

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



Université Batna2
Faculté de Technologie
Département d'Électrotechnique



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT en SCIENCES
Spécialité: **Électrotechnique**

OPTION

Matériaux électrotechniques

Par

CHELGHOU M Leila

Thème

**Etude des non linéarités dans les dispositifs électriques par
la méthode de Galerkin sans maillage**

Soutenue publiquement le 20 /04/2016 devant le jury composé de :

Dr. MOKHNACHE Leila	Prof.	Université Hadj Lakhdar de Batna	Président
Dr. Louai Fatma Zohra	Prof.	Université Hadj Lakhdar de Batna	Rapporteur
Dr. Nait-Said Nassreddine	Prof.	Université Hadj Lakhdar de Batna	Co-rapporteur
Dr. Latreche Mohamed El Hadi	Prof	Université Constantine 2	Examineur
Dr. Mekideche Mohamed Rachid	Prof.	Université de Jijel	Examineur
Dr.Hacib Tarik	M.C.A.	Université de Jijel	Examineur

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au laboratoire des systèmes de propulsion-induction électromagnétique'2000 (**LSPIE Batna '2000**) sous la direction des Professeurs **F. Z. LOUAI** et **N. NAIT-SAID**.

Je tiens à les remercier pour leur aide précieuse et pour la patience dont ils ont témoigné à mon égard durant ce travail.

Professeur **MOKHNACHE Leila** m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury et je la remercie.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Messieurs les Professeurs **M. MEKIDECHE** et **M. LATRECHE**, ainsi qu'au **Dr T. HACIB** pour leur participation au jury en qualité d'examineurs.

Pour finir je remercie ma famille dont l'amour et les encouragements ont été une source de force pour moi.

L. CHELGHOU



LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I :

Moments magnétiques atomiques orbital et de spin.....	6
Comportement des domaines: (a) en l'absence d'un champ magnétique extérieur, (b) en présence d'un champ magnétique extérieur.....	8
Le processus d'aimantation (cycle d'hystérésis).....	11
Le cycle d'hystérésis généré par le modèle de Rayleigh.....	14
Le cycle d'hystérésis généré par le modèle de Frôlich.....	15
Courbe de première aimantation générée par le modèle polynomial.....	16
Opérateur d'hystérésis élémentaire ($R_{\beta,\alpha}$).....	22
Représentation de l'hystéron $R_{\beta_i,\alpha_i}^{(i)}$ à l'aide d'un point dans le plan de Preisach (α, β).....	23
Hystéron magnétique, (b) Triangle de Preisach et ses frontières.....	24
État négatif de saturation (bas), (b) Champ d'excitation croissant,(c) État de saturation positif (haut).....	25
Champ d'excitation décroissant.....	26
Représentation instantanée du champ d'excitation et de l'aimantation résultante.....	27

CHAPITRE II :

Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 0.1, b = 1$).....	34
Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 1, b = 1$).....	35
Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 5, b = 1$).....	35
Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 1, b = 2$).....	36
Cycle d'hystérésis et représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 1, b = 3.5$).....	36
Représentation spatiale de la fonction de distribution de type Gaussienne.....	37

Champ excitateur, (b) triangle de Preisach et la partie du cycle générée par une excitation croissante de $(-H_S)$ à (H_1)	38
Champ excitateur, (b) triangle de Preisach et la partie du cycle générée par une excitation décroissante de (H_1) à (H_2)	39
Le triangle $T(\alpha_1, \beta_1)$ correspondant à la variation du champ entre H_1 et H_2	39
Exemple d'un cycle majeur avec des courbes de renversement ascendante et descendante.....	41
Exemple de faisceau de cycles centrés. (b) Exemple de cycles centrés avec $(\Delta H = Cte)$	42
Discrétisation du triangle de Preisach pour 4 cycles centrés $\Delta H = 800 \text{ A/m}$	42
Les sous triangles du triangle de Preisach ($nc = 4$).....	43
Sous triangle N° 1 correspondant au cycle centré d'amplitude $\pm H_1$	44
Numérotation des mailles cas de $nc = 4$ cycles centrés	
(les cases  représentent les symétriques des cases ).....	45
Parallèle entre les contenus des mailles et les variations de l'aimantation pour le premier cycle centré.....	46
Notations de l'aimantation relatives au calcul des variations ΔM (branches ascendantes pour $nc = 4$ cycles centrés).	47
Circuit magnétique étudié. (b) Schéma électrique du dispositif expérimental.....	52
Faisceau de 4 cycles centrés. (b) Cycles majeurs expérimental et simulé. (c) Fonction de distribution.....	53
Faisceau de 8 cycles centrés. (b) Cycles majeurs expérimental et simulé. (c) Fonction de distribution.....	54
Faisceau de 16 cycles centrés. (b) Cycles majeurs expérimental et simulé. (c) Fonction de distribution.....	55
Interprétation géométrique de la méthode proposée: (a) triangle de Preisach discretisé en considérant les points expérimentaux et leurs symétriques (b) Effet des points créés sur la discrétisation.....	58
Courbe expérimentale (en pointillés) et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=0.5$	61

Courbe expérimentale (en pointillés) et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=1$	62
Courbe expérimentale (en pointillés) et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=1.5$	63
Courbe expérimentale (en pointillés) et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=1/100$	64
Courbe expérimentale (pointillés) et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=0$	65
Cycle mesuré (en pointillés) et cycle simulé généré par la méthode proposée avec $\lambda = 0.5815$	66
Fonction de distribution générée par la méthode proposée avec $\lambda = Mbs/ Ms=0.5815$	67
Cycle mesuré (en pointillés) et cycle simulé généré par la méthode proposée avec $\lambda = 0.6$	67
Fonction de distribution générée par la méthode proposée avec $\lambda = 0.6$	68
Triangle de Preisach discretisé et nuage de points créés en considérant une courbe de première aimantation inversée.....	69
Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 1/2$	72
Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 1/20$	73
Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 1/10$	74
Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 3/20$	75

Courbe expérimentale (pointillés) et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 0$ 76

CHAPITRE III :

Différences entre la MEF et les méthodes sans maillage.....	83
Illustration méthode des éléments finis / méthodes sans maillage.....	84
Représentations du domaine d'influence.....	85
Allure de la fonction poids au nœud central (40x40) nœuds (a) spline cubique et (b) quartic spline.....	92

CHAPITRE IV :

Domaine d'étude et ses frontières.....	103
Problème test et conditions aux limites.....	108
Représentation des paramètres de la méthode EFG.....	109
Espacement nodal uniforme (21X21 nœuds).....	110
Maillage utilisé pour la méthode FEM.....	110
Position des points sélectionnés au niveau de la charge.....	111
Le potentiel vecteur magnétique obtenu par la méthode EFG (35x35 noeuds).....	111
Le potentiel vecteur magnétique obtenu par la méthode EFG (380 noeuds).....	112
L'évolution du champ magnétique au niveau des points C1, et C2 (35x35 noeuds).....	112
Induction magnétique dans les points sélectionnés au niveau de la charge (35x35 noeuds).....	113
Evolution des cycles d'hystérésis dans les différents points sélectionnés de la charge (35x35 noeuds).....	113
Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C1 (35x35 noeuds).....	114
Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C2 (35x35 noeuds).....	114
Evolution des cycles d'hystérésis dans les différents points sélectionnés de la charge (380 nœuds FEM).....	115

Induction magnétique dans les points sélectionnés au niveau de la charge (380 nœuds FEM).....	115
L'évolution du champ magnétique au niveau des points C1, et C2 (380 nœuds FEM).....	116
Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C1 (FEM).....	116
Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C2 (FEM).....	117
Erreur : (380 noeuds).....	117
Erreur: (1444 noeuds).....	118
Potentiel vecteur magnétique par la méthode EFG $d_{max}=2.0$	118
Potentiel vecteur magnétique par la méthode EFG $d_{max}=2.5$	119
Potentiel vecteur magnétique par la méthode EFG $d_{max}=3$	119

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE: I	
MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES : COMPORTEMENT	
MAGNÉTIQUE ET MODÉLISATION	
I.0. INTRODUCTION.....	5
I.1. ORIGINES DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MATÉRIAUX.....	5
I.2. MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES.....	6
I.3. CLASSIFICATION MAGNÉTIQUE DES MATÉRIAUX.....	7
I.3.1. LES MATÉRIAUX DIAMAGNÉTIQUES.....	7
I.3.2. LES MATÉRIAUX PARAMAGNÉTIQUES.....	7
I.3.3. LES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES.....	7
I.3.3.1. LES MATÉRIAUX DOUX ET LES MATÉRIAUX DURS.....	8
I.3.3.2. ALLIAGES FERROMAGNÉTIQUES.....	8
I.4. EFFET DE LA TEMPÉRATURE SUR LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MATÉRIAUX	9
I.5. COMPORTEMENT MAGNÉTIQUE DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES.....	8
I.5.1. LES DOMAINES DE WEISS.....	9
I.5.2. LES PAROIS DE BLOCH.....	10
I.5.3. PROCÉSSUS D'AIMANTATION (CYCLE D'HYSTÉRÉSIS).....	11
I.6. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DES MATÉRIAUX	
FERROMAGNÉTIQUES.....	13
I.6.1. LE MODÈLE DE RAYLEIGH.....	14
I.6.2. LE MODÈLE DE FROLICH	15
I.6.3. LE MODÈLE POLYNOMIAL.....	15
I.6.4. LE MODÈLE DE JILES-ATHERTON.....	16
I.6.4.1. THÉORIE DE LANGEVIN.....	16
I.6.4.2. CORRECTION DE WEISS POUR LES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES.....	18
I.6.4.3. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU MODÈLE DE JILES-ATHERTON.....	19
I.6.4.4. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE JILES-ATHERTON.....	20
I.6.5. LE MODELE DE PREISACH	21
I.6.5.1. L'OPÉRATEUR D'HYSTÉRÉSIS ÉLÉMENTAIRE (HYSTÉRON).....	21

I.6.5.2. LE PLAN DE PREISACH.....	23
I.6.5.3. APPLICATION A LA MODÉLISATION DE L'HYSTÉRÉSIS MAGNÉTIQUE.....	23
I.6.5.4. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES VARIATIONS DE $H(t)$ ET DE $M(t)$	24
I.6.5.4.1. CAS D'UN CHAMP D'EXCITATION CROISSANT.....	24
I.6.5.4.2. CAS D'UN CHAMP D'EXCITATION DÉCROISSANT.....	26
I.6.5.5. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE INSTANTANÉE DE L'ÉTAT DE L'AIMANTATION...	26
I.6.5.6. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU MODÈLE SCALAIRE DE PREISACH.....	27
I.6.5.7. CALCUL DE LA VARIATION DE L'AIMANTATION.....	28
I.7. CONCLUSION.....	29
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	31

CHAPITRE: II

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES DOUX PAR LE MODÈLE DE PREISACH

II.0. INTRODUCTION.....	33
II.1. LES MÉTHODES ANALYTIQUES.....	34
II.1.1. LES DISTRIBUTIONS DE TYPE LORENTZIENNES.....	34
II.1.2. LES DISTRIBUTIONS DE TYPE LORENTZIENNE MODIFIÉE.....	34
II.1.2.1. INFLUENCES DES DIFFÉRENTS PARAMÈTRES.....	34
II.1.3. LES DISTRIBUTIONS DE TYPE GAUSSIENNES.....	36
II.2. LES MÉTHODES NUMÉRIQUES.....	37
II.2.1. LA MÉTHODE DE MAYERGOYZ.....	37
II.2.1.1 COURBE DE RENVERSEMENT DESCENDANTE DE PREMIER ORDRE.....	38
II.2.2. LA MÉTHODE DES CYCLES CENTRÉS.....	40
II.2.2.1. DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE DES CYCLES CENTRÉS.....	41
II.2.2.2. LES SOUS TRIANGLES DU TRIANGLE DE PREISACH.....	43
II.2.2.3. CORRESPONDANCE ENTRE LES SOUS TRIANGLES ET LES CYCLES CENTRÉS.....	44
II.2.2.4. MÉTHODOLOGIE DE CALCUL.....	47
II.2.2.5. MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE.....	51
II.2.2.6. RÉSULTATS.....	51
II.2.3. FORMULATION DE LA MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION©.....	56
II.2.3.1. RÉSULTATS NUMÉRIQUES.....	60
II.3. FORMULATION DE LA MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATIONAPPLIQUEE A LA MODÉLISATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT INVERSE.....	68
II.3.1. RÉSULTATS NUMÉRIQUES.....	71

II.4. DONNEES NÉCESSAIRES A L'IDENTIFICATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION DU MODÈLE DE PREISACH POUR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES	76
II.5. CONCLUSION.....	77
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	78

CHAPITRE: III MÉTHODES SANS MAILLAGES : ÉTAT DE L'ART

III.0. INTRODUCTION.....	80
III.1. GÉNÉRALITES ET HISTORIQUE	80
III.2. CLASSIFICATION DES MÉTHODES SANS MAILLAGES	81
III.2.1. LES MÉTHODES SANS MAILLAGES DE TYPE GALERKIN.....	82
III.2.2. LES MÉTHODES SANS MAILLAGES DE TYPE COLLOCATION.....	82
III.3. PRINCIPE DES MÉTHODES SANS MAILLAGE.....	83
III.4. CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME.....	84
III.4.1 DOMAINE D'INFLUENCE OU DOMAINE SUPPORT.....	84
III.4.2. LES MÉTHODES D'APPROXIMATIONS UTILISEES DANS LES METHODES SANS MAILLAGE.....	86
III.4.2.1 LES MÉTHODES D'INTERPOLATION PONCTUELLES (MIP).....	86
III.4.2.2. LA MÉTHODE D'INTERPOLATION PONCTUELLE (MIP) A BASE POLYNOMIALE.....	86
III.4.2.3. LA MÉTHODE D'INTERPOLATION PONCTUELLE (MIP) A BASE RADIALE.....	88
III.4.3. APPROXIMATION PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRES GLISSANTS	90
III.4.3. 1. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRES CLASSIQUES.....	90
III.4.3. 2. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRES PONDERES.....	91
III.4.3. 3. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRES GLISSANTS (MLS)	91
III.4.3. 3. 1. DÉFINITION DES FONCTIONS POIDS.....	91
III.4.3. 3. 2. DÉTERMINATION DES FONCTIONS DE FORME.....	92
III.4.3. 3. 3. MODÉLISATION DE LA GÉOMÉTRIE.....	94
III.4.3. 3. 4. CONDITIONS AUX LIMITES	95
III.5. CONCLUSION.....	95
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	97

CHAPITRE: IV
APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GALERKIN SANS
MAILLAGES A LA RÉOLUTION DU PROBLÈME
MAGNÉTOSTATIQUE NON LINÉAIRE

IV.0. INTRODUCTION.....	101
IV.1. LOIS FONDAMENTALES DE L'ELECTROMAGNETISME.....	102
IV.1.1. ÉQUATIONS DE MAXWELL.....	102
IV.1.2. LOIS CONSTITUTIVES DU MILIEU.....	102
IV.1.3. LES CONDITIONS AUX LIMITES.....	103
IV.2. FORMULATION MAGNÉTOSTATIQUE.....	104
IV.3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GALERKIN SANS MAILLAGE (EFG) POUR LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME MAGNÉTOSTATIQUE NON LINÉAIRE.....	104
IV.3.1. FORMULATION DU PROBLÈME AXISYMETRIQUE.....	105
IV.3.2. MÉTHODE DU POINT FIXE APPLIQUÉE A LA RÉOLUTION DU PROBLÈME NON LINÉAIRE.....	107
IV.3.3. PROBLÈME TEST.....	108
IV.3.4. PARAMÈTRES DE LA MÉTHODE EFG UTILISÉS POUR LE CALCUL.....	108
IV.4. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS.....	109
IV.5. EFFET DU DOMAINE D'INFLUENCE SUR LA SOLUTION.....	118
IV.6. CONCLUSION.....	120
RÉFÉRENCES BILIOGRAPHIQUES.....	121
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	122

LISTE DES SYMBOLES

\vec{H}	le champ magnétique
\vec{B}	l'induction magnétique
\vec{E}	le champ électrique
\vec{D}	l'induction électrique
\vec{A}	Potentiel vecteur magnétique
\vec{J}	densité de courant électrique
ρ	densité de charge électrique
μ	la perméabilité magnétique
σ	la conductivité électrique
ε	la permittivité électrique
\vec{M}	l'aimantation des matériaux magnétiques
H_c	Champ coercitif
μ_0	Perméabilité magnétique du vide
χ	Susceptibilité du matériau
μ_{ini}	Perméabilité initiale
η	Constante de Rayleigh
k	Constante de Boltzmann
m	Moment magnétique
$\mathfrak{L}(\lambda)$	Fonction de Langevin
M_{an}	Aimantation anhystérique
χ'_{ini} et χ'_{an}	Les susceptibilités différentielles normale et anhystérique initiales
χ'_c	Susceptibilité différentielle au point coercitif
$R_{\beta,\alpha}$	Opérateur d'hystérésis élémentaire hystéron
S	Plan de Preisach

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux ferromagnétiques sont essentiels dans la conception et la réalisation de systèmes électromagnétiques largement utilisés dans différentes applications industrielles de pointe et qui font aussi partie de notre quotidien. En effet, ils sont à l'origine de la production de l'énergie, de sa conversion et de son utilisation (turbines, transformateurs et moteurs électriques). Dans ces applications, le contrôle des champs magnétiques et de l'aimantation est essentiel pour la conception de nouvelles applications ou l'amélioration de celles existantes. La vaste gamme de coercivités rend possible d'associer une boucle d'hystérésis à une application électromagnétique particulière [1]. Les matériaux ferromagnétiques doux sont d'un grand intérêt car, ils permettent d'une part, la canalisation (concentration) des champs magnétiques, et d'autre part, ils présentent des cycles d'hystérésis étroits associées à des valeurs importantes de l'aimantation à saturation et de la susceptibilité [2]. Les matériaux ferromagnétiques trouvent leurs applications potentielles à différentes échelles, depuis les plus petites échelles de l'ordre du nanomètre aux plus grandes échelles celles du mètre. Une conception performante passe obligatoirement par une maîtrise accrue du comportement de ces matériaux et ce pour répondre à des contraintes économique, environnementale et de sûreté. Les matériaux ferromagnétiques présentent souvent un comportement magnétique fortement non linéaire de type hystérétique, qu'il faudra caractériser. Les travaux de recherches ont lieu à différents niveaux: représentation des lois de comportement, techniques numériques, choix des formulations, amélioration des algorithmes de résolution des grands systèmes linéaires et non-linéaires.

