambda_m}{\lambda_i + (d-1)\lambda_m} \right) \quad (1.136)$$

qui peut être écrite comme suit pour $d = 3$

$$\lambda^{MG} = \lambda_m \frac{\lambda_i(1 + 2P_i) - \lambda_m(2P_i - 2)}{\lambda_m(2 + P_i) + \lambda_i(1 - P_i)} \quad (1.137)$$

et pour $d = 2$

$$\lambda^{MG} = \lambda_m \frac{(\lambda_i + \lambda_m) + P_i(\lambda_i - \lambda_m)}{(\lambda_m + \lambda_i) - P_i(\lambda_i - \lambda_m)} \quad (1.138)$$

En effet, les équations 1.136 et 1.137 coïncident avec les limites optimales Hashin-Shtrikman qui sont introduites dans la section 1.5.3.3. Comme l'estimation de Maxwell-Garnett ne tient pas compte de l'interaction entre les particules, sa validité est limitée à de petites fractions volumiques.

1.5.2.2 Modèle auto-cohérent de Bruggeman

Bruggeman a proposé dans [Bruggeman, 1935] un modèle auto-cohérent destiné à déterminer la conductivité effective λ^{HC} sur un support constitué de n particules sphériques de différentes conductivités λ^j et de j volume fractions volumiques P_j :

$$\sum_{ph=1}^N P_{ph} \frac{\lambda_{ph} - \lambda^{AC}}{\lambda_{ph} + (d-1)\lambda^{AC}} = 0 \quad (1.139)$$

Dans le cas d'un matériau biphase à d dimensions, la solution de l'équation 1.139 sera :

$$\lambda^{AC} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(d-1)\lambda_1\lambda_2}}{2(d-1)} \quad (1.140)$$

avec

$$\alpha = \lambda_1(d.P_1 - 1) + \lambda_2(d.P_2 - 1) \quad (1.141)$$

L'équation auto-cohérente a été étendue au cas à d dimensions d'une distribution d'inclusions sphériques de conductivités λ_i et de fractions volumiques P_i diluées dans une matrice de conductivité λ_m :

$$\frac{P_i(\lambda_i - \lambda^{AC})}{d\lambda^{AC}} + \frac{(1 - P_i)(\lambda_m - \lambda^{AC})}{\lambda_m + (d - 1)\lambda^{AC}} = 0 \quad (1.142)$$

Comme toutes les phases sont traitées de manière identique dans cette estimation auto-cohérente, son utilisation pour les composites fortement contrastés n'est pas recommandée.

Pour le cas d'un matériau biphasé à deux dimensions, le modèle auto-cohérent est solution de l'équation :

$$\frac{\lambda_m - \lambda^{AC}}{\lambda_m + 2\lambda^{AC}} P_m + \frac{\lambda_i - \lambda^{AC}}{\lambda_i + 2\lambda^{AC}} P_i = 0 \quad (1.143)$$

1.5.3 Encadrements analytiques des propriétés thermiques

Comme pour le cas des propriétés élastiques, les bornes théoriques peuvent être définies pour la conductivité thermique sur la base des principes variationnels et sur les informations statistiques sur la morphologie du matériau. Nous allons examiner les matériaux à n phases, bien que chaque borne sera citée explicitement pour les matériaux à deux phases.

1.5.3.1 Bornes d'ordre 0

Si on considère que λ_1 est la conductivité la moins conductrice et λ_2 la conductivité la plus conductrice d'un matériau composite, les bornes d'ordre 0 correspondent aux propriétés de chacune des phases. Le tenseur de conductivité homogénéisé est alors délimité par les conductivités de la phase la plus conductrice λ_2 et la phase la moins conductrice λ_1 comme suit :

$$\lambda_1 \leq \lambda^H \leq \lambda_2 \quad (1.144)$$

Ces bornes ne prennent pas la fraction volumique en compte. En fait, ils sont d'un intérêt limité, car ils ne donnent aucune estimation utile des propriétés homogénéisées.

1.5.3.2 Bornes d'ordre 1

Si les informations concernant la fraction volumique sont disponibles, leur utilisation permet l'obtention des bornes de Wiener [Wiener, 1912]. Elles correspondent respectivement à la moyenne géométrique et arithmétique des conductivités λ_j des phases j , pondérées par les fractions volumiques P_j tel que :

$$\lambda_{Wiener+} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \lambda_{ph} \quad (1.145)$$

$$\frac{1}{\lambda_{Wiener-}} = \sum_{ph=1}^N \frac{1}{P_{ph} \lambda_{ph}}$$

Les expressions d'un matériau biphasé sont données par :

$$\lambda_{Wiener+} = P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2 \quad (1.146)$$

$$\lambda_{Wiener-} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{P_1 \lambda_2 + P_2 \lambda_1} \quad (1.147)$$

La propriété effective est alors comprise entre :

$$\lambda_{Wiener-} \leq \lambda^H \leq \lambda_{Wiener+} \quad (1.148)$$

1.5.3.3 Bornes d'ordre 2

Hashin et shtrikman [Hashin and Shtrikman, 1962] proposent un encadrement du second ordre plus performant des propriétés d'un matériau multiphasé. Pour un matériau isotrope à d dimensions et constitué de N phases isotropes où λ_{ph} sont les conductivités thermiques et si la conductivité la plus basse est notée λ_1 et la plus haute par λ_N alors les expressions de la borne supérieure λ^{HS+} et la borne inférieure λ^{HS-} sont données par :

$$\lambda^{HS-} = \left(\sum_{ph=2}^N P_{ph} (\alpha_1 + \lambda_{ph})^{-1} \right)^{-1} - \alpha_1 \quad (1.149)$$

$$\lambda^{HS+} = \left(\sum_{ph=1}^N P_{ph} (\alpha_N + \lambda_{ph})^{-1} \right)^{-1} - \alpha_n \quad (1.150)$$

avec α_1 et α_N données par :

$$\alpha_1 = P_1 \lambda_1 + P_{ph} \lambda_{ph} - \frac{P_1 P_{ph} (\lambda_{ph} - \lambda_1)^2}{\lambda_{ph} P_1 + \lambda_1 P_{ph} + (d-1) \lambda_1} \quad (1.151)$$

$$\alpha_N = P_{ph} \lambda_{ph} + P_N \lambda_N - \frac{P_{ph} P_N (\lambda_N - \lambda_{ph})^2}{\lambda_N P_{ph} + \lambda_{ph} P_N + (d-1) \lambda_{ph}} \quad (1.152)$$

où P_{ph} est la fraction volumique de la phase ph .

la conductivité thermique effective est alors bornée par :

$$\lambda^{HS-} \leq \lambda^H \leq \lambda^{HS+} \quad (1.153)$$

Pour un matériau bipasé à 3 dimensions les expressions des bornes sont données par :

$$\lambda^{HS-} = \lambda_1 + \frac{P_2}{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{P_1}{3\lambda_1}} \quad (1.154)$$

$$\lambda^{HS+} = \lambda_2 + \frac{P_1}{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{P_2}{3\lambda_2}} \quad (1.155)$$

Dans le cas 2 dimensions, il suffit de remplacer le 3 dans les expressions précédentes par un 2 pour obtenir :

$$\lambda^{HS-} = \lambda_1 + \frac{P_2}{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{P_1}{2\lambda_1}} \quad (1.156)$$

$$\lambda^{HS+} = \lambda_2 + \frac{P_1}{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{P_2}{2\lambda_2}} \quad (1.157)$$

1.6 Synthèse

Le premier chapitre de ce travail a été consacré à la présentation des différents principes de l'homogénéisation des milieux hétérogènes. Commencant par la définition du volume élémentaire représentatif, passant par la suite aux différentes conditions aux limites spécifiques à ces problèmes d'homogénéisation, arrivant enfin aux différents estimateurs et bornes analytiques qui, par comparaison, permettent la validation des différents résultats de l'homogénéisation numérique. Tous ces rappels serviront de base théorique pour les différentes applications des Chapitres 2 et 3.

Chapitre 2

Homogénéisation en Elasticité Linéaire

In theory, theory and practice are the same. In practice, they are not.
(A. Einstein)

2.1 Introduction

L'un des sujets de recherche les plus importants dans les matériaux composites est la détermination de leurs propriétés effectives. Pour résoudre ces problèmes, un nombre important de théories de la micro-mécanique classique a été élaboré et publié dans la littérature, à citer [Hashin and Shtrikman, 1963]; [Christensen and Lo, 1979]; [Vinson and Sierakowski, 1987]; [Gibson, 1994] et [Kanit et al., 2003]. Initialement introduites pour estimer les constantes moyennes de polycristaux, les approximations de Voigt et Reuss sont les modèles les plus simples et les plus utilisés pour encadrer les propriétés élastiques effectives d'un composite.

Par la suite et en utilisant des principes variationnels, Hashin et Shtrikman [Hashin and Shtrikman, 1963] ont établi des bornes plus serrées et plus précises que celles de Voigt et Reuss permettant ainsi un meilleur encadrement des propriétés effectives.

L'homogénéisation numérique constitue la deuxième catégorie de l'homogénéisation, elle consiste à utiliser des techniques de simulation numérique sur des échantillons de microstructures afin d'estimer leurs propriétés effectives à partir de leurs lois de comportement et des distributions spatiales de leurs différents composants. Elle est liée directement à la détermination de la taille du volume élémentaire représentatif (*V.E.R.*), qui a été, largement étudié avec des outils numériques et statistiques, [Sab, 1992]; [Ostoja-Starzewski, 1993]; [Gusev, 1997]; [Terada et al., 1998]; [Ostoja-Starzewski, 1998]; [Kanit et al., 2003]; [Sab and Nedjar, 2005]; [Lachihab and Sab, 2008].

L'objectif principal de cette partie est, d'une part, l'évaluation des propriétés élas-

tiques effectives, à citer le coefficient de compressibilité et le coefficient de cisaillement, de microstructures poreuses par le tracé des courbes des moyennes des variances. Chaque microstructure étudiée est constituée d'une seule forme d'inclusions distribuées et orientées aléatoirement dans une matrice. Pour prendre en compte l'effet de la forme de l'inclusion sur les propriétés élastiques effectives, cinq différents rapports de forme r sont traités, $r = 0.2$, $r = 0.3$, $r = 0.4$, $r = 0.5$ et $r = 1$. La fraction volumique est un autre paramètre important qui a une influence directe sur le comportement élastique effectif. Dans ce travail, trois fractions volumiques sont mises en évidence, à savoir $P = 10\%$, $P = 30\%$ et $P = 50\%$.

D'autre part, nous nous sommes intéressés particulièrement à la notion de la portée intégrale A et à son rôle pour estimer les propriétés élastiques effectives. A travers cette portée intégrale, définie comme un paramètre purement morphologique, une étude de l'effet de la forme des inclusions sur les propriétés élastiques effectives est réalisée. Un modèle mathématique a pu être développé sur la base des résultats numériques obtenus. Enfin, le concept de la morphologie équivalente et celui de la notion du matériau le plus hétérogène, ont été abordés pour conclure cette partie.

2.2 Représentation de la microstructure

2.2.1 Description de la microstructure

Dans cette partie, une microstructure biphasée poreuse à deux dimensions est considérée. La *phase 2* est une matrice carrée englobant la *phase 1* représentant des inclusions poreuses, avec :

$$P_1 = P \quad (2.1)$$

et

$$P_2 = 1 - P \quad (2.2)$$

qui sont respectivement les fractions volumiques de la *phase 1* et la *phase 2*. Si a et b représentent, respectivement, le rayon mineur et le rayon majeur de l'inclusion ellipsoïdale et $r = a/b$ leur rapport, la morphologie de la *phase 1* prend trois formes distinctes, $r = 0.2$, $r = 0.5$ et $r = 1.0$. Ces formes ellipsoïdales et circulaires ont des distributions et des orientations aléatoires.

Pour cerner l'effet de la fraction volumique, trois cas sont envisagés : $P = 10\%$, $P = 30\%$ et $P = 50\%$. figures 2.1 , 2.2 et 2.3.

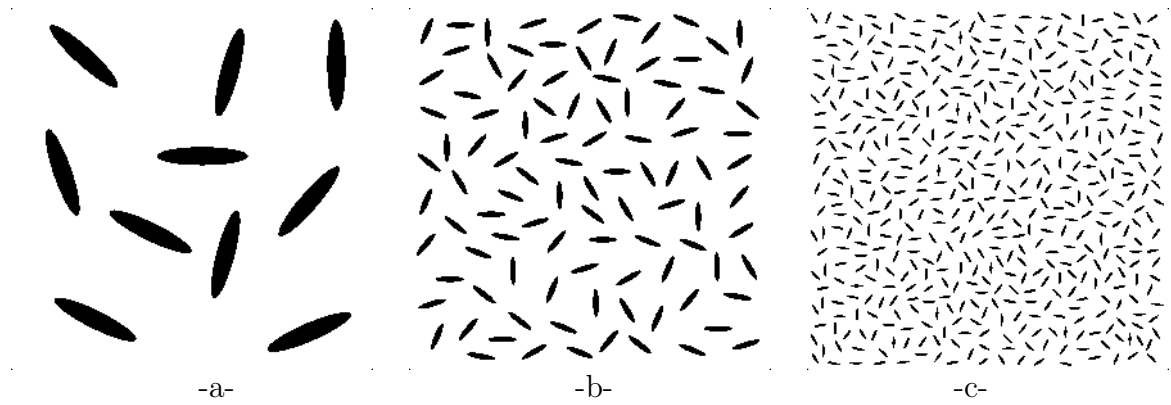


FIGURE 2.1: Exemples de microstructures étudiées pour une fraction volumique $P=10\%$ et un rapport de forme $r=0.2$. -a- 10 inclusions, -b- 100 inclusions et -c- 500 inclusions.

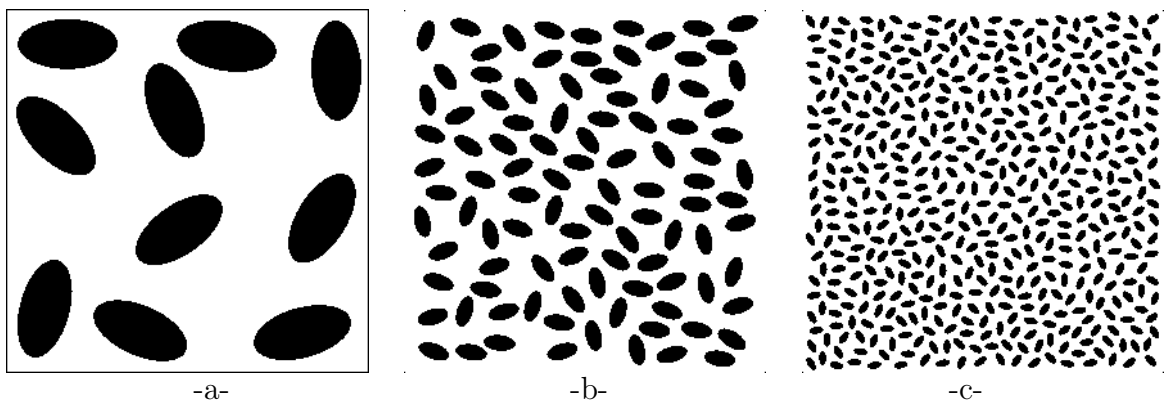


FIGURE 2.2: Exemples de microstructures étudiées pour une fraction volumique $P=30\%$ et un rapport de forme $r=0.5$. -a- 10 inclusions, -b- 100 inclusions et -c- 500 inclusions.

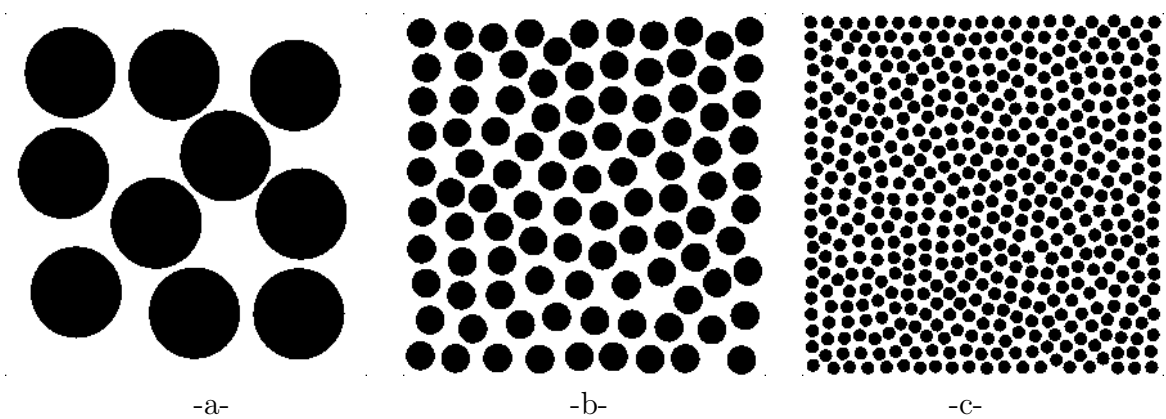


FIGURE 2.3: Exemples de microstructures étudiées pour une fraction volumique $P=50\%$ et un rapport de forme $r=1.0$. -a- 10 inclusions, -b- 100 inclusions et -c- 500 inclusions.

2.2.2 Propriétés physiques utilisées

Les modules de compressibilité (k_m, k_i) et de cisaillement (μ_m, μ_i) de la matrice et des inclusions d'un matériau biphasé à deux dimensions sont exprimés en fonction des modules d'Young E et du coefficient de Poisson ν des deux phases par :

$$k_j = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)(1 - 2\nu_j)} \quad , \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)} \quad , \quad j = m, i \quad (2.3)$$

Les propriétés physiques : le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , le module de compressibilité k et le module de cisaillement μ de la matrice et des inclusions, utilisées dans les simulations numériques, sont définies par :

Pour les inclusions :

$$(E_1, \nu_1, k_1, \mu_1) = (\simeq 0 \text{ MPa}, 0.49, \simeq 0 \text{ MPa}, \simeq 0 \text{ MPa}) \quad (2.4)$$

Pour la matrice :

$$(E_2, \nu_2, k_2, \mu_2) = (10000 \text{ MPa}, 0.3, 9615 \text{ MPa}, 3846 \text{ MPa}) \quad (2.5)$$

2.3 Outils numériques

2.3.1 Technique du maillage utilisée

Depuis son développement par Lippman et al [Lippmann et al., 1997], cette technique a été largement utilisée pour l'homogénéisation des images réelles et virtuelles par plusieurs auteurs dont [Kanit et al., 2003], [Khdir et al., 2013], [El-Moumen et al., 2013] [El-Moumen et al., 2014][El-Moumen et al., 2015]. Elle consiste à superposer une grille EF régulière, figure 2.4 -a- sur l'image de la microstructure étudiée, figure 2.4 -b-. La microstructure obtenue figure 2.4 -c- est utilisée pour attribuer la propriété de la phase propre à chaque point d'intégration de ce maillage régulier en fonction de la couleur du pixel sous-jacent. Il est à noter que l'élément utilisé ici est un élément fini quadratique à 4 nœuds avec 4 points d'intégration.

L'avantage majeur de cette méthode réside dans la simplicité et la rapidité avec laquelle le maillage du milieu hétérogène est créé. De plus, la méthode est applicable à tout type de milieu hétérogène. L'inconvénient de cette technique est que la description des interfaces reste pauvre.

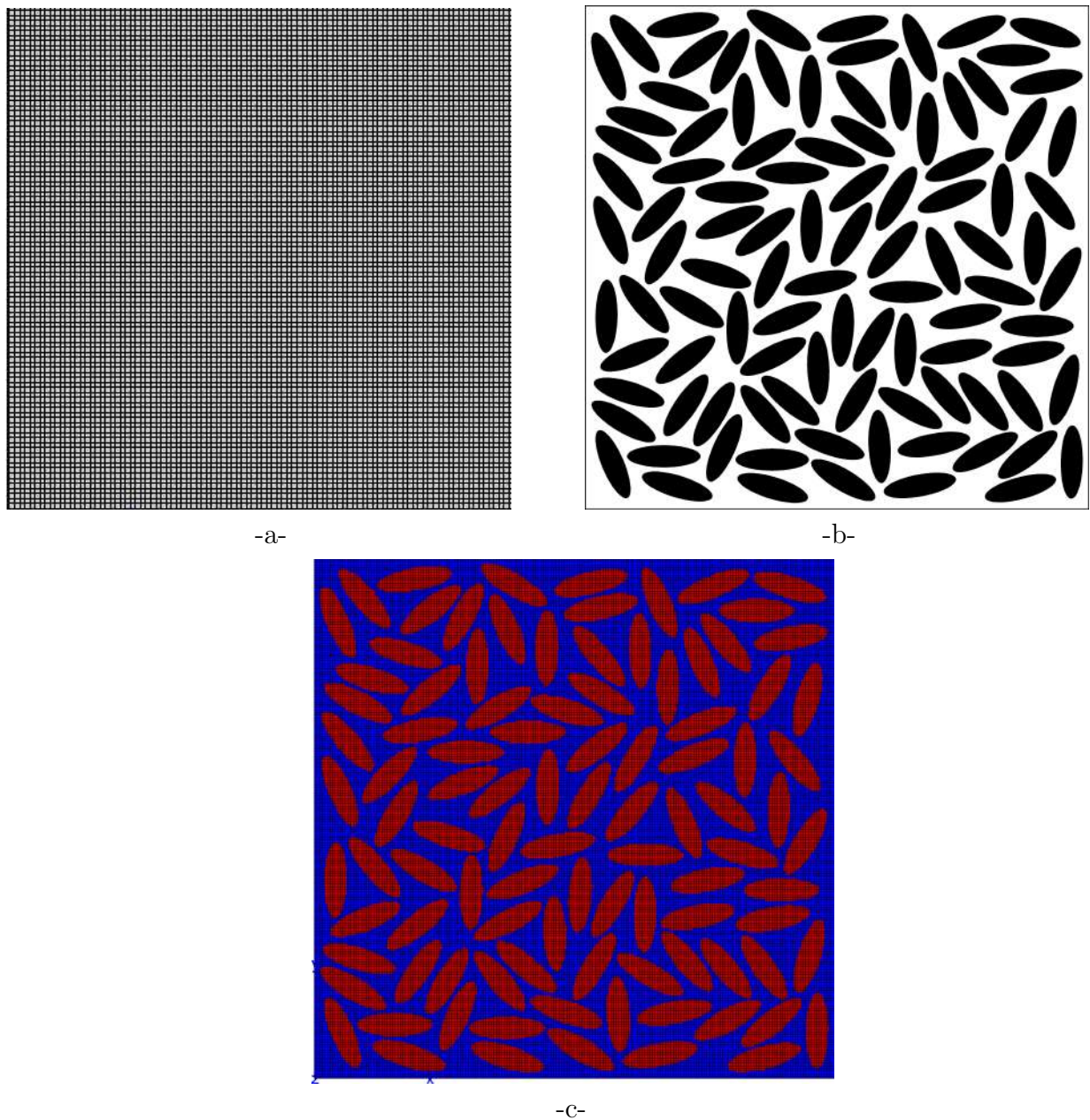


FIGURE 2.4: -a- Maillage régulier de densité 100×100 , -b- microstructure à 100 inclusions, $P = 50\%$ and $r = 0,3$. -c- Microstructure maillée avec 40000 EF.

2.3.2 Détermination de la densité du maillage

Un test de maillage est effectué afin de déterminer la grille de maillage optimale. Le calcul est effectué sur une microstructure (*V.E.R*) en changeant la densité du maillage. le maillage retenu pour les futurs calculs est celui qui permet la détermination de la propriété apparente avec une bonne précision en un minimum de temps .

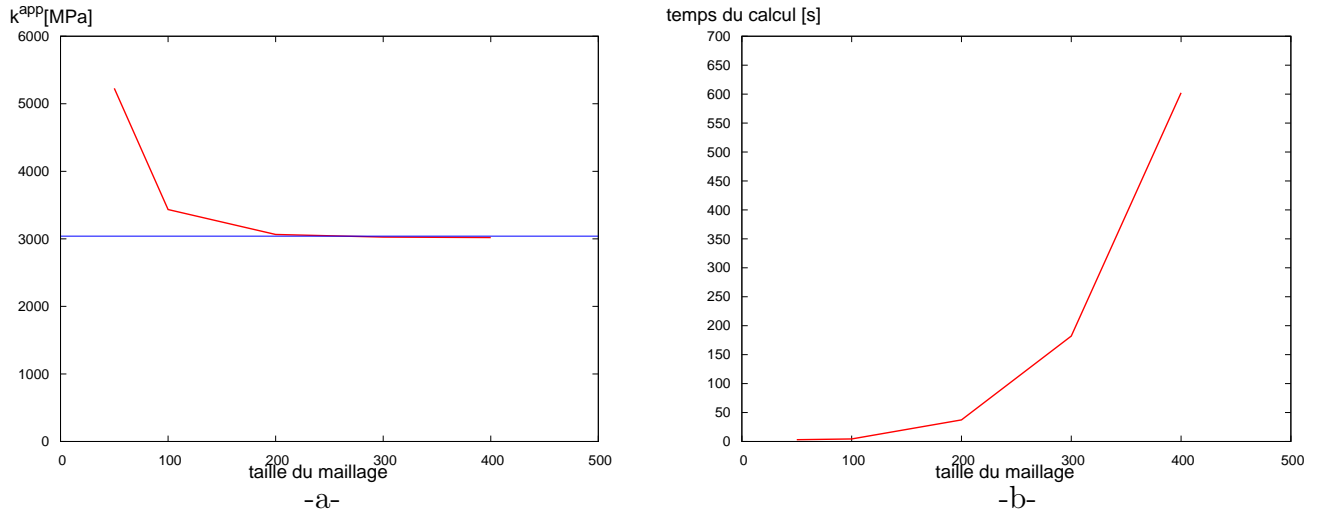


FIGURE 2.5: -a- Convergence du coefficient de compressibilité k en fonction de la densité du maillage. -b- temps de calcul correspondant à chaque cas de maillage.

On constate d'après la figure 2.5 que le maillage 200 x 200 éléments est le maillage optimal et par conséquent il sera utilisé dans tous les calculs de ce chapitre.

2.4 Propriétés élastiques apparentes et effectives

Les propriétés sont dites apparentes lorsqu'elles sont obtenues par des volumes $V < V_{ER}$. Ces propriétés apparentes convergent vers les propriétés effectives une fois $V \geq V_{VER}$.

2.4.1 Notion de la portée intégrale

D'après [Matheron, 1971]; [Matheron, 1975]; [Matheron, 1989]; [Lantuéjoul, 1991]; [Caillaud et al., 1994] et [Jeulin, 2001], il est possible de définir un paramètre qui donne des informations sur la taille du $V.E.R$ de la structure pour lequel les paramètres mesurés dans ce volume ont une bonne représentativité statistique. Ce paramètre est appelé portée intégrale notée A_n et qui a pour définition mathématique dans l'espace R^n :

$$A_n = \frac{1}{C(X, 0) - C(X, 0)^2} \int_{R^n} (C(X, h) - C(X, 0))^2 dh \quad (2.6)$$

où $C(X, h)$ est la covariance.

Cette notion est très utile pour la prédiction de la variabilité des propriétés d'un matériau en fonction de la géométrie de ses constituants.

Pour un volume V suffisamment grand, [Matheron, 1975] propose une relation entre la variance globale, les différentes propriétés de la microstructure et la portée intégrale comme suit :

$$D_Z^2(V) = D_Z^2 \frac{A_n}{V} \quad (2.7)$$

où $A_n, D_Z^2(V)$ et D_Z^2 représentent la portée intégrale, la variance globale et la variance locale respectivement.

2.4.2 Stationnarité et Ergodicité

- Un ensemble A est dit stationnaire si la loi spatiale est invariante par translation, figure 2.6, c.a.d si pour tout vecteur h et tout groupe de points (x_1, x_2, \dots, x_k) et (y_1, y_2, \dots, y_k) , on a :

$$P(x_1 + h, \dots, x_k + h; y_1 + h, \dots, y_k + h) = P(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) \quad (2.8)$$

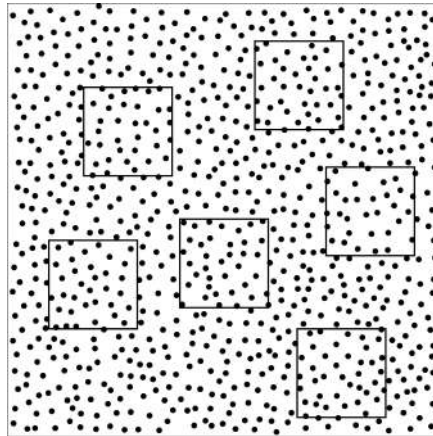


FIGURE 2.6: Propriété de stationnarité du domaine V

- L'ergodicité traduit le fait que les propriétés moyennes d'un milieu ne dépendent pas de la taille de l'échantillon considéré, figure 2.7.

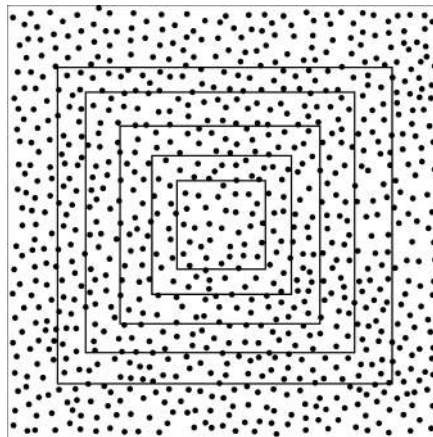


FIGURE 2.7: Propriété d'ergodicité du domaine V

2.4.3 Fluctuation des propriétés apparentes

Les propriétés apparentes sont définies comme les moyennes spatiales des champs $Z(x)$ sur un volume V . Nous considérons maintenant les fluctuations des valeurs moyennes sur les différentes réalisations du matériau composite aléatoire à l'intérieur du volume V . En géostatistique, il est bien connu que pour une fonction aléatoire *stationnaire* et *ergodique*, on peut calculer la variance $D_Z^2(V)$ pour sa valeur moyenne $\bar{Z}(V)$ sur le volume V , [Matheron, 1989] et [Lantuéjoul, 1991] par :

$$D_Z^2(V) = D_Z^2\left(\frac{A_n}{V}\right) \quad (2.9)$$

où D_Z^2 est la variance locale $Z(x)$ et A_n la portée intégrale de la fonction aléatoire $Z(x)$.

Cailletaud [Cailletaud et al., 1994] a proposé, dans le cas d'un matériau à deux phases avec la propriété élastique Z_1 pour la *phase 1* et Z_2 pour la *phase 2*, pour la variance locale de la variable aléatoire Z , l'expression suivante :

$$D_Z^2 = P(1 - P)(Z_1 - Z_2)^2 \quad (2.10)$$

La relation (2.9) devient donc :

$$D_Z^2(V) = P(1 - P)(Z_1 - Z_2)^2 \left(\frac{A_n}{V}\right) \quad (2.11)$$

Dans la théorie des échantillons, l'erreur absolue ϵ_{abs} sur la valeur moyenne de la propriété étudiée Z obtenue avec n indépendantes (différentes) réalisations de volume V , est donnée en fonction de la variance $2D_Z(V)$ par :

$$\epsilon_{abs} = \frac{2D_Z(V)}{\sqrt{n}} \quad (2.12)$$

L'erreur relative sera donc :

$$\epsilon_{rela} = \frac{\epsilon_{abs}}{\bar{Z}} = \frac{2D_Z(V)}{\bar{Z}\sqrt{n}} \quad (2.13)$$

Le nombre minimal n des différentes réalisations nécessaires et suffisantes pour l'estimation de la propriété effective Z^{eff} avec une erreur relative donnée ϵ_{rela} sur un volume V est :

$$n(V) = \frac{4}{\epsilon_{rela}^2 \bar{Z}^2} D_Z^{*2}\left(\frac{A_n}{V}\right) \quad (2.14)$$

La convention est que si le volume V d'un échantillon contenant une cellule de fraction volumique P fixée égale à l'unité figure (2.8-a-), une surface contenant N cellules de même

fraction est égale à $N.V$, figure (2.8,-b-). Par conséquent, une augmentation de la surface signifie un nombre croissant de cellules et donc chaque volume V peut être représentée par le nombre N de cellules qu'il contient.