Plusieurs types de modèles de comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques sont proposés dans la littérature [3], [4], [5], certains sont purement mathématiques, d'autres phénoménologiques et peu sont basés sur des considérations physiques. La diversité des modèles montre bien qu'il n'est pas facile de retranscrire la loi de comportement hystérétique non linéaire des matériaux ferromagnétiques. Tout d'abord, il y a la diversité des matériaux utilisés dans les applications électromagnétiques ensuite, plusieurs paramètres physiques, entrent en jeu. Dans la plupart des travaux portant sur la modélisation de l'hystérésis, il s'agit de rendre compte de la loi de comportement des tôles utilisées pour la construction des machines électriques [6], [7]. La modélisation de l'hystérésis magnétique des tôles, dans le cas d'un régime statique, est maintenant un domaine bien connu, notamment grâce au modèle de Preisach [3].

Ce mémoire se compose principalement de quatre parties :

La première partie est consacrée à l'étude des propriétés magnétiques des matériaux, Une attention particulière a été portée aux matériaux ferromagnétiques, leurs principales caractéristiques et leurs utilisations en génie électrique. Nous nous sommes surtout intéressés au cycle d'hystérésis qui représente un comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques, et à sa modélisation d'où la nécessité d'avoir un modèle physique performant. À la fin de cette partie, on présentera d'une manière brève les principaux modèles rapportés dans la littérature traitant du phénomène de l'hystérésis magnétique.

La seconde partie traite du modèle de Preisach dont la mise en œuvre est étroitement liée à l'identification de sa fonction de distribution. Nous exposerons différentes méthodes analytiques et numériques d'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach. Une nouvelle méthode numérique proposée et nommée **MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION** est développée nécessitant l'utilisation de points expérimentaux, extraits directement de la courbe de première aimantation pour l'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach.

La troisième partie est une présentation des méthodes sans maillage appelées (Meshless ou Meshfree methods). Ces méthodes dont le succès est croissant, étaient pour les premières fondées sur des méthodes d'interpolation purement nodales. En effet, tandis que les fonctions de forme éléments finis se définissant sur des sous-domaines ou Eléments Finis, les méthodes sans maillages génèrent leurs fonctions de forme en s'appuyant sur un nuage de points. L'idée est ainsi de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points. Nous avons passé en revue quelques méthodes sans maillage, ainsi que les approximations utilisées par ces méthodes.

Enfin, la quatrième partie constitue une application de la méthode de Galerkin sans maillage à la résolution de l'équation non linéaire en magnétostatique en présence du comportement hystérétique des matériaux ferromagnétiques. Pour ce faire, le modèle de Preisach en utilisant la **MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION** développée au cours de cette thèse est alors appliqué, la non-linéarité a été traitée par la méthode itérative du point fixe.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **B. D. CULLITY, C. D. GRAHAM**, "Introduction to magnetic materials", Éditions IEEE Press, 2009.
- [2] **P. BRISSONNEAU**, "Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique", Éditions Hermes, 1997.
- [3] **A. BENABOU**, " Contribution à la caractérisation et A la modélisation de matériaux Magnétiques en vue d'une Implantation dans un code de calcul De champ ", thèse de doctorat Université Lille I, Spécialité : Génie électrique, 2002.
- [4] **F. LIORZOU, B. PHELPS, D.L. ATHERTON**, "Macroscopic models of magnetization", IEEE TRANS. MAGN, vol 36, N° 2, pages 418-428, 2000.
- [5] **I.D. MAYERGOYZ**, "Mathematical models of hysteresis", Springer Verlag, New York, 1991
- [6] **L.L. ROUVE**, "Prise en compte du comportement magnétique fréquentiel des tôles FeSi en modélisation électrotechnique", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [7] **A. BOSSAVIT, C. EMSON ET I.D. MAYERGOYZ**, "Méthodes numériques en électromagnétisme : Géométrie différentielles, éléments finis, modèles d'hystérésis", Editions Eyrolles, 1991.

PREMIER CHAPITRE :
MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES
COMPORTEMENT MAGNÉTIQUE ET MODÉLISATION

I.0. INTRODUCTION

Les matériaux ferromagnétiques sont très utilisés en électrotechnique, principalement dans les transformateurs, les machines électriques, les actionneurs (relais, contacteurs), les électroaimants... Ils sont généralement divisés en deux classes : les matériaux ferromagnétiques doux et les matériaux ferromagnétiques durs :

Les matériaux ferromagnétiques doux s'aimantent et se désaimantent facilement. Ils ont des cycles d'hystérésis très étroits et possèdent une grande perméabilité. Ils sont utilisés généralement pour réaliser des électroaimants ou des circuits magnétiques dans le but de canaliser le flux magnétique afin de maximaliser la conversion d'énergie (machines électriques, transformateurs).

Les matériaux ferromagnétiques durs présentent des cycles d'hystérésis extrêmement larges, il s'agit des aimants permanents qui ne se désaimantent pas facilement (certains aimants peuvent se désaimanter) [1]. Leur application principale réside dans la fabrication des aimants permanents utilisés dans les moteurs et les génératrices.

Dans la conception des dispositifs électromagnétiques, il est nécessaire de limiter les courants de Foucault afin d'augmenter le rendement. Des tôles isolées constituées d'alliages ferromagnétiques sont alors utilisées. Les composants des alliages de fer sont choisis de manière à augmenter la résistivité (le fer pur possède une faible résistivité), la dureté et la rigidité, ce qui facilitera le découpage des tôles.

A partir de ses propriétés magnétiques, un matériau peut être choisi dans les différentes applications électrotechniques.

De nos jours, l'intérêt des matériaux ferromagnétiques n'a pas cessé de croître à cause de leur importance et de leur utilisation dans plusieurs technologies. Il est alors impératif de connaître leurs caractéristiques physiques et de comprendre leur comportement magnétique. L'explication, la maîtrise et la modélisation du comportement des matériaux ferromagnétiques restent toujours d'actualité [1], [2], [3].

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés magnétiques des matériaux. On s'intéressera particulièrement au processus d'aimantation et au phénomène de l'hystérésis (caractéristique des matériaux ferromagnétiques). À la fin du chapitre, on présentera d'une manière brève les principaux modèles traitant du phénomène de l'hystérésis magnétique.

I.1. ORIGINES DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MATÉRIAUX [4, 5,6]

Les propriétés magnétiques d'un matériau sont attribuables au spin des électrons et au moment orbital autour du noyau. Étant donné qu'une charge électrique en mouvement engendre un champ magnétique autour d'elle même, les électrons qui tournent sur eux mêmes (spin) et autour du noyau

(orbite) forment de petits dipôles magnétiques. Ces dipôles peuvent réagir à l'application d'un champ magnétique extérieur (Fig.1).

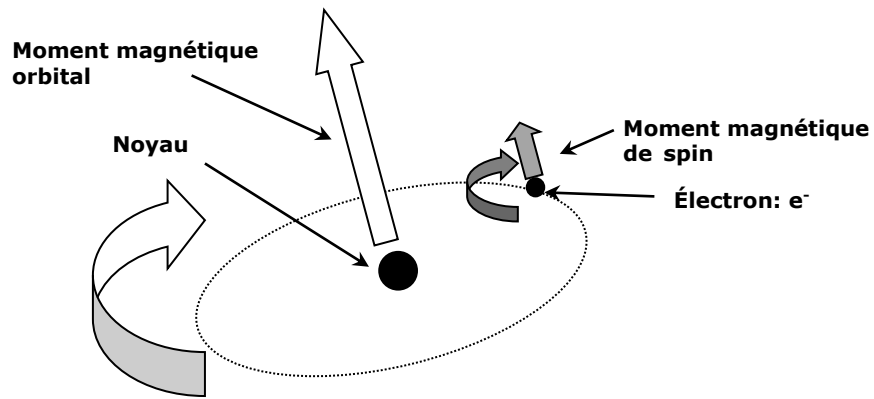


Fig.1: Moments magnétiques atomiques orbital et de spin.

Le moment magnétique d'un atome est égal à la somme vectorielle des moments magnétiques orbitaux et de spins de tous les électrons gravitant autour du noyau de cet atome.

I.2. MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES

Soumis à une excitation magnétique, certains matériaux se mettent à produire eux mêmes dans le volume qu'ils occupent et à l'extérieur une induction magnétique: on dit qu'ils s'aimantent ou se polarisent magnétiquement. Il s'agit là d'une propriété générale de la matière qui ne se manifeste très visiblement que pour certains matériaux dits matériaux magnétiques [5,6].

La réponse d'un matériau à l'application d'un champ magnétique extérieur H est caractérisée par l'induction magnétique B , laquelle représente l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du matériau.

$$B = \mu H \tag{I.1}$$

μ : représente la perméabilité magnétique du matériau.

L'induction magnétique d'un matériau sous l'action d'un champ magnétique est souvent comparée à celle du vide notée B_0 (sous l'action du même champ H):

$$B_0 = \mu_0 H \tag{I.2}$$

μ_0 : représente la perméabilité magnétique du vide ($4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Wb/(A.m)).

L'induction dans la matière est donnée par :

$$B = \mu_0(H + M) \tag{I.3}$$

M : représente l'aimantation du matériau (Ampère /mètre).

H : représente le champ magnétique extérieur (Ampère /mètre).

On définit la susceptibilité χ du matériau par :

$$M = \chi H \quad (I.4)$$

I.3. CLASSIFICATION MAGNÉTIQUE DES MATÉRIAUX

En considérant que l'électron se comporte comme un dipôle et qu'il possède donc un moment magnétique intrinsèque, toutes les substances aimantées peuvent être considérées comme des dipôles magnétiques.

À partir de leur comportement magnétique, une classification des matériaux peut être réalisée en se basant sur la susceptibilité (équation I.4).

I.3.1. LES MATÉRIAUX DIAMAGNÉTIQUES

En général, les électrons appartenant aux atomes d'une substance se regroupent par paires, annulant leurs moments magnétiques respectifs, si bien que les atomes de la plupart des corps ne possèdent pas de moment magnétique permanent. Ces substances sont dites diamagnétiques et ne s'aimantent qu'en présence d'un champ magnétique extérieur. Elles induisent dans ce cas un moment magnétique opposé à la direction du champ magnétique, ce qui explique pourquoi les corps diamagnétiques se trouvent repoussés par les aimants. Parmi les substances affichant un diamagnétisme élevé, on peut citer le bismuth métallique et les molécules organiques comme le benzène. La susceptibilité de ces substances est négative (en général de l'ordre de -10^{-6}).

I.3.2. LES MATÉRIAUX PARAMAGNÉTIQUES

Les substances paramagnétiques ne possèdent pas d'aimantation en l'absence de champ magnétique extérieur, car les moments magnétiques de leurs atomes s'orientent au hasard, si bien que le moment magnétique résultant est nul. Placés dans un champ magnétique, ces corps comme l'oxygène ou le platine acquièrent une faible aimantation dans le même sens que le champ. Ils sont donc attirés par les aimants.

Ces substances canalisent un peu les lignes de champ magnétique et leur susceptibilité magnétique est positive comprise entre 10^{-6} et 10^{-3} .

I.3.3. LES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES

Les matériaux ferromagnétiques, comme le fer ou le nickel, possèdent un fort moment magnétique. Les moments magnétiques de leurs atomes sont ordonnés en petites zones uniformément magnétisées, appelées domaines de Weiss.

En l'absence d'un champ magnétique extérieur, chaque domaine présente une orientation aléatoire (Fig 2.a). En revanche lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, les domaines déjà orientés dans la direction du champ s'élargissent au dépend des autres et finalement, tout le matériau s'aimante uniformément dans la direction et le sens du champ appliqué (Fig.2.b).

Si l'on supprime le champ extérieur, le matériau reste aimanté dans la direction et le sens du champ précédemment appliqué.

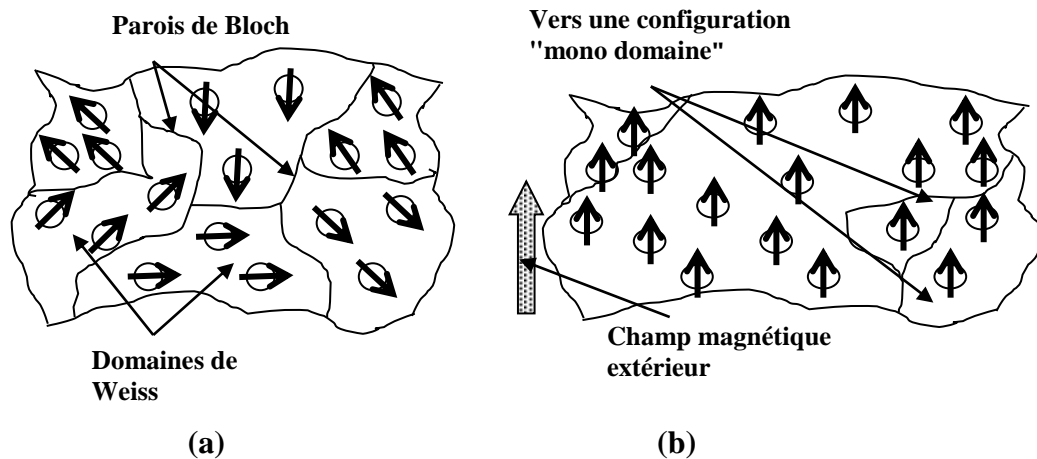


Fig.2: Comportement des domaines: (a) en l'absence d'un champ magnétique extérieur, (b) en présence d'un champ magnétique extérieur.

I.3.3.1. LES MATÉRIAUX DOUX ET LES MATÉRIAUX DURS

Un matériau ferromagnétique doux est caractérisé par un champ coercitif faible et une perméabilité relative élevée. Généralement utilisé comme conducteur de flux pour transmettre une information ou convertir de l'énergie. Les matériaux doux sont utilisés dans de nombreux appareils où le champ magnétique varie (transformateurs, électroaimants, relais).

Un matériau ferromagnétique dur est caractérisé par un champ coercitif élevé et une perméabilité relative faible. Généralement utilisé comme source de flux, ou comme aimant on utilise cette catégorie de matériaux pour la fabrication d'aimants permanents.

I.3.3.2. ALLIAGES FERROMAGNÉTIQUES

Les différents matériaux ferromagnétiques utilisés pour des applications moteurs et génératrices sont des alliages de fer. Les plus fréquemment rencontrés sont :

Les alliages de Fer-Silicium

Les alliages de Fer-Cobalt

Les alliages de Fer-Nickel

Les ferrites

- **Alliages fer-silicium**

Ces alliages constituent la base des matériaux ferromagnétiques utilisés en génie électrique. Ils apportent, en plus de leur avantage économique, des performances magnétiques accrues. Ils permettent de canaliser des inductions magnétiques importantes et offrent une meilleure dureté et rigidité aux tôles des machines électriques. Ces alliages sont classés en deux principaux groupes

qui sont destinés à des applications différentes dans le domaine du génie électrique. Le premier concerne les tôles Fer-silicium à grains orientés (GO), dans lesquelles la direction de laminage facilite l'aimantation des tôles [1]. Elles sont utilisées principalement dans des dispositifs électromagnétiques où le flux conserve une direction fixe (transformateurs). Les tôles à grains orientés possèdent généralement une teneur en silicium proche de 3%. Le deuxième est constitué par les tôles à grains non orientés (GNO) utilisées dans la conception des machines tournantes. Ce type d'alliages contient des concentrations de silicium allant de 0,1 à 3,2% [5].