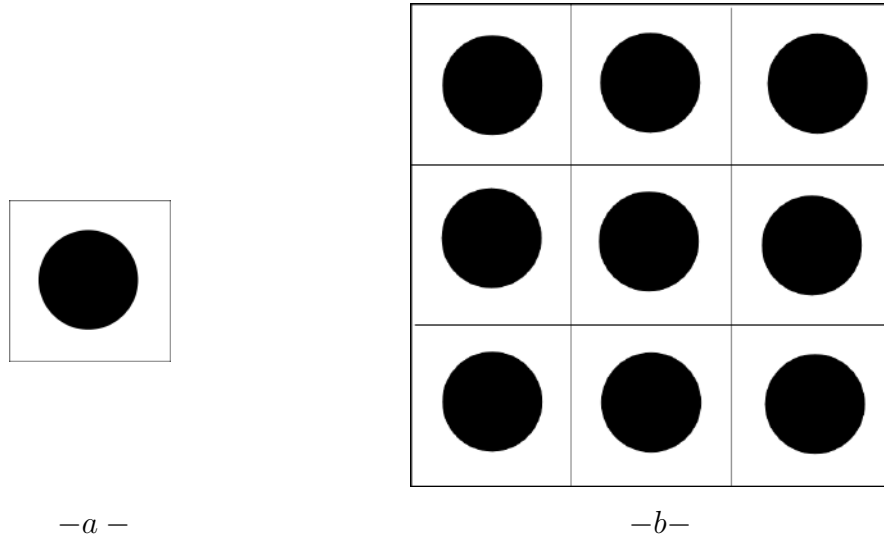


FIGURE 2.8: -a- Une Microstructure à une inclusion de volume V et d'une fraction volumique de 30% considérée comme unité. -b- Une microstructure à 9 inclusions de même fraction volumique et de volume $9.V$

Ainsi les équations 2.11 et 2.13 peuvent être écrites sous cette forme :

$$D_Z^2(N) = P(1 - P)(Z_1 - Z_2)^2 \left(\frac{A_n}{N}\right) \quad (2.15)$$

et

$$\epsilon_{rela} = \frac{\epsilon_{abs}}{\bar{Z}} = \frac{2D_Z(N)}{\bar{Z} \sqrt{n}} \quad (2.16)$$

et par conséquent, tous les résultats obtenus seront représentés dans les sections suivantes en fonction du nombre d'inclusions N .

2.4.4 Propriétés élastiques apparentes et effectives

Les éléments et les notations de la théorie de l'homogénéisation nécessaires pour l'estimation numérique des propriétés effectives sont mis en évidence dans cette section. Une attention particulière est portée aux conditions aux limites à appliquer aux éléments de volume afin d'estimer les propriétés élastiques apparentes et effectives de la microstructure et le *V.E.R.*

Dans ce qui suit, deux types de conditions aux limites sont utilisés, les conditions de déformations homogènes au contour (*KUBC*) et les conditions de périodicité (*PBC*). Avant de présenter les différents résultats des propriétés apparentes et effectives obtenues par simulation numérique, nous présentons ci dessous une microstructure à 10 inclusions sollicitée une première fois à la déformation uniforme (*KUBC*), figure 2.9. et une deuxième fois à la déformation périodique (*PBC*), figure 2.10.

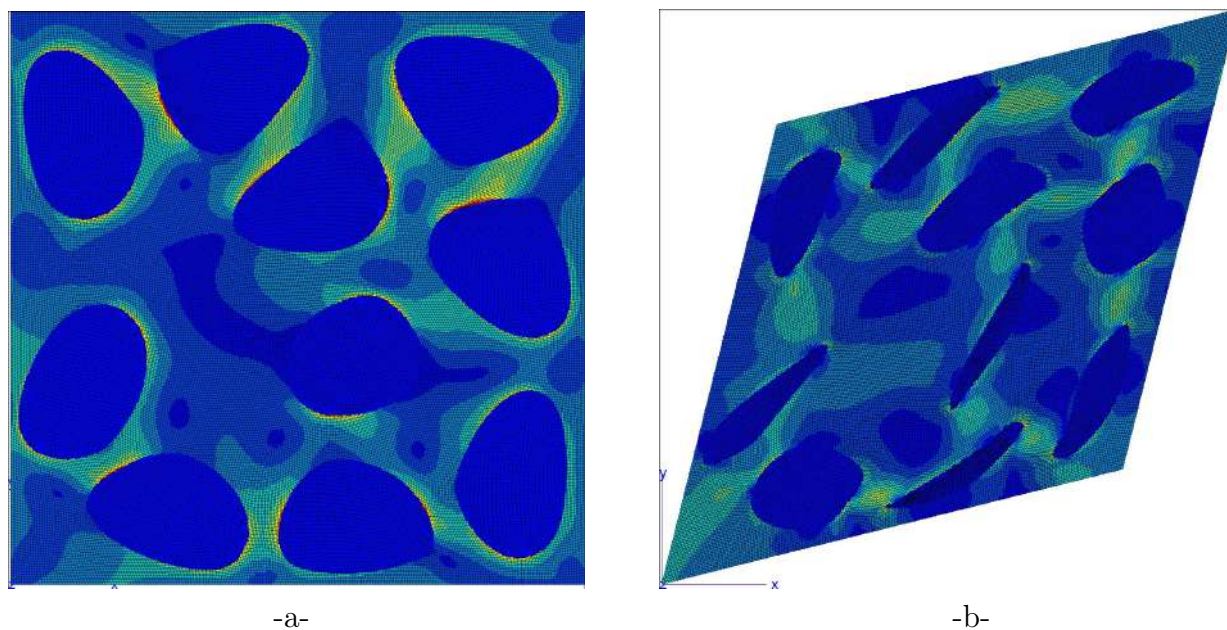


FIGURE 2.9: Microstructure à 10 inclusions sollicitée à la déformation uniforme KUBC. -a- Traction. -b- Cisaillement.

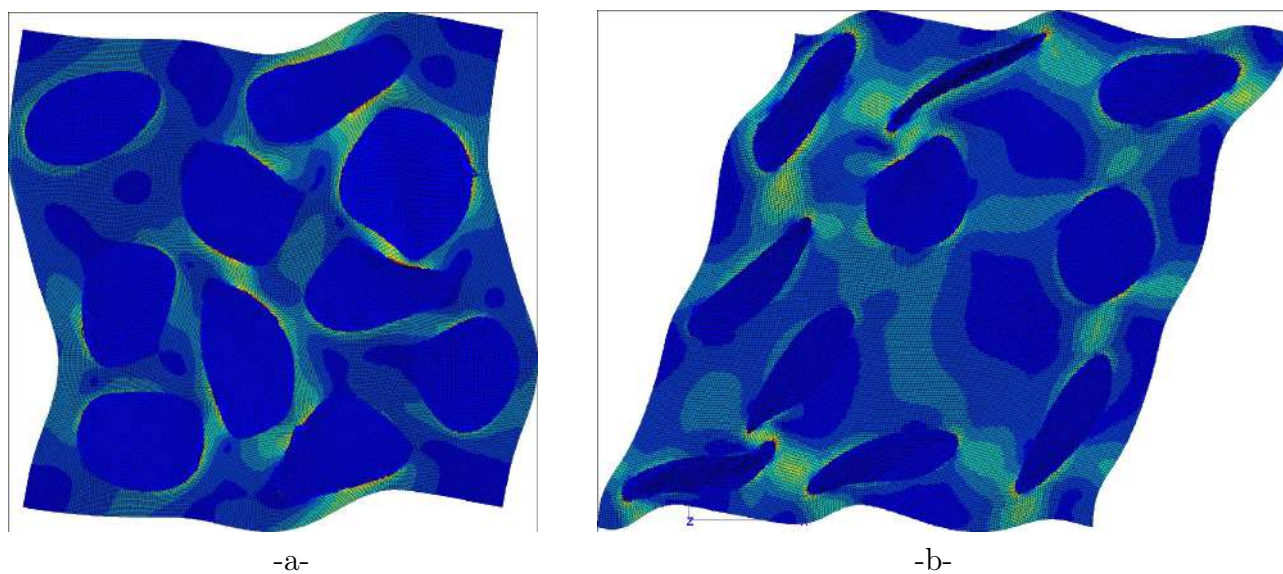


FIGURE 2.10: Microstructure à 10 inclusions déformée sous l'effet d'une sollicitation périodique PBC. -a- Traction. -b- Cisaillement.

Tous les résultats des simulations numériques obtenus sont présentés aux figures 2.11 à 2.18 pour trois fractions volumiques étudiées :

- **Propriétés élastiques pour la fraction volumique $P = 10\%$**

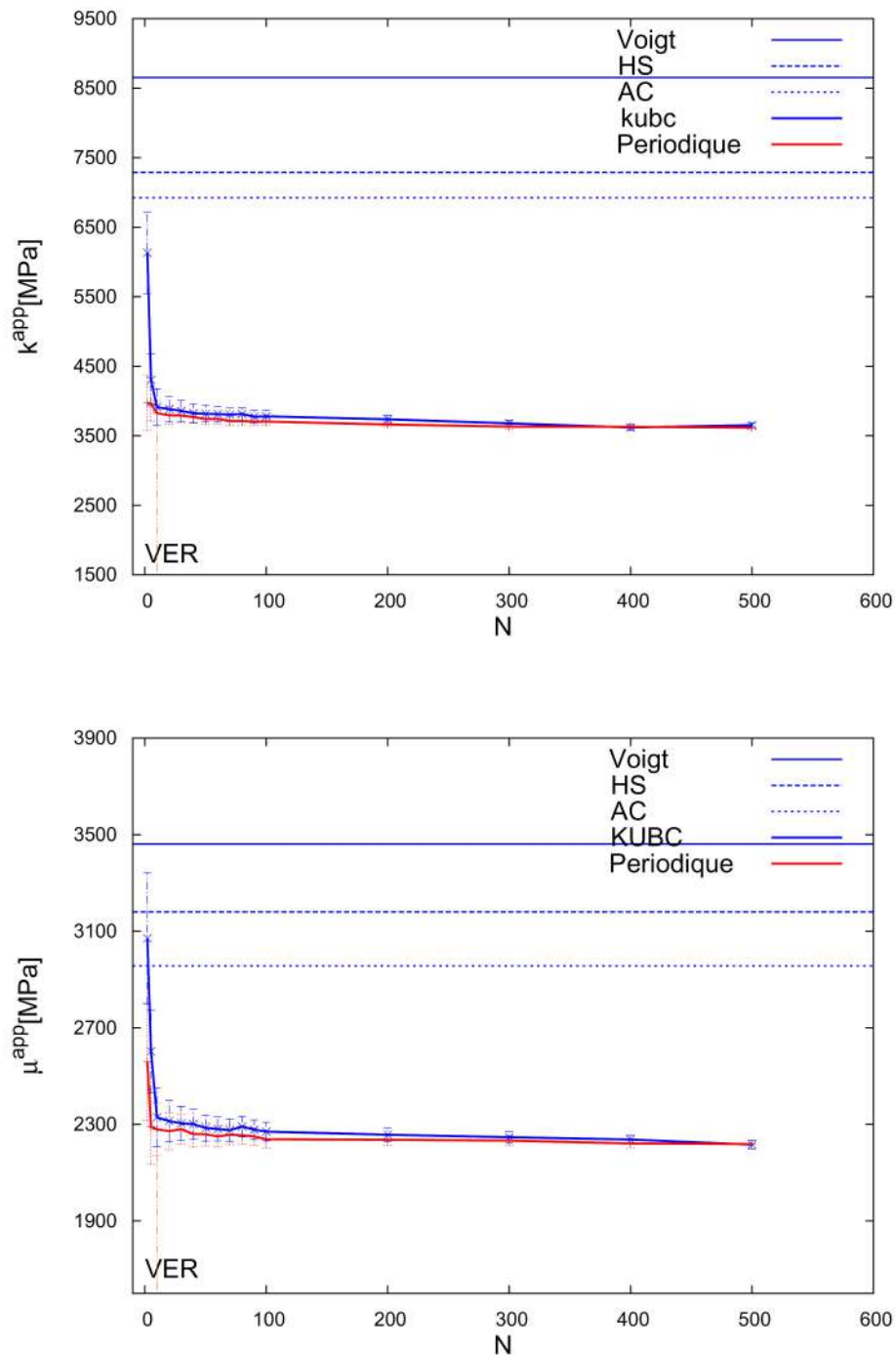


FIGURE 2.11: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 10\%$ et $r = 0.2$

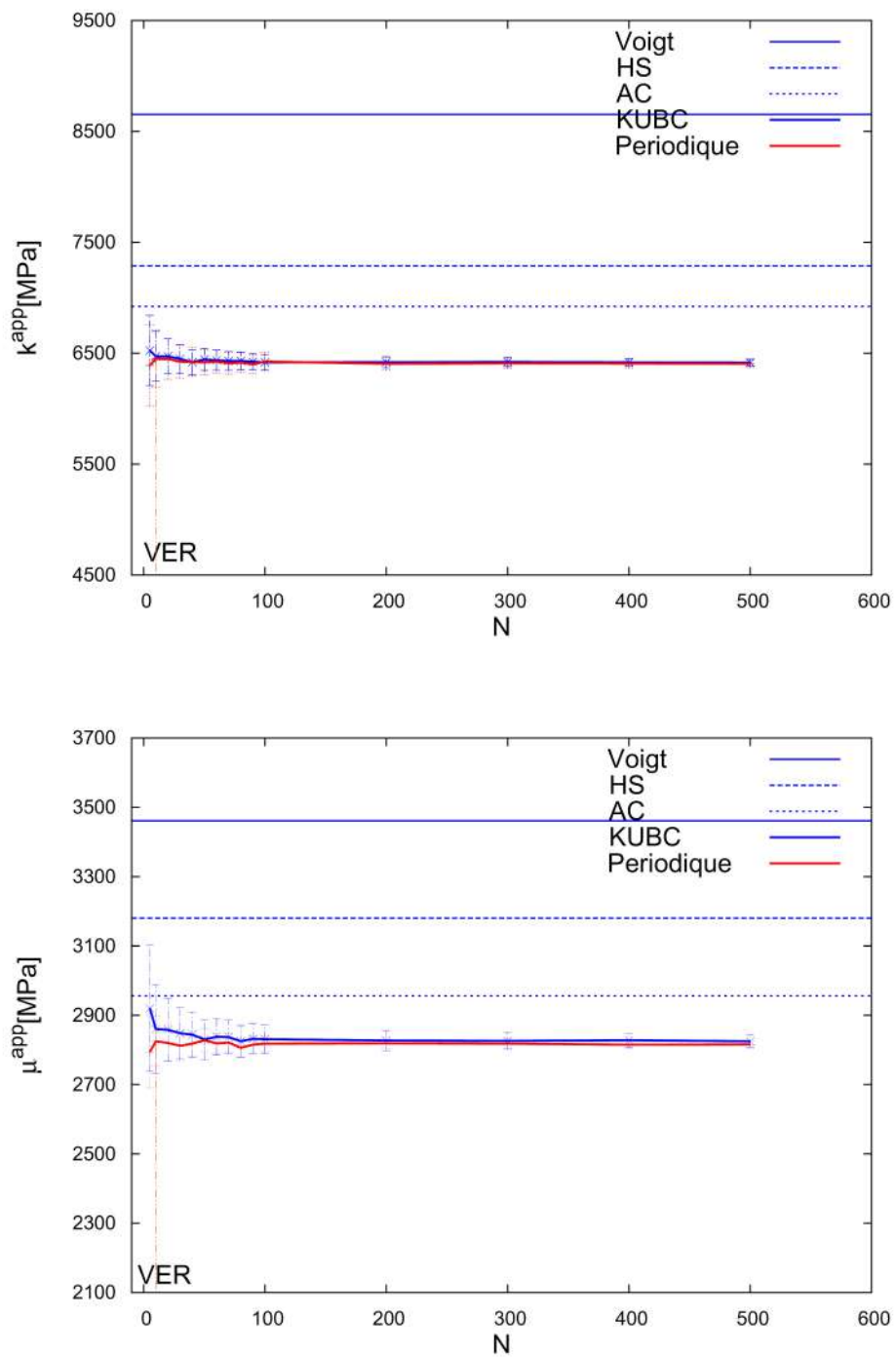


FIGURE 2.12: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 10\%$ et $r = 0.5$

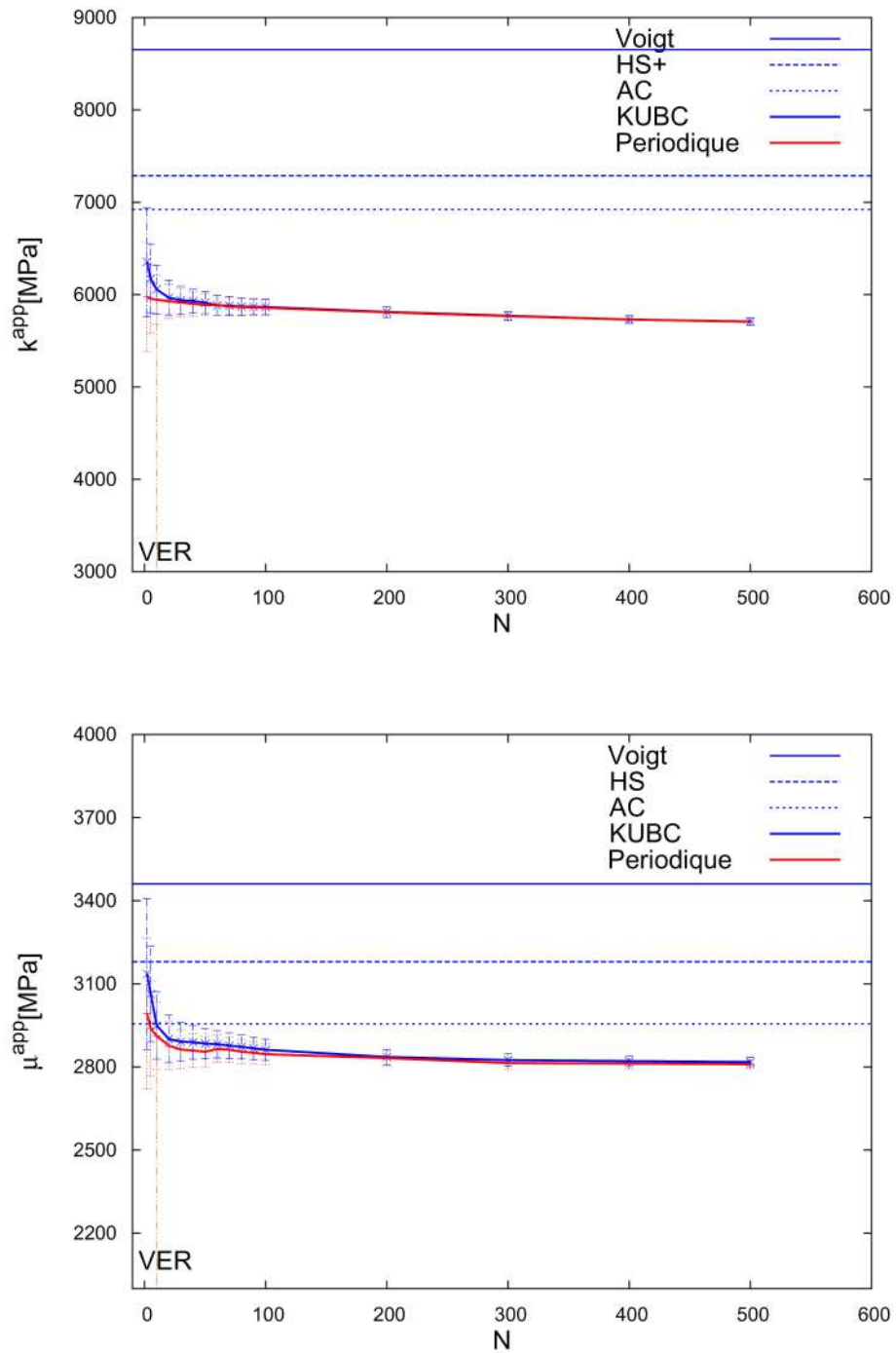


FIGURE 2.13: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 10\%$ et $r = 1.0$

– Propriétés élastiques pour la fraction volumique $P = 30\%$

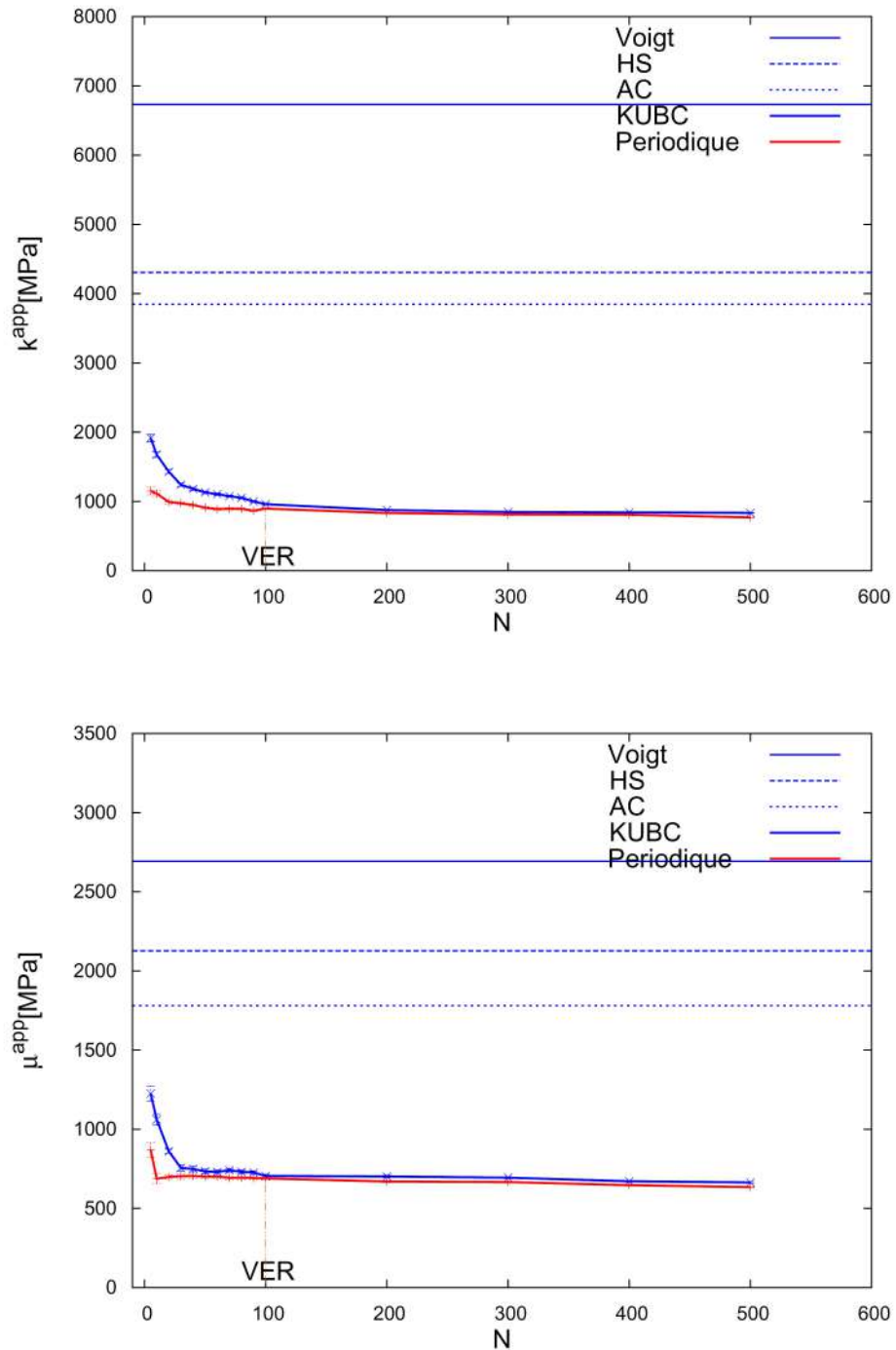


FIGURE 2.14: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 30\%$ et $r = 0.2$

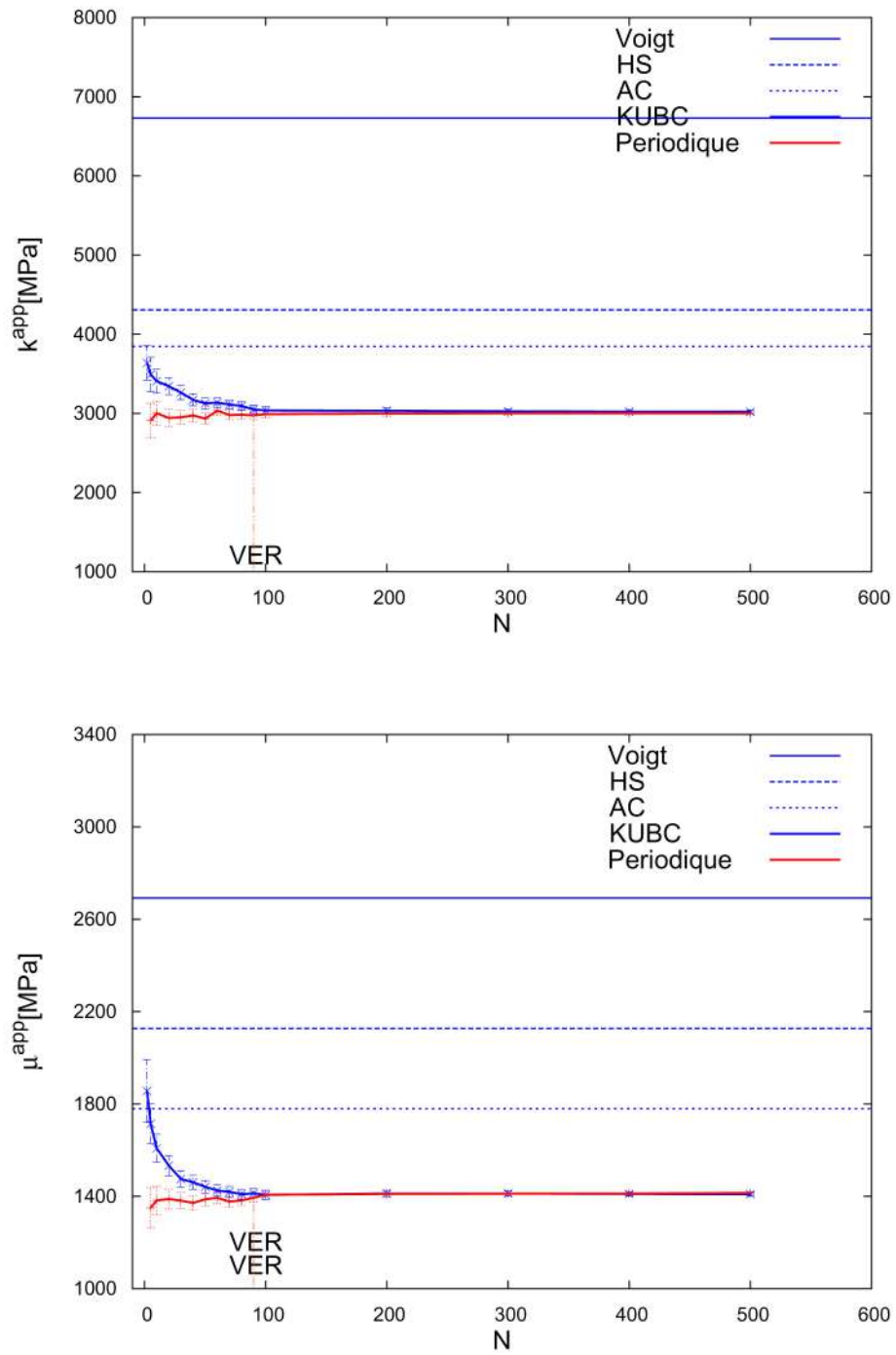


FIGURE 2.15: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 30\%$ et $r = 0.5$

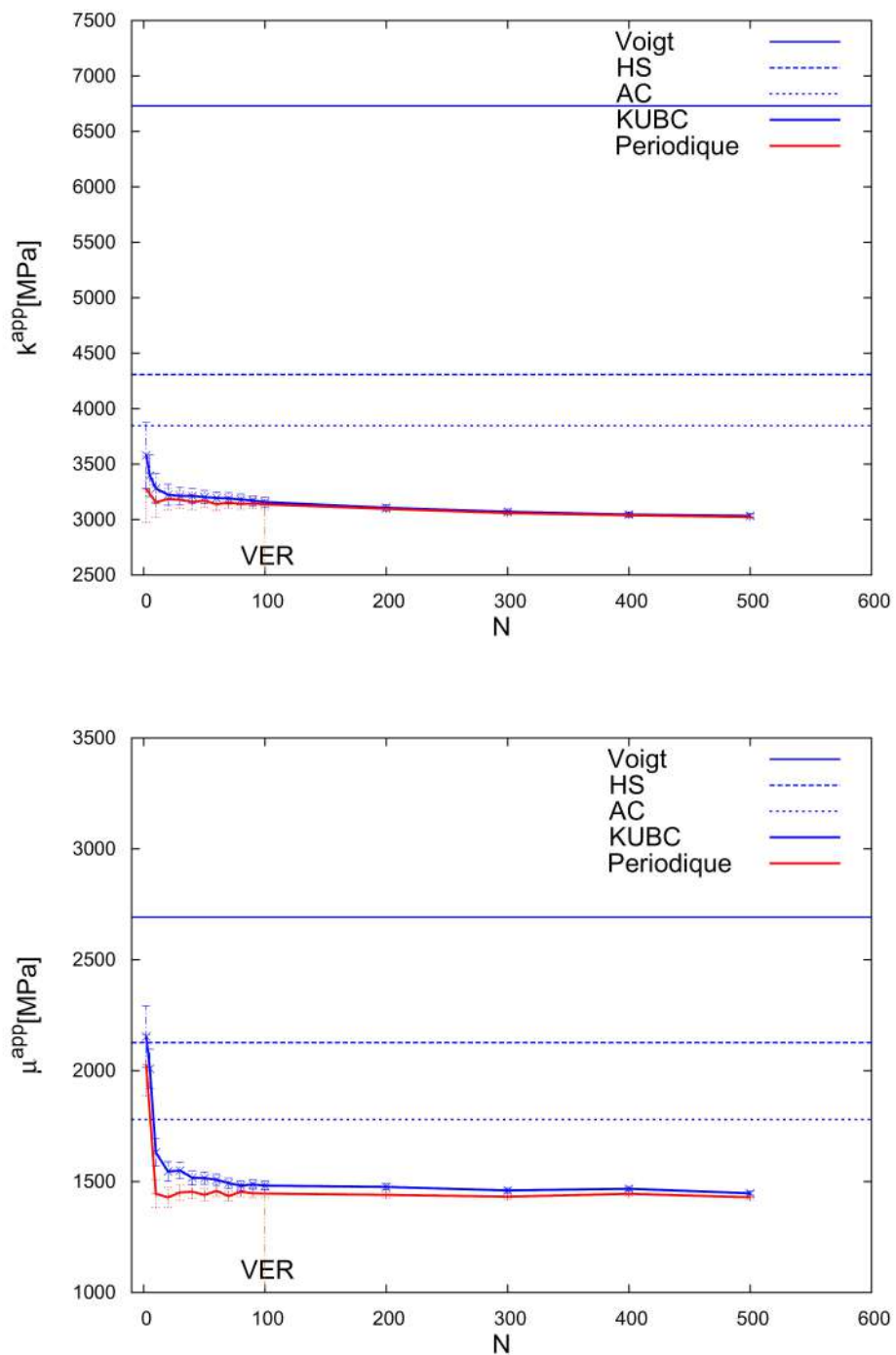


FIGURE 2.16: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 30\%$ et $r = 1.0$

– Propriétés élastiques pour la fraction volumique $P = 50\%$

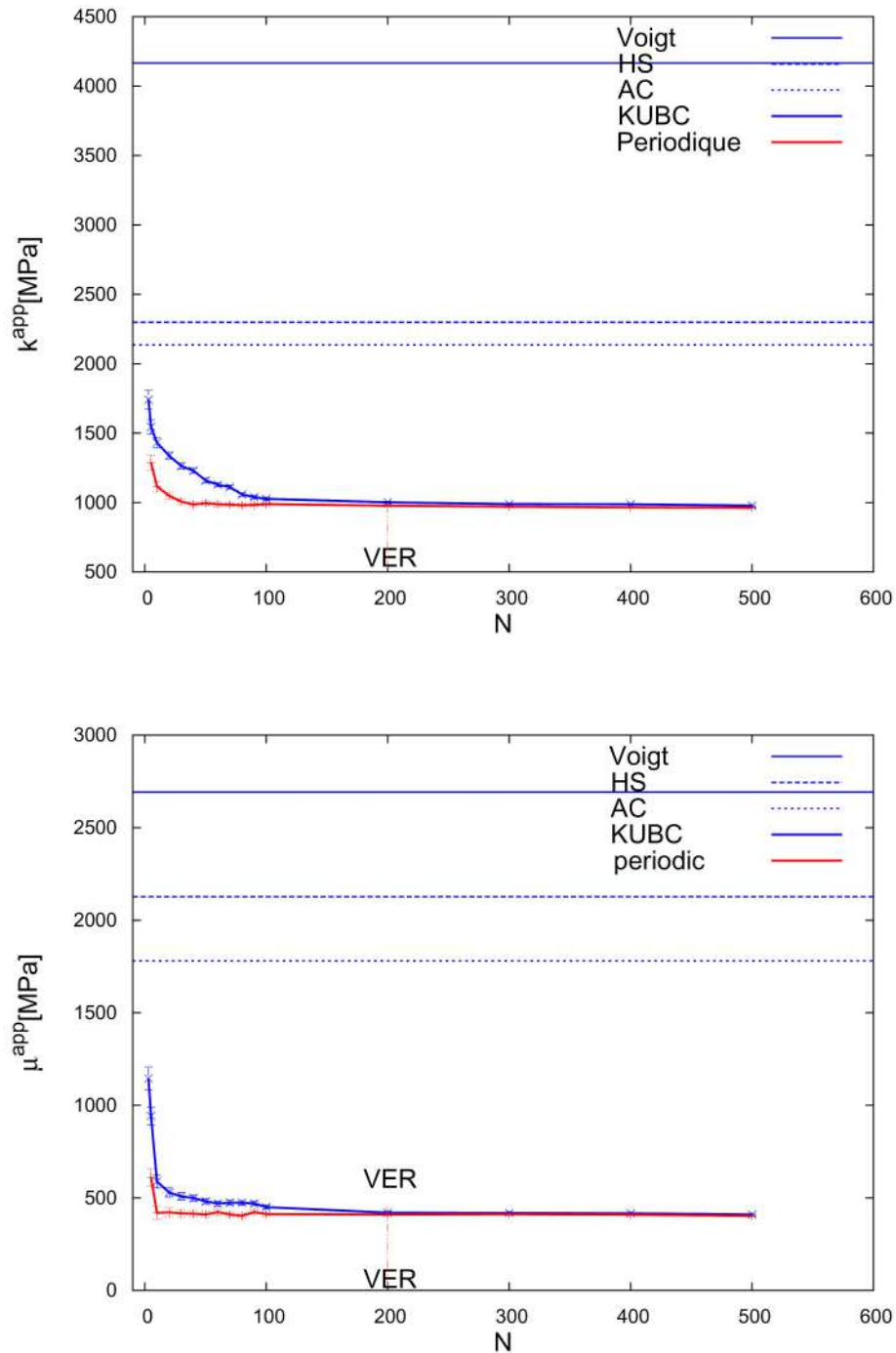


FIGURE 2.17: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions pour le cas $P = 50\%$ et $r = 0.5$

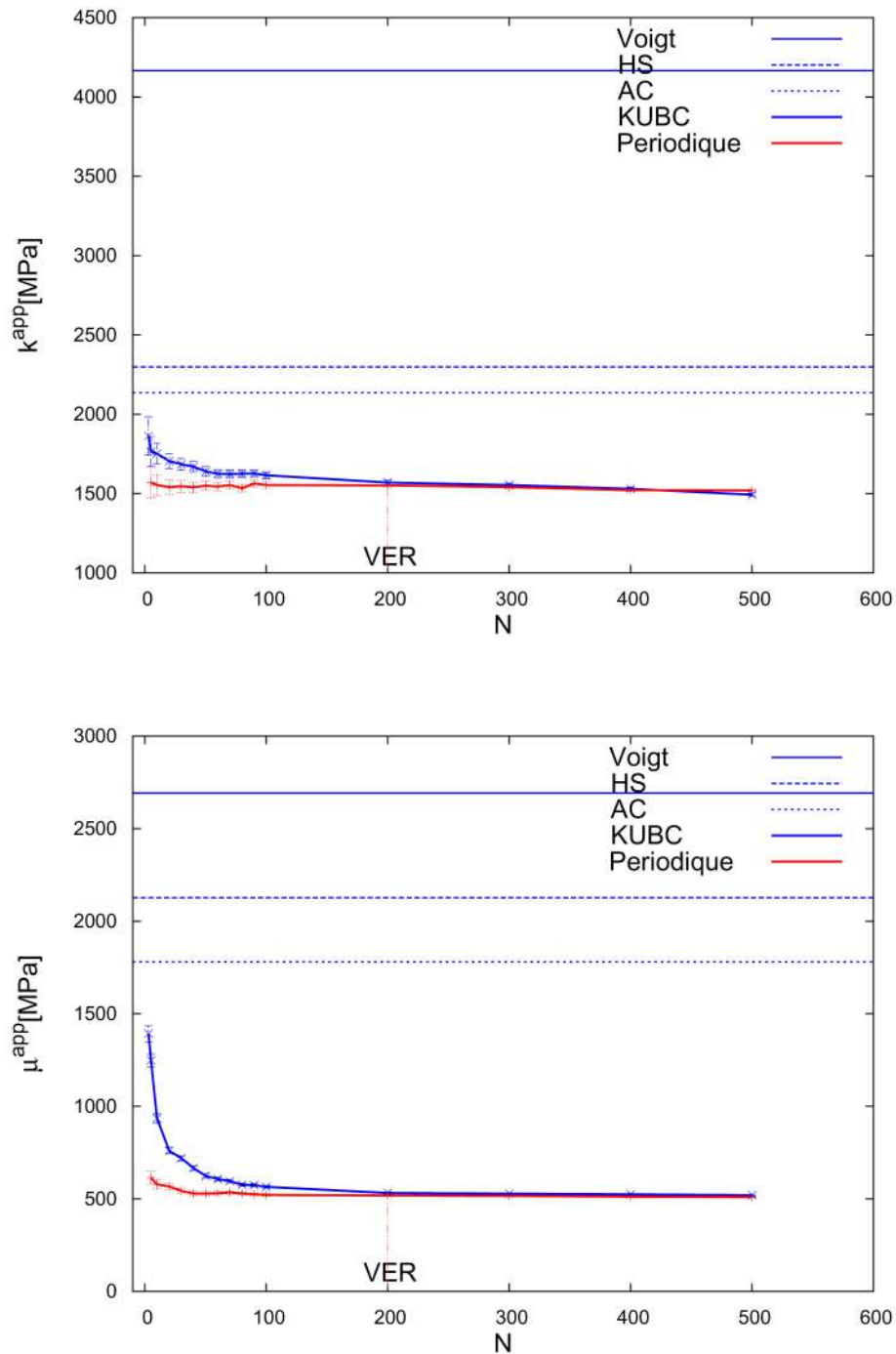


FIGURE 2.18: Propriétés mécaniques k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusion pour le cas $P = 50\%$ et $r = 1.0$

Les figures de 2.11 à 2.18 représentent les valeurs des propriétés élastiques apparentes (le module de compressibilité k^{app} et le module de cisaillement μ^{app}) en fonction de la taille du volume (ou d'une façon équivalente le nombre d'inclusions N) pour les huit cas

considérés. Le $V.E.R$ ou d'une façon équivalente le N_{VER} est déterminé en faisant la correspondance entre les deux premiers points ayant une erreur inférieure ou égale à 2% entre les valeurs apparentes obtenues par les deux conditions aux limites, périodiques (PBC) et déformations homogènes au contour ($KUBC$). Par exemple, pour le cas $P = 30\%$, $r = 0.5$ la valeur approximative du $V.E.R_{2\%}$ est $N_{VER} = 100$ inclusions pour les deux propriétés élastiques k et μ . La totalité des résultats est présentée dans les tableaux 2.4, 2.5 et 2.6.

Les valeurs de k^{eff} et μ^{eff} trouvées pour les grandes tailles de volume, pour tous les cas étudiés, sont présentées dans les tableaux 2.1, 2.2 et 2.3 et comparées aux bornes de *Voigt*, *Hashin-Shtrikman HS+* et au modèle auto-cohérent (*AC*). Comme la microstructure étudiée est poreuse, les deux bornes inférieures *Reuss* et *Hashin - Shtrikman HS-* sont presque nulles et ne sont pas représentées.

Fraction volumique

<i>Forme</i>	<i>Propriété</i>	<i>Voigt</i>	<i>HS⁺</i>	<i>AC</i>	<i>Erreur %</i>	<i>Simulation</i>
r = 0.2	k	8653	7287	6923	47	3620
	μ	3461	3180	2933	24	2220
r = 0.5	k	8653	7287	6923	8	6405
	μ	3461	3180	2956	4	2815
r = 1.0	k	8653	7287	6923	17	5720
	μ	3461	3180	2956	4	2810

Tableau 2.1: Les valeurs des simulations numériques, les bornes de Voigt, Les bornes de Hashin-Shtrikman HS +, le modèle auto-cohérent (AC) pour P = 10% et l'erreur relative entre la simulation et le modèle auto-cohérent.

<i>Forme</i>	<i>Propriété</i>	<i>Voigt</i>	<i>HS⁺</i>	<i>AC</i>	<i>Erreur %</i>	<i>Simulation</i>
r = 0.2	k	6730	4307	3846	67	3846
	μ	2692	2127	1748	54	1748
r = 0.5	k	6730	4307	3846	22	3002
	μ	2692	2127	1748	20	1412
r = 1.0	k	6730	4307	3846	4	3700
	μ	2692	2127	1748	14	1512

Tableau 2.2: Les valeurs des simulations numériques, les bornes de Voigt, Les bornes de Hashin-Shtrikman HS +, le modèle auto-cohérent (AC) pour P=30% et l'erreur relative entre la simulation et le modèle auto-cohérent.

<i>Forme</i>	<i>Propriété</i>	<i>Voigt</i>	<i>HS⁺</i>	<i>AC</i>	<i>Erreur %</i>	<i>Simulation</i>
r = 0.5	<i>k</i>	4807	2481	2136	55	960
	<i>μ</i>	1923	1333	1012	60	400
r = 1.0	<i>k</i>	4807	2481	2136	29	1520
	<i>μ</i>	1923	1333	1012	49	510

Tableau 2.3: Les valeurs des simulations numériques, les bornes de *Voigt*, les bornes de Hashin-Shtrikman *HS⁺*, le modèle auto-cohérent (*AC*) pour $P=50\%$ et l'erreur relative entre la simulation et le modèle auto-cohérent.

Cette comparaison a permis, en premier lieu, la validation des différents résultats de simulations par leur comparaison aux différentes bornes théoriques et en deuxième lieu, de montrer que le modèle auto-cohérent ne permet pas une bonne estimation des propriétés élastiques et encore moins pour les fractions volumiques importantes. Cela est dû au fait que l'interaction entre les différents pores est importante et a une influence, d'autant plus importante que la fraction volumique est grande, sur les propriétés élastiques effectives.

2.4.5 Estimation numérique de la portée intégrale et proposition du modèle

Cette section est consacrée à l'estimation de cette portée intégrale, en utilisant l'approche numérique de [Kanit et al., 2003] pour le cas de microstructures de type matrice-inclusion.

D'après Kanit et al [Kanit et al., 2003], pour les microstructures avec des mosaïques Voronoi, la portée intégrale est environ la taille d'un grain du *V.E.R.* Récemment, [Jeulin, 2012] constate que la portée intégrale A_n ne dépend pas du volume de la microstructure V , à condition que ce volume soit suffisamment large, pour assurer la stationnarité du champ en minimisant l'effet des conditions aux limites.

D'après l'équation 2.13, on peut écrire la propriété apparente moyenne \bar{Z} en fonction de la taille N du volume, la portée intégrale A_n et de l'erreur relative d'estimation telle que :

$$\bar{Z} = \frac{2D_Z(N)}{\epsilon_{rela}\sqrt{n}} \quad (2.17)$$

La méthode d'estimation des valeurs de la portée intégrale A_{fit} , pour les différents cas étudiés, consiste à fitter l'équation 2.17 en prenant $n = 1$ correspondant au *V.E.R* *déterministe* avec une erreur relative choisie de l'ordre de 2%.

Les différents résultats de la portée intégrale obtenue par fittage sont présentés dans les tableaux 2.4 ; 2.5 et 2.6.

Comme un premier pas dans l'identification de cette portée intégrale, une comparaison des résultats numériques obtenus avec le rapport Eq. 2.18, proposé par [Kanit et al., 2003].

$$A_{th} = \frac{P}{N_{VER}} \quad (2.18)$$

sont :

<i>Forme</i>	<i>Propriété</i>	$A_{th} = \frac{P}{N_{VER}}$	A_{fit}	N_{VER}
r = 0.2	k	0.01	0.0112	10
	μ	0.01	0.0134	10
r = 0.5	k	0.01	0.00979	10
	μ	0.01	0.0117	10
r = 1.0	k	0.01	0.0122	10
	μ	0.01	0.0146	10

Tableau 2.4: Valeurs de A_n pour la fraction volumique $P = 10\%$ et pour $r = 0.2$, $r = 0.5$ et $r = 1.0$

<i>Forme</i>	<i>Propriété</i>	$A_{th} = \frac{P}{N_{VER}}$	A_{fit}	N_{VER}
r = 0.2	k	0.003	0.00270	100
	μ	0.003	0.00262	100
r = 0.5	k	0.003	0.00275	100
	μ	0.003	0.00283	100
r = 1.0	k	0.0033	0.00354	90
	μ	0.0033	0.00348	90

Tableau 2.5: Valeurs de A_n pour la fraction volumique $P = 30\%$ et pour $r = 0.2$, $r = 0.5$ et $r = 1.0$

<i>Forme</i>	<i>Propriété</i>	$A_{th} = \frac{P}{N_{VER}}$	A_{fit}	N_{VER}
r = 0.5	k	0.0025	0.00231	200
	μ	0.0025	0.00227	200
r = 1.0	k	0.0025	0.00240	200
	μ	0.0025	0.00235	200

Tableau 2.6: Valeurs de A_n pour la fraction volumique $P = 50\%$ et pour $r = 0.5$ et $r = 1.0$

Les résultats obtenus par fittage montrent un bon accord avec le modèle proposé et confirment ainsi les deux thèses annoncées par [Kanit et al., 2003] et [Jeulin, 2012] qui

stipulent que : la portée intégrale n'est, tout simplement, que *la surface d'une inclusion dans le V.E.R déterministe dans le cas 2D (résultat de ce travail) ou le volume d'une inclusion dans le V.E.R déterministe dans le cas 3D* [El-Moumen, 2014].

Pour une meilleure illustration de ce résultat nous présentons aux figures 2.19 à 2.26, les valeurs moyennes des deux modules k^{app} et μ^{app} obtenues, précédemment, par la condition aux limites (*PBC*) avec les différents intervalles de confiances obtenus par les équations 2.15 et 2.18 en fonction du nombre d'inclusions N .

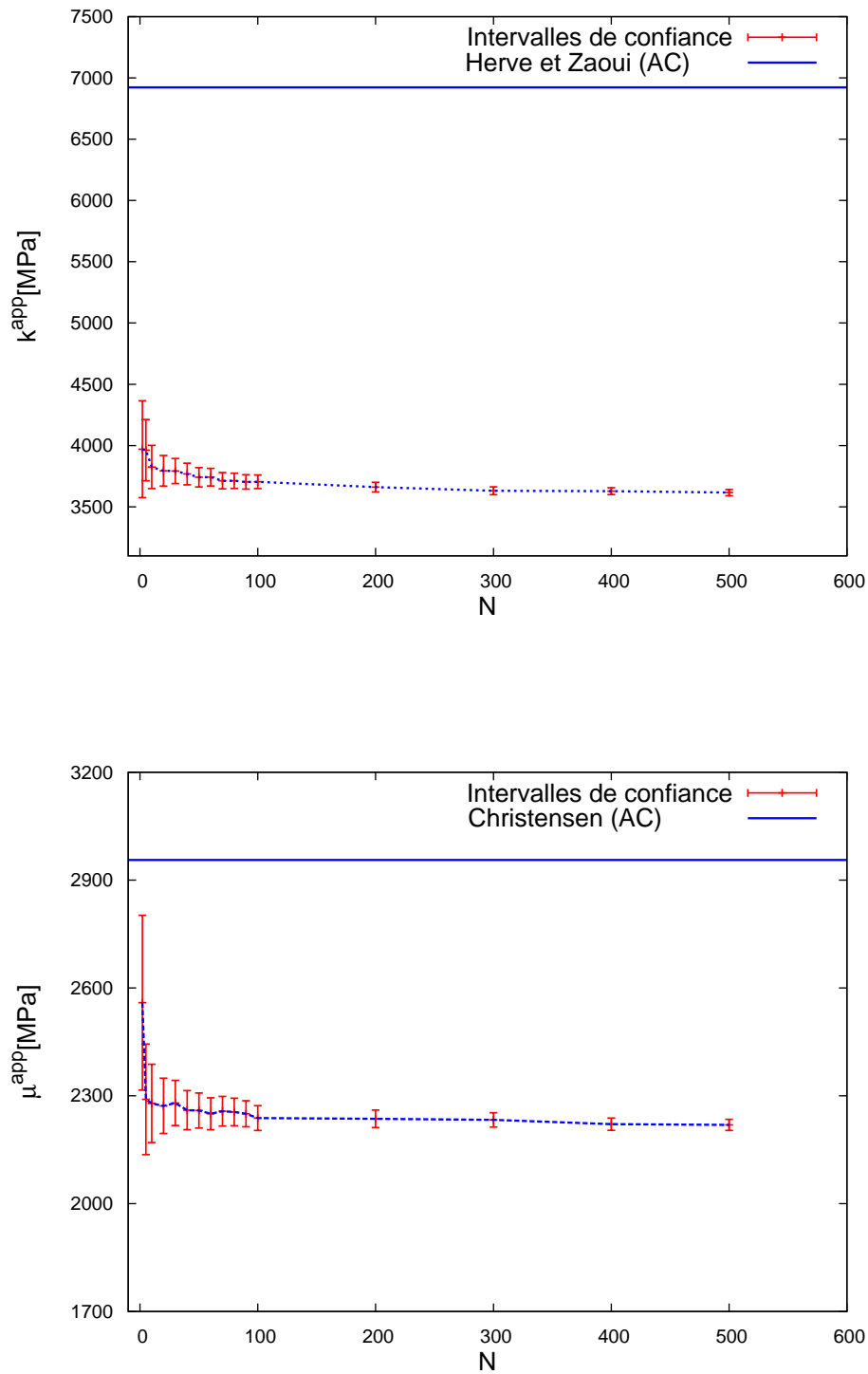


FIGURE 2.19: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 10\%$ et $r = 0, 2$

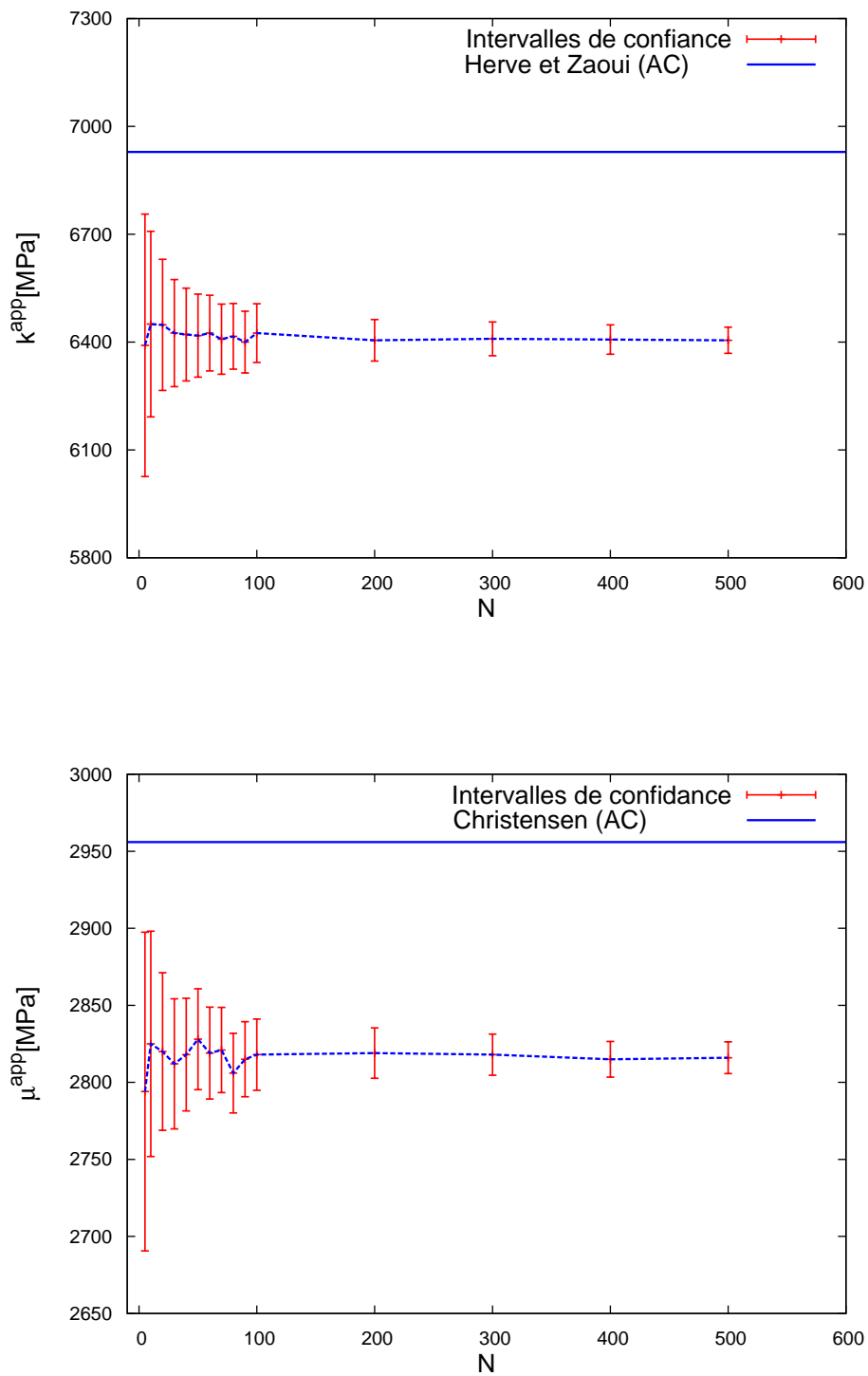


FIGURE 2.20: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 10\%$ et $r = 0,5$

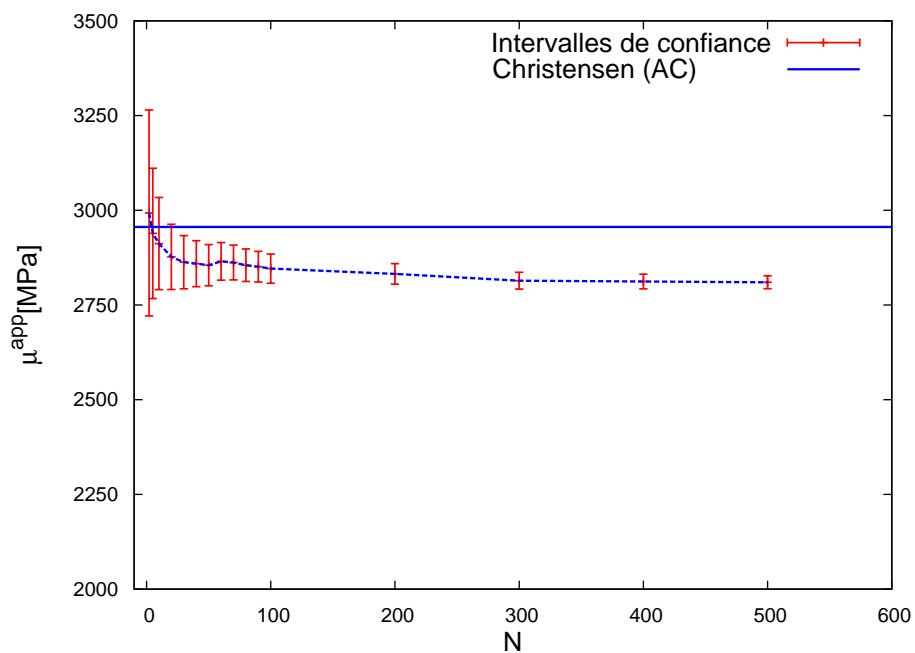
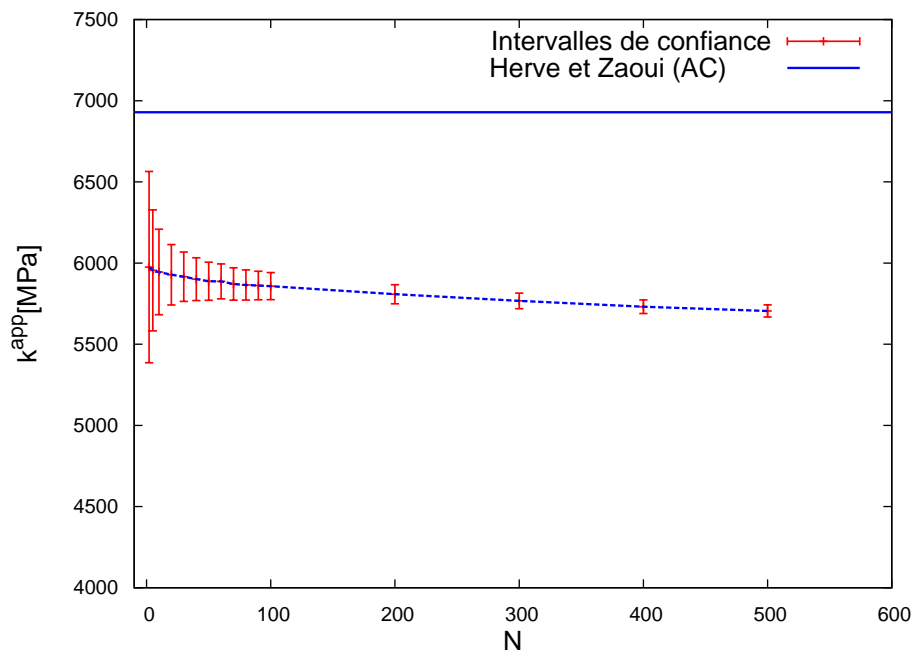


FIGURE 2.21: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 10\%$ et $r = 1, 0$

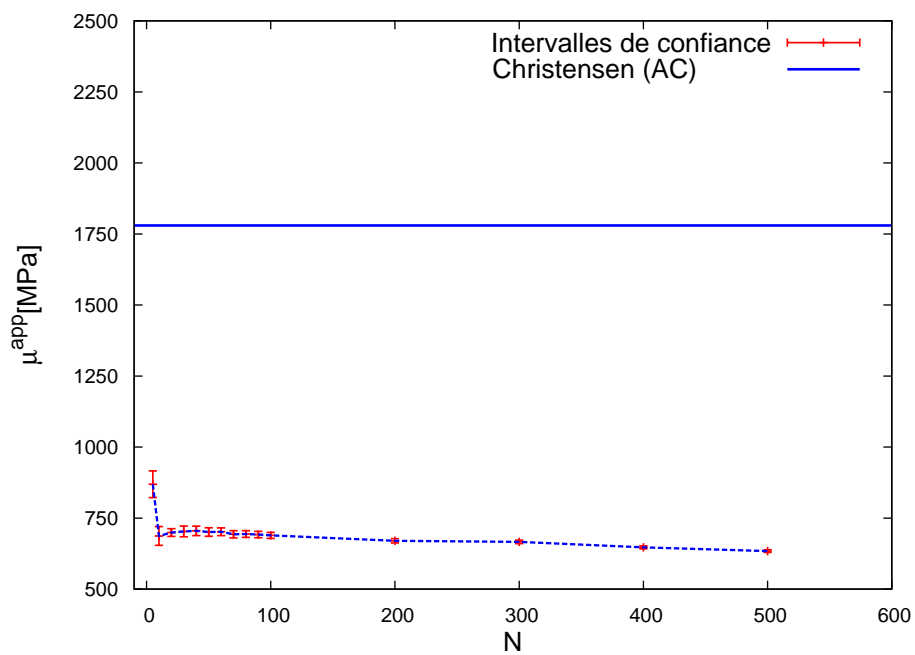
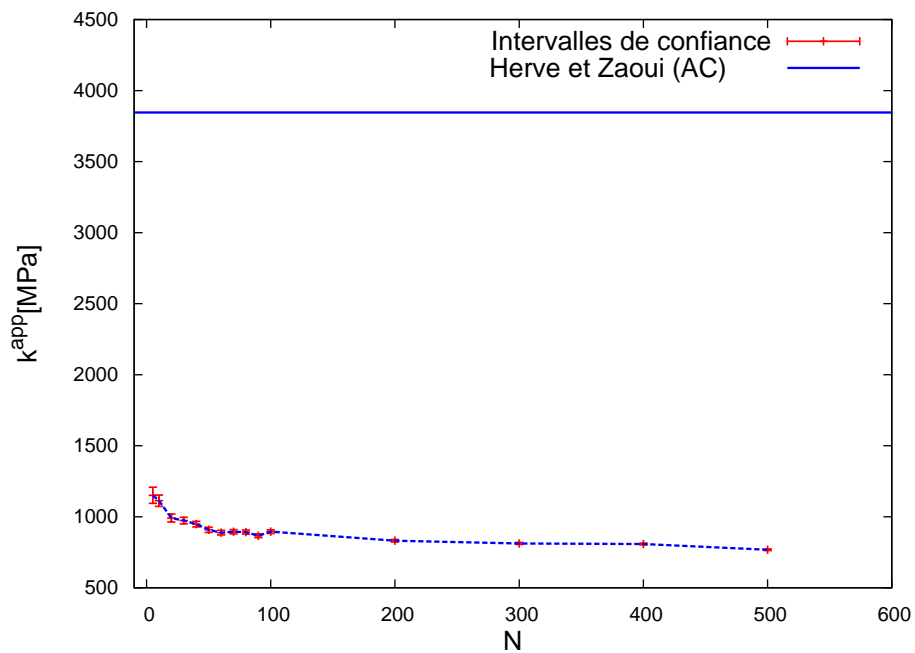


FIGURE 2.22: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 30\%$ et $r = 0, 2$