I.4. EFFET DE LA TEMPÉRATURE SUR LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MATÉRIAUX

Les caractéristiques magnétiques des matériaux sont sensibles aux variations de la température, ce qui modifie les propriétés magnétiques des matériaux essentiellement par deux processus [1] :

- Soit par une évolution irréversible de leur composition locale ce qui se traduit par le vieillissement du matériau. Dans ce cas, la durée de maintien en température est importante.
- Soit par la variation réversible de leurs constantes électromagnétiques avec la température.

Les substances ferromagnétiques perdent leurs propriétés magnétiques et se transforment en matériaux paramagnétiques. Cette perte devient complète au-dessus d'une certaine température caractéristique de la substance considérée. Cette température s'appelle la température de Curie, en hommage à Pierre Curie qui la découvrit en 1895. La température de Curie du fer métallique est d'environ 770 °C.

I.5. COMPORTEMENT MAGNÉTIQUE DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES [5,7]

I.5.1. LES DOMAINES DE WEISS

L'organisation des atomes pour un matériau obéit au principe général suivant : « Tout système physique se place, s'il est permis, dans un état correspondant à une énergie minimale ».

L'organisation d'un matériau ferromagnétique monocristallin se constitue en domaines qui correspondent à la minimisation des énergies suivantes:

- **L'énergie d'échange**

On appelle énergie d'échange, l'énergie résultant de l'interaction de deux moments magnétiques. Cette énergie dépend de la distance séparant ses moments ainsi que de leur orientation relative. La distance entre deux atomes voisins dépend de leur position relative dans le réseau cristallin. L'énergie d'échange sera donc fonction de la direction. Ainsi, il existera des directions d'orientations privilégiées de ces moments.

Cette énergie passe par un minimum quand les moments magnétiques sont parallèles.

- **L'énergie d'anisotropie cristalline**

Cette énergie relie la direction d'alignement des moments magnétiques avec les directions cristallines que l'on appelle direction de facile aimantation. Lorsqu'on applique un champ d'excitation dans la direction de facile aimantation, l'énergie à fournir est faible car la direction du champ d'excitation est la même que celle des moments magnétiques. Par contre, si l'on excite le matériau avec un champ d'excitation de direction autre que celle de facile aimantation, l'énergie à fournir sera alors plus importante [7].

- **L'énergie magnéto-élastique**

Dans une tôle ferromagnétique, en raison de la structure cristalline des atomes, la distance entre chaque atome est régulière, la mise en commun d'électrons se fera toujours de façon préférentielle entre les atomes les plus proches physiquement. Seule une contrainte mécanique peut modifier la distance séparant deux atomes, et par là même la mise en commun d'électrons.

Le changement de la distance entre atomes modifie l'état d'énergie et l'anisotropie. L'énergie magnéto-élastique correspond à l'énergie mécanique qu'il a fallu fournir au matériau pour modifier les mises en commun d'électrons.

- **L'énergie magnétostatique**

Cette énergie correspond à l'action sur chaque atome des champs magnétiques créés par tous les atomes voisins.

La minimisation naturelle de la somme de ces différentes énergies à l'intérieur de la matière a pour conséquence l'apparition des domaines magnétiques élémentaires appelés «domaines de Weiss». Pierre Weiss (1907), montra qu'un corps aimanté est divisé en domaines à l'intérieur desquels les moments magnétiques sont ordonnés (fig.2.a) [4].

Au sein de ces domaines, l'aimantation est orientée suivant des directions imposées par la minimisation des différentes énergies. Elles seront majoritairement voisines des directions de facile aimantation.

En l'absence de champ appliqué et de toute autre contrainte, pour un matériau préalablement désaimanté, il y a équipartition du volume des domaines entre les diverses directions d'aimantation facile et l'aimantation macroscopique résultante est alors nulle.

I.5.2. LES PAROIS DE BLOCH

La séparation des différents domaines magnétiques élémentaires «domaines de Weiss» est matérialisée par ce que l'on appelle les parois de Bloch (fig.2.a) [7]. Ces parois correspondent à une zone magnétique où l'aimantation passe d'une direction à une autre. On distingue principalement:

- Les parois à 180° séparent deux domaines de Weiss dont l'angle de la direction d'aimantation est à 180° .
- Les parois à 90° séparent deux domaines de Weiss dont l'angle de la direction d'aimantation est à 90° .

I.5.3. PROCESSUS D'AIMANTATION (CYCLE D'HYSTÉRÉSIS) [6]

On considère un échantillon de matériau ferromagnétique initialement désaimanté. Ce matériau contient des défauts au sein de son réseau cristallin qui peuvent être, par exemple, des dislocations, des impuretés, des lacunes, des joints de grains... etc.

Lors de l'aimantation de l'échantillon, trois processus différents peuvent se succéder en fonction de la valeur de l'excitation extérieure imposée.

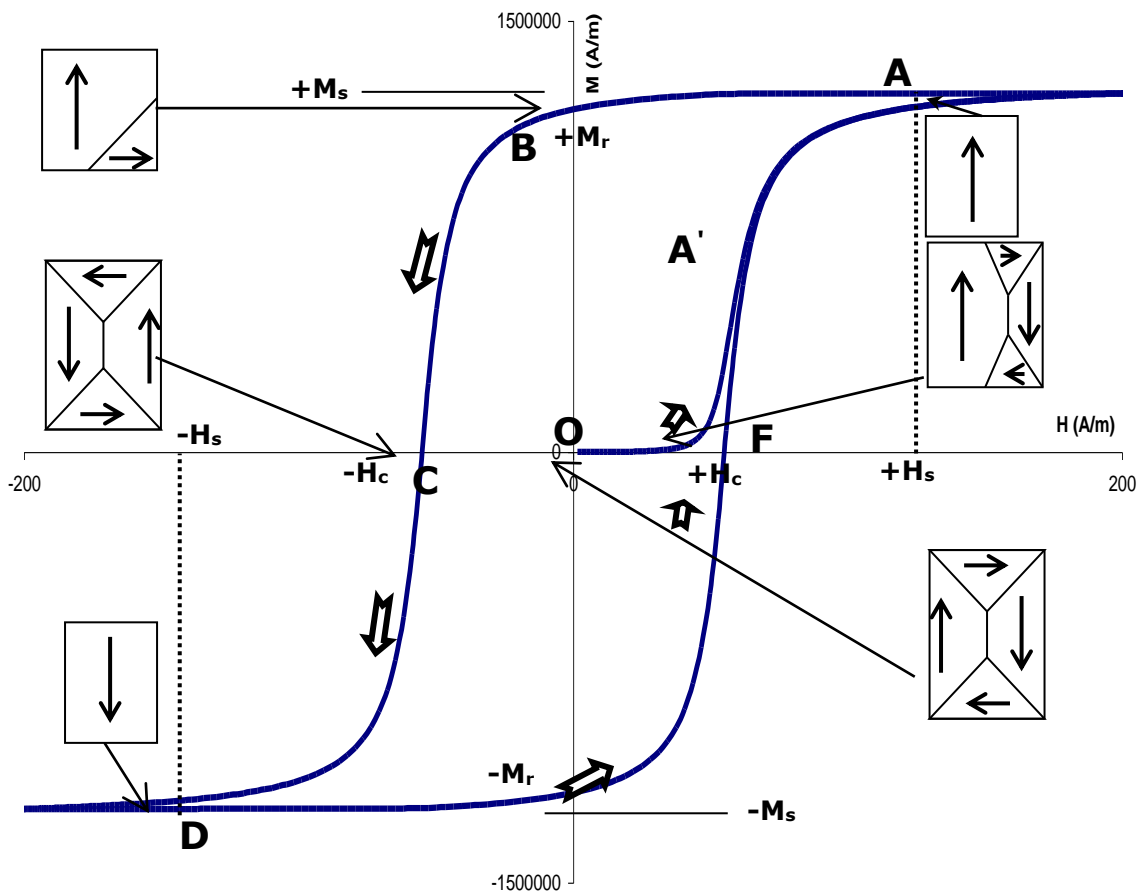


Fig. 3: Le processus d'aimantation (cycle d'hystérésis).

- **Pour de faibles valeurs de l'excitation:**

Les domaines dont l'aimantation a une direction proche de celle du champ appliqué vont croître au détriment des autres domaines. Pour se faire, les parois vont se déplacer jusqu'à rencontrer les

défauts du matériau ou se déformer. Si elles sont déjà en contact avec des défauts ce processus est réversible, et il n'engendre pas de pertes magnétiques.

La partie de la courbe $M(H)$ correspondante est appelée "zone de Rayleigh" (partie comprise entre les points **O** et **A'** de la figure Fig.3).

- **Pour des valeurs intermédiaires de l'excitation:**

Les parois continuent leur déplacement, afin d'augmenter le volume des domaines dont le moment est correctement orienté par rapport au champ appliqué jusqu'à ce que tout le volume de l'échantillon soit occupé par le domaine dont l'aimantation a le sens le plus proche de l'excitation imposée (partie comprise entre les points **A'** et **A** de la figure Fig.3).

La création ou disparition de parois (puisque lorsque tout le volume est occupé par le même domaine il n'y a plus de parois) est coûteuse en énergie et est irréversible.

En présence de défauts, et au moment où les parois se décrochent, des variations brusques de flux sont mises en évidence. Ces dernières engendrent des sauts dits de "Barkhausen" et l'apparition de courants de Foucault locaux qui dissipent de l'énergie et créent à leurs tours des échauffements.

- **Pour les fortes valeurs de l'excitation**

Le dernier processus à avoir lieu est réversible, il s'agit de la rotation des moments.

Lorsque l'échantillon est mono domaine, on atteint l'aimantation à saturation haute, qui est une caractéristique fondamentale du matériau.

À ce niveau, nous avons décrit entièrement la première aimantation (partie **OA** de la figure Fig.3).

Lorsque l'excitation diminue pour atteindre une valeur nulle, les domaines magnétiques ont tendance à réapparaître, puisque le déplacement des parois de Bloch n'est pas instantané, on atteint alors l'aimantation rémanente (point **B** de la figure Fig.3).

Les étapes suivantes du processus d'aimantation sont obtenues en appliquant une excitation de même direction mais de sens contraire. Ainsi, les parois vont se déplacer et s'accrocher aux défauts, puis se décrocher en avançant de nouveau.

La valeur de l'excitation pour laquelle l'aimantation sur le cycle passe par zéro est appelée excitation coercitive (point **C** de la figure Fig.3).

Les parois se déplacent jusqu'à disparaître de nouveau au profit du domaine de sens opposé à celui de la saturation haute.

Enfin, la dernière étape est de nouveau la rotation des moments. Cette nouvelle étape place l'échantillon dans son état de saturation basse (point **D** de la Fig.3).

La branche montante qui permet de fermer le cycle est obtenu en partant de l'état de saturation bas en augmentant l'excitation (partie **DA** de la figure Fig.3).

Le cycle ou le diagramme ainsi obtenu est appelé cycle d'hystérésis ou courbe d'aimantation.

Ce dernier dépend de la mobilité des parois de Bloch qui sont fonctions des énergies déjà définies et du champ appliqué.

D'une manière générale, un système présente de l'hystérésis si ses propriétés à un instant donné dépendent non seulement des paramètres qui le décrivent à l'instant présent, mais également de son état antérieur.

I.6. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES [9, 11]

Les différents modèles rencontrés dans la littérature ont pour objectif principal d'approcher mathématiquement le phénomène de l'hystérésis ou du moins, sa courbe représentative. Les difficultés majeures de l'interprétation du phénomène résultent du fait que celui-ci n'est pas une propriété physique du matériau mais faisant intervenir et à différentes échelles plusieurs paramètres. L'expérience met en évidence l'effet de paramètres tels : la fréquence, la température, l'intensité du champ d'excitation, ...etc. Les principales grandeurs représentant l'hystérésis sont (H) et (M) qui sont par nature des grandeurs vectorielles. Toutes les représentations doivent alors normalement générer des grandeurs vectorielles. Cependant, plusieurs approches théoriques et méthodes de mesure sont basées sur une représentation scalaire qui donne les composantes (M) ou (B) en fonction du module de champ (H) . La description scalaire du phénomène peut être satisfaisante dans plusieurs cas d'étude même si l'échantillon présente une direction d'aimantation privilégiée.

Essayons maintenant d'avoir plus de détails sur l'aspect macroscopique de l'hystérésis magnétique dans un échantillon ferromagnétique. Le phénomène d'hystérésis est décrit à travers une aimantation globale observée dans l'intégralité de la pièce. Dans ces conditions, le matériau apparaît comme étant homogène et la relation entre l'aimantation et le champ magnétique peut être déterminée sans se soucier des comportements plus complexes des domaines à l'échelle microscopique. On peut considérer aussi dans ce cas que, le champ et l'aimantation sont dans la même direction et peuvent être traités comme des grandeurs scalaires.

La détermination de la loi de variation de $M(H)$ peut laisser croire que le comportement magnétique du matériau a été complètement identifié. Mais malheureusement, pour un point de fonctionnement dans le plan (H, M) , une infinité de solutions de parcours de champ peut être envisagée pour l'atteindre, sauf si une donnée supplémentaire comme l'histoire du matériau est ajoutée au problème. Donc, l'état magnétique d'un matériau peut être correctement défini non seulement à travers la connaissance de l'état de ces domaines magnétiques sous l'effet d'un champ (H) et pour une valeur de (M) , mais aussi par l'histoire du matériau qui décrit son état présent et qui définit son état futur s'il y a évolution du champ d'excitation.

Les modèles les plus simples pour décrire le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques sont généralement des modèles analytiques [9]. Ils se caractérisent par la

description du phénomène par des formulations mathématiques généralement empiriques. Ces modèles ne permettent pas de décrire tous les aspects du phénomène d'hystérésis (ils ne tiennent pas compte de l'histoire ou de l'état d'aimantation initiale du matériau). Parmi ces modèles, nous citerons :

I.6.1. LE MODELE DE RAYLEIGH

Le modèle de Rayleigh est le plus ancien des modèles analytiques, il a été développé par Lord Rayleigh (1842-1919) [9] [12].

Ce modèle est limité aux faibles valeurs du champ d'excitation. Il ne peut décrire le phénomène de saturation et suppose que la perméabilité magnétique sur la courbe de première aimantation peut être représentée par les deux premiers termes d'un polynôme de puissances croissantes :

$$\mu(H) = \mu_{ini} + \eta H \quad (I.5)$$

avec :

μ_{ini} : perméabilité initiale ;

η : la constante de Rayleigh $\eta = \frac{2B_r}{H_{max}^2}$.

L'équation (I.5) peut se mettre sous la forme :

$$B = \mu_{ini}H + \frac{1}{2}\eta H^2 \quad (I.6)$$

Sous l'effet d'un champ d'excitation sinusoïdale d'une amplitude H_{max} , l'induction magnétique B variant entre $(\pm B_{max})$ est décrites par :

- Si H est croissant :

$$B = (\mu_{ini} + \eta H_{max})H + \frac{\eta}{2}(H^2 - H_{max}^2) \quad (I.7.1)$$

- Si H est décroissant :

$$B = (\mu_{ini} + \eta H_{max})H - \frac{\eta}{2}(H^2 - H_{max}^2) \quad (I.7.2)$$

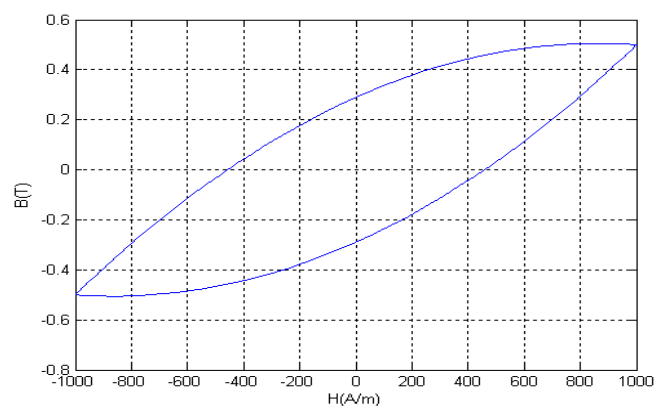


Fig.4 : Le cycle d'hystérésis généré par le modèle de Rayleigh. $H_{max} = 1000A/m$; $B_{max} = 0.5(T)$; $B_r = 0.29(T)$.

I.6.2. LE MODELE DE FRÔLICH

Les modèles de type Frôlich donnent une approximation du phénomène de saturation ainsi qu'une représentation du cycle majeur. Mais, ils sont basés seulement sur une représentation mathématique des courbes d'hystérésis. Ces modèles ne peuvent décrire un certain nombre de phénomènes physiques associés à l'hystérésis magnétique tels les cycles mineurs [9].