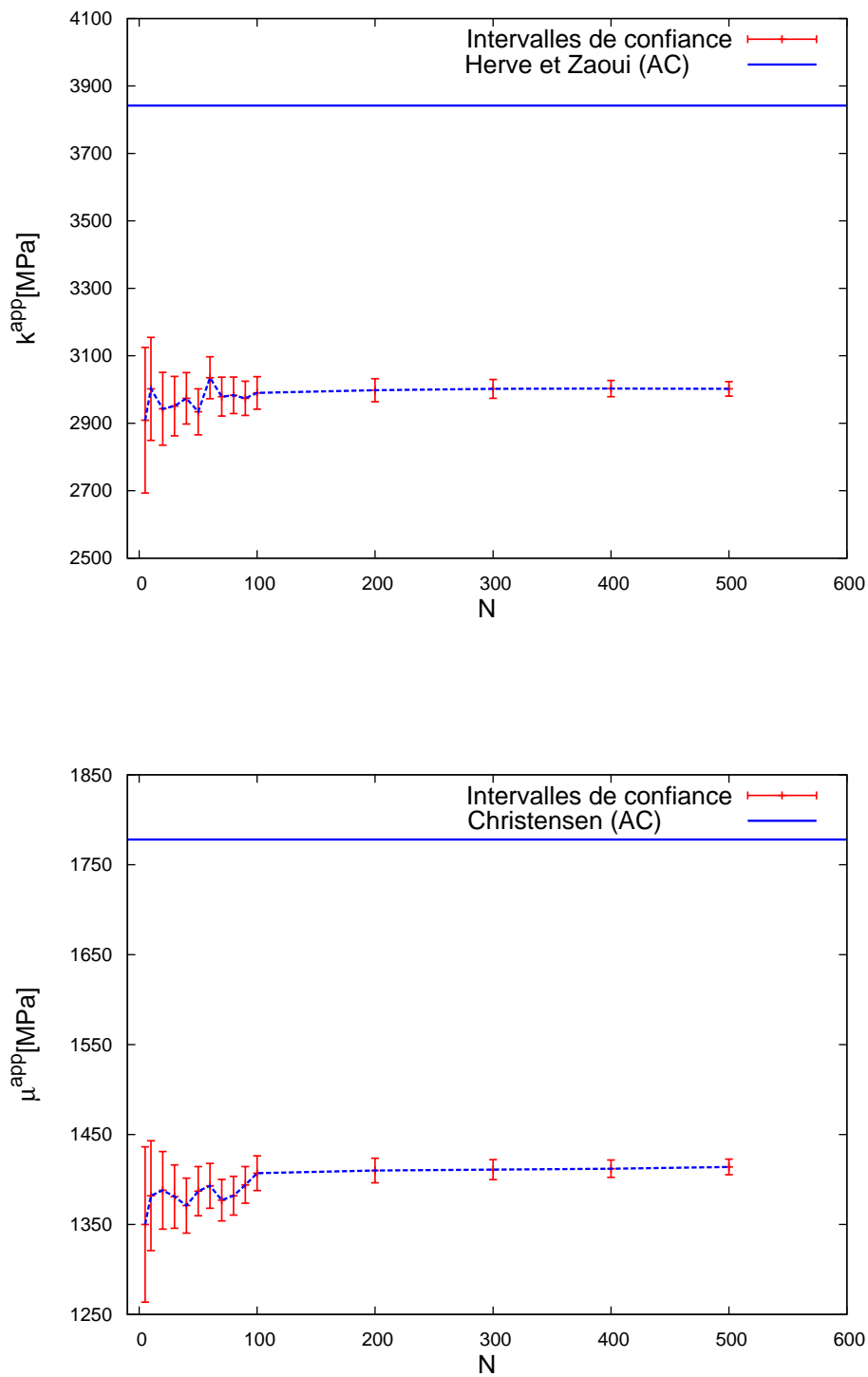


FIGURE 2.23: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 30\%$ et $r = 0,5$

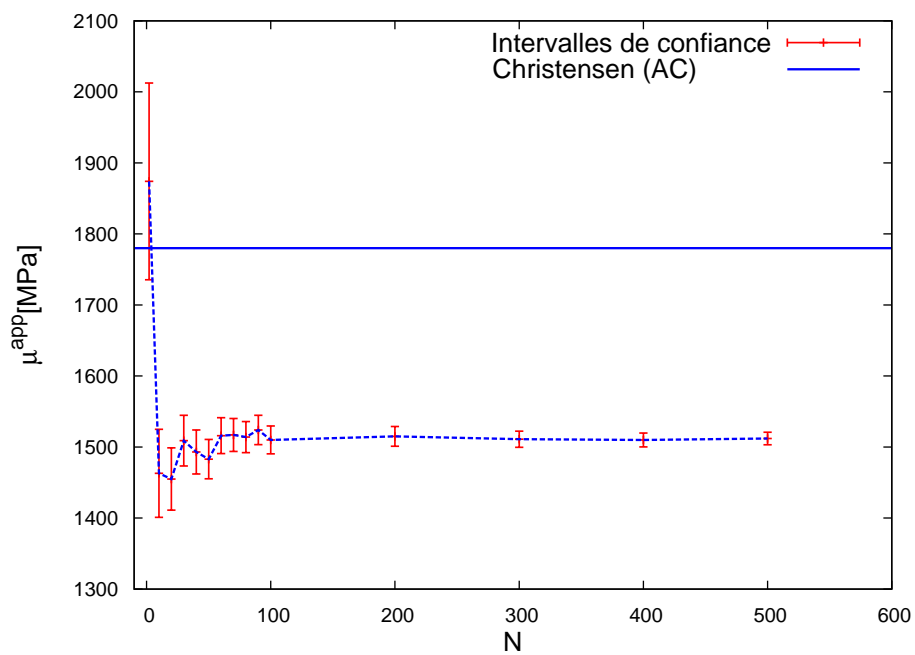
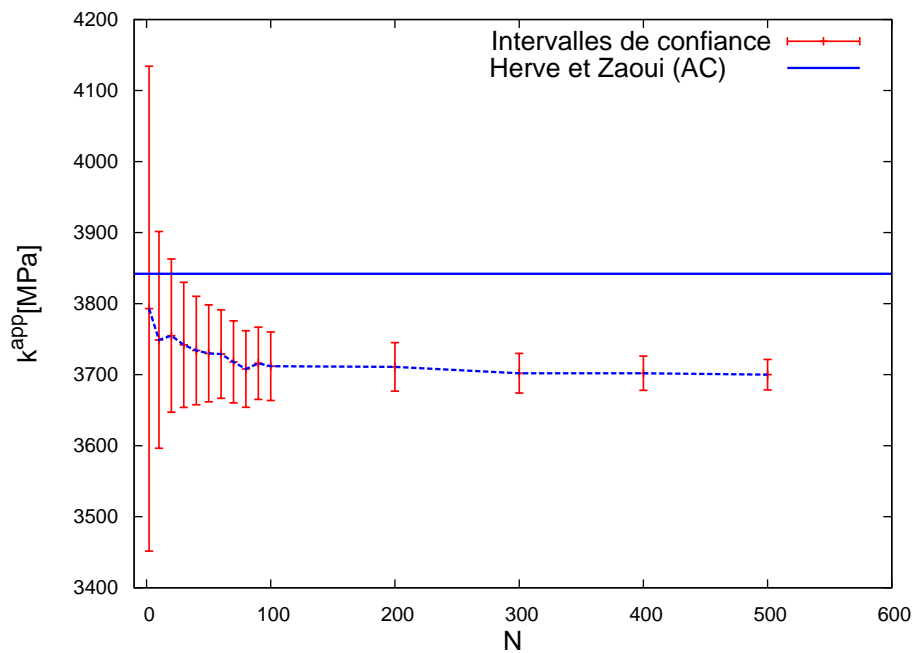


FIGURE 2.24: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 30\%$ et $r = 1, 0$

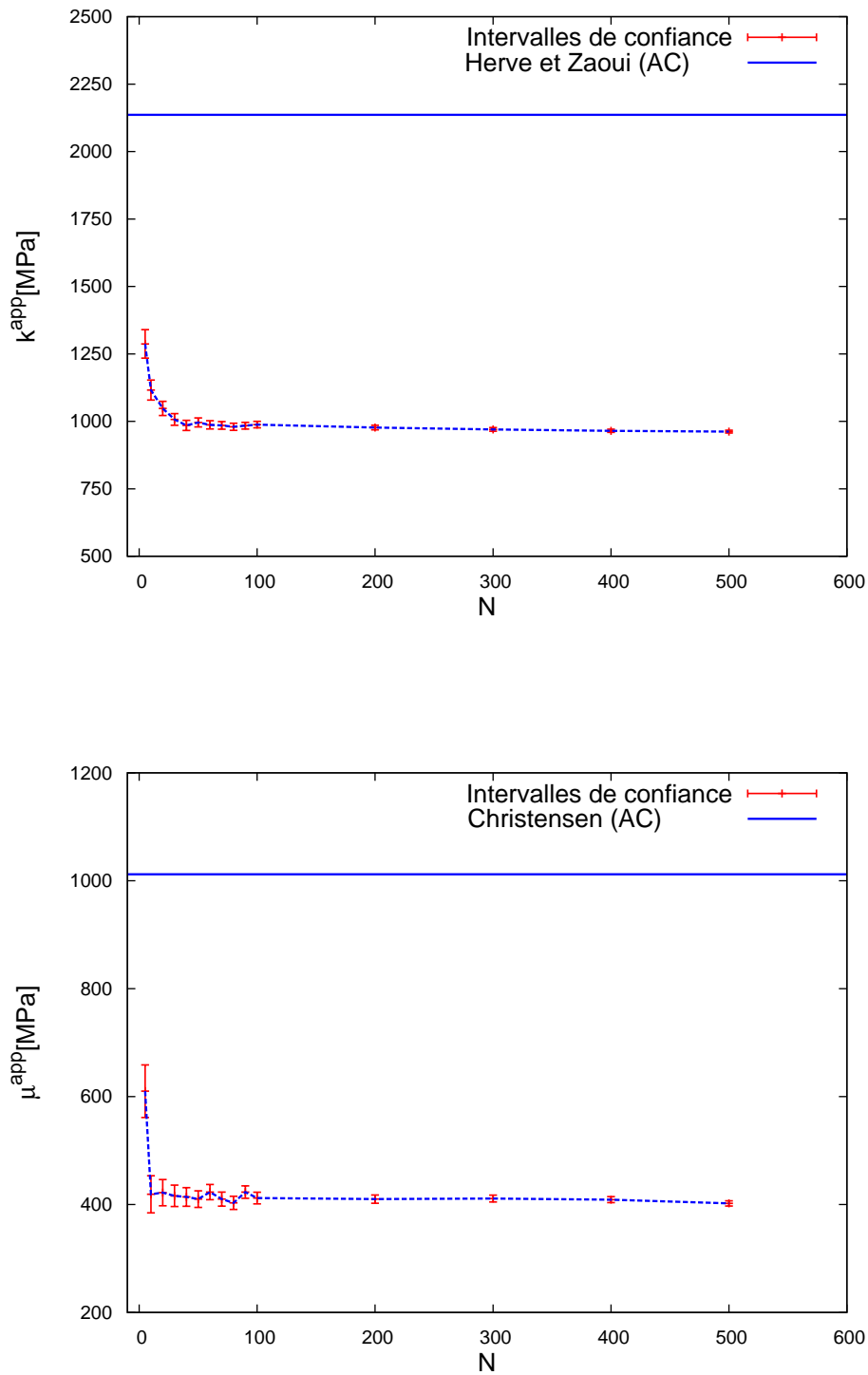


FIGURE 2.25: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 50\%$ et $r = 0,5$

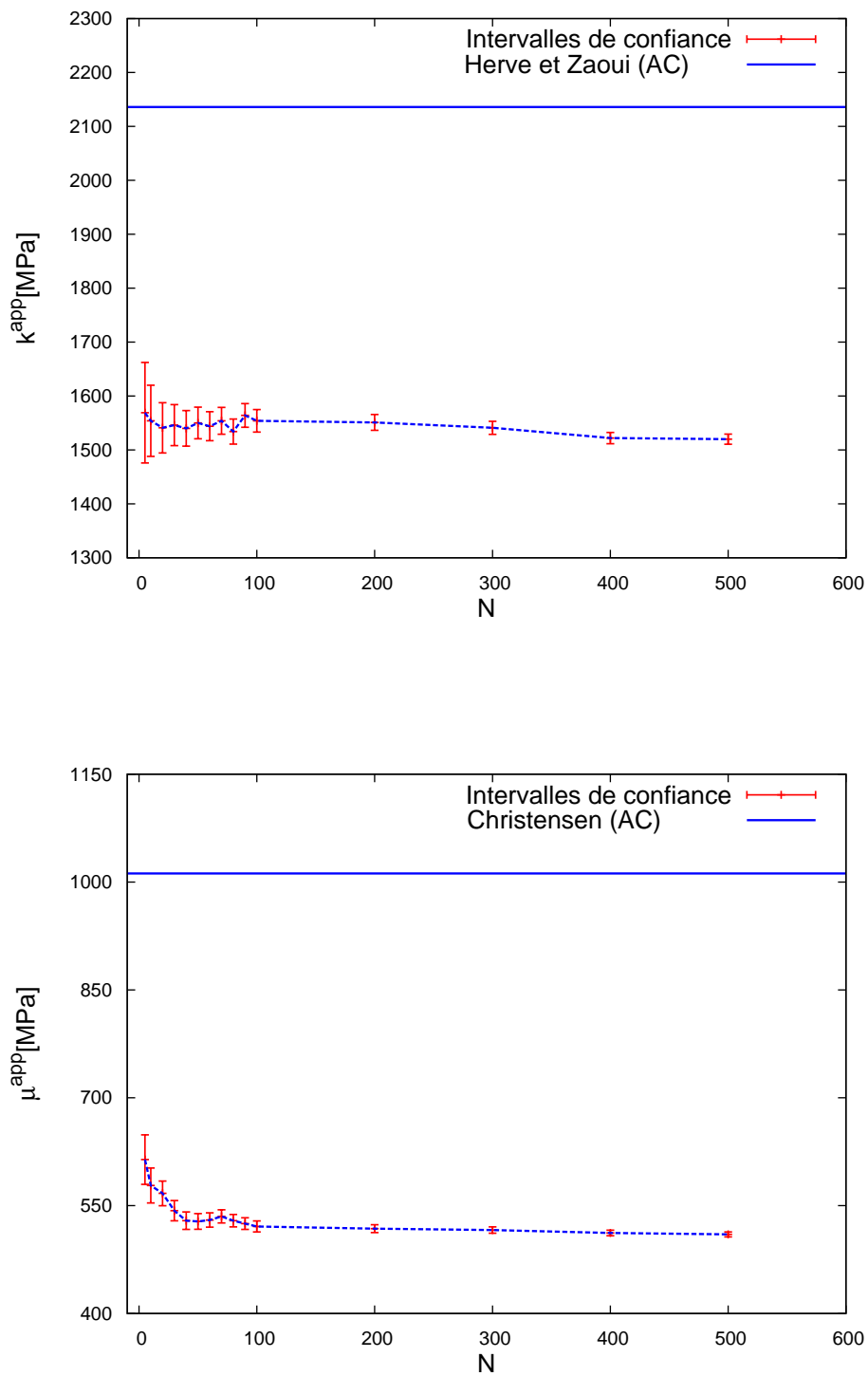


FIGURE 2.26: Les valeurs moyennes et leurs dispersions pour les propriétés apparentes k^{app} et μ^{app} en fonction du nombre d'inclusions. $P = 50\%$ et $r = 1, 0$

Comme il s'agit de microstructures poreuses présentant un contraste élevé et pour une meilleure représentation des courbes avec leurs variances, la comparaison a été limitée au modèle auto-cohérent (*AC*).

D'après les figures 2.19 à 2.26 le modèle proposé montre qu'il permet de déterminer efficacement les variances et les intervalles de confiances, ce qui permettra, par son utilisation, de simplifier et de faciliter l'application de l'approche statistique proposée par [Kanit et al., 2003].

2.5 Validation et exploitation du modèle

Deux concepts montrant l'intérêt du modèle proposé sont présentés dans cette section.

2.5.1 Concept de la morphologie équivalente

La notion de morphologie équivalente est une idée nouvelle et originale dans le domaine de la modélisation des microstructures hétérogènes aléatoires. Elle stipule, d'après examen et interprétation des résultats obtenus, que :

La portée intégrale A est la surface d'une inclusion du V.E.R déterministe. Donc A est un paramètre purement morphologique qui dépend essentiellement de la surface de l'inclusion et non pas des propriétés mécaniques de la microstructure et nullement de la forme des inclusions.

D'après ce concept et comme la forme circulaire des inclusions est la forme la plus isotrope, on peut remplacer n'importe quelle autre forme d'inclusion (ellipse, triangle, carré, rectangle...) d'une microstructure par celle circulaire à condition de respecter le nombre et la surface de chaque inclusion. La figure 2.27 est bonne illustration de ce concept.

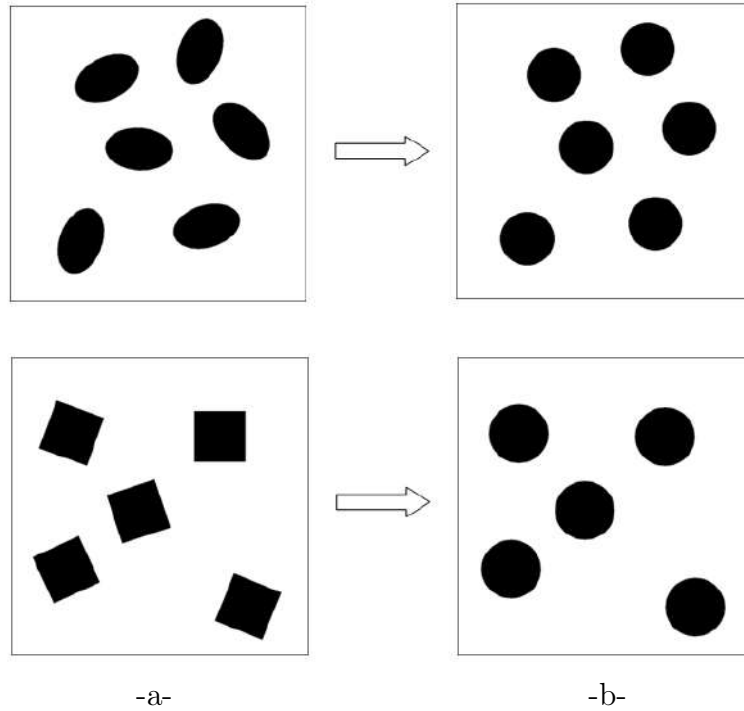


FIGURE 2.27: Concept de la morphologie équivalente : -a- morphologie originale, -b- morphologie équivalente

2.5.2 Notion du matériau le plus hétérogène

Le but de cette section est la détermination de la fraction volumique P^* correspondant aux propriétés les plus hétérogènes d'un matériau donné.

On définit le matériau le plus hétérogène comme celui qui possède les propriétés effectives les plus différentes de celles de ses constituants (matrice, inclusion) et qui donne la plus grande taille du $V.E.R.$

D'après l'équation 2.15 qui nous permet d'évaluer la variance globale et sachant que la valeur de l'écart type est très faible pour le $V.E.R.$, nous pouvons prendre par exemple : $D_z(V) = 1$ pour $N = N_{VER}$. En insérant ces valeurs dans l'équation 2.11 et en prenant en considération le modèle théorique proposé dans 2.18 du rang intégral, l'équation 2.11 devient :

$$P(1 - P)(Z_1 - Z_2)^2 \left(\frac{P}{N_{VER}^2} \right) = 1 \quad (2.19)$$

On peut exprimer maintenant le $V.E.R.$ en fonction de la fraction volumique P par :

$$N_{VER} = P\sqrt{(1 - P)}(Z_1 - Z_2) \quad (2.20)$$

L'extremum de la fonction (2.20) est donné pour $P^* = 2/3$, figure 2.28.

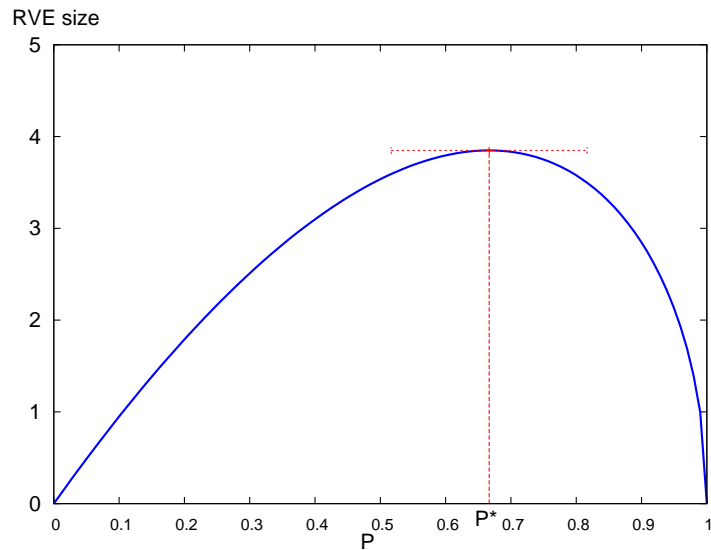


FIGURE 2.28: Variation du VER en fonction de la fraction volumique P de et la fraction volumique P^* correspondant au matériau le plus hétérogène.

A partir de ces résultats, pour un matériau de type matrice inclusion, nous pouvons conclure que le cas le plus hétérogène du matériau à deux phases (matrice, inclusion) est obtenu pour une fraction volumique $P^* = 2/3$. Cela est dû essentiellement à la différence de morphologie des deux constituants de la microstructure. Dans notre cas, la première phase (inclusion) avec une forme particulière est noyée dans la deuxième phase (matrice). Par conséquent le comportement d'équilibre de ces deux phases est situé à un point , ce qui est confirmé par les résultats trouvés.

2.6 Synthèse

Une définition élargie du volume élémentaire représentatif ($V.E.R$) a été proposée par Kanit et al. [Kanit et al., 2003] qui stipule que les propriétés linéaires effectives des composites à structures aléatoires peuvent être déterminées, pas seulement par des simulations numériques sur de grands volumes mais aussi par les valeurs moyennes des propriétés apparentes de petits volumes. C'est cette approche statistique et numérique proposée par [Kanit et al., 2003] qui a été utilisée dans ce travail pour l'évaluation de la taille du $V.E.R$ et les propriétés élastiques effectives des différentes microstructures aléatoires étudiées.

Les résultats numériques des différentes réalisations, obtenus par l'application des deux conditions aux limites ($KUBC$) et (PBC) sur différentes réalisations, ont permis la détermination des fluctuations des propriétés élastiques apparentes. Les courbes des

moyennes des fluctuations ont conduit à la détermination des différentes tailles des *V.E.R* et des propriétés effectives pour les différentes formes et les différentes fractions volumiques. Etant donné que la portée intégrale est le seul paramètre, dans cette approche statistique, lié à la morphologie des inclusions, son évaluation s'avère l'une des clés permettant l'étude de l'effet de la morphologie des inclusions sur le comportement élastique des microstructures aléatoires. Le fittage des courbes des moyennes des fluctuations par la formule de la variance globale a permis l'évaluation numérique de la portée intégrale pour les différents cas étudiés.

Une comparaison de ces résultats numériques au rapport Eq. 2.18, proposé par [Kanit et al., 2003], correspondant au volume d'une inclusion dans le *V.E.R* a permis de confirmer cette thèse et de conclure que : *La portée intégrale est un paramètre purement morphologique égale au volume d'une inclusion dans le V.E.R déterministe.*

Enfin ces résultats obtenus nous ont conduit aux deux concepts suivants :

- Le concept de la morphologie équivalente qui stipule que toute les morphologies des inclusions ont le même comportement élastique.
- Le concept du matériau le plus hétérogène, qui permet de déduire que le matériau le plus hétérogène, pour les microstructures biphasées de type matrice -inclusion, est obtenu pour une fraction volumique $P^* = 2/3$

Chapitre 3

Homogénéisation en Conductivité Thermique

Experience without theory is blind, but theory without experience is like mere intellectual play. (Immanuel Kant)

3.1 Introduction

Aujourd'hui, et avec le développement technologique, une grande importance est donnée aux propriétés effectives des matériaux poreux/composites pour leurs applications industrielles répandues. Une attention particulière a été portée à la conductivité thermique effective (*CTE*), particulièrement, des matériaux à deux phases, où cette propriété constitue une des quantités les plus importantes qui caractérisent le transport de l'énergie dans une vaste gamme d'applications industrielles et d'ingénierie, voir [Whitaker, 1987] et [Wang and Pan, 2008].

Les travaux de recherche dans ce domaine sont divisés en modèles analytiques et simulations numériques, [Coquard and Baillis, 2009]. Les modèles analytiques de [Maxwell, 1873] et [Wang et Othuman (2011)], par exemple, ont été généralement basés sur une simplification géométrique de la microstructure en supposant des arrangements réguliers de la phase solide et la phase de l'air, plutôt que des mélanges aléatoires. Les modèles numériques sont basés sur le calcul mathématique de la microstructure décrivant les phases matérielles, [Veisheh et al., 2009].

Un autre moyen courant de l'estimation de la conductivité thermique effective pour les matériaux hétérogènes avec des microstructures connues est de faire des simulations numériques rigoureuses en utilisant la méthode des différences finies, la méthode des élé-

ments finis, ou d'autres techniques numériques, [Divo et al., 2000], [Rocha and Cruz, 2001] et [Bolot et al., 2005].

Pour les modèles analytiques, depuis les premiers travaux de [Maxwell, 1873], plusieurs tentatives ont été faites pour développer des expressions de la conductivité thermique effective des matériaux biphasés par divers chercheurs à citer : [Rayleigh, 1892], [Wiener, 1904], [Lewis and Nielsen, 1970], [Cunningham and Peddicord, 1981], [Torquato, 1985], [Hadley, 1986], [Agari and Uno, 1986], [Misra et al., 1994], [Singh and Kasana, 2004], [Yang et al., 2013], [Akbari et al., 2013] et [Gong et al., 2014].

En ce qui concerne les modèles numériques, beaucoup de travaux ont été réalisés pour prédire la conductivité thermique effective (*CTE*) des matériaux composites, à citer : [Verma et al., 1991], [Veyret et al., 1993] et [Coquard and Baillis, 2009].

L'étude bibliographique a révélé que la plupart des travaux de transfert de chaleur traitaient de la même manière tous les matériaux composites et les milieux poreux, indépendamment de la morphologie des inclusions, d'où la nécessité d'une investigation permettant de mettre en évidence l'influence de la morphologie des inclusions sur la conductivité thermique effective des matériaux composites. Cette investigation constitue le but principal de ce chapitre. La méthode des éléments finis (*MEF*) est appliquée, sur des microstructures biphasées aléatoires à deux dimensions, pour l'évaluation de cette propriété effective.

3.2 Modèles théoriques

On présente, dans le tableau 3.1, les différents modèles théoriques de la conductivité thermique utilisés pour la comparaison et la validation de nos résultats de simulations pour tous les cas étudiés.

En considérant une microstructure biphasée de type matrice inclusion, où l'inclusion est représentée par la phase 1 de fraction volumique $P_1 = P$ et la matrice comme phase 2 de fraction volumique P_2 avec λ_1 et λ_2 sont les conductivités thermiques de l'inclusion et de la matrice respectivement.

où l'expression explicite de la solution du modèle *EMT* est :

$$\lambda^{eff} = \frac{1}{4}([3P-1]\lambda_1 + (3(1-P)-1)\lambda_2) + \sqrt{[3P-1]\lambda_1 + (3(1-P)-1)\lambda_2]^2 + 8\lambda_1\lambda_2} \quad (3.1)$$

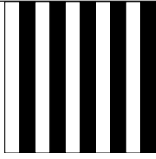
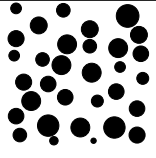
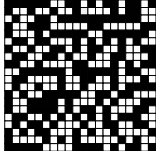
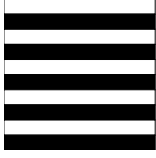
Modèle	Schéma de la structure	Equation de la conductivité thermique effective
Parallèle		$\lambda^{eff} = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2$
Maxwell		$\lambda^{Maxl} = \lambda_2 \frac{2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - P_2(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1)}{2 + P_2(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1)}$
EMT		$P_1 \frac{\lambda_1 - \lambda^{eff}}{\lambda_1 + 2\lambda^{eff}} + P_2 \frac{\lambda_2 - \lambda^{eff}}{\lambda_2 + 2\lambda^{eff}} = 0$
Séries		$\lambda^{eff} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{P_1\lambda_2 + P_2\lambda_1}$

Tableau 3.1: Quatre structures fondamentales de modèles de la conductivité thermique effective pour les matériaux à deux phases.

3.3 Homogénéisation numérique de la conductivité thermique

Dans cette section, tous les éléments et toutes les notations d'homogénéisation numérique nécessaires pour l'estimation de la conductivité thermique effective, en utilisant la méthodologie expliquée par [Kanit et al., 2003] sur la base de la *MEF*, sont mis en œuvre.

3.3.1 Représentation de la microstructure

L'homogénéisation numérique de la conductivité thermique de microstructures biphasées à deux dimensions de deux composites fait l'objet de cette section. Le premier composite est considéré poreux, tandis que le second est un composite biphasé non poreux. Pour chacun, cinq microstructures à cinq populations d'inclusions sont étudiées. Chaque microstructure contient une seule population d'inclusions, réparties et orientées d'une façon aléatoire dans une matrice continue. On note ici que les inclusions ne se touchent pas et ne touchent pas les bords afin de conserver leurs formes. Pour conserver la morphologie des inclusions après maillage, une résolution de 3000 * 3000 pixels est utilisée pour générer les différentes images. Les mêmes notations, utilisées au chapitre précédent, sont conservées telles que :

$$P_1 = P \quad (3.2)$$

et

$$P_2 = 1 - P \quad (3.3)$$

pour les fractions volumiques des inclusions et de la matrice, respectivement.

L'indice r désigne le rapport des rayons mineurs et majeurs des inclusions elliptiques, figure 3.1, ($r = 1$ pour les inclusions circulaires). Dans cette partie, et pour un maximum d'informations, la morphologie des inclusions prend cinq formes distinctes : $r = 0.2$, $r = 0.3$, $r = 0.4$, $r = 0.5$ et $r = 1.0$. Afin de vérifier l'influence de la fraction volumique, là aussi, cinq situations pour chaque composite sont examinés : $P = 10\%$, $P = 20\%$, $P = 30\%$, $P = 40\%$ et $P = 50\%$. Il est important de noter que la combinaison ($r = 0.2$, $P = 50\%$) ne sera pas traitée du fait que la percolation des inclusions est inévitable.

La figure.3.2 montre un exemple de différentes microstructures contenant une distribution et une orientation aléatoire des inclusions pour différentes fractions volumiques et différents rapports de formes.

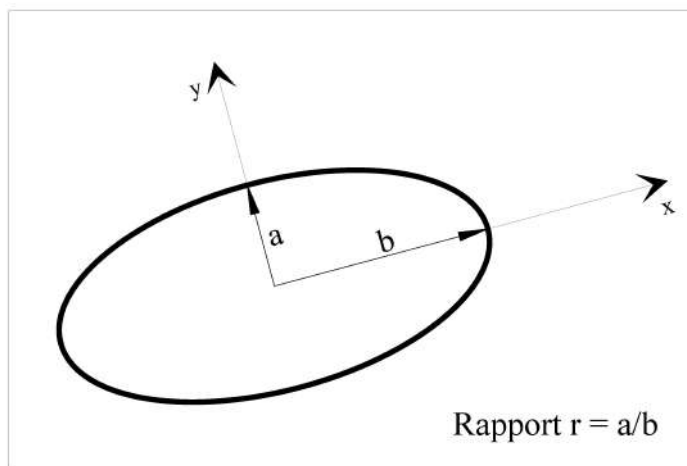


FIGURE 3.1: Paramètre de forme de l'inclusion

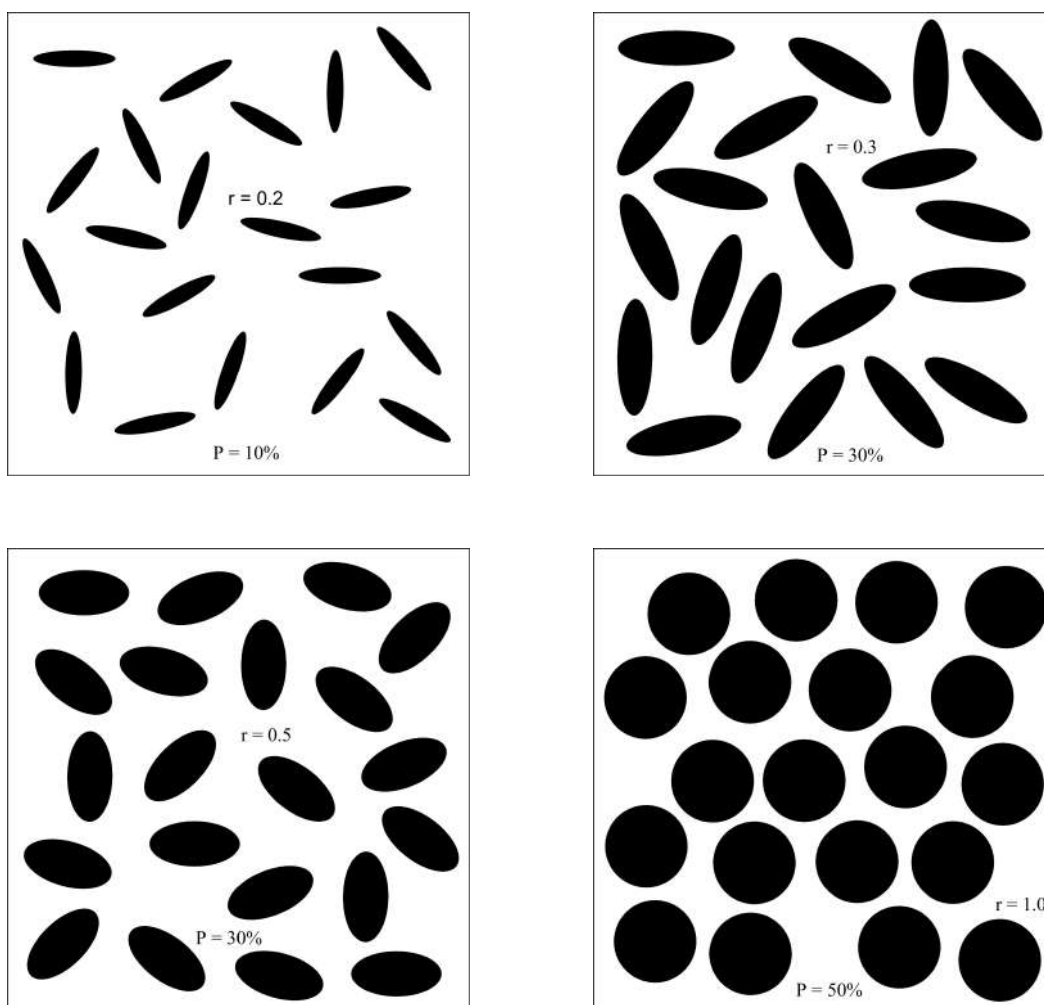


FIGURE 3.2: Exemples des microstructures étudiées.