La relation $B(H)$ est donnée par :

$$B = \frac{H}{\alpha + \beta|H|} \quad (I.8)$$

α et β sont des constantes caractéristiques du matériau étudié (avec : $\alpha = H_c \left(\frac{1}{B_r} - \frac{1}{B_s} \right)$ et $\beta = \frac{1}{B_s}$).

La figure ci-dessous donne une représentation du cycle d'hystérésis obtenu à l'aide de la relation (I.8) :

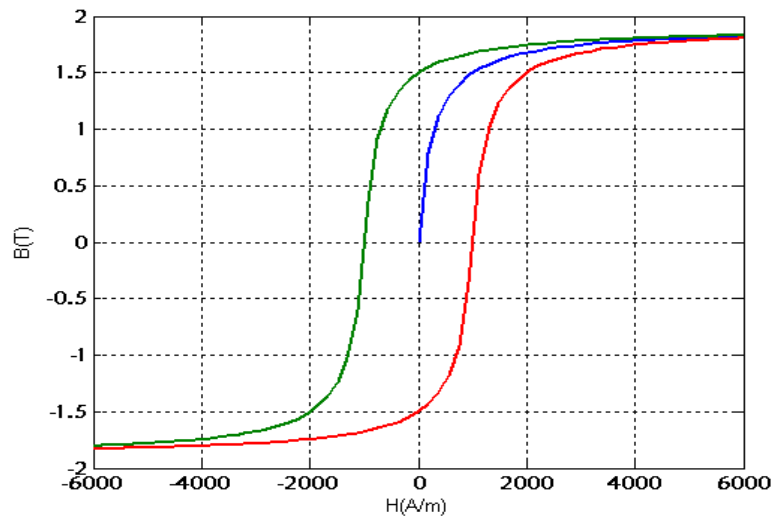


Fig.5 : Le cycle d'hystérésis généré par le modèle de Frôlich.

$$H_c = 1000 A/m ; B_s = 1.9(T) ; B_r = 1.5(T).$$

I.6.3. LE MODELE POLYNOMIAL

Pour décrire le comportement magnétique non linéaire des matériaux ferromagnétiques, l'approximation du phénomène par des séries polynomiales a fait l'objet de quelques recherches depuis plusieurs années [9]. La forme générale de la relation donnant l'induction magnétique B en fonction du champ H est:

$$B = K H^n \quad (I.9)$$

Chaque matériau est caractérisé par des valeurs particulières des constantes K et n pouvant être déterminées à partir de la courbe de première aimantation. Par exemple, pour les matériaux ferromagnétiques n est définie tel que : $5 \leq n \leq 14$. Ce type de modèle ne permet pas de décrire le

cycle d'hystérésis avec ses branches montantes et descendantes mais seulement la courbe de première aimantation (fig 6):

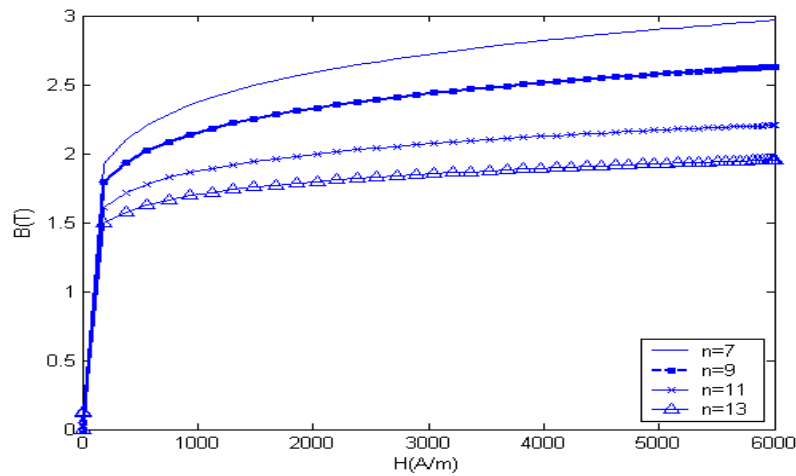


Fig.6: courbe de première aimantation générée par le modèle polynomial ($K = 1$ et $n = 7, 9, 11, 13$).

Parmi les modèles les plus utilisés en ingénierie et plus précisément dans la modélisation du comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques on distingue : le modèle Jiles-Atherton, le modèle de Preisach, le modèle Chua etc...[9,13],[3].

I.6.4. LE MODÈLE DE JILES-ATHERTON

Introduit en 1983, le modèle de Jiles-Atherton [13] est basé sur l'idée du modèle d'Ising qui décrit le ferromagnétisme à l'échelle atomique comme la conséquence de l'existence d'une interaction entre moments magnétiques atomiques voisins [3]. Il est largement utilisé pour modéliser les caractéristiques non linéaires de l'hystérésis magnétique, il décrit la courbe $M(H)$ en utilisant cinq paramètres, de nombreuses publications [13], [3], traitent de l'identification de ces paramètres en fonction de leur signification physique.

Dans le modèle Jiles-Atherton deux mécanismes d'aimantation sont représentés. L'une dérive du mouvement irréversible des parois de block entre domaines tandis que l'autre dérive du mouvement réversible des parois. Pour comprendre l'idée de base du modèle de Jiles-Atherton on doit développer quelques notions:

I.6.4.1. THÉORIE DE LANGEVIN

Le premier modèle élaboré pour représenter l'aimantation, basé sur la structure microscopique des matériaux est l'approximation par la fonction de Langevin [9], [13].

Notons par m le moment dipolaire, y compris le moment de spin et le mouvement orbital d'un atome d'un matériau paramagnétique. Si un champ magnétique H est appliqué l'énergie potentielle correspondante est de la forme:

$$w_m = -\mu_0 m H \quad (\text{I.10})$$

$$w_m = -\mu_0 m H \cos \Theta \quad (\text{I.11})$$

où Θ est l'angle compris entre le moment magnétique et le champ magnétique appliqué.

Langevin suppose que dans les matériaux paramagnétiques, il n'y a pas d'interactions entre les moments magnétiques. Par conséquent, les statistiques de Maxwell-Boltzmann [13] peuvent être utilisées pour exprimer la position d'un électron occupant un état d'énergie w_m :

$$P(w_m) = e^{-\frac{w_m}{kT}} \quad (\text{I.12})$$

k : constante de Boltzmann ($1,381 \cdot 10^{23}$ J/K).

T : température en degré Kelvin.

Le nombre de particules magnétiques dn , situées entre les angles Θ et $d\Theta$ par rapport au champ appliqué H , est proportionnel à l'angle $2\pi n_0 \sin \Theta d\Theta$

$$dn = 2\pi n_0 \exp((\mu_0 m H \cos \Theta)/kT) \sin \Theta d\Theta \quad (\text{I.13})$$

Où n_0 est Le nombre de particules magnétiques par unité de volume .Le nombre total de particules est :

$$N = 2\pi n_0 \int_0^\pi \exp((\mu_0 m H \cos \Theta)/kT) \sin \Theta d\Theta \quad (\text{I.14})$$

L'aimantation supposée comme la somme vectorielle des moments magnétiques par unité de volume, et, parallèle au champ appliqué, est donnée sous la forme [13]:

$$M = \int_0^\pi m \cos \Theta dn = Nm \frac{\int_0^\pi \exp((\mu_0 m H \cos \Theta)/kT) \cos \Theta \sin \Theta d\Theta}{\int_0^\pi \exp((\mu_0 m H \cos \Theta)/kT) \sin \Theta d\Theta} \quad (\text{I.15})$$

En introduisant les quantités :

$$\lambda = \mu_0 m H / kT \quad (\text{I.16})$$

et

$$x = \cos \Theta \text{ d'où } dx = -\sin \Theta d\Theta \quad (\text{I.17})$$

En remplaçant (I.16) et (I.17) dans (I.15) on obtient:

$$M = \frac{Nm \int_1^{-1} x e^{\lambda x} dx}{\int_1^{-1} e^{\lambda x} dx} \quad (\text{I.18})$$

D'où:

$$M = Nm \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (\text{I.19})$$

Finalement l'équation décrivant l'aimantation des matériaux paramagnétiques est :

$$M = Nm \left(\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (\text{I.20})$$

Dans (I.20) tout ce qui est entre parenthèses est appelé fonction de Langevin notée $\mathfrak{L}(\lambda)$:

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \left(\coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (\text{I.21})$$

Il est important de souligner que la fonction de Langevin présente une discontinuité au point $\lambda = 0$, par conséquent elle est approchée par le premier terme de la série de Taylor pour les faibles valeurs de λ :

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \begin{cases} \coth \lambda - \frac{1}{\lambda} & \text{si } |\lambda| > \lambda_0 \\ \frac{\lambda}{3} & \text{si } |\lambda| < \lambda_0 \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Où λ_0 est très faible et positive.

Au dessus de la température de Curie λ devient très faible, par conséquent l'aimantation sera approximée par:

$$M = Nm \left(\frac{\lambda}{3} \right) = Nm \left(\frac{\mu_0 m H}{3kT} \right) \quad (\text{I.23})$$

La susceptibilité paramagnétique qui en résulte χ est la loi de Curie bien connue $\chi = \frac{C}{T}$, où C est une constante.

I.6.4.2. CORRECTION DE WEISS POUR LES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES

Dans les matériaux ferromagnétiques, les moments voisins interagissent les uns avec les autres. L'interaction entre les moments magnétiques donne un champ d'interaction magnétique H_{ex} (champ moléculaire) [3], [13]. Si, dans un domaine de Weiss, chaque moment magnétique m_i en raison de son interaction avec un moment voisin m_j résulte un champ d'interaction H_{ex} égal à :

$$H_{ex,j} = \alpha_{i,j} m_j \quad (\text{I.24})$$

Où $\alpha_{i,j}$ paramètre du champ moléculaire qui est un réel [3].

Cette interaction avec tous les moments dans le domaine magnétique peut être décrite par:

$$H_{ex,j} = \sum_j \alpha_{i,j} m_j \quad (\text{I.25})$$

Si les interactions entre tous les moments magnétiques sont supposées être identiques et donc indépendantes du déplacement entre les moments magnétiques alors on aura: $\alpha_{i,j} = \alpha \quad (\forall i, j)$ et :

$$H_{ex} = \alpha \sum_j m_j = \alpha M \quad (\text{I.26})$$

A l'application d'un champ extérieur, l'effet de H_{ex} s'ajoute de sorte à obtenir un champ effectif :

$$H_{eff} = H + \alpha M \quad (I.27)$$

En substituant cette relation dans (I.20), et en introduisant l'aimantation de saturation $M_s = Nm$ et le paramètre de forme $a = kT\mu_0 m$, on obtient la relation donnant l'aimantation:

$$M = M_s \left(\coth \frac{H + \alpha M}{a} - \frac{a}{H + \alpha M} \right) \quad (I.28)$$

Dans l'équation (I.28) l'aimantation M apparaît dans les deux membres c'est une équation auto cohérente [3], donc la courbe $M(H)$ obtenue par l'équation (I.28) est la même que pour un champ croissant ou décroissant.

Une telle loi de comportement est appelée courbe anhystérique notée M_{an}

$$M_{an} = M_s \left(\coth \frac{H + \alpha M}{a} - \frac{a}{H + \alpha M} \right) \quad (I.29)$$

I.6.4.3 FORMULATION MATHÉMATIQUE DU MODÈLE DE JILES-ATHERTON

Dans le modèle Jiles-Atherton l'aimantation est composée de deux termes, un terme représentant une composante irréversible et l'autre une composante réversible.

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (I.30)$$

Où:

- la composante irréversible, représente le mouvement irréversible des parois entre domaines magnétiques.
- La composante réversible, correspond au mouvement réversible des parois.

L'hystérésis peut être décrit comme un équilibre d'énergies dans un matériau [13]. Le changement de densité d'énergie dans le matériau est égal à la variation de la densité d'énergie magnétostatique et la densité d'énergie due aux pertes par hystérésis.

$$w = w_{mag} + w_{hys} \quad (I.31)$$

L'énergie, qui est générée par le mouvement irréversible des parois entre domaines magnétique, est exprimée par:

$$dw_{dom} = \mu_0 k dM_{irre} \quad (I.32)$$

Où k est un coefficient lié à la densité moyenne d'ancrage des parois [3]

Comme l'aimantation est fonction du champ effectif, en tenant compte de l'énergie due au mouvement irréversible des parois entre domaines magnétiques:

$$dw_{dom} = \mu_0 k \delta \frac{dM_{irr}}{dH_e} dH_e \quad (I.33)$$

$$\delta = \text{sign} \left(\frac{dH_e}{dt} \right) \quad (I.34)$$

Les variations d'aimantation irréversibles peuvent être obtenues à partir de l'équation de l'énergie, dans laquelle l'énergie fournie est égale à l'évolution de l'énergie magnétique et les pertes par hystérésis selon [13] :

$$M_{an}(H) = M_{irr}(H) + k\delta \frac{dM_{irr}}{dH} \quad (I.35)$$

Dans les matériaux ferromagnétiques les domaines voisins interagissent les uns avec les autres, cette interaction peut être prise en compte en introduisant un champ effectif agissant sur les domaines par unité de volume, comme dans (I.27) [13].

Ainsi, la susceptibilité différentielle associée au processus irréversible de l'aimantation est donnée par [3]:

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{(M_{an} - M_{irr})}{k\delta} \quad (I.36)$$

L'aimantation réversible peut être prise en compte en introduisant un coefficient sans dimension c ($c \in [0,1]$ [3]), de sorte que :

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (I.37)$$

Finalement pour obtenir l'aimantation totale on utilise l'équation (I.30) ce qui nous donne:

$$M = M_{irr} + c(M_{an} - M_{irr}) \quad (I.38)$$

en différenciant cette équation par rapport à H sachant que [3]:

$$\frac{dM_{an}}{dH} = \frac{dM_{an}}{dH_e} \left(1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) \quad (I.39)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left(1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) \quad (I.40)$$

Nous obtenons l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e} + c \frac{dM_{an}}{dH_e}}{1 - \alpha c \frac{dM_{an}}{dH_e} - \alpha(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e}} \quad (I.41)$$

L'équation (I.41) représente l'équation différentielle mathématique du modèle de Jiles-Atherton $M(H)$.

I.6.4.4. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE JILES-ATHERTON

Le modèle de Jiles-Atherton décrit la courbe $M(H)$ en utilisant cinq (5) paramètres. De nombreuses publications traitent de l'identification de ces paramètres en fonction de leur signification physique [9, 3, 13].

Dans le tableau (Tab.1) sont résumés les différents paramètres utilisés lors de la modélisation de l'hystérésis magnétique par le modèle de Jiles-Atherton:

Paramètre	Propriété physique	Formulation mathématique
c	Coefficient de réversibilité	$\frac{3a\chi'_{ini}}{M_s}$
a	Facteur de forme pour M_{an}	$\frac{M_s}{3} \left(\frac{1}{\chi'_{an}} + \alpha \right)$
k	Facteur lié aux pertes par hystérésis	$\frac{M_{an}(H_c)}{1-c} \left[\alpha + \frac{1}{\frac{1}{1-c}\chi'_c - \frac{c}{1-c} \frac{dM_{an}(H_c)}{dH}} \right]$
α	Lié à l'interaction entre domaines	Obtenu à partir de l'équation donnant l'aimantation rémanente M_r [9]
M_s	Aimantation de saturation	Obtenue à partir du cycle majeur.

Tab. 1 Paramètres du modèle de Jiles-Atherton

Où:

χ'_{ini} et χ'_{an} : les susceptibilités différentielles normale et anhystérétique initiales;

χ'_c : susceptibilité différentielle au point coercitif;

H_c : champ coercitif.

La détermination de ces paramètres nécessite la connaissance de données expérimentales comme le cycle majeur, la courbe de première aimantation ainsi que la courbe anhystérétique.

I.6.5. LE MODÈLE DE PREISACH [6,9]

Le formalisme mathématique du modèle de Preisach introduit par Kranosel'skii est basé sur:

1. Le choix d'un opérateur d'hystérésis élémentaire appelé hystéron traduisant la non linéarité.
2. La considération des systèmes hystérétiques complexes comme une combinaison (assemblage) d'hystérons.
3. L'écriture du formalisme mathématique correspondant.

I.6.5.1. L'OPÉRATEUR D'HYSTÉRÉSIS ÉLÉMENTAIRE (HYSTÉRON)

Dans les matériaux ferromagnétiques, une variation élémentaire de l'aimantation (ΔM) sous l'influence d'un champ d'excitation externe (H), apparaît quand un certain nombre de domaines élémentaires (domaines de Weiss) passent d'un état de saturation à un autre. Les états de saturations sont au nombre de deux: négatif et positif, et, ils sont caractérisés par une énergie minimale. Le passage (basculement) d'un état à un autre, requiert de l'énergie.