3.3.2 Propriétés physiques

Différentes conductivités thermiques sont attribuées à la matrice continue et aux inclusions afin de prédire celles effectives. Le tableau 3.2 représente les différentes propriétés utilisées dans le calcul pour les deux composites.

Composite	Conductivité thermique λ [W/m.K]				
		Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
Composite 1	Matrice	30	100	150	300
	Inclusion	0.026			
Composite 2	Matrice	30	100	150	300
	Inclusion	10			

Tableau 3.2: Conductivités thermiques utilisées pour les deux composites

3.3.3 Technique de maillage utilisée

Comme dans le cas d'élasticité, la technique d'éléments à phases multiples est utilisée pour générer les différents maillages. Son principe détaillé dans la section 2.3.1 est rappelé ici brièvement, il consiste à attribuer les propriétés de chaque phase aux points d'intégrations des éléments selon la phase dans laquelle ils sont situés, figure 3.3.

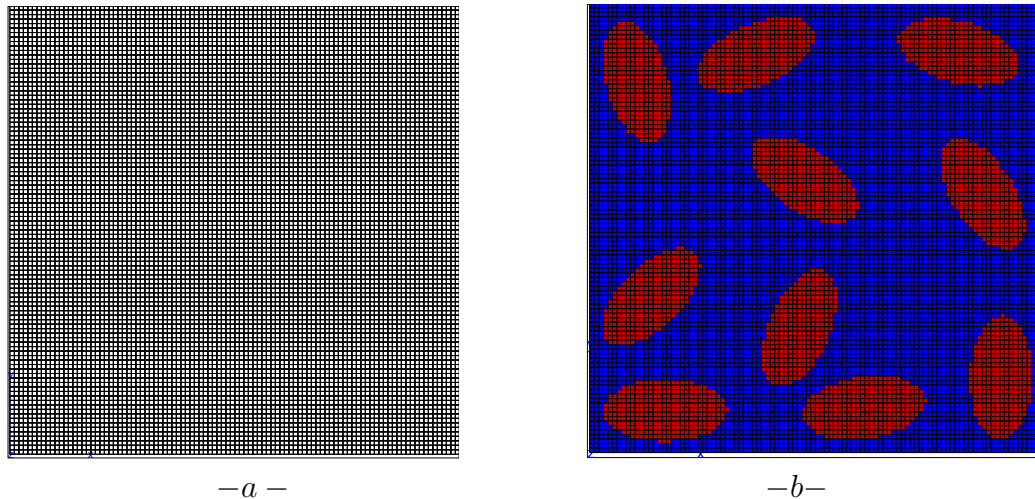


FIGURE 3.3: - a - Maillage régulier de densité 100x100. - b - Exemple de microstructure à 10 inclusions maillée.

3.3.4 Détermination de la densité du maillage

Pour chaque comportement un test de maillage doit être effectué, afin de déterminer la grille de maillage optimal. Pour cette fin, on maille le même *V.E.R* de 200 inclusions avec différentes grilles passant de 2500 à 40000 éléments finis (*EF*). Le maillage retenu est celui qui permet la détermination de la propriété macroscopique avec une bonne précision en un temps minimum. La convergence de la propriété macroscopique en fonction du nombre d'éléments finis est présentée à la figure 3.4. Ces résultats révèlent que le maillage de 10 000 *EF* estime la propriété macroscopique avec une erreur d'environ 4%. Il est clair que la stabilité de la courbe commence à partir de 40 000 *EF*. Cette densité de maillage permet d'estimer la propriété macroscopique avec une erreur de 0,2%. Ainsi, la densité de maillage de 40 000 *EF* est retenue dans la présente étude pour toutes les simulations.

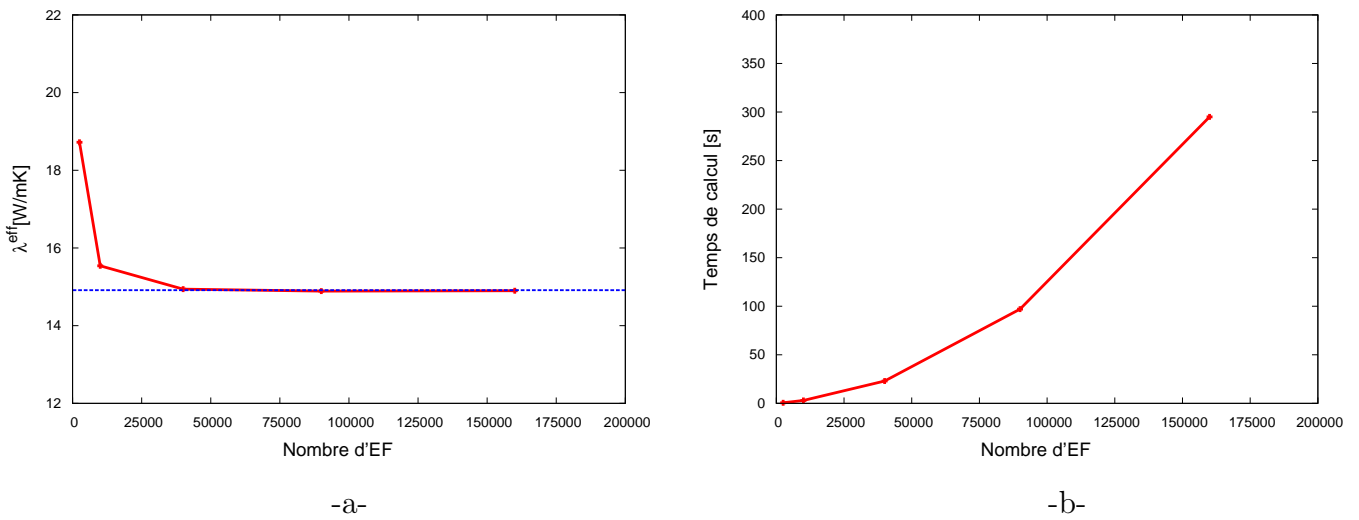


FIGURE 3.4: -a- Convergence du coefficient de conductivité thermique λ en fonction de la densité du maillage. -b- temps de calcul correspondant à chaque cas de maillage.

3.3.5 Conditions aux limites

On rappelle ici, les deux conditions aux limites détaillées dans la section 1.3.5.2 et utilisées pour la détermination des propriétés apparentes et effectives.

La loi de Fourier est exprimée par :

$$q_i = -\lambda_{ij} \cdot \nabla T \quad (3.4)$$

où T , ∇T et q sont la température, son gradient et le vecteur de flux de chaleur respectivement.

– **Conditions aux limites du gradient de température homogène (UGT) :**

On applique sur le volume extérieur ∂V du volume V un gradient de température ∇T qui correspond à la moyenne des gradients locaux dans le volume :

$$T = G_i \cdot x_i \quad \forall x \in \partial V \quad (3.5)$$

avec

$$G_i = \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla T \, dV \quad (3.6)$$

où G_i est un tenseur d'ordre 1 constant indépendant de x .

Le vecteur flux macroscopique est alors obtenu par la moyenne des flux locaux dans tout le volume V :

$$Q_i = \langle q_i \rangle = \frac{1}{V} \int_V q_i \cdot dV \quad (3.7)$$

– **Conditions aux limites périodiques (CLP) :**

La température prend la forme :

$$T = G_i \cdot x_i + t \quad \forall x_i \in \partial V \quad (3.8)$$

avec

$$G_i = \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla T \cdot dV \quad (3.9)$$

où la fluctuation t de la température est périodique.

3.4 Résultats de l'homogénéisation numérique

La technique numérique avec la notion du *V.E.R* développée par [Kanit et al., 2003] est utilisée, dans cette section, pour l'estimation de la conductivité thermique effective des microstructures considérées. Pour cette fin, tous les calculs ont été menés en deux étapes : la première, section 3.5.2, consiste à déterminer le *V.E.R* pour les différentes fractions volumiques considérées. La deuxième, section 3.5.3, est consacrée à la détermination de les propriétés effectives de tous les cas étudiés en se basant sur le résultat de la section précédente.

3.5 Propriétés thermiques apparentes et effectives

Dans cette partie, la technique numérique et statistique développée par [Kanit et al., 2003] est utilisée. Son application est un peu longue car elle nécessite l'exécution d'une centaine de réalisations (différentes réalisations : différentes distributions des inclusions dans le même volume) pour chaque microstructure afin de déterminer une propriété effective et/ou le *V.E.R* déterministe (*V.E.R_d*). A noter que le *V.E.R_d* est le volume qui permet l'estimation de la propriété effective avec une seule réalisation. C'est pour cette raison que cette étude s'effectue en deux étapes : la première étape, sujet de la section 3.5.2, consiste à déterminer, en utilisant cette technique, un *V.E.R_d* valable sur toute la plage des fractions volumiques à étudier. Pour couvrir cette plage, trois fractions volumiques sont considérées : la petite fraction $P = 10\%$, la moyenne $P = 30\%$ et la plus grande $P = 50\%$.

[Kanit et al., 2003] a montré que l'application de la condition aux limites *PBC* assure une convergence rapide par rapport aux autres conditions, cependant son application sur un *V.E.R_d* permet l'estimation de la propriété effective par une seule réalisation. C'est ce principe qui est utilisé dans la deuxième étape, sujet de la section 3.5.3, pour déterminer toutes les propriétés effectives de tous les cas étudiés.

3.5.1 Fluctuation des propriétés apparentes

L'équation 2.9 utilisée dans le cas des propriétés élastiques apparentes peut être, aussi, utilisée pour les propriétés thermiques apparentes.

$$D_{\lambda}^2(N) = D_{\lambda}^{*2}\left(\frac{A}{N}\right) \quad (3.10)$$

où D_{λ}^{*2} est la variance locale de $\lambda(x)$ et A est la portée intégrale.

D'après [Cailletaud et al., 1994], la variance locale de la variable aléatoire λ est :

$$D_{\lambda}^{*2} = P(1 - P)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \quad (3.11)$$

et la relation 3.10 devient :

$$D_{\lambda}^2(N) = P(1 - P)(\lambda_1 - \lambda_2)^2\left(\frac{A}{N}\right) \quad (3.12)$$

Comme dans le cas des propriétés élastiques, l'erreur absolue ϵ_{abs} sur la valeur moyenne de la conductivité apparente est donnée par la relation (2.12)

$$\epsilon_{abs} = \frac{2D_{\lambda}(N)}{\sqrt{n}} \quad (3.13)$$

L'erreur relative sera alors :

$$\epsilon_{rela} = \frac{\epsilon_{abs}}{\lambda} = \frac{2D_{\lambda}(N)}{\lambda\sqrt{n}} \quad (3.14)$$

Le nombre minimal n des différentes réalisations nécessaires et suffisantes pour l'estimation de la propriété effective λ^{eff} avec une erreur absolue donnée ϵ_{abs} sur une surface S est :

$$n(S) = \frac{4}{\epsilon_{rela}^2 \cdot \lambda^2} D_{\lambda}^{*2}\left(\frac{A}{N}\right) \quad (3.15)$$

3.5.2 Conductivités thermiques apparentes et effectives

Le but principal de cette section est l'estimation des conductivités thermiques apparentes puis effectives des milieux homogènes équivalents en fonction de la taille du domaine. Pour les simulations numériques, deux conditions aux limites (*UGT* et *PBC*) sont appliquées sur chaque volume contenant N inclusions. L'objectif est l'évaluation de la propriété apparente définie comme étant les résultats de calcul par éléments finis de volumes inférieurs au *V.E.R.*

Différentes réalisations (configurations) sont utilisées pour évaluer la valeur moyenne de la propriété apparente de chaque volume. Les valeurs moyennes et les intervalles de confiance sont, ensuite, tracés en termes du nombre d'inclusions pour les différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus numériquement sont comparés avec ceux obtenus par les méthodes analytiques, tels que le modèle *Parallèle*, le *EMT* et le modèle de *Maxwell*.

L'ensemble des résultats obtenus est présenté sur les figures 3.5, 3.6 et 3.7. Il apparaît que la dispersion des résultats diminue lorsque la taille du volume augmente. Les barres d'erreur diminuent lorsque de taille du volume augmente, et tendent vers zéro dans le *V.E.R.* Cette taille est également obtenue lorsque les valeurs moyennes, des deux conditions aux limites, coïncident et donnent la même valeur de la *propriété effective*.

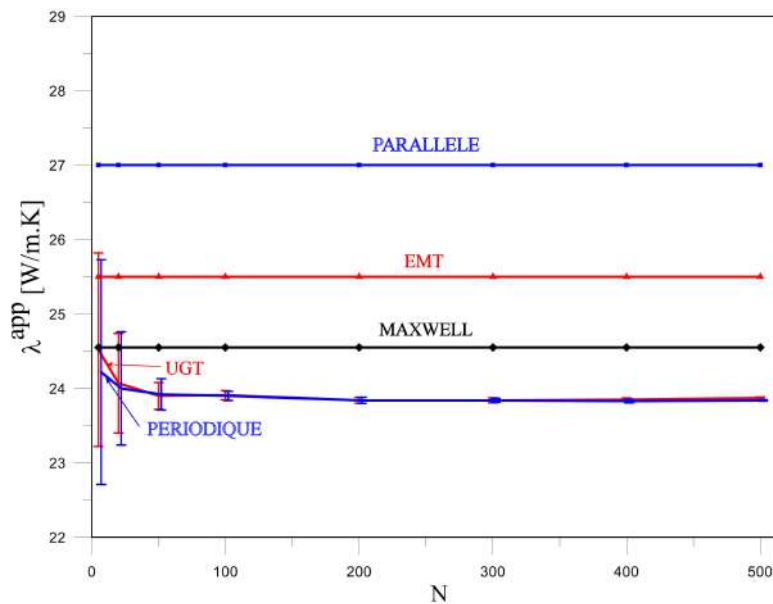


FIGURE 3.5: Valeurs moyennes de la conductivité thermique apparente λ^{app} pour ($P = 10\%$, $r = 0.5$) en fonction du nombre d'inclusions N pour le composite 1.

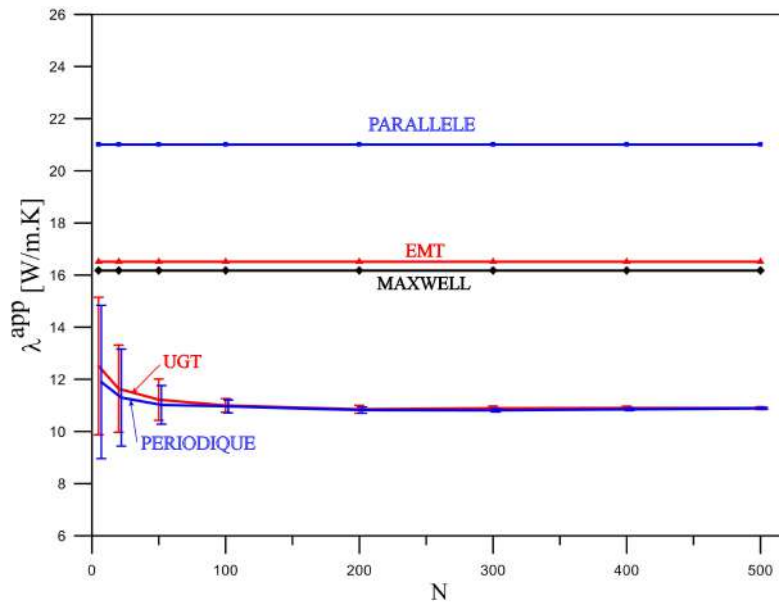


FIGURE 3.6: Valeurs moyennes de la conductivité thermique apparente λ^{app} pour ($P = 30\%$, $r = 0.2$) en fonction du nombre d'inclusions N pour le composite 1.

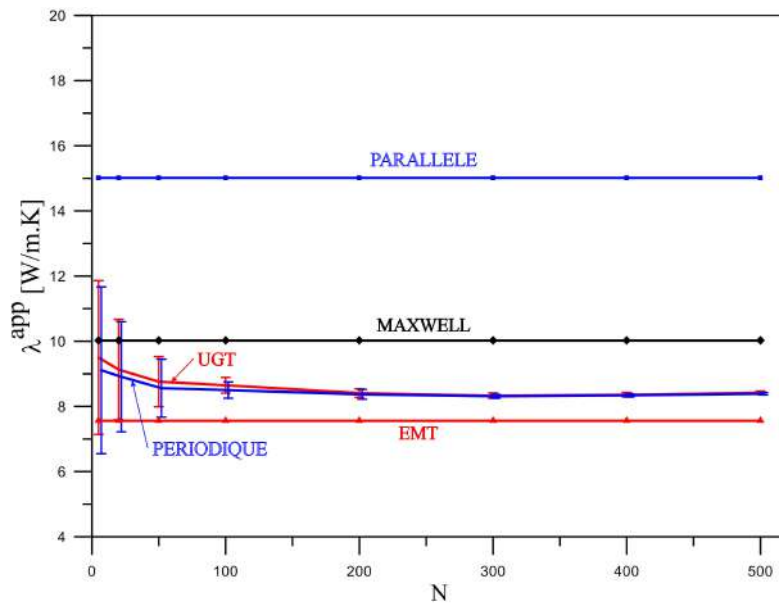


FIGURE 3.7: Valeurs moyennes de la conductivité thermique apparente λ^{app} pour ($P = 50\%$, $r = 0.5$) en fonction du nombre d'inclusions N pour le composite 1.

L'effet du rapport de forme sur la taille du $V.E.R$ pour différentes fractions volumiques est présenté dans cette section. La figure 3.8 résume la variation du $V.E.R_d$ en fonction du rapport de forme pour les deux types de matériaux, composites et poreux. Il semble que dans le cas des matériaux composites, quelques dizaines d'inclusions suffisent pour estimer la conductivité thermique effective. Inversement et pour les matériaux poreux,

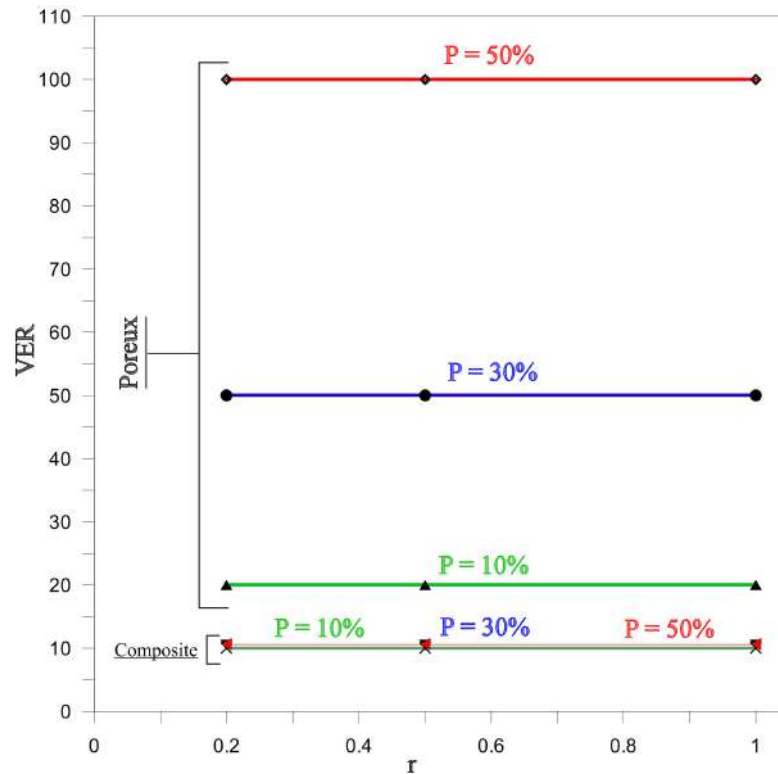


FIGURE 3.8: VER_d en fonction du rapport de forme r pour tous les cas étudiés.

plus de 20 inclusions sont nécessaires pour l'estimation de cette propriété effective par simulation numérique. Il convient de noter qu'une microstructure à 100 inclusions est très représentative et suffisante pour donner une bonne estimation pour les deux composites.

Pour plus de précision, des $V.E.R_d$ à 200 inclusions seront utilisés dans les calculs pour la détermination des propriétés effectives. On évitera l'utilisation des $V.E.R_d > 200$ pour éviter la perte de la morphologie des pores après maillage.

Les résultats numériques sont obtenus par deux conditions aux limites : gradient de température uniforme aux limites (UGT) et conditions aux limites périodiques (PBC) et sont présentés dans ce qui suit pour chaque fraction volumique.

3.5.3 Conductivité thermique effective vs morphologie des inclusions

Selon [Kanit et al., 2003], [SAb, 2005] et [Forest, 2006], les conditions aux limites PBC conduisent à une convergence rapide, en termes de propriétés effectives, que par l'application d'autres conditions aux limites. Par conséquent, un $V.E.R$ à 200 inclusions est introduit dans le code FEM avec PBC pour chaque microstructure. Les résultats de la conductivité thermique effective, de chaque fraction volumique, en fonction du rapport

sont présentés sur les figures 3.9 à 3.13.

Chaque figure illustre la variation de la conductivité thermique effective en fonction du rapport de forme des inclusions pour les matériaux composites et poreux. Il est à noter que tous ces résultats numériques sont comparés au modèle de Maxwell.

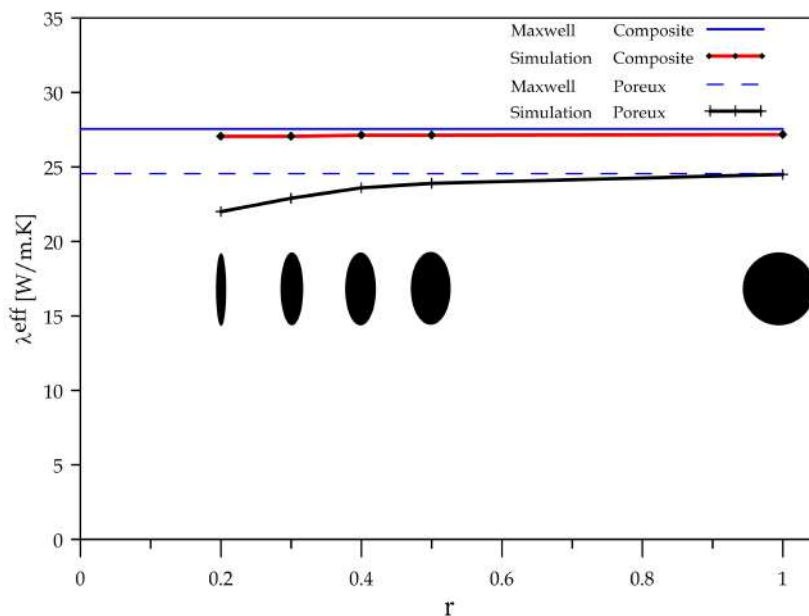


FIGURE 3.9: Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 10\%$

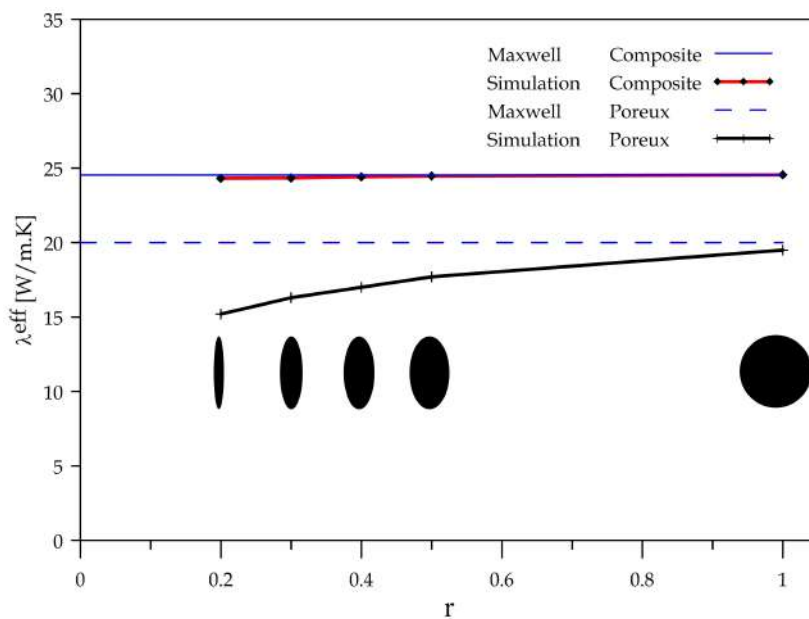


FIGURE 3.10: Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 20\%$

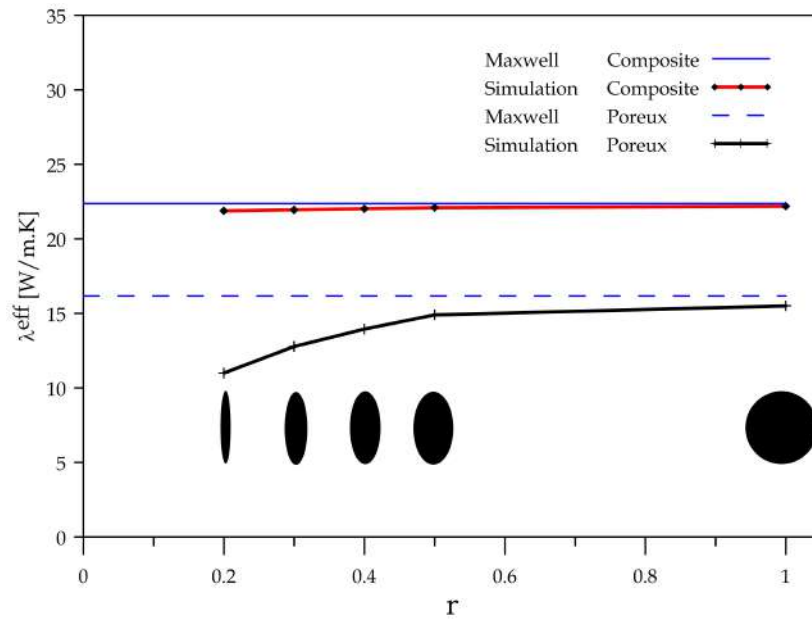


FIGURE 3.11: Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 30\%$

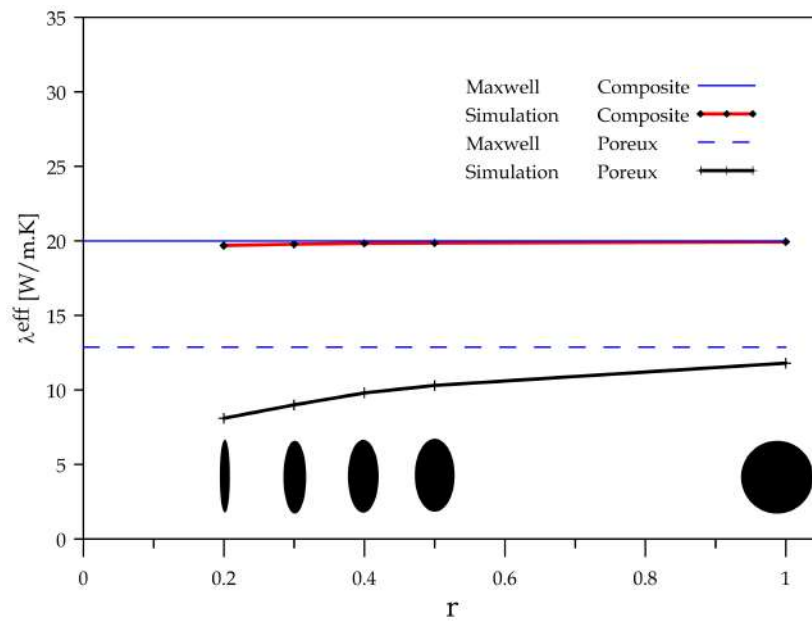


FIGURE 3.12: Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 40\%$

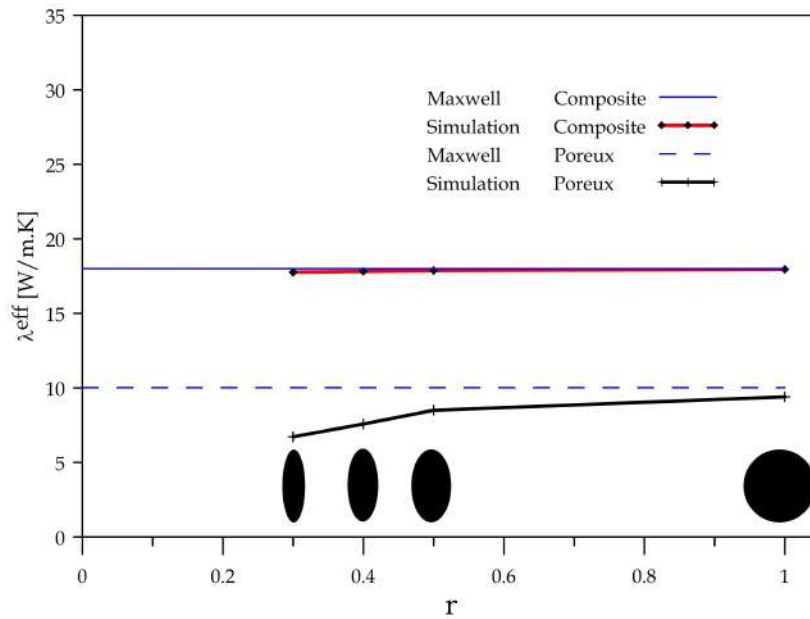


FIGURE 3.13: Conductivité thermique effective λ^{eff} en fonction du rapport de forme r pour $P = 50\%$

D'après ces figures, 3.9 à 3.13, il semble que dans le cas du composite, aucun effet de la forme d'inclusions n'a été observé. Dans ce cas, les résultats numériques et le modèle de Maxwell sont en parfait accord et presque superposés. Même en changeant la conductivité thermique de la matrice et de l'inclusion, le résultat reste le même et l'effet de la forme des inclusions sur la conductivité thermique est absent quelle que soit la forme de l'inclusion considérée. C'est pour cette raison, qu'on a limité la représentation des résultats du composite au seul cas $\lambda_m = 30[W/Km]$ et $\lambda_i = 10[W/Km]$.

À titre d'illustration, les figures 3.14 et 3.15 montrent la distribution de la conductivité thermique locale de microstructures de 20 inclusions pour trois différents rapports de forme r et pour les deux milieux traités : poreux et composites.

Pour le matériau poreux, figure 3.14, et pour les trois cas étudiés, on remarque que les interactions entre les pores circulaires ($r=1$) sont les plus faibles. Ces interactions augmentent inversement avec le rapport de forme jusqu'aux valeurs les plus grandes, cas des pores en formes d'aiguilles ($r=0.2$). Cela est dû au fait que les zones d'interaction entre les pores deviennent de plus en plus importantes en passant des pores circulaires aux pores en formes d'aiguilles, ce qui crée des zones de résistance thermique conséquente entre ces pores, diminuant ainsi la conductivité thermique de la matrice.