Chaque domaine élémentaire peut être représenté par un opérateur d'hystérésis élémentaire: boucle rectangulaire (Fig.7) défini par:

1. Deux états stables "haut" et "bas".
 - "+1" pour l'état stable "haut";
 - "-1" pour l'état stable "bas";
2. Les valeurs de basculement (seuils de l'opérateur) : α et β . ($\alpha \geq \beta$).

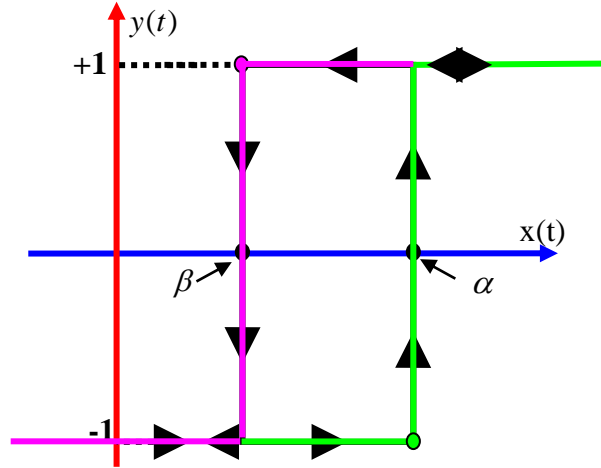


Fig.7: Opérateur d'hystérésis élémentaire ($R_{\beta, \alpha}$).

La sortie $y(t)$ de l'opérateur ($R_{\beta, \alpha}$) est donnée à chaque instant t par la relation:

$$y(t) = R_{\beta, \alpha}[t_0, \eta_0] x(t), \quad t \geq t_0 \quad (\text{I.42})$$

Dans la relation (42), la sortie à l'instant t , dépend non seulement de la valeur de la fonction d'entrée $x(t)$, mais également de l'état de l'opérateur à l'instant de référence t_0 noté η_0 (c'est l'effet de mémoire). Les valeurs possibles pour l'état initial sont "+1" ou "-1".

La valeur de la sortie $y(t)$ est donnée par les relations (43):

$$y(t) = \begin{cases} \eta_0, & \text{si } \beta < x(\tau) < \alpha, \text{ pour tout } : t_0 \leq \tau \leq t; \\ +1, & \text{s'il existe } : t_1 \in [t_0, t] \text{ tel que :} \\ & x(t_1) \geq \alpha, x(\tau) > \beta, \text{ pour tout } : t_1 \leq \tau \leq t; \\ -1, & \text{s'il existe } : t_1 \in [t_0, t] \text{ tel que :} \\ & x(t_1) \leq \beta, x(\tau) < \alpha \text{ pour tout } : t_1 \leq \tau \leq t. \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

Les égalités:

$$y(t) = 1, \quad \forall x(t) \geq \alpha \quad (\text{I.44})$$

et;

$$y(t) = -1, \quad \forall x(t) \leq \beta \quad (\text{I.45})$$

sont toujours vérifiées pour ($t \geq t_0$).

I.6.5.2. LE PLAN DE PREISACH

Tout hystéron $R_{\beta_i, \alpha_i}^{(i)}$ peut être représenté dans le plan (α, β) à l'aide d'un point ayant pour coordonnées les valeurs (α_i, β_i) , avec $(\alpha_i > \beta_i)$. Le plan ainsi défini est appelé plan de Preisach.

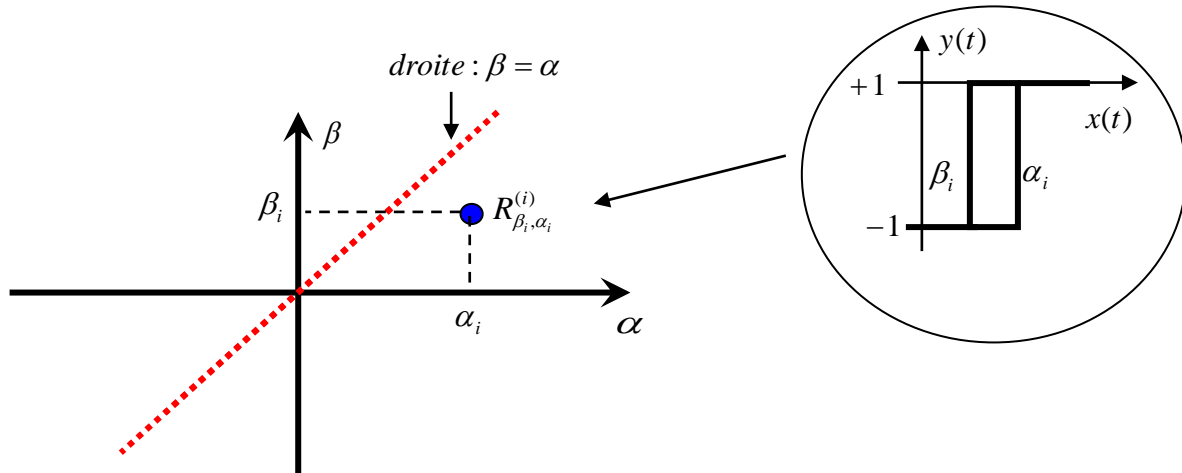


Fig.8: Représentation de l'hystéron $R_{\beta_i, \alpha_i}^{(i)}$ à l'aide d'un point dans le plan de Preisach (α, β) .

Dans le plan de Preisach (noté S), on peut distinguer 03 catégories de points pouvant représenter des hystérons:

1. Les points sur la diagonale ($\beta = \alpha$). Cette catégorie ne peut pas représenter le phénomène de l'hystérésis car: ($\beta_i = \alpha_i$).
2. Les points situés au-dessus de la diagonale pour lesquels ($\beta_i > \alpha_i$) et qui ne correspondent pas à la définition précédente de l'hystéron.
3. Les points situés au-dessous de la diagonale pour lesquels ($\alpha_i > \beta_i$) et qui correspondent à la définition précédente de l'hystéron.

I.6.5.3. APPLICATION À LA MODÉLISATION DE L'HYSTÉRÉSIS MAGNÉTIQUE

L'état magnétique du matériau à un instant donné est représenté par des entités dites "hystérons magnétiques" ayant deux états de saturation possibles ($M = \pm 1$) (fig 9.a). La détermination de l'aimantation du matériau nécessite une connaissance complète de la distribution statistique des hystérons dans le plan de Preisach (S). Cette distribution statistique est appelée généralement fonction de distribution de Preisach.

Le plan S de la répartition des hystérons magnétiques est appelé "triangle de Preisach", et est représenté par un triangle de surface (S) (voir Fig.9.b), limité par les droites:

1. $\alpha = +H_s$ (H_s : champ magnétique de saturation des matériaux ferromagnétiques);
2. $\beta = -H_s$;

3. $\beta = \alpha$.

Le triangle de Preisach peut être défini mathématiquement par:

$$S = \{(\beta, \alpha) / \alpha \geq \beta, \beta \geq -H_S, \alpha \leq +H_S\} \quad (\text{I.46})$$

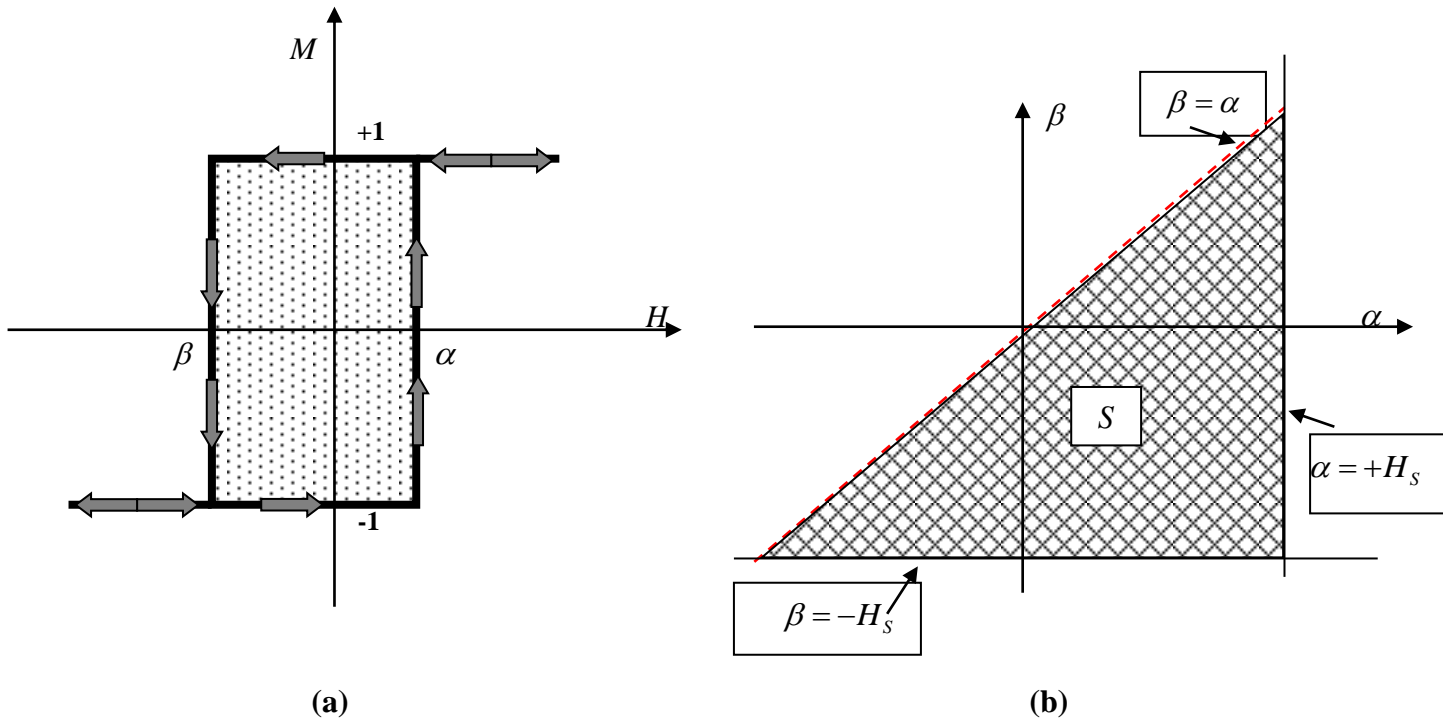


Fig.9: (a) Hystéron magnétique, (b) Triangle de Preisach et ses frontières.

I.6.5.4. INTERPRÉTATION GEOMÉTRIQUE DES VARIATIONS DE $H(t)$ ET DE $M(t)$

La variation instantanée du champ exciteur est représentée par un point se déplaçant le long de la ligne horizontale $H(t)$ et contrôlant directement le point situé sur la diagonale $\beta = \alpha$. À chaque instant le triangle de Preisach est partagé en deux parties (S^+) et (S^-). La variation de l'aimantation est représentée par la variation de la surface du triangle de Preisach (S).

I.6.5.4.1. CAS D'UN CHAMP D'EXCITATION CROISSANT

À l'instant (t_i), on suppose que l'échantillon est dans un état de saturation négatif noté (S^-): c'est-à-dire que tous les hystérons qui le composent se trouvent dans leur état "bas" de saturation (Fig.10 a). En augmentant l'excitation, seules les valeurs de α sont considérées. En effet, à l'instant ($t_{i+1} > t_i$), tous les hystérons dont les valeurs de basculement "hautes" (α_i) vérifient ($H(t_{i+1}) \geq \alpha_i$) vont basculer vers l'état de saturation "haut". Cette variation de l'aimantation (augmentation) est

représentée sur le triangle de Preisach par la création d'une nouvelle surface triangulaire élémentaire notée ($S_{t_i,t_{i+1}}^+$) (Fig.10 b).

Cette surface triangulaire va en augmentant jusqu'à atteindre sa valeur maximale représentée par la surface entière du triangle de Preisach et notée (S^+) (Fig 10 c).

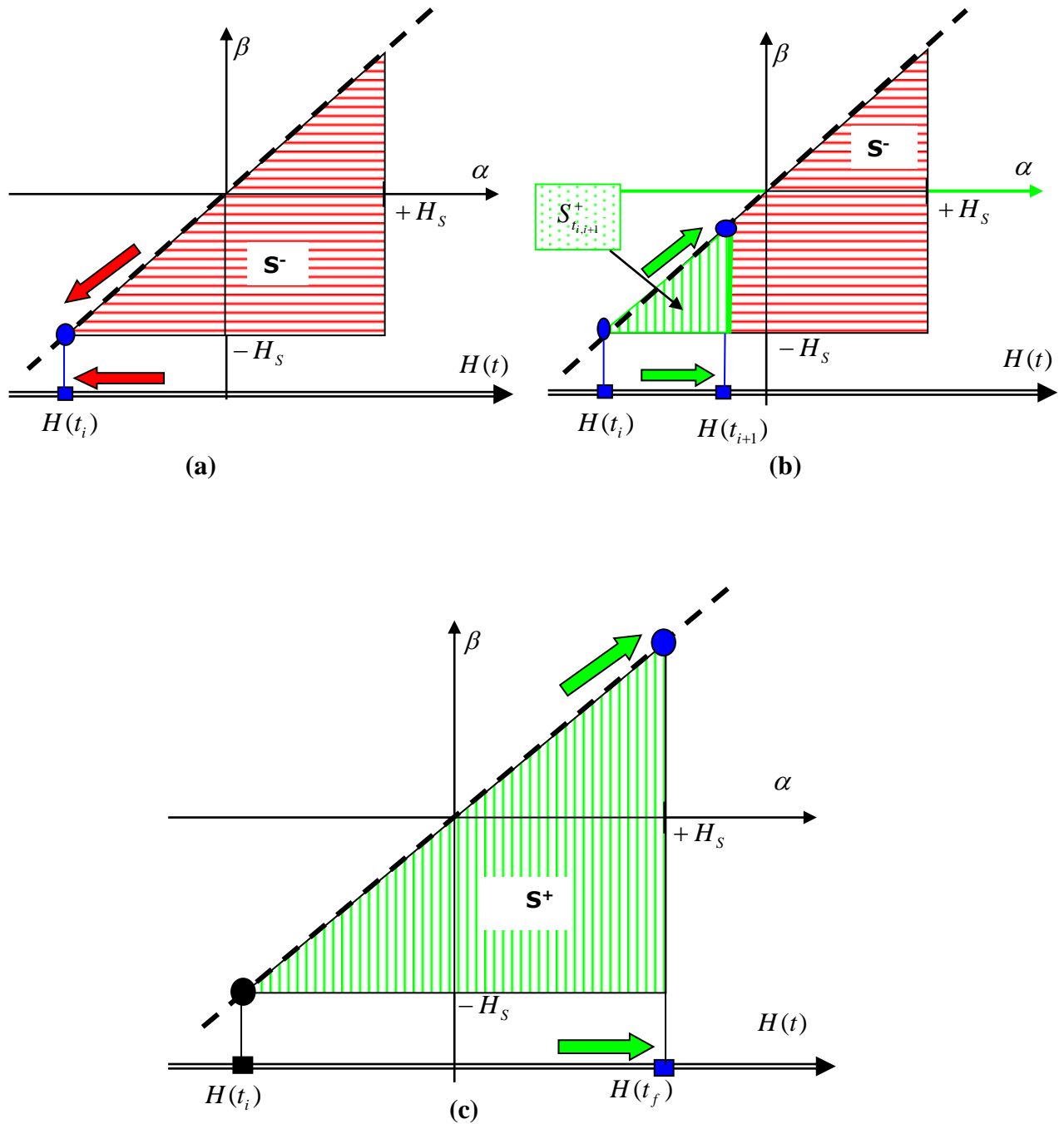


Fig.10: (a) État négatif de saturation (bas), (b) Champ d'excitation croissant, (c) État de saturation positif (haut).

I.6.5.4.2. CAS D'UN CHAMP D'EXCITATION DÉCROISSANT

Partant de l'état (haut) (S^+) (Fig.10c). Lorsque l'excitation diminue, seules les valeurs de β seront considérées. En effet, c'est lorsque la valeur de l'excitation va passer sous les premières valeurs de basculement vers l'état bas que certains hystérons vont basculer, et, l'aimantation du système va diminuer. La surface ($S_{t_f, f+1}^-$) ainsi créée (Fig.11), va augmenter jusqu'à ce que tous les hystérons auront basculer vers leur état bas de saturation et la surface du triangle de Preisach sera (S^-) (Fig.10a).