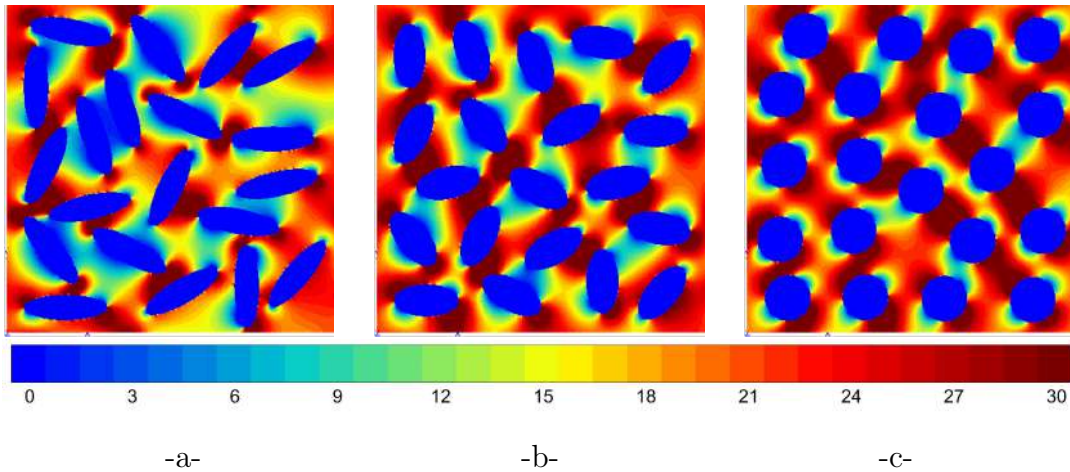


FIGURE 3.14: Distribution locale de λ pour le composite 1, $P = 30\%$, $\lambda_m = 30[W/Km]$ et $\lambda_i = 0.026[W/Km]$: -a- $r = 0.3$, -b- $r = 0.5$ et -c- $r = 1.0$

Pour le matériau composite, figure 3.14, le même phénomène est observé. Les interactions entre les inclusions sont toujours plus faibles pour le cas des inclusions circulaires que celles en formes d'aiguilles, mais nettement très faibles dans l'ensemble par rapport au milieu poreux, malgré que les microstructures étudiées sont les mêmes pour les deux milieux.

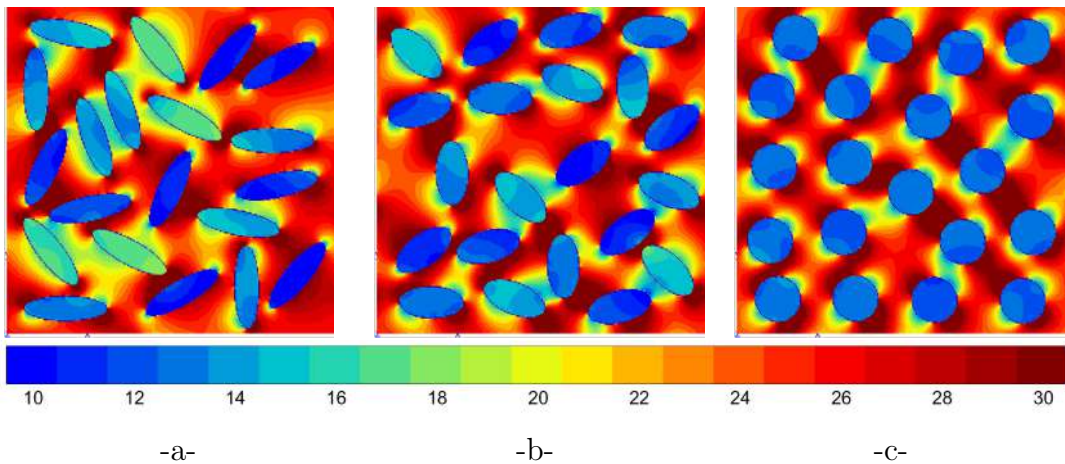


FIGURE 3.15: Distribution locale de λ pour le composite 2, $P = 30\%$, $\lambda_m = 30[W/Km]$ et $\lambda_i = 10[W/Km]$: -a- $r = 0.3$, -b- $r = 0.5$ et -c- $r = 1.0$

A partir de ces résultats, il apparaît que la conductivité thermique locale est influencée par la forme et la distribution des inclusions, et le contraste des propriétés physiques. Ces résultats sont en accord parfait avec des travaux récents, voir [El-Moumen et al., 2015].

Une comparaison des résultats des deux milieux nous permet de tirer les conclusions suivantes : le modèle de Maxwell est un bon modèle d'estimation de la conductivité thermique effective des matériaux composites, quelque soit la forme des inclusions. Toutefois,

pour les milieux poreux, l'effet de la forme des pores est présent et tellement important que le modèle Maxwell ne permet plus la bonne estimation de la conductivité thermique effective, à l'exception des microstructures aux pores circulaires ($r = 1$) où le modèle donne une très bonne estimation.

3.5.3.1 Expression reliant la conductivité thermique des matériaux poreux à la forme des inclusions

D'après la littérature, les modèles théoriques actuelles proposent des estimations de la conductivité thermique effective sans la prise en compte de l'effet de la morphologie des pores et comme l'effet de la forme, pour les milieux poreux, a été prouvé par cette étude, on se propose dans cette section, d'établir une relation simple liant la conductivité thermique effective de ce type de matériaux à la morphologie des pores.

Pour cela, plusieurs tests de fittage sont effectués sur tous les points obtenus par simulation, avec différentes fonctions numériques, afin d'obtenir une meilleure représentativité des résultats. La fonction qui a répondu au mieux à ces tests est :

$$\lambda^{eff} = A \cdot \ln(r) + B \quad (3.16)$$

Les valeurs des paramètres A et B obtenues par fittage de la formule proposée Eq. 3.16 et des résultats de simulation sont présentées dans le Tableau 3.3.

P%	$\lambda_m = 30$			$\lambda_m = 100$			$\lambda_m = 150$			$\lambda_m = 300$		
	A	B	λ^{Max}	A	B	λ^{Max}	A	B	λ^{Max}	A	B	λ^{Max}
10	1.54	24.74	24.5	3.69	81.64	81.82	5.59	122.54	122.73	11.38	245.01	245.46
20	2.55	19.4	20.0	8.55	66.55	66.68	12.84	99.82	100.01	25.71	199.60	200.01
30	3.05	16.4	16.17	9.58	54.00	53.86	14.37	81.03	80.78	28.75	162.07	161.55
40	2.31	11.84	12.87	7.85	40.86	42.87	11.78	61.28	64.30	23.6	122.54	128.56
50	2.35	9.75	10.02	7.06	31.52	33.15	10.63	47.26	50.02	21.05	94.3	100.02

Tableau 3.3: Paramètres de fittage pour les différentes conductivités thermiques de la matrice comparés au modèle de Maxwell

Le premier point important concerne la valeur du deuxième paramètre de fittage B qui coïncide avec la valeur du modèle de *Maxwell*, de sorte que la formule proposée (PF) peut être réécrite comme suit :

$$\lambda^{eff} = \lambda^{Maxl} + A \ln(r) \quad (3.17)$$

où λ^{Maxl} est la conductivité thermique effective du modèle de *Maxwell* exprimée par :

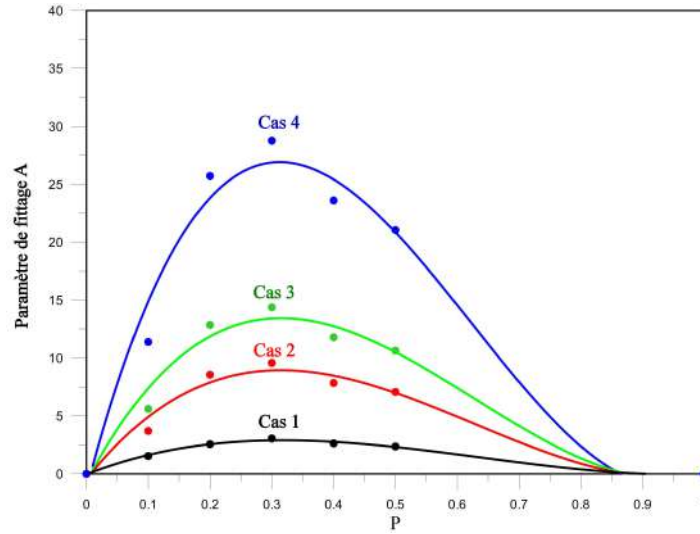


FIGURE 3.16: Résultats numériques (points) et les modèles continus proposés (fittage) pour les différents cas étudiés.

$$\lambda^{Maxl} = \lambda_2 \frac{2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - P_2(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1)}{2 + P_2(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1)} \quad (3.18)$$

La formule 3.17 ainsi proposée peut être considérée comme un ajustement du modèle de *Maxwell* qui prend en compte l'effet de la morphologie des pores sur la conductivité thermique effective des milieux poreux.

Il est très clair, d'après les résultats du tableau 3.3, que le paramètre A varie en fonction de la fraction volumique P et de la conductivité thermique de la matrice. On commence, à travers la figure 3.16, par représenter la variation du paramètre A en fonction de la fraction volumique P .

Pour l'évaluation du paramètre A , un second fittage est nécessaire. Le fittage est exécuté sur les points numériques représentés dans la figure 3.16 pour déterminer la relation entre le paramètre en question et la fraction volumique P . La formule ainsi proposée n'assure plus l'obtention des bornes zéro. Pour remédier à ce problème, deux points extrêmes ($P = 0\%$, $A = 0$) et ($P = 100\%$, $A = 0$) sont ajoutés aux résultats de la simulation, figure.3.16. Ainsi, la fonction fittage qui donne une meilleure représentativité de ces résultats est :

$$A = aP^3 + bP^2 + cP \quad (3.19)$$

Les résultats des différents paramètres de fittage sont résumés dans le tableau 3.4.

λ_m [W/m.K]	30	100	150	300
a	22	69	104	214
b	-42	-133	-199	-405
c	20	63	94	191

Tableau 3.4: Paramètres de fittage a , b , et c pour différentes conductivités thermiques λ_m de la matrice.

Selon ces résultats, il paraît clairement que :

$$b \approx -2a \quad (3.20)$$

et

$$c \approx a \quad (3.21)$$

Cependant, l'équation 3.19 peut être réécrite :

$$A = aP(P^2 - 2P + 1) \quad (3.22)$$

D'après les résultats du tableau 3.4, la relation entre le paramètre de fittage "a" et la conductivité thermique de la matrice λ_m peut être écrite :

$$a \approx 0.7\lambda_m \quad (3.23)$$

D'après les équations 3.22 et 3.23 on peut écrire :

$$A = 0.7\lambda_m P(P^2 - 2P + 1) \quad (3.24)$$

sous une forme simplifiée

$$A = 0.7\lambda_m P(1 - P)^2 \quad (3.25)$$

l'expression finale est exprimée en fonction de la propriété de la matrice, de la fraction volumique de l'inclusion et de la fraction volumique de la matrice.

La comparaison entre la formule proposée (PF), les bornes analytiques et les résultats de simulation pour les différents cas étudiés est illustrée dans les figures 3.17, 3.18, 3.19 et 3.20.

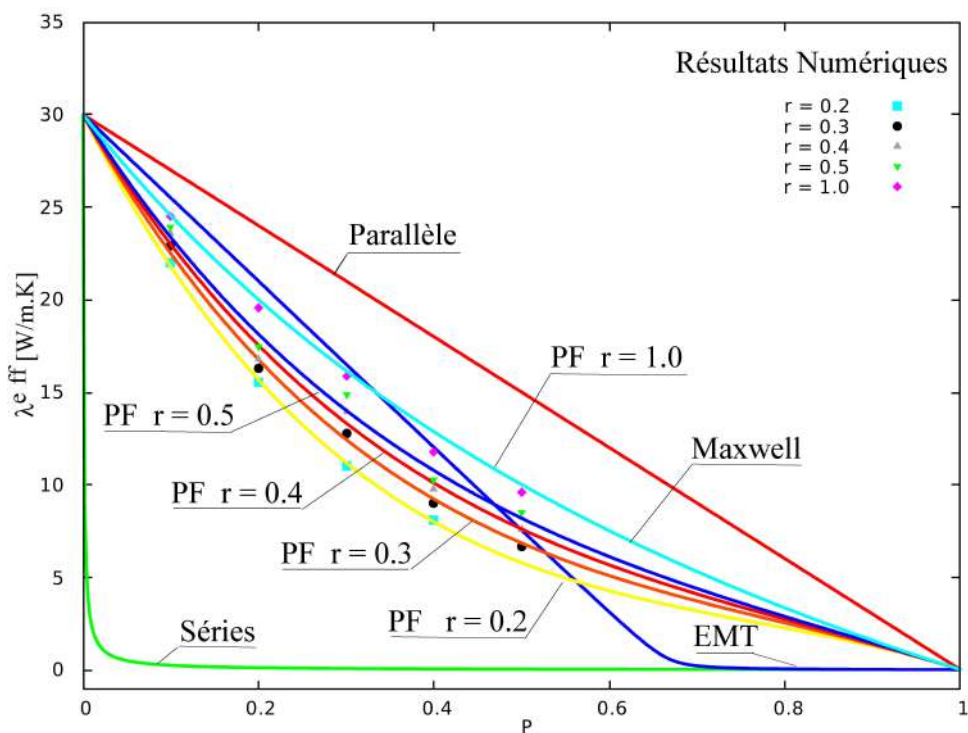


FIGURE 3.17: Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 30[W/m.K]$

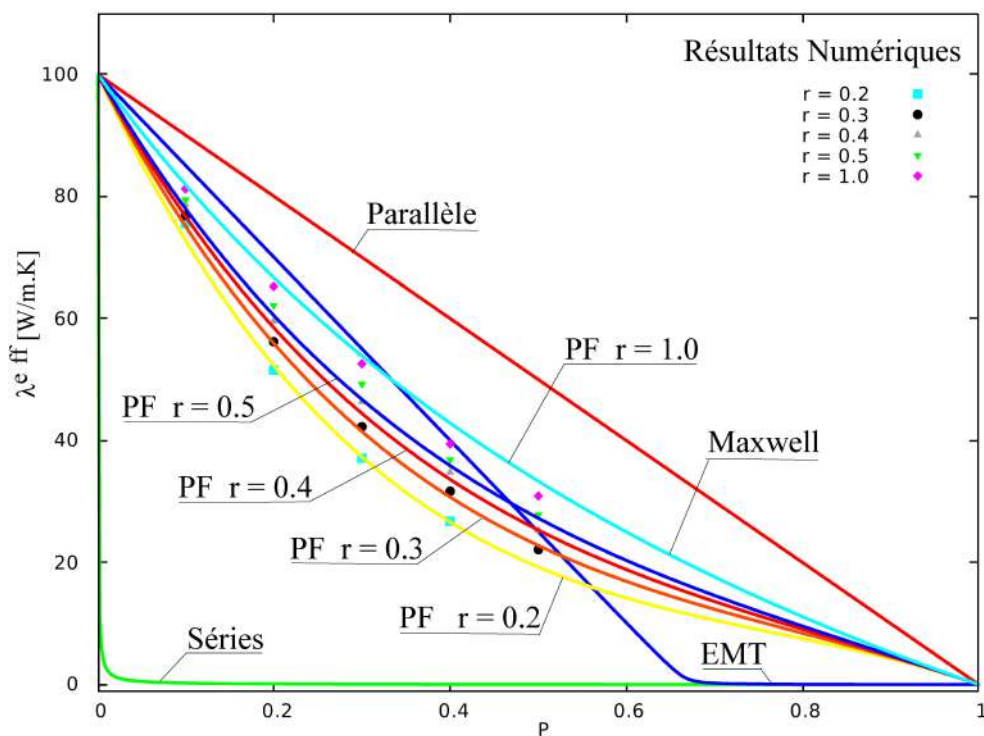


FIGURE 3.18: Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 100[W/m.K]$

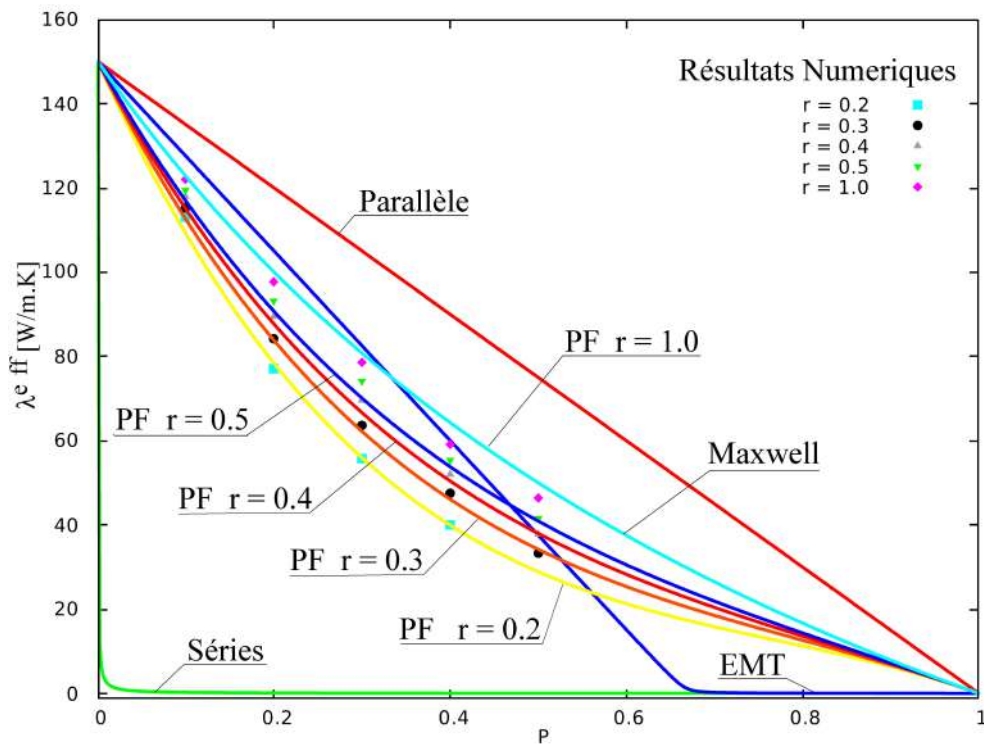


FIGURE 3.19: Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 150[W/m.K]$

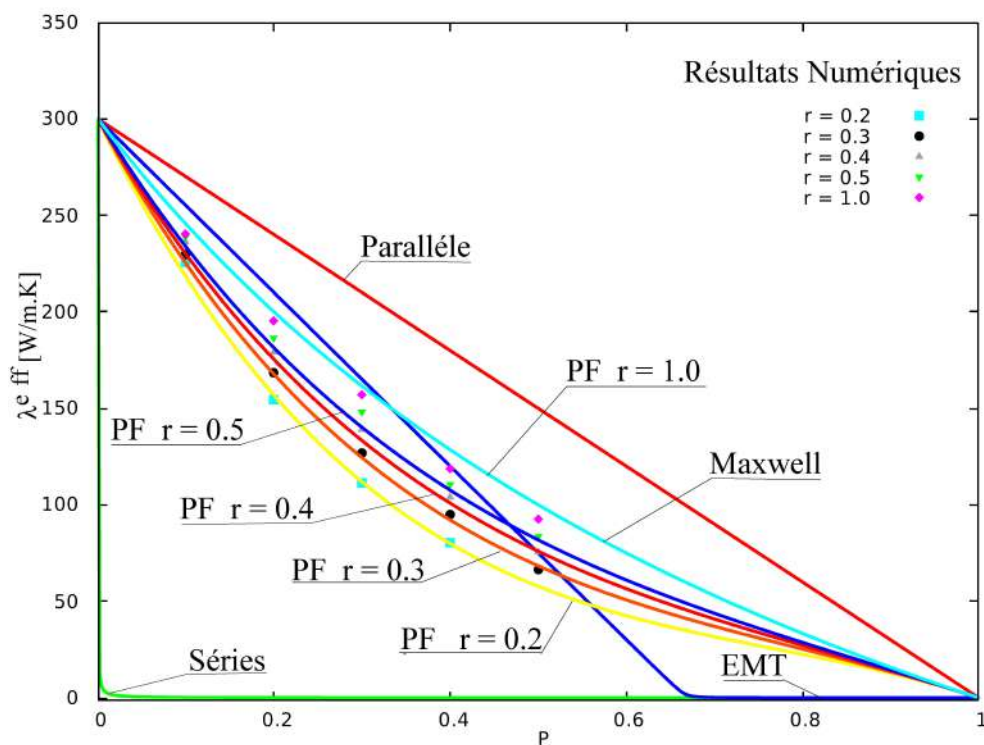


FIGURE 3.20: Résultats numériques en fonction de la fraction volumique P comparés à la formule proposée et les modèles théoriques pour le cas de la matrice $\lambda_m = 300[W/m.K]$

Dans ces figures, les courbes des résultats de simulation et l'expression analytique proposée sont très proches, presque superposées. Il apparaît également un bon accord entre les deux pour différentes fractions volumiques et différents rapports de forme des inclusions.

3.6 Synthèse

La méthode d'homogénéisation numérique a été utilisée dans ce chapitre pour estimer la conductivité thermique effective de deux milieux biphasés bidimensionnels. Le premier milieu est poreux tandis que le deuxième est un milieu composite à inclusions dures. Le point important de cette étude était de faire l'investigation de l'effet de la morphologie des pores ou des inclusions sur la conductivité thermique effective. Pour cette fin, cinq formes distinctes d'inclusions/pores ont été considérées.

On a commencé par la détermination du volume élémentaire représentatif déterministe VER_d en utilisant l'approche statistique suggérée par [Kanit et al., 2003] par l'application des deux conditions aux limites *UGT* et *PBC* pour trois fractions volumiques $P = 10\%$, $P = 30\%$ et $P = 50\%$.

Les résultats numériques des propriétés apparentes ont été validés par une comparaison avec différents modèles théoriques. Ces résultats ont montré que le VER_d , dans le cas de la conductivité thermique, peut être représenté par de faibles volumes.

Les résultats ont montré que, pour le milieu poreux, la conductivité thermique effective dépend fortement de la morphologie des pores, et le modèle de Maxwell ne peut présenter une bonne estimation sauf pour le cas des pores circulaires. Pour le cas des composites, on remarque que les résultats numériques et le modèle de *Maxwell* sont presque superposés, ainsi, ce Modèle peut assurer une très bonne estimation de cette propriété.

Enfin, une expression analytique, sur la base du modèle *Maxwell* et des résultats numériques obtenus, a été proposée. Cette expression peut être considéré comme une amélioration du modèle de Maxwell qui permet l'estimation de la conductivité thermique effective des milieux poreux tout en prenant en compte l'effet de la morphologie des pores.

Chapitre 4

Validation du modèle proposé

Une confrontation permanente entre théorie et expérience est une condition nécessaire à l'expression de la créativité. (Pierre. Joliot)

4.1 Introduction

Le but principal de cette partie est la validation du modèle proposé dans le chapitre précédent, et ce, par sa confrontation aux résultats expérimentaux publiés dans la littérature, spécialement ceux de Nakajima [Nakajima., 2013], [Nakajima, 2010]. Pour cette fin, on commence par une description détaillée des matériaux sujet de ses travaux antérieures, à savoir, leur forme, leur méthode de fabrication et leurs domaines d'application. On terminera cette partie par une présentation des différents résultats expérimentaux obtenus par Nakajima [Nakajima, 2010] afin de les comparer à notre modèle.

4.2 Matériaux lotus [Nakajima., 2013]

Dans ces dernières décennies, un nouveau type de matériaux poreux à pores longs et cylindriques orientés dans une direction a été fabriqué par la solidification unidirectionnelle d'hydrogène, d'azote ou d'oxygène sous pression. Cette technique a été étudiée par plusieurs auteurs, à citer, [Imabayashi et al., 1983], [Svensson and Fredriksson, 1980] et [Knacke et al., 1979]. [Bioko et al., 1991] a fabriqué des pores cylindriques plus longs en adoptant une technique de solidification unidirectionnelle sous une pression élevée d'hydrogène.

Hyun [Hyun et al., 1999] et Nakajima [Nakajima et al., 2001] ont également produit des métaux poreux tels que *le fer*, *le cuivre*, *le magnésium*, *le nickel* dans une atmosphère d'hydrogène ou d'azote sous haute pression et de l'argent poreux dans de l'oxygène à haute

pression par la méthode de *Czochralski* et le procédé de solidification unidirectionnelle. Durant la solidification, le gaz est rejeté du métal solide à l'interface solide-liquide en formant de longs pores qui s'alignent parallèlement à la direction de solidification.

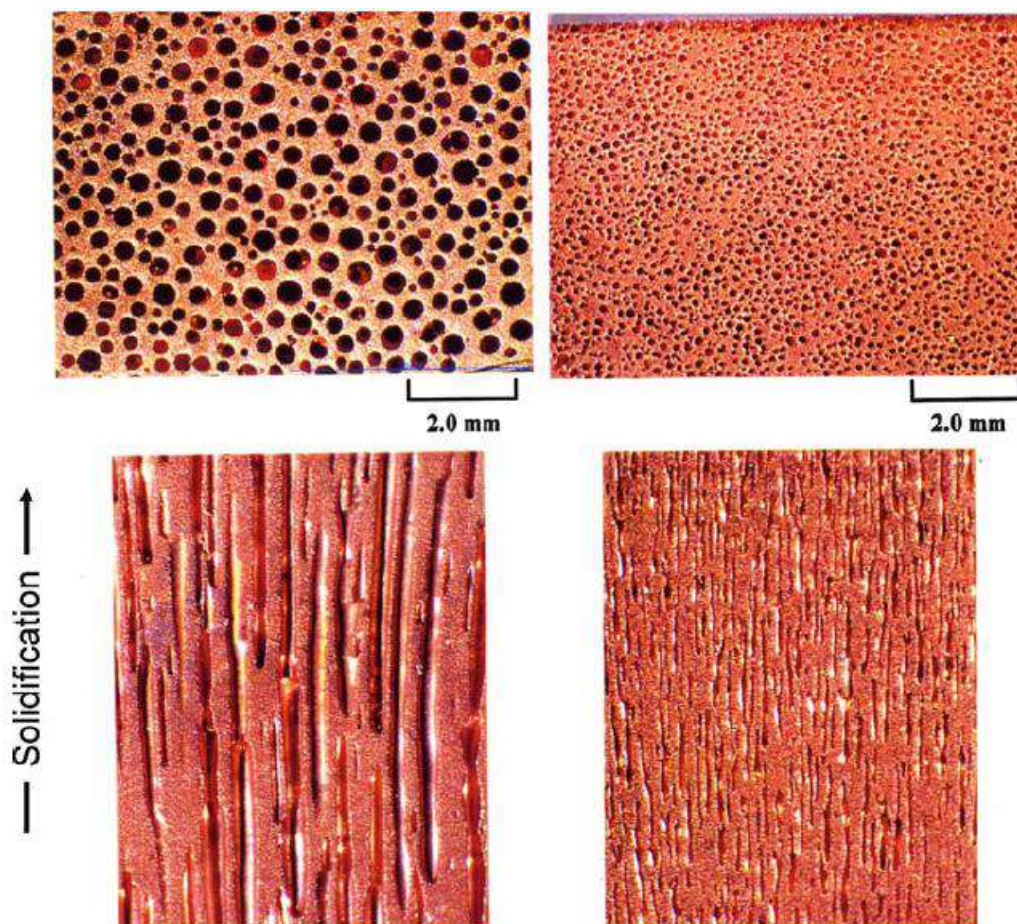


FIGURE 4.1: Des exemples de micrographies optiques du cuivre poreux de type-lotus à deux fractions volumiques 44.9 % et 36.6%. [Nakajima., 2013]

La technique de transformation utilisée est très intéressante, car elle permet le contrôle de la taille et la direction des pores, ainsi que la porosité globale.

« *Gasar* » est la nomination utilisée par [Shapovalov, 1994], un acronyme ukrainien qui signifie, métaux composites renforcés de gaz.

Par conséquent, un terme considéré comme étant le plus approprié pour le nom des ces métaux poreux est utilisé par le groupe Nakajima qui appelait ses matériaux " métaux poreux de type « lotus » ", du fait que la morphologie du matériau qui ressemble à celle de la racine du lotus.

Ainsi, ces lotus et gasar métaux présentant des caractéristiques uniques sont considérés comme une nouvelle catégorie de matériaux d'ingénierie.

4.3 Cuivre Lotus comme dissipateur de chaleur [Nakajima., 2013]

Au cours de ces dernières années, sous la tendance de la miniaturisation et de la capacité croissante, les taux de dissipation de chaleur dans les appareils électriques et les diodes laser ont augmenté d'une façon très importante (de l'ordre de $100 W/cm^2$) et pour les dispositifs électroniques à haute fréquence, jusqu'à plus de $1000 W/cm^2$. Lorsque le flux de chaleur augmente, la température augmente, et un flux de chaleur de $100 W/cm^2$ est aussi élevé qu'un flux de chaleur équivalent d'explosion nucléaire à $2000^\circ K$.

L'enjeu est que ces dispositifs de puissance doivent être maintenus au niveau de la température normale malgré le grand flux thermique. Par conséquent, de nouveaux dissipateurs de chaleur avec des performances de transfert à haute température sont nécessaires pour refroidir ces dispositifs.

Parmi les différents types de dissipateurs de chaleur, les dissipateurs de chaleur poreux qui utilisent des micros canaux d'un diamètre de canal de plusieurs dizaines de microns sont censés avoir une excellente performance de refroidissement car une capacité de transfert de chaleur plus élevée est obtenue avec des diamètres de canaux plus petits.

Ces dissipateurs de chaleur poreux, de type mousse figure 4.2, ont montré une chute de pression du fluide de refroidissement sous haute pression, car l'écoulement du fluide de refroidissement est freiné par la disposition aléatoire des pores.



FIGURE 4.2: Matériau poreux de type mousse

C'est pour cette raison que les matériaux lotus avec des pores unidirectionnels sont préférables en raison d'une faible chute de pression du fluide de refroidissement circulant à travers les pores.

Les métaux lotus ont une configuration anisotrope des pores. Cette anisotropie donne un comportement anisotrope aux différents domaines, à citer, l'absorption acoustique, la conductivité électrique et thermique, la magnétisation, et même la corrosion.

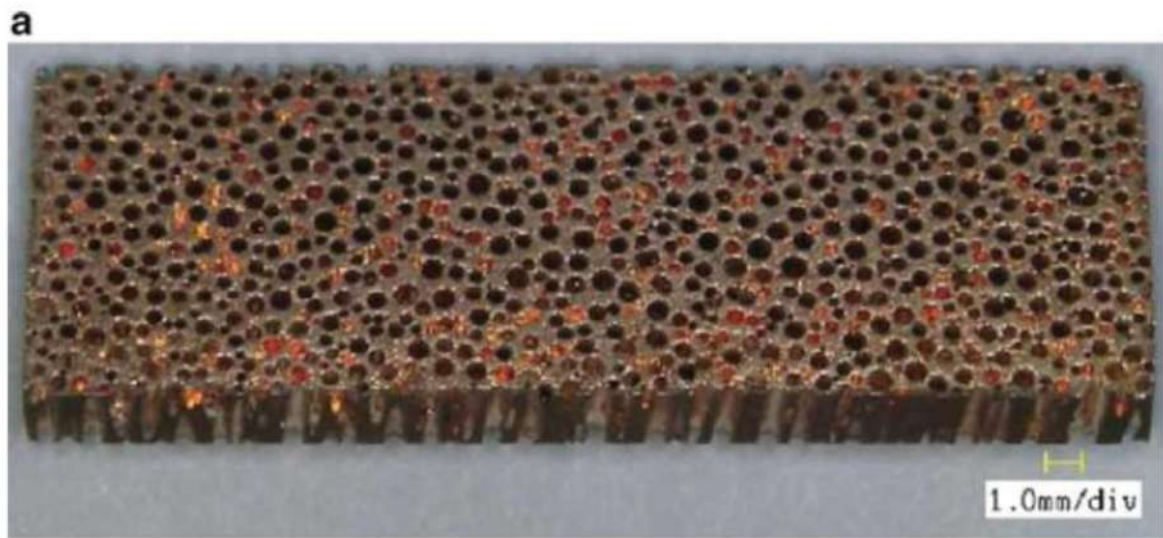


FIGURE 4.3: Cuivre type-lotus.[Nakajima, 2010]

Ces métaux lotus ont les caractéristiques principales suivantes :

- Les pores sont droits.
- La taille des pores et de la porosité est contrôlable.
- Des métaux poreux peuvent être produits avec des pores de l'ordre d'une centaine de microns de diamètre.

L'un des métaux utilisé comme dissipateur de chaleur, vu sa grande conductivité thermique, est le cuivre lotus. Actuellement, deux types de dissipateurs de chaleur existent : les ailettes à rainures conventionnelles et les dissipateurs de chaleur de type cuivre lotus. En général, les ailettes à rainure sont composées de plusieurs panneaux verticaux connectés à une base. Leur configuration et leurs caractéristiques sont représentées par la figure 4.4 :

– Dissipateurs de chaleur classiques :

La figure 4.4 illustre une configuration de dissipateurs de chaleur utilisant des ailettes conventionnelles.

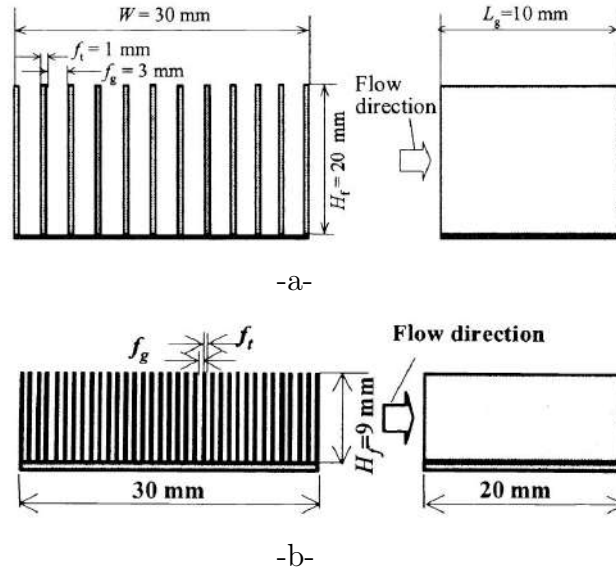


FIGURE 4.4: Configuration des ailettes à rainures conventionnelles. -a- Refroidissement à l'air -b- Refroidissement à l'eau. [Nakajima., 2013]

– Dissipateurs de chaleur de type cuivre lotus :

La figure 4.5 montre une configuration du dissipateurs de chaleur utilisant trois ailettes en cuivre lotus.

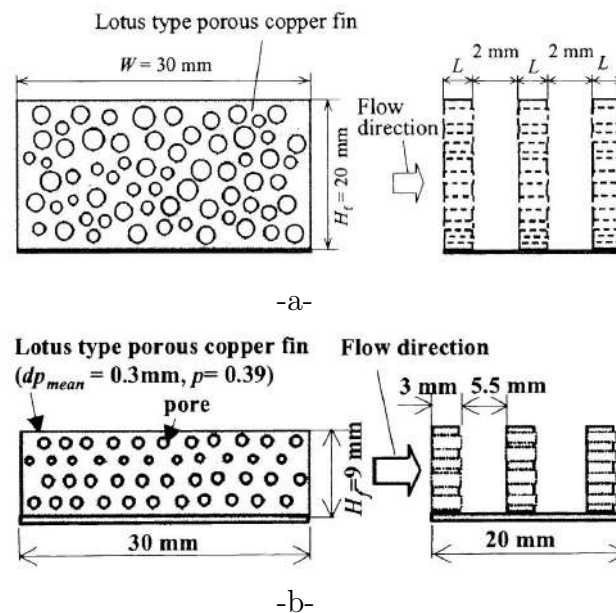


FIGURE 4.5: Dissipateurs de chaleur de type cuivre lotus. -a- Refroidissement à l'air -b- Refroidissement à l'eau. [Nakajima., 2013]

4.4 Simulation numérique de la conductivité thermique effective du cuivre lotus

L'utilisation efficace d'un matériau lotus comme dissipateur de chaleur nécessite la connaissance de sa conductivité thermique effective, par laquelle l'effet des pores directionnels sur le flux de chaleur est considéré. L'objectif principal de cette section est la détermination de la conductivité thermique effective du cuivre lotus, l'un des matériaux les plus utilisés dans les dissipateurs de chaleur vu sa conductivité thermique élevée.

Dans cette simulation, les propriétés thermiques suivantes sont utilisées : la conductivité thermique du cuivre pur est de $335[W/m.K]$ et celle des pores est de $0.026[W/m.K]$.

4.4.1 Structure du cuivre lotus et hypothèses de calcul

La représentation du cuivre lotus est l'étape la plus importante pour l'estimation efficace de sa conductivité thermique effective, du faite qu'elle permet la mise en évidence de tous les paramètres influençant cette propriété.

Dans le cas d'un composite à pores unidirectionnels, les hypothèses les plus souvent rencontrées, dans la littérature, sont :

- La section des fibres est circulaire.
- Le profil de température est indépendant de la direction parallèle aux fibres, ce qui traduit l'hypothèse de l'absence de gradient de température dans cette direction, ainsi, le problème peut se réduire à un problème 2D.
- La matrice est homogène et isotrope.
- Le composite est considéré isotrope transverse, ainsi il est possible de mettre en évidence deux conductivités thermiques effectives distinctes : la conductivité thermique effective λ_{\perp} perpendiculaire à la direction des pores et la conductivité thermique effective λ_{\parallel} parallèle à la direction des pores ; figure 4.6.

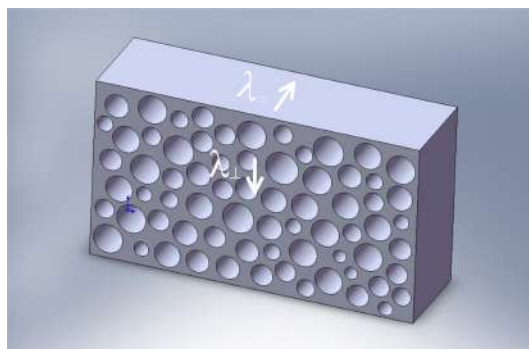


FIGURE 4.6: Illustration des conductivités thermiques effectives perpendiculaires et parallèles aux pores

Dans cette étude on s'intéresse essentiellement à la conductivité thermique effective λ_{\perp} perpendiculaire à la direction des pores pour une éventuelle comparaison du modèle proposé aux résultats expérimentaux présentés par [Nakajima, 2010].

En examinant la figure 4.7, on constate que les matériaux type lotus présentent des pores de différents diamètres et de différentes formes. Par conséquent, pour une évaluation précise de la conductivité thermique effective des ces matériaux, trois effets importants sont à considérer : l'effet de la taille des pores, l'effet de la forme des pores et l'effet de la fraction volumique.

L'effet de forme et l'effet de la fraction volumique sont prises en compte par notre modèle. Pour une éventuelle comparaison de notre modèle avec les résultats expérimentaux, une étude de l'effet de la taille des pores sur cette propriété est nécessaire, ce qui constituera l'essentiel de la section suivante.

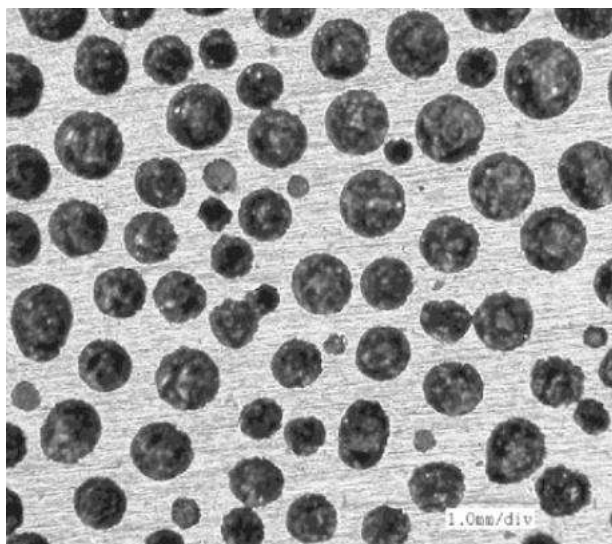
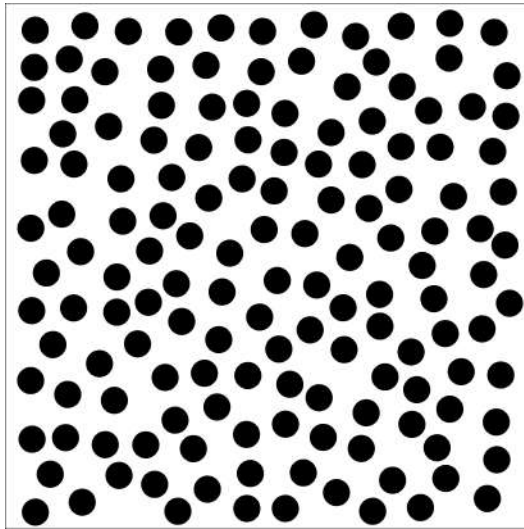


FIGURE 4.7: Vue en coupe d'un matériau lotus. [Nakajima., 2013]

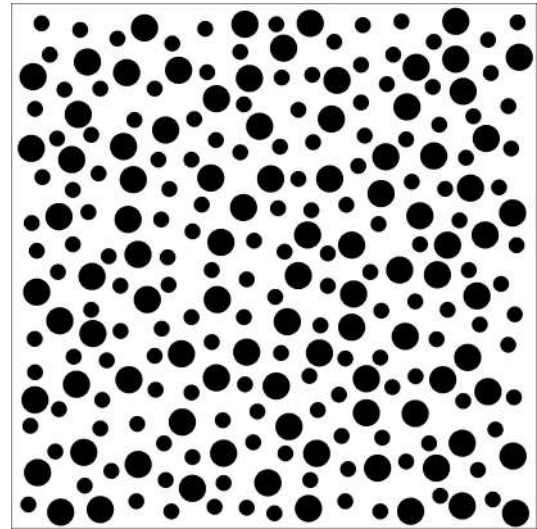
4.4.2 Effet de la taille des pores sur la conductivité thermique effective

Pour mettre en évidence l'effet de la taille des pores sur la conductivité thermique effective, on commence par traiter le cas de microstructures à deux populations de pores de tailles différentes pour essayer de la généraliser à N populations. trois fractions volumiques sont à envisager : 10%, 30% et 50%.

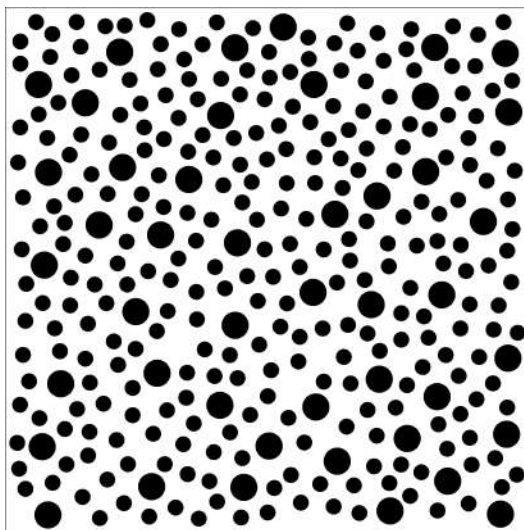
Pour chaque fraction volumique, les microstructures sont générées en faisant varier les fractions volumiques P1 et P2 de la population 1 et de la population 2 respectivement. Les autres microstructures sont obtenues en faisant diminuer la fraction volumique de la pre-



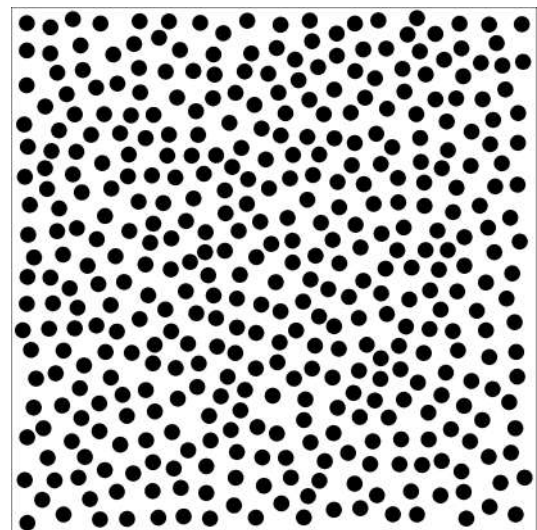
-a-



-b-

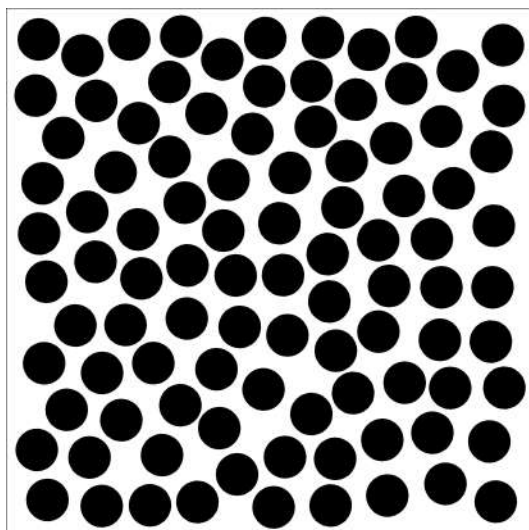


-c-

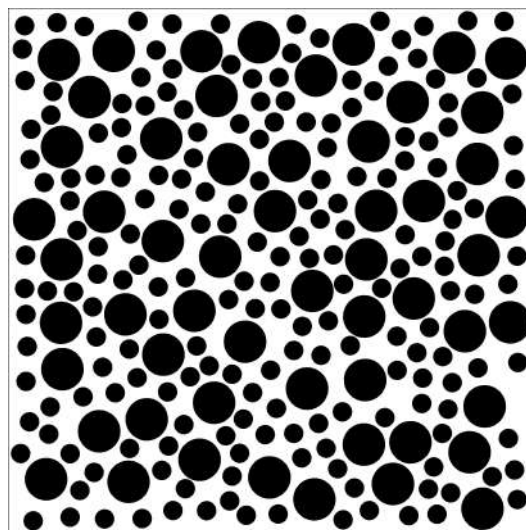


-d-

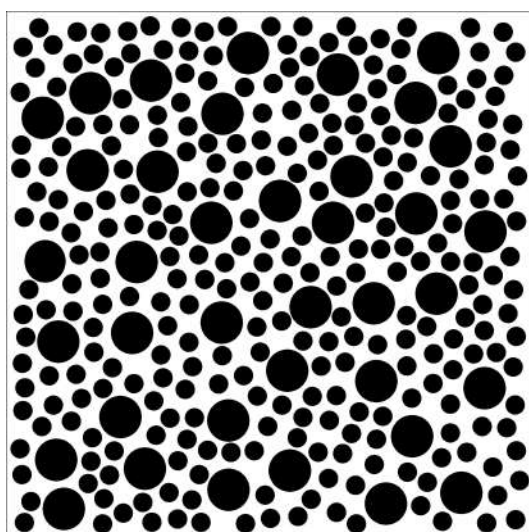
FIGURE 4.9: Microstructure à deux populations : -a- $P_1 = P = 30\%$ et $P_2 = 0\%$; -b- $P_1 = 20\%$ et $P_2 = 10\%$; -c- $P_1 = 10\%$ et $P_2 = 20\%$ et -d- $P_1 = 0\%$ et $P_2 = P = 30\%$



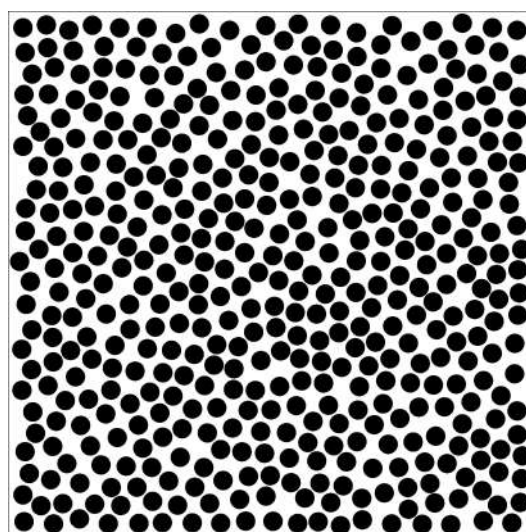
-a-



-b-



-c-



-d-

FIGURE 4.10: Microstructure à deux populations : -a- $P_1 = P = 50\%$ et $P_2 = 0\%$; -b- $P_1 = 30\%$ et $P_2 = 20\%$; -c- $P_1 = 20\%$ et $P_2 = 30\%$ et -d- $P_1 = 0\%$ et $P_2 = P = 50\%$

4.4.3 Présentation des résultats

Nous commençons à présenter dans la figure 4.11 la distribution locale de la conductivité thermique dans un VER_d à deux populations de pores.

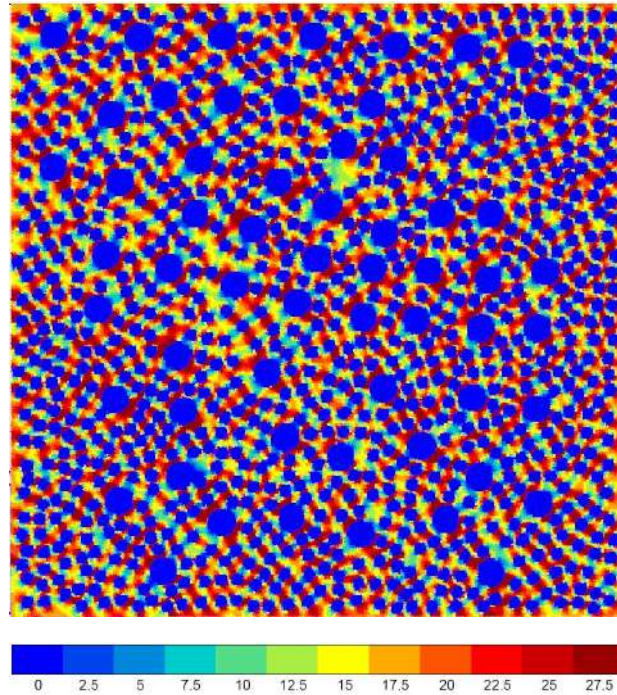


FIGURE 4.11: Distribution locale de la conductivité thermique dans un VER à deux populations de pores.

Tous les résultats obtenus pour les différentes fractions volumiques sont résumés dans les tableaux 4.1 à 4.3.

Fraction volumique P1	Fraction volumique P2	Simulation
10%	00%	273.13
06%	04%	273.02
04%	06%	273.12
00%	10%	273.58

Tableau 4.1: Valeurs de conductivité thermique pour une fraction volumique totale de $P = P1+P2 = 10\%$

Fraction volumique P1	Fraction volumique P2	Simulation
30%	00%	177.55
20%	10%	175.46
10%	20%	176.09
00%	30%	177.97

TABLE 4.2: Valeurs de conductivité thermique pour une fraction volumique totale de $P = P1+P2 = 30\%$

Fraction volumique P1	Fraction volumique P2	Simulation
50%	00%	103.86
30%	20%	100.81
20%	30%	101.27
00%	50%	103.22

TABLE 4.3: Valeurs de conductivité thermique pour une fraction volumique totale de $P = P1+P2 = 50\%$

La figure 4.12 résume tous les résultats obtenus pour les différentes fractions volumiques étudiées.

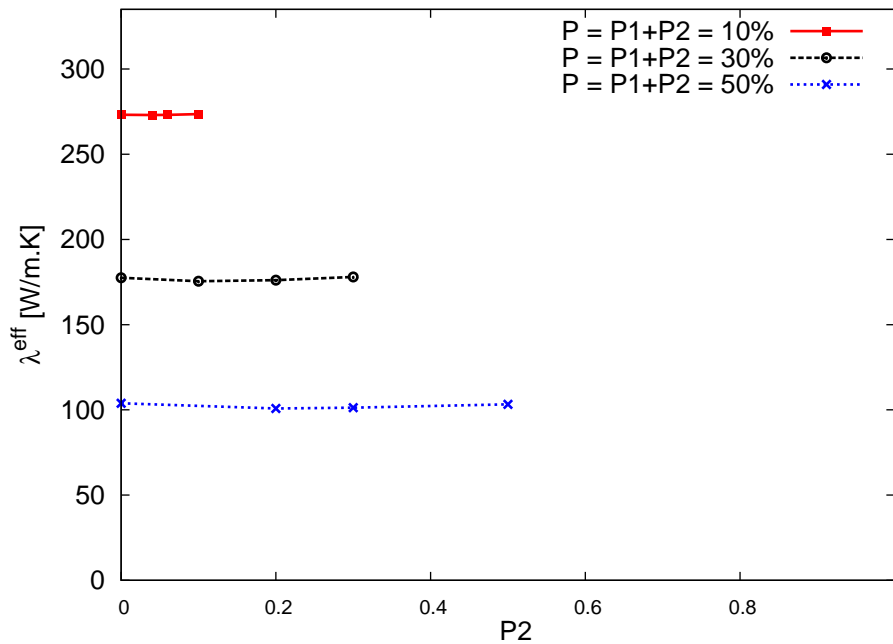


FIGURE 4.12: Conductivité thermique effective en fonction de la fraction volumique $P2$.

On remarque clairement, d'après la figure 4.12, que la conductivité thermique équivalente reste constantes pour les différentes combinaisons étudiées et ce pour toutes les fractions volumiques considérées. Donc, on peut conclure que l'effet de la taille des pores est absent par conséquent, on peut généraliser ce résultat à n populations de pores de mêmes

taille, tel que : si une microstructure présente n pores, tous de tailles différentes mais de même forme, sa conductivité thermique effective est égale à celle d'une microstructure à une population de pores de même forme, figure 4.13.

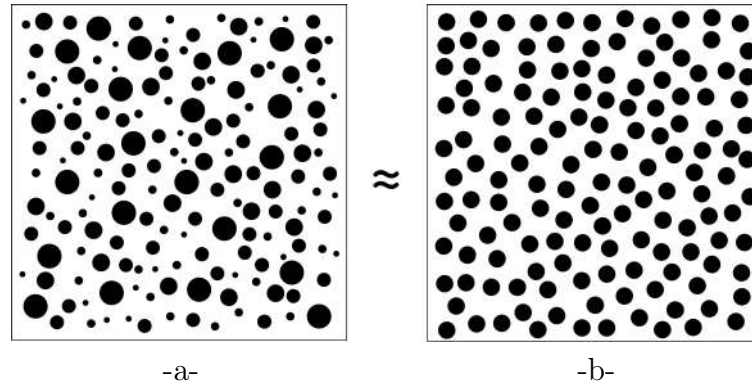


FIGURE 4.13: Morphologies équivalentes : -a- Microstructure à n populations. -b- Microstructure à une population

4.4.4 Confrontation du modèle proposé aux résultats expérimentaux

Cette section est consacrée à la confrontation du modèle proposé aux résultats expérimentaux du cuivre lotus obtenus par [Nakajima, 2010]. En comparant les résultats obtenus expérimentalement avec les résultats obtenus par notre modèle, une erreur maximum de $\pm 10\%$ est observée, figure (4.14 -a-). Le même résultat a été observé par [Nakajima, 2010] en comparant toujours ses mêmes résultats expérimentaux à un modèle simple basé sur la modification d'un modèle théorique en annulant la conductivité thermique des pores, figure (4.14 -b-).

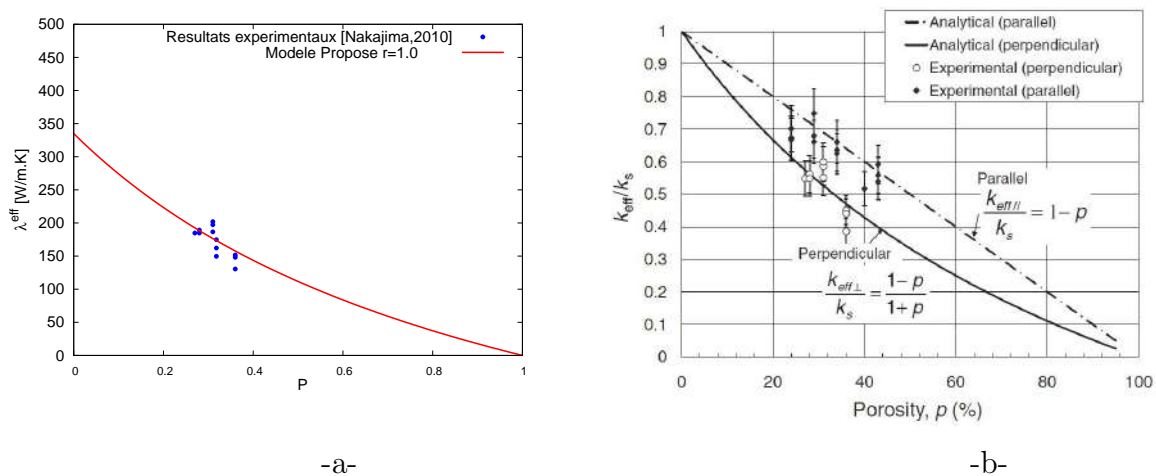


FIGURE 4.14: -a- Comparaison du modèle proposé aux résultats expérimentaux établis par [Nakajima, 2010], -b- Résultats expérimentaux et modèle établis par [Nakajima, 2010]

Toujours en considérant des pores circulaires ($r=1$), notre modèle se réduit au modèle de Maxwell et se superpose au modèle proposé par [Nakajima, 2010]. Ces deux cas sont limités aux pores de forme circulaire, ce qui ne reflète pas la réalité des matériaux lotus qui ne présentent pas une seule forme mais des pores avec différentes tailles et différentes formes, figure 4.7.

D'après les résultats de cette étude, la déformation des pores entraîne une diminution de la propriété effective ce qui explique les fluctuations des points expérimentaux sous le modèle qui sont dus essentiellement au fait que les pores ne sont pas toujours circulaires. Pour une meilleure illustration de l'effet de la forme des pore, nous présentons dans la figure 4.15 le modèle proposé avec 3 rapports de forme différent $r = 1$ (pores circulaires), $r = 0.8$ et $r = 0.5$.

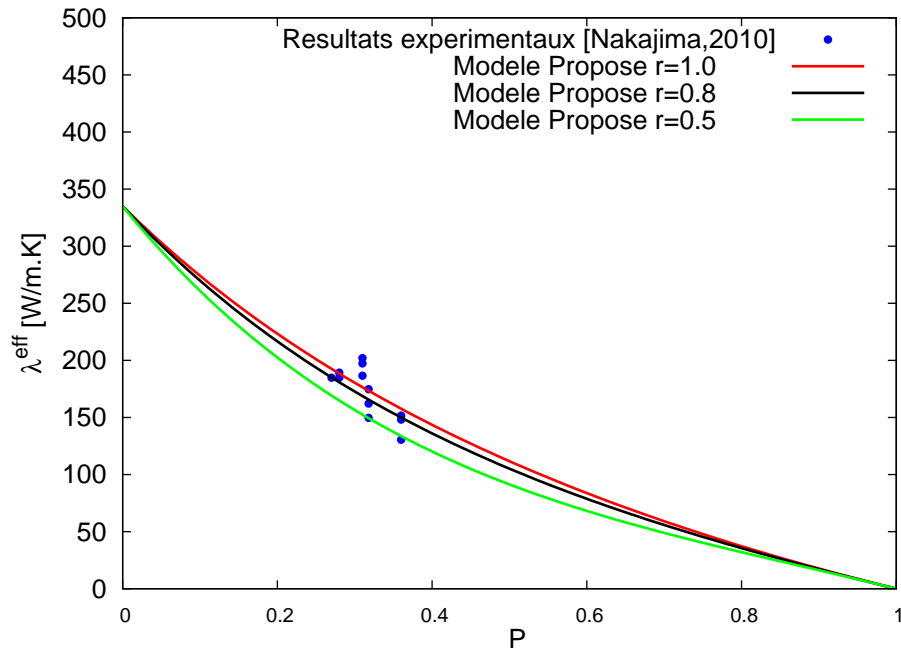


FIGURE 4.15: Comparaison des résultats expérimentaux [Nakajima, 2010] au modèle proposé pour trois rapports de forme : $r = 1$, $r = 0.8$ et $r = 1.0$.

Malgré que le modèle proposé présente, jusqu'ici, une meilleure estimation de la conductivité thermique des matériaux lotus, en prenant en compte qu'une forme des pores à la fois, une étude plus poussée permettant sa généralisation afin de prendre en compte n populations de pores à n formes différentes est souhaitée pour une estimation plus précise.

4.5 Synthèse

Dans ce chapitre, une confrontation du modèle proposé dans le chapitre 3 à des résultats expérimentaux tirés de la littérature a été réalisée. Pour cette fin et vu la particularité

de la microstructure des matériaux lotus, présentant des pores cylindriques de différentes tailles, une investigation de l'effet de la taille des pores sur la conductivité thermique effective a été réalisée. Les résultats obtenus ont montré l'absence de l'effet de taille des pores sur la propriété effective.

Par contre l'effet de la forme des pores est confirmée ,d'une part, par les résultats numériques obtenus et ,d'autre part, par les différentes fluctuations des résultats expérimentaux publiés par [Nakajima, 2010]. en les comparant au modèle proposé pour trois rapports de formes différents, l'effet de la forme des pores sur cette propriété effective.

Pour une meilleure estimation et vu que les pores sont de différentes tailles et de différentes formes (différents rapports de formes) une étude plus approfondie qui tiendra en compte, dans un premier lieu, l'effet de deux populations de formes différentes, pour l'élargir ensuite à l'effet de n populations de formes différentes sur la conductivité thermique effective.

Conclusion générale

Les applications des matériaux composites concernent à peu près toutes les activités humaines : transports (avions, trains, automobiles, bateaux, aérospatiale), sport, électricité et électronique, médicale, bâtiment... Les composites que nous avons étudiés ici sont plus particulièrement les composites poreux dont les caractéristiques mécaniques et physiques sont plus intéressantes que celles des matériaux dits standards.

Cette thèse avait pour objectif principal l'étude de l'influence de la morphologie des inclusions/pores sur les propriétés élastiques (coefficient de compressibilité k et coefficient de cisaillement μ) et thermiques (conductivité thermique λ) des matériaux composites à deux phases de type matrice-inclusion en utilisant l'homogénéisation numérique.

Dans un premier temps, nous avons commencé par définir le volume élémentaire représentatif en passant par les différentes conditions aux limites spécifiques aux problèmes d'homogénéisation, et aux différents estimateurs et bornes analytiques qui, par comparaison, permettent la validation des différents résultats de l'homogénéisation numérique. Tous ces rappels ont servi comme base théorique pour les différentes applications effectuées. Notons que l'approche statistique et numérique proposée par Kanit [Kanit et al., 2003] a été utilisée dans ce travail pour l'évaluation de la taille du *V.E.R* et les propriétés élastiques et thermique effectives des différentes microstructures aléatoires étudiées.

La première partie a été consacrée à l'étude des propriétés élastiques, à citer, le coefficient de compressibilité k et le coefficient de cisaillement μ . Les résultats numériques, obtenus par l'application des deux conditions aux limites (*KUBC*) et (*PBC*) sur différentes réalisations, ont permis la détermination des fluctuations des propriétés élastiques apparentes. Les courbes des moyennes des fluctuations ont conduit à la détermination des différentes tailles du *V.E.R* et des propriétés effectives correspondant aux différentes formes et aux différentes fractions volumiques.

Etant donné que la portée intégrale est le seul paramètre, dans cette approche statistique, qui est lié à la morphologie des inclusions, alors son évaluation s'avère l'une des clés permettant l'étude de l'effet de la morphologie des inclusions sur le comportement élastique des microstructures aléatoires. Pour cela nous avons effectué le fittage des courbes

des moyennes des fluctuations par la formule de l'erreur relative ce qui a permis d'évaluer numériquement cette portée intégrale pour les différents cas étudiés.

La comparaison des résultats numériques obtenus par l'équation 2.18, défini par [Kanit et al., 2003] comme le volume d'une inclusion dans le *V.E.R*, a permis de confirmer et de conclure que : La portée intégrale est un paramètre purement morphologique et égale au volume (surface) d'une inclusion dans le *V.E.R* déterministe. De ce fait et peu importe la forme de l'inclusion, l'effet de la morphologie de ces pores est considéré absent (négligeable). Enfin les résultats obtenus nous ont conduits aux deux concepts suivants :

- Le concept de la morphologie équivalente qui stipule que toutes les morphologies des inclusions ont le même comportement élastique.
- Le concept du matériau le plus hétérogène, qui permet de déduire que le matériau le plus hétérogène, pour les microstructures biphasées de type matrice-inclusion, est obtenu pour une fraction volumique $P = 2/3$.