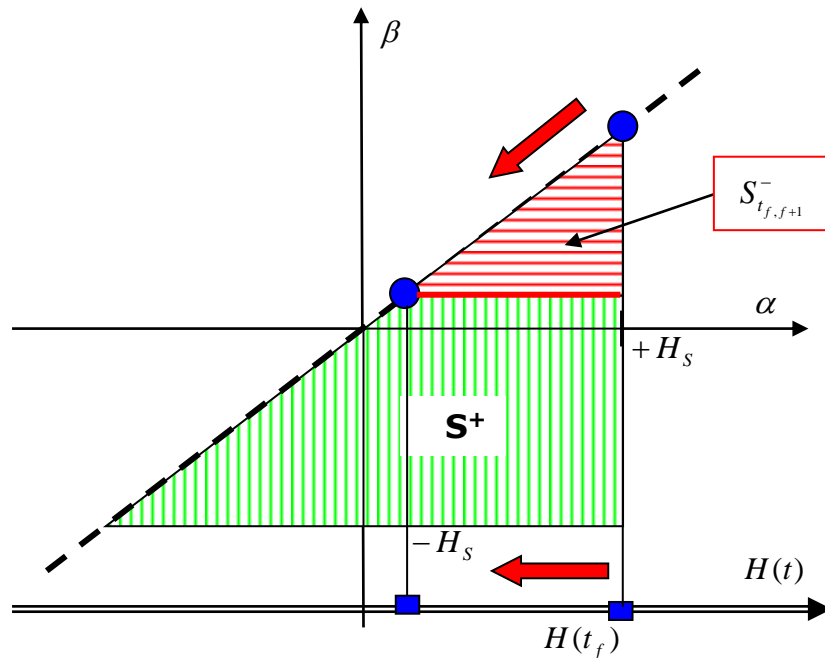
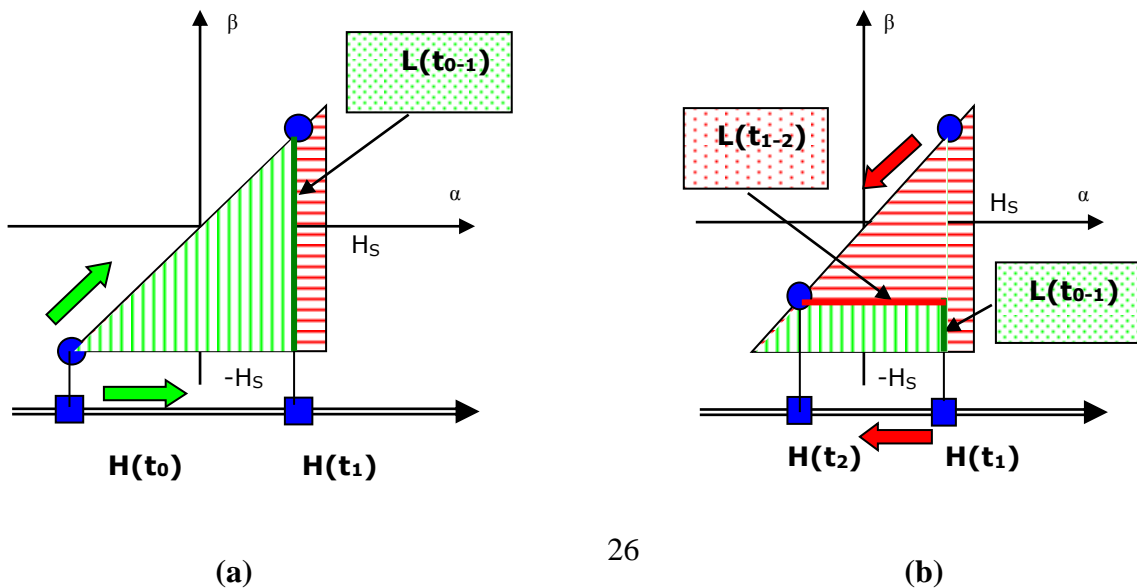


Fig.11: champ d'excitation décroissant.

I.6.5.5. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE INSTANTANNÉE DE L'ÉTAT DE L'AIMANTATION

Les surfaces d'aimantations positive et négative sur le triangle de Preisach, sont séparées par une frontière variable dans le temps notée $L(t)$ qui a la forme d'une ligne brisée composée de plusieurs parties. Chaque partie représente une étape du processus d'aimantation (Fig.12).



$R_{(\beta,\alpha)}$ et $\hat{\Gamma}$ sont respectivement les opérateurs d'hystérésis élémentaire et global.

La fonction $\mu(\alpha, \beta)$ représente le nombre d'hystérons $R_{(\beta,\alpha)}$ au voisinage du point de coordonnées (α, β) du plan de Preisach.

Donc, $\mu(\alpha, \beta)$ est une distribution statistique (densité de probabilité) des hystérons dans le plan de Preisach [9,11]. Par conséquent, elle vérifie les deux relations:

$$\mu(\alpha, \beta) > 0 \quad (\text{I.49})$$

$$\iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 1 \quad (\text{I.50})$$

Appliquée au calcul de l'aimantation l'équation (I.48) devient:

$$M(t) = \hat{\Gamma}[H(t)] = \iint_S \mu(\alpha, \beta) R_{(\beta,\alpha)}[H(t)] d\alpha d\beta \quad (\text{I.51})$$

Dans l'équation (I.51), $H(t)$ et $M(t)$ représentent respectivement le champ magnétique exciteur et l'aimantation résultante.

Le domaine d'intégration étant étendu à la surface (S) du triangle de Preisach.

Comme mentionné précédemment, à chaque instant (t) le domaine (S) est divisé en deux sous domaines:

- Le sous domaine $S^+(t)$ constitué des points (α, β) pour lesquels: $R_{(\beta,\alpha)}[H(t)] = +1$.
- Le sous domaine $S^-(t)$ constitué des points (α, β) pour lesquels: $R_{(\beta,\alpha)}[H(t)] = -1$.

En utilisant cette propriété du domaine d'intégration (S), l'équation (I.51) devient:

$$M(t) = \iint_{S^+(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{I.52})$$

L'équation (I.52), montre que l'aimantation instantanée d'un système dépend de la forme de l'interface $L(t)$ séparant les deux sous domaines $S^+(t)$ et $S^-(t)$.

I.6.5.7. CALCUL DE LA VARIATION DE L'AIMANTATION

Pour le calcul de la variation de l'aimantation (ΔM) résultant d'une variation (ΔH) du champ exciteur, on reprend l'équation (I.52), sachant que la surface (S) du triangle de Preisach est divisée à chaque instant (t) en $S^+(t)$ et $S^-(t)$:

$$M(t) = \iint_{S^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \left[\iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] \quad (\text{I.53})$$

$$M(t) = 2 \iint_{S^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{I.54})$$

En utilisant l'équation (I.54), on écrit les expressions donnant respectivement les valeurs de l'aimantation aux instants successifs (t_{i-1} et t_i):

$$M(t_{i-1}) = 2 \iint_{S_{i-1}^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{I.55})$$

$$M(t_i) = 2 \iint_{S_i^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{I.56})$$

La variation de l'aimantation entre ces deux instants est alors donnée par:

$$M(t_i) - M(t_{i-1}) = \left[2 \iint_{S_i^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] - \left[2 \iint_{S_{i-1}^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] \quad (\text{I.57})$$

$$M(t_i) - M(t_{i-1}) = 2 \left(\iint_{S_i^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S_{i-1}^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right) \quad (\text{I.58})$$

I.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux phénomènes physiques à l'origine du magnétisme. Une attention particulière a été portée aux matériaux ferromagnétiques, leurs principales caractéristiques et leurs utilisations en génie électrique. Nous nous sommes surtout intéressés au cycle d'hystérésis qui représente un comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques d'où la nécessité d'avoir un modèle physique performant. Plusieurs modèles sont rapportés dans la littérature les plus utilisés sont principalement le modèle de Preisach et le modèle de Jiles-Atherton. Ces deux modèles sont basés sur la physique des matériaux ferromagnétiques, Le modèle de Preisach est fondé sur deux notions fondamentales, à savoir:

- Le cycle d'hystérésis élémentaire rectangulaire dit "Hystéron" qui représente physiquement un domaine de Weiss qui est aimanté à saturation;
- La fonction densité de répartition des hystérons dite "fonction de distribution" qui représente la répartition des domaines de Weiss dans un matériau ferromagnétique.

Une grande partie de la littérature consacrée à ce modèle, montre qu'il est bien adapté pour la représentation du phénomène de l'hystérésis magnétique. Le seul handicap quant à son utilisation réside dans la détermination de sa fonction de distribution.

Le modèle scalaire de Preisach permet de calculer l'aimantation dépendant des valeurs du champ exciteur appliqué. Les effets de valeurs extrémales antérieures peuvent être effacés par l'action de nouvelles valeurs extrémales supérieures. Cette propriété est appelée propriété d'effacement de l'histoire.

Les cycles d'hystérésis dits "mineurs" correspondants aux mêmes valeurs extrémales du champ d'excitation se superposent géométriquement cette propriété appelée congruence des cycles mineurs.

Dans le modèle de Jiles-Atherton deux mécanismes d'aimantation sont représentés, l'un dérive du mouvement irréversible des parois de bloch entre domaines tandis que l'autre dérive du mouvement réversible des parois.

Lors de la résolution numérique il est important de vérifier que $\frac{\Delta M_{irr}}{\Delta H_e} \geq 0$, en effet le modèle peut générer des susceptibilités différentielles négatives qui ne sont pas des solutions physiquement réalistes, ce comportement apparaît au sommet du cycle majeur lors de la diminution du champ magnétique. Les susceptibilités différentielles négatives seront prises égales à zéro dans ce cas. Le modèle de Jiles-Atherton ne permet pas de restituer les cycles mineurs non centrés, ces derniers ne se renferment pas [3],[13].

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **M. L. IDOUGHI**, "Extraction de modèles thermiques simplifiés des machines électriques à partir d'un calcul du champ de températures ", thèse de doctorat Université de Paris, Spécialité : Génie électrique, 2011.
- [2] **C. ROUGE**, "Modélisation du rayonnement ultrasonore par un transducteur Emat dans une pièce ferromagnétique", thèse de doctorat Université Bordeaux I, Spécialité : Mécanique, 2013.
- [3] **A. BENABOU**, "Contribution à la caractérisation et A la modélisation de matériaux Magnétiques en vue d'une Implantation dans un code de calcul De champ ", thèse de doctorat Université Lille I, Spécialité : Génie électrique, 2002.
- [4] **P. BRISSONNEAU**, "Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique", Éditions Hermes, 1997.
- [5] **M. BELKADI**, "Contribution à l'homogénéisation multi-échelle des propriétés électromagnétiques des matériaux en poudres de fer", thèse de doctorat Université de Nantes, Spécialité : Génie électrique, 2009.
- [6] **L. CHELGHOU**, "Étude de l'hystérésis magnétique par le modèle de preisach", Mémoire de Magistère Université de Batna, Spécialité : Génie électrique, 2006.
- [7] **J.P. BAÏLON, J.M. DORLOT**, "DES MATÉRIAUX" Presses Internationales POLYTECHNIQUE, Canada, 2000.
- [8] **B. DUCHARNE**, "Caractérisation et modélisation de circuits magnétiques du global vers le local" Thèse de doctorat Université Claude Bernard – Lyon I, France, 2003
- [9] **A. IVANYI**, " Hysteresis models in Electromagnetic computation", Akadémiai Kiado, Budapest, 1997.
- [10] **G. BERTOTTI**, " Hysteresis in magnetism", Academic Press, Mai 1998.
- [11] **I. D. MAYERGOYZ**, "Mathematical models of Hysteresis" IEEE Trans. Magn, vol mag-22, N°5, pages 603-608, 1986.
- [12] **Y. OULED AMOR**, "Contribution à la modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de l'analyse par éléments finis des systèmes de chauffage par induction", Thèse de doctorat Université de Nantes, France, 2000.
- [13] **P. KIS**, " Jiles-Atherton Model Implementation to Edge Finite Element Method ", thèse de doctorat Budapest University, Spécialité : Génie électrique, 2006.

DEUXIÈME CHAPITRE :
MODÉLISATION
DU COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DES
MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES DOUX PAR LE
MODÈLE DE PREISACH

II.0. INTRODUCTION

Plusieurs modèles mathématiques ont été proposés dans la littérature pour la modélisation du comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques doux [1], [2], [3], [4]. Parmi ces modèles, le modèle de Preisach reste l'outil le plus puissant dans la modélisation de l'hystérésis magnétique. La mise en œuvre de ce modèle est étroitement liée à l'identification de sa fonction de distribution. Plusieurs méthodes d'identification ont été publiées dans la littérature et sont principalement basées sur deux approches: les approches analytiques et les approches numériques [1], [3], [4], [5], [6], [7].

L'approche numérique utilise des données expérimentales telles que:

- les courbes de renversement de premier ordre [1], [8], [9], ...etc.
- les cycles centrés [10].
- La combinaison d'un cycle majeur et d'une courbe de première aimantation [10], [11].

Les approches analytiques associent à la fonction de distribution de Preisach recherchée une ou une combinaison de distributions statistiques connues. Les formes de distributions les plus courantes et les plus utilisées sont [8]:

- Le produit de deux Lorentziennes;
- le produit de deux Gaussiennes;
- les distributions de type Lorentzienne modifiée, ... etc.

Les paramètres de ces fonctions de distribution sont déterminés à l'aide de méthodes numériques d'optimisation. Il s'agit alors de minimiser les écarts entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées des cycles d'hystérésis basés sur la forme de distribution choisie.

Dans ce chapitre, nous exposerons différentes méthodes analytiques et numériques d'identification de la fonction de distribution. Une nouvelle méthode numérique d'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach, développée dans le cadre de ce travail, sera exposée et nommée : "**MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION**". Elle présente la spécificité d'être basée sur l'utilisation d'un nombre très réduit de points expérimentaux extraits tous de la courbe de première aimantation.

La modélisation numérique du comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques doux utilisant le modèle de Preisach, a nécessité l'écriture d'algorithmes numériques qui intègrent la loi de comportement hystérétique inverse $H = f(B)$. La nouvelle méthode « méthode de la première aimantation » a été utilisée pour l'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach. Dans le développement des codes de simulations numériques, les deux méthodes numériques : méthode des éléments finis et la méthode sans maillage de Galerkin ont été utilisées.

II.1. LES MÉTHODES ANALYTIQUES

II.1.1. LES DISTRIBUTIONS DE TYPE LORENTZIENNES

La forme générale est un produit de deux distributions de Lorentz, elle s'écrit sous la forme:

$$\mu(\alpha, \beta) = K \cdot \left[\left[1 + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{\beta}{a} + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right]^{-1} \quad (\text{II.1})$$

avec:

- a : coefficient identifié au champ coercitif du matériau (H_c).
- K : coefficient de normalisation, α et β sont les variables de la distribution.

II.1.2. LES DISTRIBUTIONS DE TYPE LORENTZIENNE MODIFIÉE

Afin de permettre un ajustement plus efficace des cycles expérimentaux, une autre forme de distribution avec deux nouveaux paramètres a été proposée (équation II.2) [11]. Les nouveaux paramètres sont notés par ($c \in \mathbb{R}_+^*$) et ($b \in [1, H_s/H_c]$). Les paramètres précédemment définis (K et a) gardent leurs significations.

$$\mu(\alpha, \beta) = K \cdot c^2 \left(\left(c + \left(\frac{\alpha}{a} - b \right)^2 \right) \left(c + \left(\frac{\beta}{a} + b \right)^2 \right) \right)^{-1} \quad (\text{II.2})$$

II.1.2.1. INFLUENCES DES DIFFÉRENTS PARAMÈTRES

1. INFLUENCE DU PARAMÈTRE (c)

Pour des valeurs constantes des paramètres ($K = 1$, $b = 1$), nous considérons trois valeurs pour le paramètre c : 0.1, 1.0 et 5.0 .

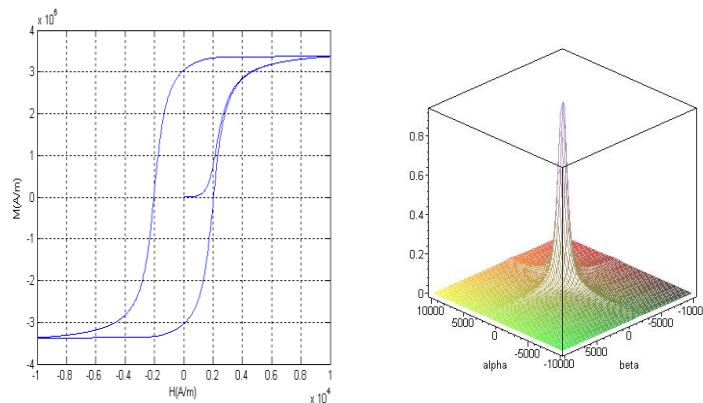


Fig. 1: Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée ($K = 1$, $H_c = 2000$ A/m, $c = 0.1$, $b = 1$).