La deuxième partie de cette thèse a été consacrée à l'étude de l'influence des morphologies des pores sur l'une des propriétés thermiques la plus importante des matériaux utilisés dans l'isolation thermique et l'absorption acoustique, à savoir la conductivité thermique.

La même approche d'homogénéisation numérique utilisée dans la première partie est utilisée cette fois-ci pour estimer la conductivité thermique effective de microstructures à cinq formes distinctes d'inclusions/pores.

On a commencé par déterminer le volume élémentaire représentatif déterministe *V.E.R_d* par l'application des deux conditions aux limites *UGT* et *PBC* pour trois fractions volumiques $P = 10\%$, 30% et 50% .

Les valeurs des propriétés apparentes ont été validées par comparaison de celles-ci avec les différents modèles théoriques. Ces résultats ont montré que le *V.E.R_d*, dans le cas de la conductivité thermique, peut être représenté par de faibles volumes vu la convergence rapide des propriétés apparentes vers les propriétés effectives. Ainsi la technique de fittage de la portée intégrale utilisée dans la première partie n'a pas été possible.

L'étude de l'effet de la forme des pores, dans ce cas, sur cette propriété effective, n'est possible que par une estimation directe de la conductivité thermique effective de chaque cas considéré.

Les résultats ont montré que, pour le milieu poreux, la conductivité thermique effective dépend fortement de la morphologie des pores, et le modèle de Maxwell ne peut présenter une bonne estimation sauf pour le cas des pores circulaires.

Pour le cas des composites, les résultats numériques et le modèle de *Maxwell* sont presque superposés, ainsi, ce modèle peut assurer une très bonne estimation de cette propriété pour un contraste supérieur ou égal à celui étudié.

Enfin, et vu que l'effet de la forme des pores est présent, une dernière partie de cette étude a été consacrée au développement d'une expression analytique sur la base du modèle *Maxwell* et des résultats numériques obtenus. Cette expression peut être considérée comme une amélioration du modèle de Maxwell qui permet l'estimation de la conductivité thermique effective des milieux poreux tout en prenant en compte l'effet de la morphologie des pores.

La troisième et dernière partie de notre travail est consacrée à la validation de l'expression analytique proposée par comparaison des résultats obtenus à des résultats expérimentaux tirés de la littérature, notamment les travaux de [Nakajima, 2010]. Cette comparaison a montré une bonne concordance entre la l'expression proposée pour le cas des pores circulaires (modèle de Maxwell). Les fluctuations des résultats expérimentaux autour de la formule proposée ont montré une erreur max de l'ordre de 10%. Les mêmes résultats sont trouvés par [Nakajima, 2010] en comparant ces résultats à un modèle simplifié par l'annulation de la conductivité thermique des pores.

Une deuxième comparaison de la formule proposée pour différentes formes, $r=1$, $r=0.8$ et $r=0.5$, aux résultats expérimentaux confirme la présence de l'effet de forme.

En fin et vu la configuration des métaux lotus qui présentent des populations d'inclusions de différentes tailles et différentes formes, Il est intéressant, d'améliorer la formule proposée dans notre étude par une autre plus approfondie qui tiendra en compte, dans un premier lieu, de l'effet de deux populations de formes différentes, pour l'élargir ensuite à l'effet de n populations de formes différentes sur la conductivité thermique effective.

Annexe A

L'Approche Kanit et al. [Teixeira-Pinto, 2012]

[Kanit et al., 2003] et [Kanit et al., 2006] ont présenté une définition plus quantitative du *V.E.R* qui doit assurer, avec une certaine précision, la propriété estimée obtenue par moyenne spatiale dans un certain domaine V . Ces travaux comportent un premier volet déterministe pour déterminer le type de conditions aux limites conduisant le plus rapidement, avec la taille de réalisation, à une stabilisation de la moyenne de la propriété et de l'écart type correspondant. Le second volet de ces travaux consiste en une analyse statistique pour la détermination de la taille d'un *V.E.R* optimal. Il est fondé sur l'analyse de la variance en fonction de la taille de réalisation. Cette variance est exprimée à partir d'un paramètre morphologique dit portée intégrale. Cette méthode ajoute la possibilité de fixer la précision et le nombre de réalisations souhaité pour estimer la taille du *V.E.R*.

A.1 Partition du volume initial

Pour l'application de cette méthode, on commence par diviser le volume initial de la microstructure étudiée en n subdivisions de même taille appelées réalisations. Deux façons sont utilisées pour la subdivision du volume :

- La première, dite régulière, consiste à diviser le volume initial en n subdivisions de même taille. Etant donné que le chevauchement, dans cette méthode, est interdit, le nombre maximal de réalisations est égal au nombre de subdivisions, figure A.1-a.
- La deuxième, dite aléatoire, consiste à diviser le volume initial en n subdivisions de même taille mais en autorisant, cette fois-ci, le chevauchement partiel entre les différentes subdivisions, ce qui permettra l'obtention d'un nombre de réalisations plus important que dans la première technique, figure A.1-a.

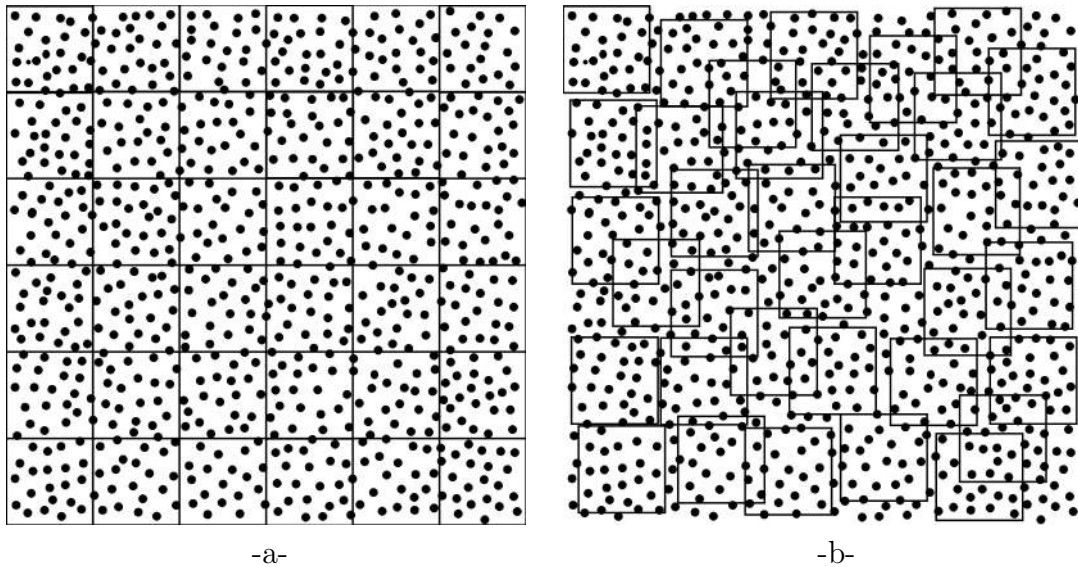


FIGURE A.1: Illustration d'une subdivision -a- régulière et -b- aléatoire.

A.2 1^{ère} Méthode : Analyse déterministe

Dans cette méthode, les deux techniques de partitionnement peuvent être utilisées. Après génération des différentes réalisations d'une taille donnée, les étapes à suivre sont :

- Une simulation par éléments finis est utilisée pour déterminer les champs de la grandeur Z à étudier.
- Un calcul de la valeur moyenne volumique $\langle Z \rangle_V$ peut ainsi être effectué pour chaque réalisation.

$$\langle Z \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V z dV \quad (\text{A.1})$$

- Calcul des fluctuations (variance en statistique) D_Z^2 de $\langle Z \rangle_V$ entre les différentes réalisations d'une taille donnée, à partir de l'équation :

$$D_Z^2 = \langle (Z)^2 \rangle_V - (\langle Z \rangle_V)^2 \quad (\text{A.2})$$

- Les deux dernières étapes sont répétées pour des familles de réalisations de tailles différentes.
- Finalement, on trace la moyenne volumique de la grandeur Z ainsi que l'intervalle de variation exprimée par $[\langle Z \rangle - 2 * D_Z, \langle Z \rangle + 2 * D_Z]$ en fonction de la taille du volume.

A.3 2^{ème} Méthode : Détermination statistique de la taille du *V.E.R*

Cette approche permet de fixer une estimation ε et un nombre de réalisations comme entrée de l'estimation de la taille minimale du *V.E.R* pour une grandeur Z donnée. Dans cette approche, la variance $D_Z^2(V)$ de la valeur moyenne de la grandeur Z sur les différentes réalisations d'une taille donnée est exprimée en fonction du volume de la réalisation V et de la portée intégrale A_Z par :

– Dans le cas où Z est un scalaire additif sur le volume V

$$D_Z^2(V) = D_Z^2 \cdot \left(\frac{A_Z}{V}\right) \quad (\text{A.3})$$

– Dans le cas où Z est une propriété non additive par

$$D_Z^2(V) = D_Z^2 \cdot \left(\frac{A_Z}{V}\right)^\alpha \text{ avec } \alpha \neq 1 \quad (\text{A.4})$$

A_Z est une notion qui permet de prévoir la variabilité des propriétés d'un matériau en fonction de la géométrie de ses composants.

L'erreur absolue ε_{abs} d'estimation de la grandeur par rapport à la valeur exacte M du processus aléatoire $\langle Z \rangle_V (V)$, obtenue avec n réalisations indépendantes du volume, est déduite à partir de l'intervalle de confiance par :

$$\varepsilon_{abs} = \frac{2D_Z(V)}{\sqrt{n}} \quad (\text{A.5})$$

Donc, l'erreur relative est donnée par :

$$\varepsilon_{rela} = \frac{\varepsilon_{abs}}{M} = \frac{2D_Z(V)}{M\sqrt{n}} \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, pour une erreur relative souhaitée, le nombre de réalisations n à simuler peut être exprimé par :

$$n(V) = \frac{4}{\varepsilon_{rela}^2 \cdot M^2} D_Z^2 \left(\frac{A_Z}{V}\right) \quad (\text{A.7})$$

De la même façon, pour une erreur relative ε_{rel} et un nombre de réalisations n souhaité, le plus petit volume à simuler est donné par :

$$V_{VER} = \left(\frac{4}{\varepsilon_{rela}^2 \cdot M^2 \cdot n} D_Z^2 \right)^{1/\alpha} A_Z \quad (\text{A.8})$$

A.4 Algorithme de détermination de la taille optimale du VER pour une propriété additive

La démarche de détermination de la taille optimale du V.E.R pour une propriété additive à partir des outils statistiques de [Kanit et al., 2006] peut se décrire de la façon suivante :

- Générer différentes réalisations de la microstructure pour chacune des différentes tailles de subdivision V choisies ;
- Soumettre chaque réalisation de la microstructure à un chargement et mesurer la grandeur $Z(x)$;
- Calculer la moyenne volumique et la variance correspondante de la grandeur effective sur les différentes réalisations d'une même taille ; vérifier que le nombre de réalisations est suffisant pour chaque taille de volume à partir de l'estimation de l'erreur absolue équation A.5 ou relative équation A.6 ;
- Identifier la portée intégrale dans l'équation A.3 ;
- Définir la précision souhaitée ε_{rel} pour l'estimation de la propriété effective et le nombre de réalisations n et utiliser l'équation A.8 pour trouver le V.E.R final.

Les équations A.5, A.6 et A.7 nécessitent la connaissance des valeurs vraies (ou au moins une estimation précise) de la variance $D_Z^2(V)$ et de la valeur moyenne exacte M .

La précision de la méthode présentée par [Kanit et al., 2003] et [Kanit et al., 2006] dépend fortement du nombre de réalisations choisi par les utilisateurs. L'algorithme, décrit précédemment, nécessite un grand nombre de calculs (de 10 à 2500, selon la taille du volume V [Kanit et al., 2003]). Le nombre de réalisation est défini par un critère d'arrêt basé sur la stabilisation de l'estimation de la moyenne de la propriété et de sa variance.

Bibliographie

- [Aboudi, 1991] Aboudi, J. (1991). A unified micromechanical approach. *Mechanics of Composite Materials*. Elsevier.
- [Agari and Uno, 1986] Agari, Y. and Uno, T. (5705-5712. (1986)). Estimation on thermal conductivities of filled polymers. *Journal of Applied Polymer Science, Vol. 32, No. 7*.
- [Akbari et al., 2013] Akbari, A., Akbari, M., and Hill, R. J. (2013). Effective thermal conductivity of two-dimensional anisotropic two-phase media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 63 :41–50.
- [Bensoussan and Papanicolaou, 1978] Bensoussan, A. Lions, J. L. and Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*.
- [Benveniste, 1987] Benveniste, Y. A. (1987). New approach to the application of moritanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6 :147–157.
- [Beran, 1968] Beran, M. J. (1968). *Statistical Continuum Theories*. J. Wiley, New York.
- [Berveiller and Zaoui, 1979] Berveiller, M. and Zaoui, A. (1979). An extension of the self consistent scheme to plasticity-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26 :325–344.
- [Besson et al., 2009] Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J. L., Forest, S., and Blétry, M. (2009). Non-linear mechanics of materials. *Solid Mechanics and Its Applications, Springer ISBN : 978-90-481-3355-0, 433 p.*, 167.
- [Bioko et al., 1991] Bioko, L., Shapovalov, V., and Chernykh, E. (1991). *Metallurgiya*, 346 :78–81.
- [Bolot et al., 2005] Bolot, R., Antou, G., Montavon, G., and Coddet, C. (2005). A two-dimensional heat transfer model for thermal barrier coating average thermal conductivity computation. *Numer, Heat Transf., Part A*, 47 :875–898.
- [Bornert M. and P., 2010] Bornert M., B. T. and P., G. (2010). Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. *Série : Alliages Métalliques, Hermes Science Publications, ISBN : 2-7462-0199-2*.

- [Bruggeman, 1935] Bruggeman, D. A. G. (1935). Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen. I. dielektrizitätskonstanten und leitfähigkeiten der mischkörper aus isotropen substanzen. *Annalen der Physik*, 416 n 7 :636–664.
- [Budiansky, 1965] Budiansky, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, 13 :223–227.
- [Burteau et al., 2007] Burteau, A., Bartout, J.-D., NGuyen, F., Forest, S., Bienvenu, Y., S. S., and Naumann, D. (2007). *Investigation of representative volume element size for the mechanical properties of open-cell nickel foams*. National Research Council of Canada.
- [Cailletaud et al., 1994] Cailletaud, G., Jeulin, D., and Rolland, P. (1994). Size effect on elastic properties of random composites. *Engineering Computations.*, 11 :99–110.
- [Christensen and Lo, 1979] Christensen, R. M. and Lo, K. H. (1979). Solutions for effective shear properties of three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 :315–330.
- [Coquard and Baillis, 2009] Coquard, R. and Baillis, D. (5466-5479 (2009).). Numerical investigation of conductive heat transfer in high-porosity foams. [*J*]. *Acta Mater*.
- [Cunningham and Peddicord, 1981] Cunningham, M. E. and Peddicord, K. L. (1081-1088. (1981)). Heat conduction in spheres packed in an infinite regular cubical array. *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 24, No. 7*.
- [Dirrenberger, 2012] Dirrenberger, J. (2012). Propriétés effectives de matériaux architecturés. *Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris*.
- [Divo et al., 2000] Divo, E., Kassab, A., and Rodriguez, F. (2000). Characterization of space dependent thermal conductivity with a bem-based genetic algorithm. *Numer. Heat Transf., Part A*, 37 (8) :845–875.
- [Einstein, 1906] Einstein, A. (1906). Eine neue bestimmung der molekuldimensionen. *Annalen der Physik*, 324 n 2 :289–306.
- [Einstein, 1911] Einstein, A. (1911). Berichtigung zu meiner arbeit : "eine neue bestimmung der molekuldimensionen". *Annalen der Physik*, 339 n 3 :591–592.
- [El-Moumen, 2014] El-Moumen, A. (2014). Prédiction du comportement des matériaux hétérogènes basée sur l'homogénéisation numérique : modélisation, visualisation et étude morphologique. *Thèse de doctorat de l'université de Lille1*.
- [El-Moumen et al., 2013] El-Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and EL-Minor, H. (2013). Effect of overlapping inclusions on effective elastic properties of composites. *Mechanics Research Communications*.

-
- [El-Moumen et al., 2014] El-Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and EL-Minor, H. (2014). A multiscale approach and microstructure design of the elastic composite behavior reinforced with natural particles. *Composites Part B : Engineering*.
- [El-Moumen et al., 2015] El-Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and El-Minor, H. (2015). Computational thermal conductivity in porous materials using homogenization techniques : Numerical and statistical approaches. *Computational Materials Science*.
- [Eshelby, 1957] Eshelby, J. D., editor (1957). *The determination of elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. Proceeding of Royal Society A 421*.
- [Feyel and Chaboche, 2000] Feyel, F. and Chaboche, J. (2000). Fe2 multiscale approach for modeling the elastoviscoplastic behavior of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :309–330.
- [Forest, 2006] Forest, S. (2006). *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Mines Paris.
- [Gibson, 1994] Gibson, R. F. (1994). *Principles of Composite Materials Mechanics*. McGraw-Hill Inc., New York,.
- [Gong et al., 2014] Gong, L., Wang, Y., Cheng, X., Zhang, R., and Zhang, H. (2014). A novel effective medium theory for modelling the thermal conductivity of porous materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 67 :253–259.
- [Gusev, 1997] Gusev, A. (1997). Representative volume element size for elastic composites : a numerical study. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1449–1459.
- [Guth and Gold, 1938] Guth, E. and Gold (1938). On the hydrodynamical theory of the viscosity of suspensions. *Phys. Rev.*, 53 :322.
- [Hadley, 1986] Hadley, G. R. (909-920. (1986)). Thermal conductivity of packed metal powersaa. *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 29, No. 6*.
- [Hashin and Shtrikman, 1962] Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1962). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :343–352.
- [Hashin and Shtrikman, 1963] Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *Journal of Mechanics of Physics and solids*, 11 :127–140.
- [Hazanov and Huet, 1994] Hazanov, S. and Huet, C. (1994). Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *J. Mech. Phys. Solids*,, 42 :1995–2011.
- [Herve and Zaoui, 1995] Herve, E. and Zaoui, A. (1995). Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites. *International Journal of Engineering Sciences*, 33 :1419–1433.
-

-
- [Huet, 1991] Huet, C. (1991). Hierarchies and bounds for size effects in heterogeneous bodies. In *Proc. Sixth Symposium on Continuum moels and Discrete Systems, Dijon, 1989* (ed. G.Maugin). vol. 2 pp 127-134.
- [Hyun et al., 1999] Hyun, S., Shiota, Y., Murakami, K., and Nakajima, H. (1999). In ; koiwa m, otsuka k, miyazaki t (eds) proceedings of international conference on solid-solid phase transformations '99 (jimic-3), japan inst metals, kyoto,. pages 341–344.
- [Imabayashi et al., 1983] Imabayashi, M., Ichimura, M., and Kanno, Y. (1983). *Trans JIM*, 24 :93–100.
- [Jean, 2009] Jean, A. (2009). Etude d'un élastomère chargé de la nanostructure au micro-comportement. *Thèse de doctorat de l'Ecole nationale supérieure des mines de paris*.
- [Jeulin, 2001] Jeulin, D. (2001). *Caractérisation Morphologique et Modèles de Structures Aléatoires, Extrait de : Homogénéisation en mécanique des matériaux (tome1)*. Hermes, France.
- [Jeulin, 2012] Jeulin, D. (2012). Morphology and effective properties of multi-scale random sets. *C.R. mecanique*, 340 :219–229.
- [Kanit et al., 2006] Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., and Jeulin, D. (2006). Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : Representativity of samples of two materials from food industry. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, (195) :3960–3982.
- [Kanit et al., 2003] Kanit, T., Forest, S., Mounoury, V., and D., J. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. Journal of Solids and Structures*,, 40 :3647–3679.
- [Kari et al., 2007] Kari, S., Berger, H., Rodriguez-Ramos, R., and U., G. (2007). Computational evaluation of effective material properties of composites reinforced by randomly distributed spherical particules. *Composite Structures*, 77 :pages 223–231.
- [Khdir et al., 2013] Khdir, Y. K., Kanit, T., Zairi, F., and Nait-Abdelaziz, M. (50 (2013)). Computational homogenization of elasto-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*.
- [Knacke et al., 1979] Knacke, O., Probst, H., and Wernekinck, J. (1979). *Z Metallkde*, 70 :1–6.
- [Lachihab and Sab, 2008] Lachihab, A. and Sab, K. (2008). Does a representative volume element exists for fatigue life prediction ? the case of aggregate composites. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32, issue 9 :1005–1021.
- [Lantuéjoul, 1991] Lantuéjoul, C. (1991). Ergodicity and integral range. *Journal of Microscopy*, 161 :387–403.
-

-
- [Lewis and Nielsen, 1970] Lewis, T. and Nielsen, L. (1449-1471. (1970)). Dynamic mechanical properties of particulate-filled composite. *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 14, No. 6.
- [Lippmann et al., 1997] Lippmann, N., Steinkopff, T., Schmauder, S., and Gumbsch, P. (1997). 3d finite element modelling of microstructures with the method of multiphase elements. *Computational Materials Science*.
- [Madi et al., 2007] Madi, K., Forest, S., Boussuge, M., Gailliègue, S., Lataste, E., Buffière, J.-Y., Bernard, D., and Jeulin, D. (2007). Finite element simulations of the deformation of fused-cast refractories based on x-rau computed tomography. *Computational Materials Science*, 39 :224–229.
- [Matheron, 1971] Matheron, G. (1971). The theory of regionalized variables and its applications. *Paris school of mines publications*.
- [Matheron, 1975] Matheron, G. (1975). *Random set and integral geometry*. J.Wiley, New York.
- [Matheron, 1989] Matheron, G. (1989). *Estimating and Choosing*. Springer Verlag. Berlin.
- [Maxwell, 1873] Maxwell, J. (1873). A treatise on electricity and magnetism. *Clarendon Press*.
- [Maxwell Garnett, 1904] Maxwell Garnett, J. C. (1904). Colours in metal glasses and in metallic films. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 203 :385–420.
- [Misra et al., 1994] Misra, K., Shrotriya, A. K., Singh, R., and Chaudhary, D. R. (732-735. (1994)). Porosity correction for thermal conduction in real two-phase systems. *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol. 27, No. 4.
- [Mori and Tanaka, 1973] Mori, T. and Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with missfitting inclusions. *Acta. Metal.*, 21 :571–574.
- [Nakajima, 2010] Nakajima, H. (2010). Fabrication, properties, and applications of porous metals with directional pores. *Proc. Jpn. Acad., Ser. B*, 86 :884–899.
- [Nakajima., 2013] Nakajima., H. (2013). *Porous Metals with Directional Pores*. Springer.
- [Nakajima et al., 2001] Nakajima, H., Hyun, S., Ohashi, K., Ota, K., and Murakami, K. (2001). Colloids surf a :. *Physicochem Eng Aspects*, 197 :209–214.
- [Ostoja-Starzewski, 1993] Ostoja-Starzewski, M. (1993). Micromechanics as basis of random elastic continuum approximations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 8 :107–114.
- [Ostoja-Starzewski, 1998] Ostoja-Starzewski, M. (1998). Random field models and scaling laws of heterogeneous media. *Arch. Mech.*, 50 :549.
- [Ponte Castaneda, 1989] Ponte Castaneda, P. (1989). The overall constitutive behaviour of nonlinear elastic composites. *Proc. R. Soc. Lond., pages*, A422 :147–171.
-

-
- [Qi, 2006] Qi, B. (2006). Simulation numérique du comportement mécanique de composites à particules. rapport de stage de master 2,. *Ecole Centrale Paris*.
- [Rayleigh, 1892] Rayleigh, L. (1892). On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Philos. Mag.*
- [Reuss, 1929] Reuss, A. (1929). Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *Z. Angew. Math. Mech.*, 9 :49–59.
- [Rocha and Cruz, 2001] Rocha, R. and Cruz, M. (179-203(2001).). Computation of the effective conductivity of unidirectional fibrous composites with an interfacial thermal resistance. *Numer.Heat Transf. Part. A*.
- [Sab, 1992] Sab, K. (1992). On the homogenization and the simulation of random materials. *Eur. J. Mech. Solids*, 11 :585–607.
- [SAb, 2005] SAb, K. (2005). Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Compte Rendu de Mecanique 333*, 187-195.
- [Sab and Nedjar, 2005] Sab, K. and Nedjar, B. (2005). Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Serie Iib ; Mecanique.*, 333 :187–195.
- [Sanchez-Palencia, 1974] Sanchez-Palencia, E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Engrg. Sci.*, 12 :331–351.
- [Shapovalov, 1994] Shapovalov, V. (1994). Mrs bull xix. pages 24–28.
- [Singh and Kasana, 2004] Singh, R. and Kasana, H. S. (1841-1849. (2004)). Computational aspects of effective thermal conductivity of highly porous metal foams. *Applied Thermal Engineering, Vol. 24, No. 13*.
- [Smallwood, 1944] Smallwood, H. (1944). Limiting law of the reinforcement of rubber. *J. Appl. Phys*, 15 :758–766.
- [Svensson and Fredriksson, 1980] Svensson, I. and Fredriksson, H. (1980). in : Proceeding of international conference organized by the applied metallurgy and metals tech group of tms, university of warwick, pp. 376-380.
- [Teixeira-Pinto, 2012] Teixeira-Pinto, J. (2012). Analyse expérimentale et numérique multi-échelle des champs mécaniques dans un polymère semi-cristallin. *Thèse de doctorat de l' Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique de Poitiers*.
- [Terada et al., 1998] Terada, K., Ito, T., and Kikuchi, N. (1998). Characterisation of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method. *Comput. Methods Appl. Engng.*, 153 :223–257.
- [Torquato, 1985] Torquato, S. (1985). Effective electrical conductivity of two-phase disordered composite media. *Journal of Applied Physics*, 58, No 10 :3790–3797.
-

-
- [Veisheh et al., 2009] Veisheh, S., Khodabandeh, N., and Hakkaki-Fard, A. (201-214,(2009).). Mathematical models for thermal conductivity-density relationship in fibrous thermal insulations for practical applications. *Asian. J. Civ. Eng. Build. Hous.*
- [Verma et al., 1991] Verma, L. S., Shrotriya, A. K., Singh, R., and Chaudhary, D. R. (1729-1737. (1991)). Thermal conduction in two-phase materials with spherical and non-spherical inclusion. *Journal of Physics D : Applied Physics, Vol. 24, No. 10.*
- [Veyret et al., 1993] Veyret, D., Cioulachtjian, S., Tadrist, L., and Pantaloni, J. (866-871 (1993).). Effective thermal conductivity of a composite material : a numerical approach. *J Heat Transf.,*
- [Vinson and Sierakowski, 1987] Vinson, J. and Sierakowski, R. (1987). *The behavior of structures composed of composite materials.* Martinus, Nijhoff Publishers,Dordrecht.
- [Voigt, 1889] Voigt, W. (1889). Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitatsconstanten isotroper korper. *Annalen der Physik und Chemie, 38 :573–587.*
- [Wang and Pan, 2008] Wang, M. and Pan, N. (1325-1331 (2008).). Modeling and prediction of the effective thermal conductivity of random open-cell porous foams. *Int. Journ. Heat. Mass .Transf.*
- [Whitaker, 1 13] Whitaker, S. (1999 vol 13). *The Method of Volume Averaging.* Springer.
- [Wiener, 1904] Wiener, O. (1904). Lamellare doppelbrechung. *Phys.Z.*
- [Wiener, 1912] Wiener, O. (1912). Die theorie des mischkorpers fur das feld der stationaren stromung. 1. abhandlung : Die mittelwertsatze fur kraft, polarization und energie. *Abhand-lungen der Koniglich Sachsische Gesellschaft der Wissenschaften., 32 nÂ°6.*
- [Yang et al., 2013] Yang, R., Lee, Y., Shiah, Y., and Tsai, T. (2013). On the generalized self-consistent model for the effective thermal conductivity of composites reinforced by multi-layered orthotropic fibers. *International Communications in Heat and Mass Transfer.*
- [Zaoui, 2000] Zaoui, A. (2000). *Matériaux hétérogenes et composites (2000).* Cours de l'Ecole Polytechnique, Majeure 1. option "matériaux et structures".
- [Zeman and Sejnoha, 2001] Zeman, J. and Sejnoha, M. (2001). Numerical evaluation of effective elastic properties of graphit fibre tow impregnated by polymer matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49 :69–90.*

Résumé

Le but principal de ce travail est l'étude de l'effet de la morphologie des inclusions/pores sur les propriétés élastiques et thermiques des matériaux composites de type matrice dominantes à deux phases.

Dans la première partie de cette étude, l'approche numérique développée par [Kanit et al. 2003] a été utilisée pour la détermination des propriétés élastiques, notamment le coefficient de compressibilité k et le coefficient de cisaillement μ , afin d'évaluer « la portée intégrale », le seul paramètre statistique lié à la morphologie des inclusions. Les résultats obtenus ont montré l'absence de l'effet de la morphologie des pores sur les propriétés élastiques étudiées.

Dans la deuxième partie, la même approche a été adoptée pour l'évaluation de l'effet de la morphologie des inclusions sur la conductivité thermique des matériaux composites. Les résultats obtenus ont montré que la conductivité thermique effective est influencée par la forme des pores pour les milieux poreux, alors que pour le cas des matériaux composites non poreux l'effet est totalement absent.

Une formule, obtenue numériquement, permettant l'estimation de la conductivité thermique des milieux poreux tenant compte l'effet de la forme des pores a été proposée. Enfin la formule proposée est comparée et validée par sa confrontation à des résultats expérimentaux tirés de la littérature.

Mots clés : Homogénéisation, Milieu poreux, V.E.R, Portée intégrale, Méthode des Eléments Finis, Propriétés effectives.

Abstract

The main aim of this work is the study of the effect of inclusions / pores morphology on elastic and thermal properties of two phases composites.

In the first part of this study, the numerical approach developed by [Kanit et al. 2003] was used to determine the elastic properties, particularly the bulk modulus k and the shear modulus μ , in order to evaluate the "integral range" which is the only statistical parameter related to the morphology of inclusions. The obtained results showed the absence of the morphology effect of the pores on the studied elastic properties.

In the second part, the same approach was adopted for the evaluation of the effect of the inclusions morphology on the effective thermal conductivity of composite materials. The obtained results have showed that the effective thermal conductivity is influenced by the pores shape for the porous media, while in the case of non-porous composite materials the effect is completely absent.

A formula numerically obtained, allowing the estimation of the effective thermal conductivity of porous media taking into account the effect of the pores shape, has been proposed. Finally, the proposed formula is validated by his comparison with experimental results taken from the literature.

Keywords: Homogenization, porous medium, R.V.E, Integral range, Finite Element Method, effective properties.

الملخص

يتمثل الهدف الرئيسي من هذا العمل في دراسة تأثير شكل الشوائب على خصائص المواد المركبة. في الجزء الاول من هذه الدراسة استعملت طريقة التجانس الرقمي من خلال المنهج المطور من طرف [Kanit et al.2003] من أجل حساب الخصائص المرنة، تحديدا عامل الانضغاط و عامل القص، و ذلك لكي نتمكن من تحديد قيمة "La portée intégrale" التي تمثل الخاصية الوحيدة في هذا المنهج المتعلقة بشكل الشوائب مما يمكننا من تحديد تأثير شكلها على الخصائص قيد الدراسة. وقد اتضح لنا من خلال النتائج المتحصل عليها بأن الخصائص المذكورة لا تتأثر بشكل الشوائب.

في الجزء الثاني من هذه الدراسة استعملت نفس التقنية لتحديد تأثير بنية الشوائب على خاصية حرارية وهي معامل التوصيل الحراري الفعلي. من خلال النتائج المتحصل عليها تبين لنا بأن هذه الخاصية تتأثر بشكل الشوائب بالنسبة إلى المواد المركبة المسامية، وأن التأثير غائب تماما بالنسبة للمواد المركبة الغير مسامية.

في الأخير قمنا بإيجاد علاقة تسمح بتقدير معامل التوصيل الحراري الفعلي للمواد المركبة المسامية والتي تأخذ بعين الاعتبار شكل المسامات وقد قمنا بمقارنتها ببعض النتائج التجريبية مما سمح لنا بتثبيتها.