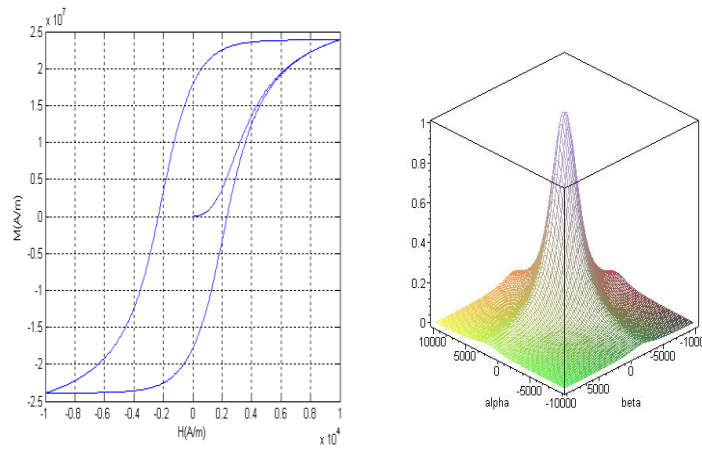


Fig. 2: Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée : ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 1, b = 1$).

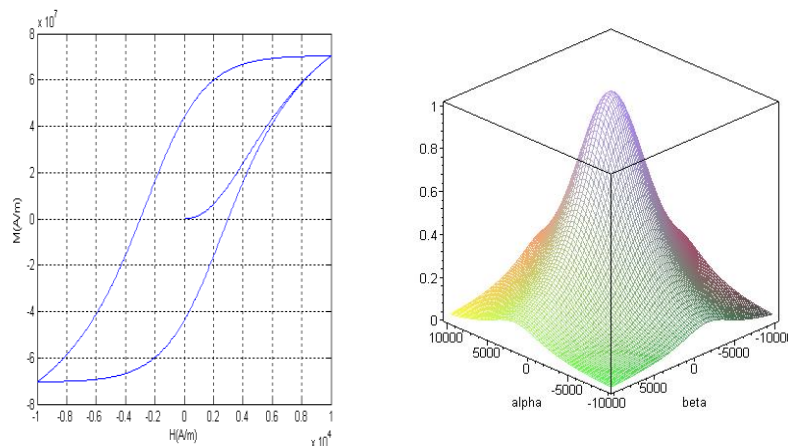


Fig. 3: Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée : ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 5, b = 1$).

Les figures Fig.1, Fig.2 et Fig.3 montrent que l'augmentation du paramètre (c) produit:

- une diminution de la pente du cycle d'hystérésis.
- une légère augmentation du champ coercitif.
- une augmentation de l'aimantation rémanente.
- une augmentation de l'aimantation à saturation.

En conclusion, la modification du paramètre (c) induit des variations sur les paramètres du cycle d'hystérésis (H_c, M_r, M_s). Ce paramètre est donc important et permet l'encadrement d'une plus grande variété de cycles d'hystérésis expérimentaux.

2. INFLUENCE DU PARAMÈTRE (b):

Nous considérons deux valeurs du paramètre b : 2 et 3.5. Les valeurs des autres paramètres de la distribution sont gardées constantes ($K = 1, c = 1$).

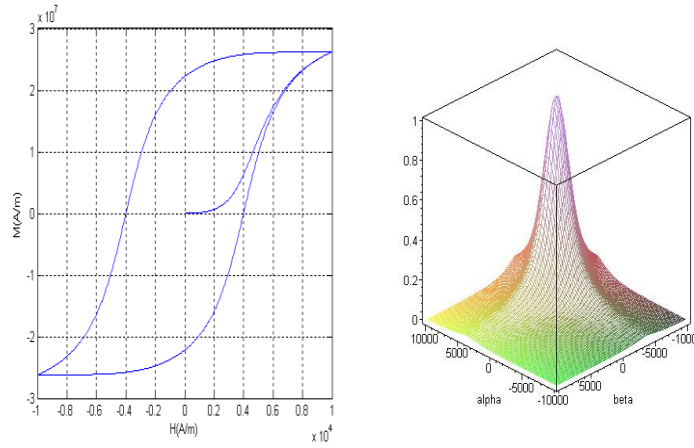


Fig. 4: Cycle d'hystérésis et la représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée : ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 1, b = 2$).

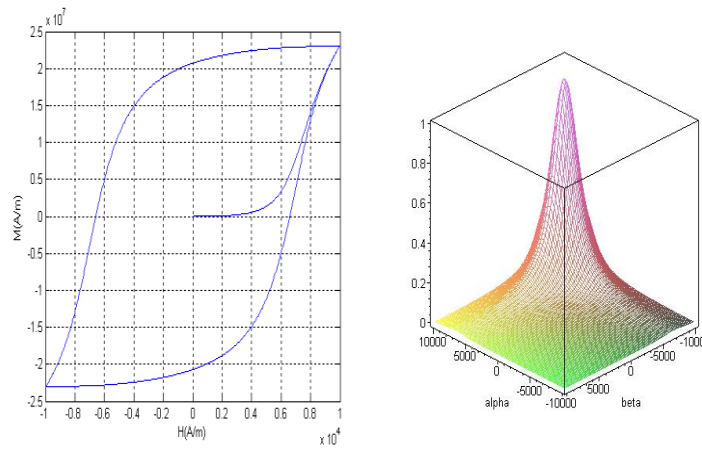


Fig. 5: Cycle d'hystérésis et représentation spatiale de la distribution Lorentzienne modifiée : ($K = 1, H_c = 2000 \text{ A/m}, c = 1, b = 3.5$).

Les figures (Fig.4 et Fig.5) montrent que l'augmentation du paramètre (b) produit une augmentation très importante du champ coercitif.

II.1.3. LES DISTRIBUTIONS DE TYPE GAUSSIENNES [11],[10]

Une fonction de distribution de type Gaussienne s'écrit sous la forme:

$$\mu(h_c, h_i) = \frac{B_s}{2\pi\sigma_c\sigma_i} e^{\left(\frac{-(h_c-h_{cm})^2}{2\sigma_c^2}\right)} e^{\left(\frac{-h_i^2}{2\sigma_i^2}\right)} \quad (\text{II.3})$$

Où:

B_s : représente l'induction à saturation.

$\sigma_c, \sigma_i, h_{cm}$: constantes de la distribution Gaussienne.

Les grandeurs (h_c, h_i) représentent les nouvelles variables qui correspondent à un changement de repère dans le plan de Preisach (α, β) [9].

La correspondance entre les deux repères est donnée par :

$$\begin{cases} \alpha = h_c + h_i \\ \beta = h_c - h_i \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

À l'instar de la distribution de type Lorentzienne modifiée, la détermination des paramètres fait appel aux techniques d'optimisation. L'importance du nombre de paramètres permet en principe l'encadrement d'une large plage de cycles expérimentaux.

La figure ci-dessous est un exemple de représentation spatiale d'une distribution de type Gaussienne avec les paramètres : $\sigma_c = 50$, $\sigma_i = 200$ et $h_{cm} = 150$.

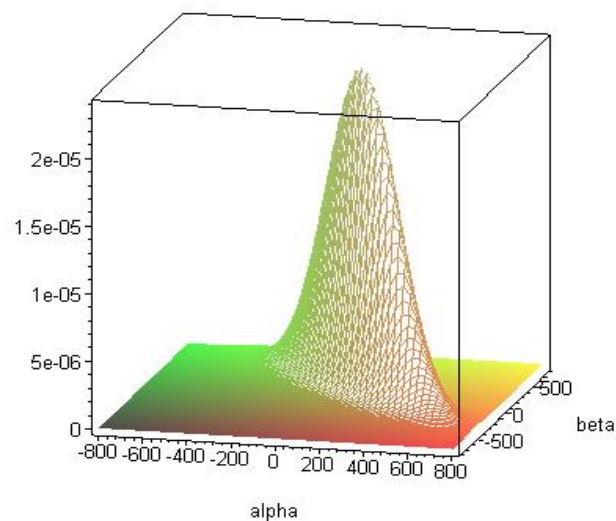


Fig.6: Représentation spatiale de la fonction de distribution de type Gaussienne.

II.2. LES MÉTHODES NUMÉRIQUES

II.2.1. LA MÉTHODE DE MAYERGOYZ

La méthode d'identification de la fonction de distribution $\mu(\alpha, \beta)$ proposée par Mayergoyz [1], est basée sur la génération expérimentale de plusieurs courbes de renversement descendantes ou ascendantes de premier ordre.

II.2.1.1 COURBE DE RENVERSEMENT DESCENDANTE DE PREMIER ORDRE

Une courbe de renversement descendante de premier ordre est obtenue de la manière suivante:

Partant d'un état de "saturation négative" ($H(t) = -H_S$), on fait croître de manière monotone l'excitation jusqu'à la valeur ($H(t) = H_1 \rightarrow \alpha_1$) (Fig.7), puis on fait décroître l'excitation jusqu'à la valeur ($H(t) = H_2 \rightarrow \beta_1$) (Fig. 8).

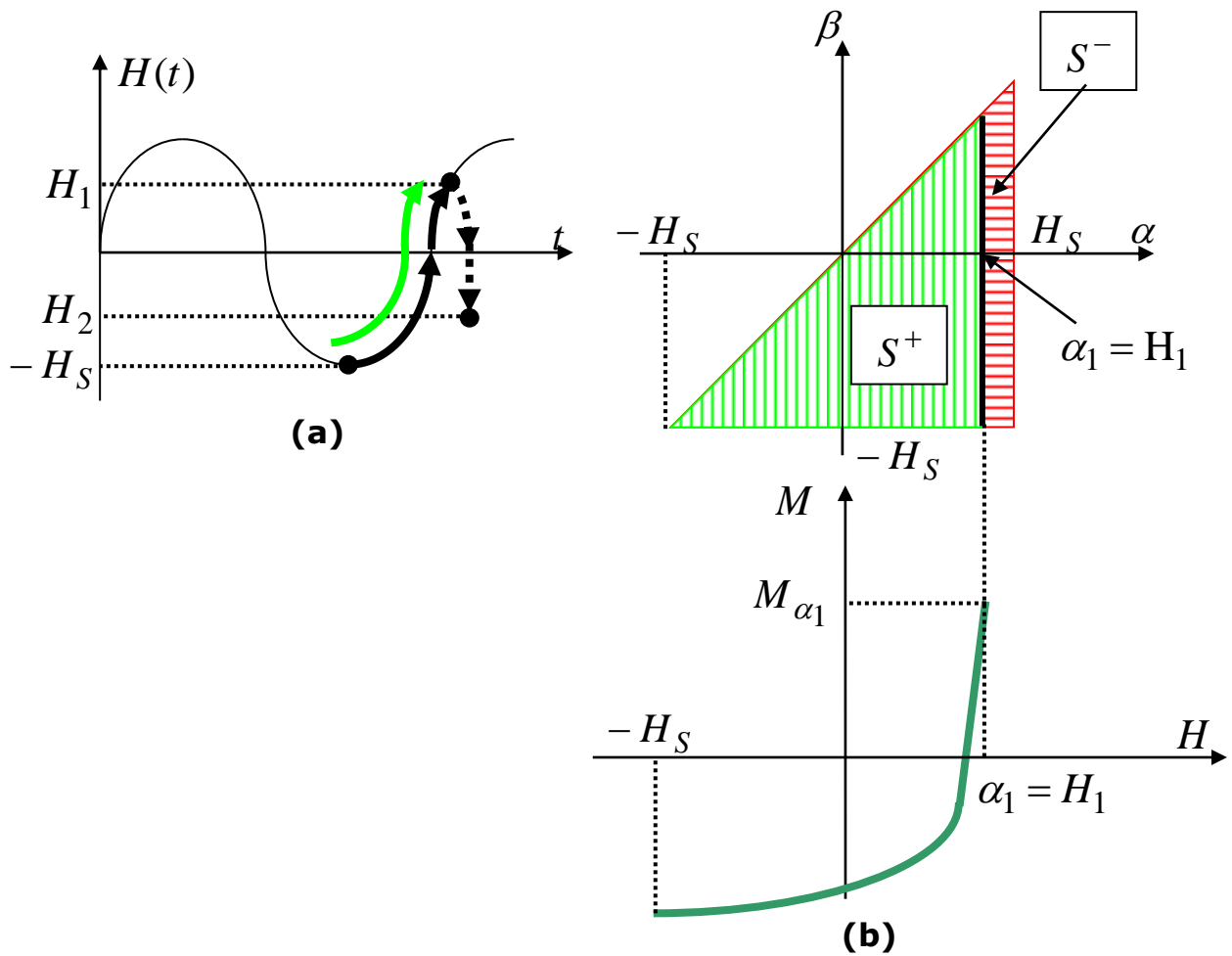


Fig. 7: (a) champ exciteur, (b) triangle de Preisach et la partie du cycle générée par une excitation croissante de $(-H_S)$ à (H_1) .

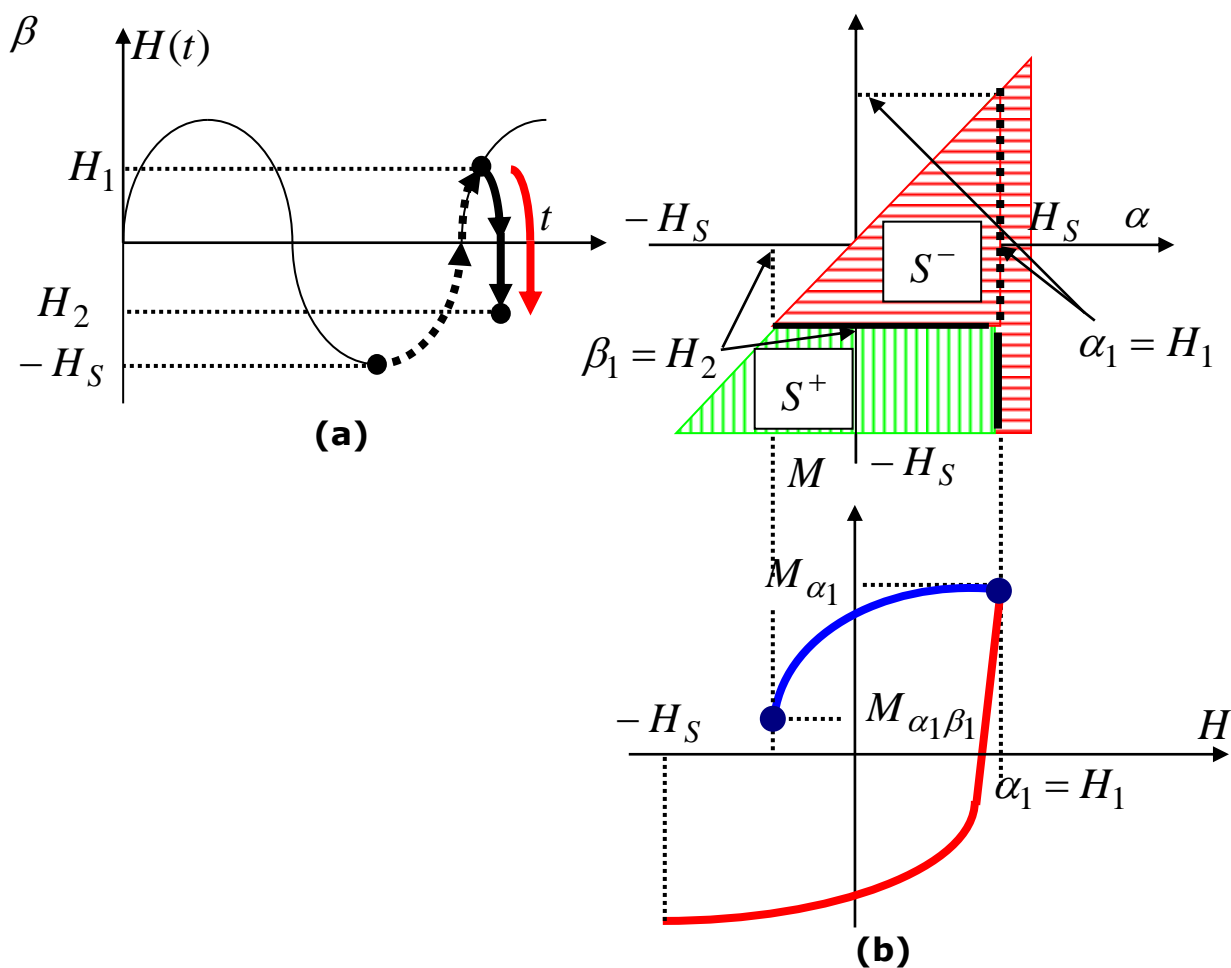


Fig. 8: (a) champ excitateur, (b) triangle de Preisach et la partie du cycle générée par une excitation décroissante de (H_1) à (H_2) .

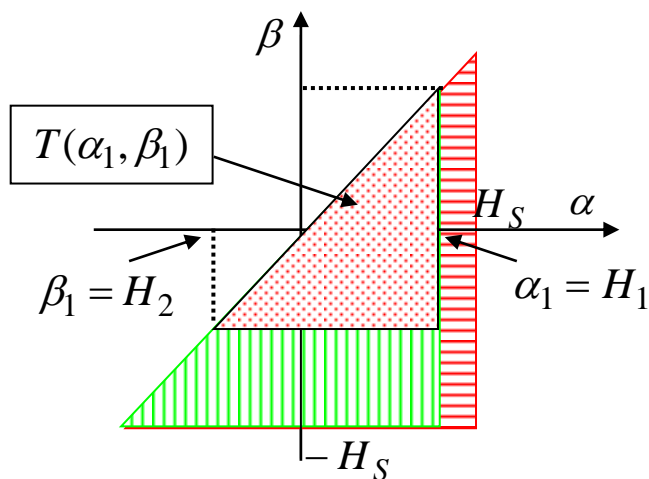


Fig. 9: Le triangle $T(\alpha_1, \beta_1)$ correspondant à la variation du champ entre H_1 et H_2 .

En examinant les figures précédentes, on remarque que le triangle noté $T(\alpha_1, \beta_1)$ (Fig.9) est la portion de surface du triangle de Preisach qui est rajoutée à S^- et soustraite à S^+ pour compenser la variation (dans ce cas de décroissance) du champ de la valeur α_1 à la valeur β_1 .

On définit la fonction $F(\alpha_1, \beta_1)$ (fonction d'Everett [1]) par:

$$F(\alpha_1, \beta_1) = M_{\alpha_1} - M_{\alpha_1 \beta_1} \quad (\text{II.5})$$

$$F(\alpha_1, \beta_1) = 2 \iint_{T(\alpha_1, \beta_1)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{1}{2} F(\alpha_1, \beta_1) = \int_{\beta_1}^{\alpha_1} \left(\int_{\beta_1}^{\alpha} \mu(\alpha, \beta) d\beta \right) d\alpha \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F(\alpha_1, \beta_1) = \int_{\beta_1}^{\alpha} \mu(\alpha, \beta) d\beta \Big|_{\alpha=\alpha_1} \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} F(\alpha_1, \beta_1) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} F(\alpha_1, \beta_1) = -\mu(\alpha, \beta) \Big|_{(\alpha_1, \beta_1)} \quad (\text{II.9})$$

$$\mu(\alpha, \beta) \Big|_{(\alpha_1, \beta_1)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \beta_1)}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} \quad (\text{II.10})$$

Les valeurs discrètes de la fonction de distribution $\mu^*(\alpha_i, \beta_i)$ peuvent être déterminées à partir de données expérimentales extraites à partir de courbes de renversement de premier ordre ascendantes ou descendantes (Fig.10), en procédant de la manière suivante:

1. Construire l'approximation $F^*(\alpha, \beta)$ à partir des valeurs $F(\alpha_i, \beta_i)$ données par l'équation (II.5) pour un nombre (N) de courbes de renversement.
2. Calculer les valeurs discrètes $\mu^*(\alpha_i, \beta_i)$ de la fonction de distribution en utilisant l'équation (II.10) (il suffit de dériver deux fois la fonction $F^*(\alpha, \beta)$ en chaque point).

L'implémentation numérique de cette méthode présente plusieurs inconvénients, dont:

1. la nécessité de différentier la fonction $F^*(\alpha, \beta)$ obtenue expérimentalement.
2. l'amplification d'une erreur déjà présente dans la détermination de la fonction $F^*(\alpha, \beta)$.
3. le calcul de l'aimantation, implique une intégration double de la fonction de distribution ainsi déduite.

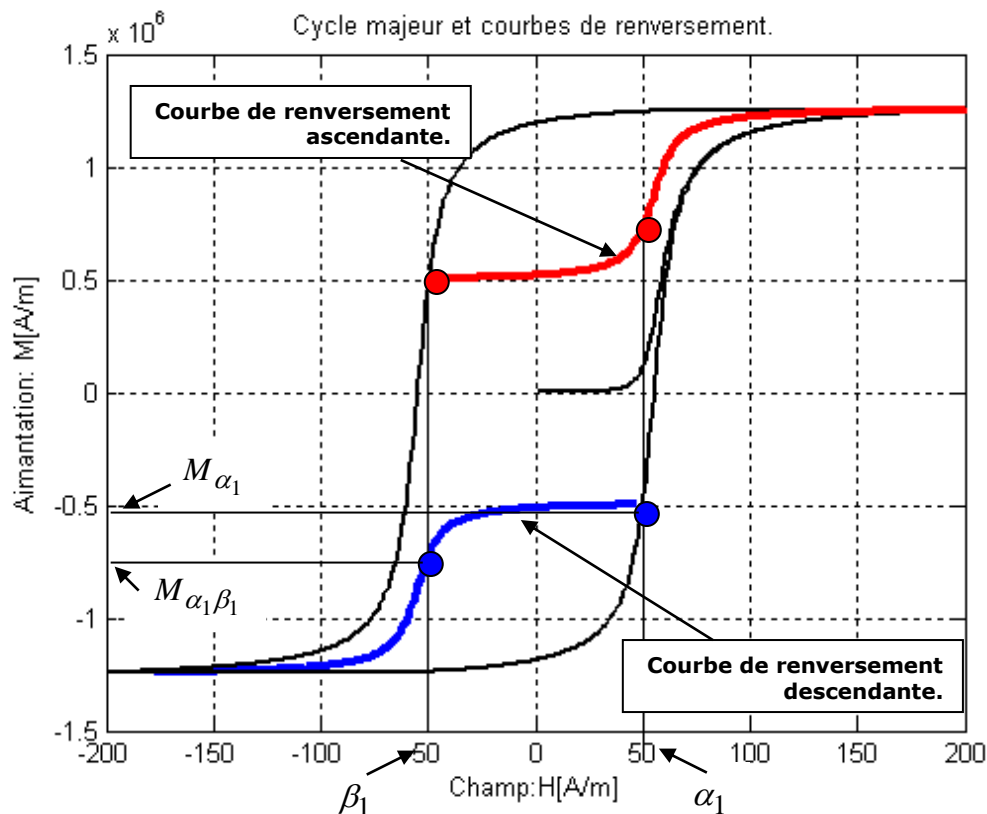


Fig. 10: Exemple d'un cycle majeur avec des courbes de renversement ascendante et descendante.

II.2.2. LA MÉTHODE DES CYCLES CENTRÉS

La méthode des cycles centrés est une méthode numérique d'identification de la fonction de distribution basée sur l'utilisation de cycles centrés [10].

Un cycle centré est un cycle obtenu depuis l'état désaimanté en augmentant l'excitation jusqu'à une valeur H_i puis en la faisant varier alternativement entre les amplitudes $-H_i$ et $+H_i$.

II.2.2.1. DÉVELOPEMENT DE LA MÉTHODE DES CYCLES CENTRÉS

Pratiquement, une dizaine de cycles centrés sont nécessaires à une bonne représentation du comportement hystérétique. En outre, on suppose que l'amplitude du champ d'excitation de chaque cycle centré est un multiple de l'amplitude du plus petit des cycles (Fig 11.b.).

Par la suite, les notations suivantes seront adoptées:

nc : représente le nombre de cycle centrés (le cycle majeur inclus).

ΔH : représente l'amplitude du plus petit des cycles centrés.

$H_{(n)} = n \Delta H$: représente l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ cycle centré.

Pour la présentation de la méthode et par souci de clarté, on considère une situation correspondant à ($nc = 4$).

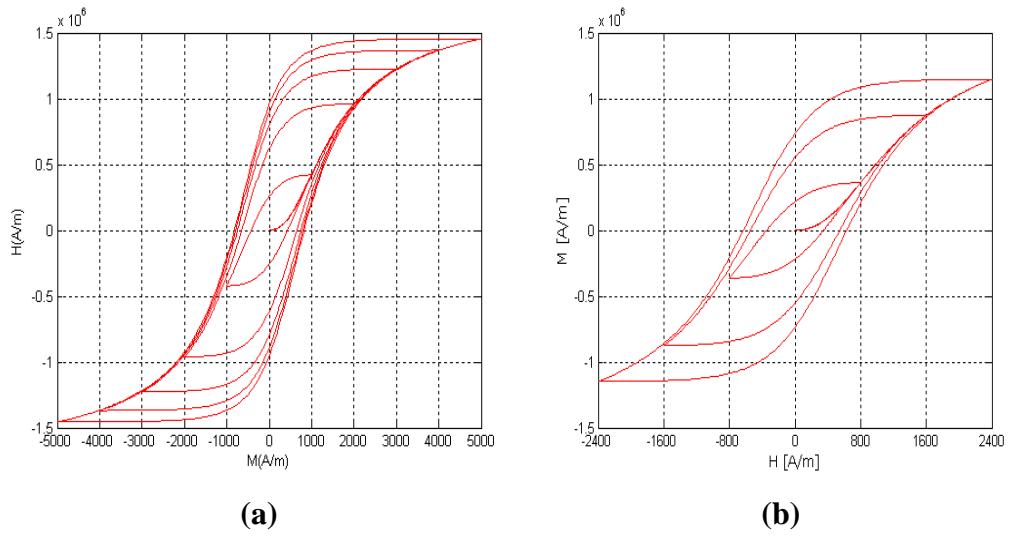


Fig. 11: (a) Exemple de faisceau de cycles centrés. (b) Exemple de cycles centrés avec ($\Delta H = Cte$).

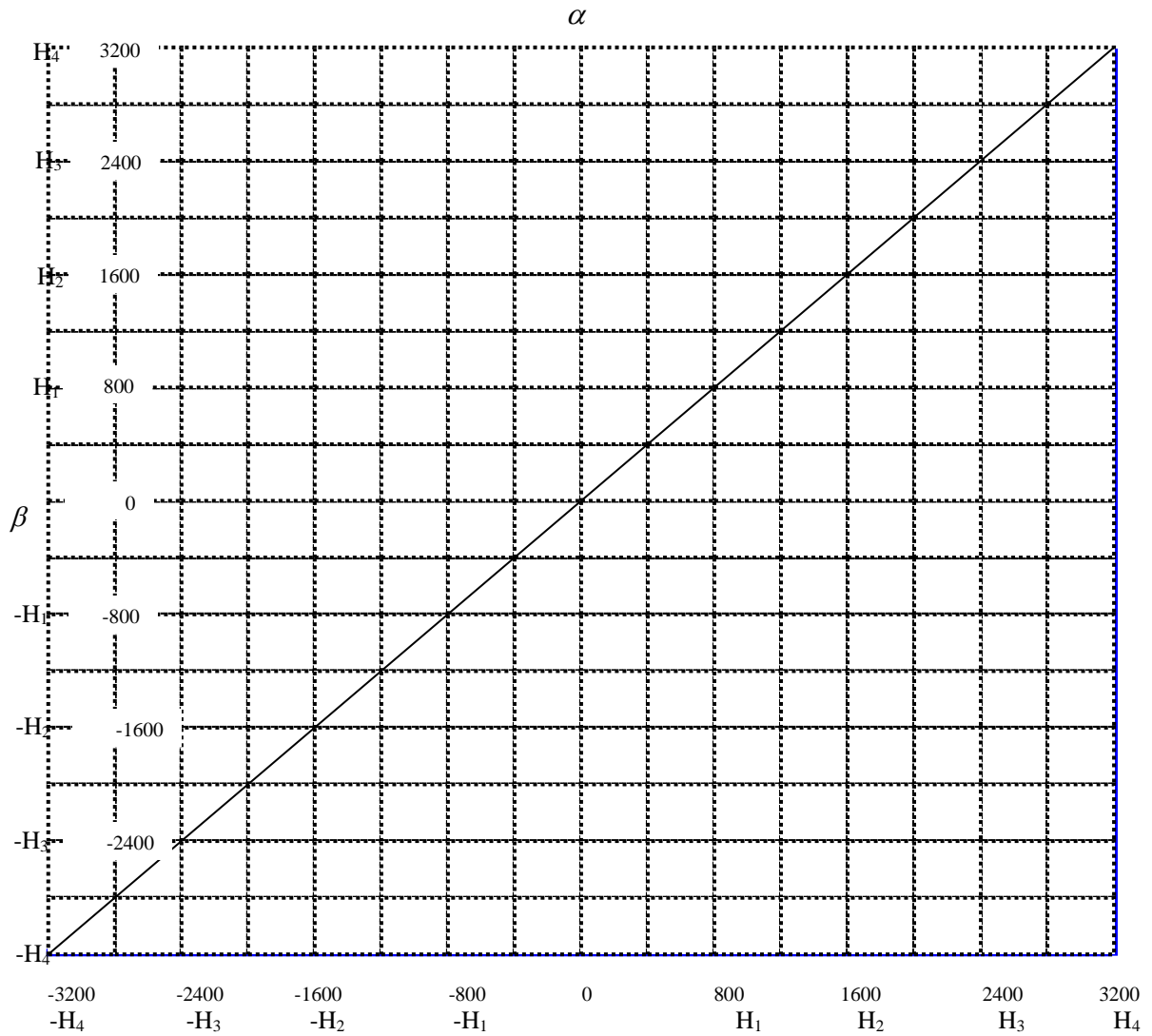


Fig. 12: Discretisation du triangle de Preisach pour 4 cycles centrés $\Delta H = 800 \text{ A/m}$.

D'une manière générale, pour nc cycles centrés, le nombre de (mailles) du triangle discrétisé est donné par:

$$N_m = nc(2nc + 1) \tag{II.11}$$

II.2.2.2. LES SOUS TRIANGLES DU TRIANGLE DE PREISACH

Dans la présentation de la méthode des cycles centrés, chaque cycle centré peut être représenté dans le plan de Preisach par un triangle appelé "sous triangle". Un sous triangle est une zone du triangle de Preisach qui constitue à elle seule un triangle fonctionnel. Le dernier sous triangle représente le triangle de Preisach.

La figure ci-dessous (Fig.13) représente les sous triangles d'un triangle de Preisach correspondant à quatre cycles centrés ($nc = 4$).

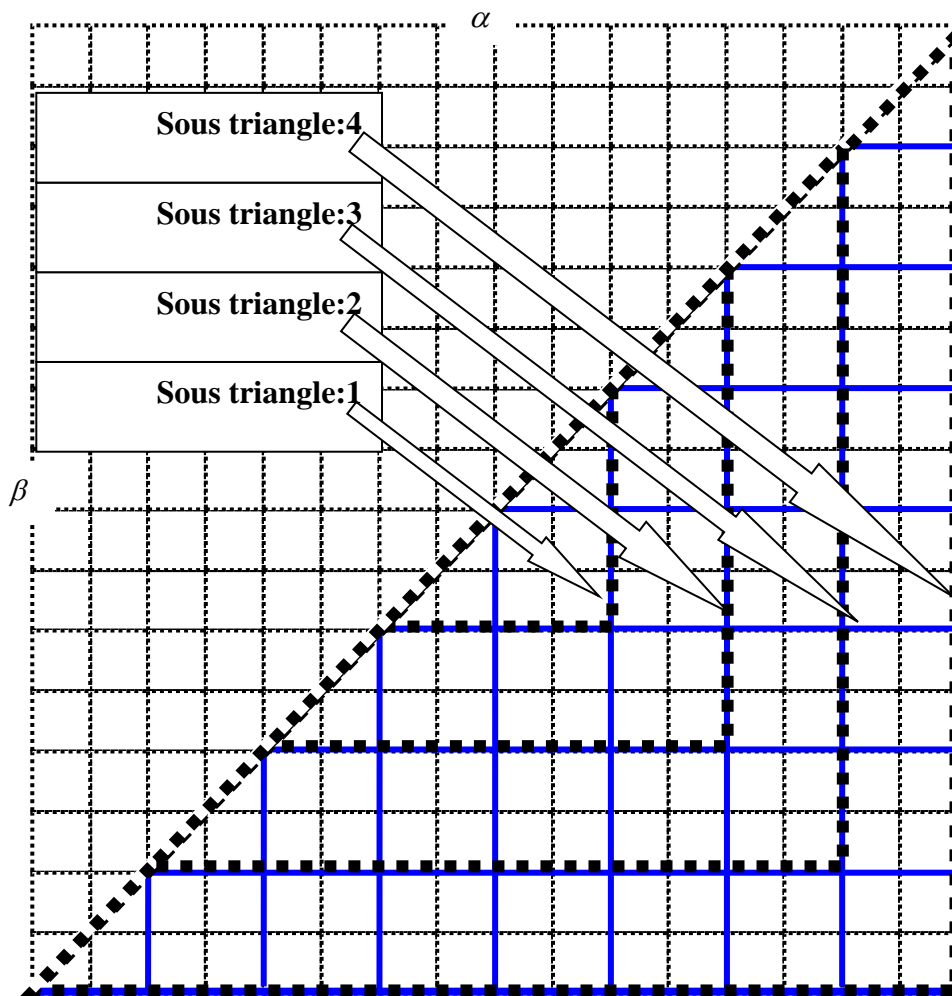


Fig. 13: Les sous triangles du triangle de Preisach ($nc = 4$).

II.2.2.3. CORRESPONDANCE ENTRE LES SOUS TRIANGLES ET LES CYCLES CENTRÉS

On considère le cycle mineur centré ($N^{\circ}1$) correspondant aux amplitudes $(\pm H_1)$ (Fig.13). Sur la figure ci-dessous (Fig.14), sont représentées sur le triangle de Preisach les différentes étapes correspondant à la formation de ce cycle.

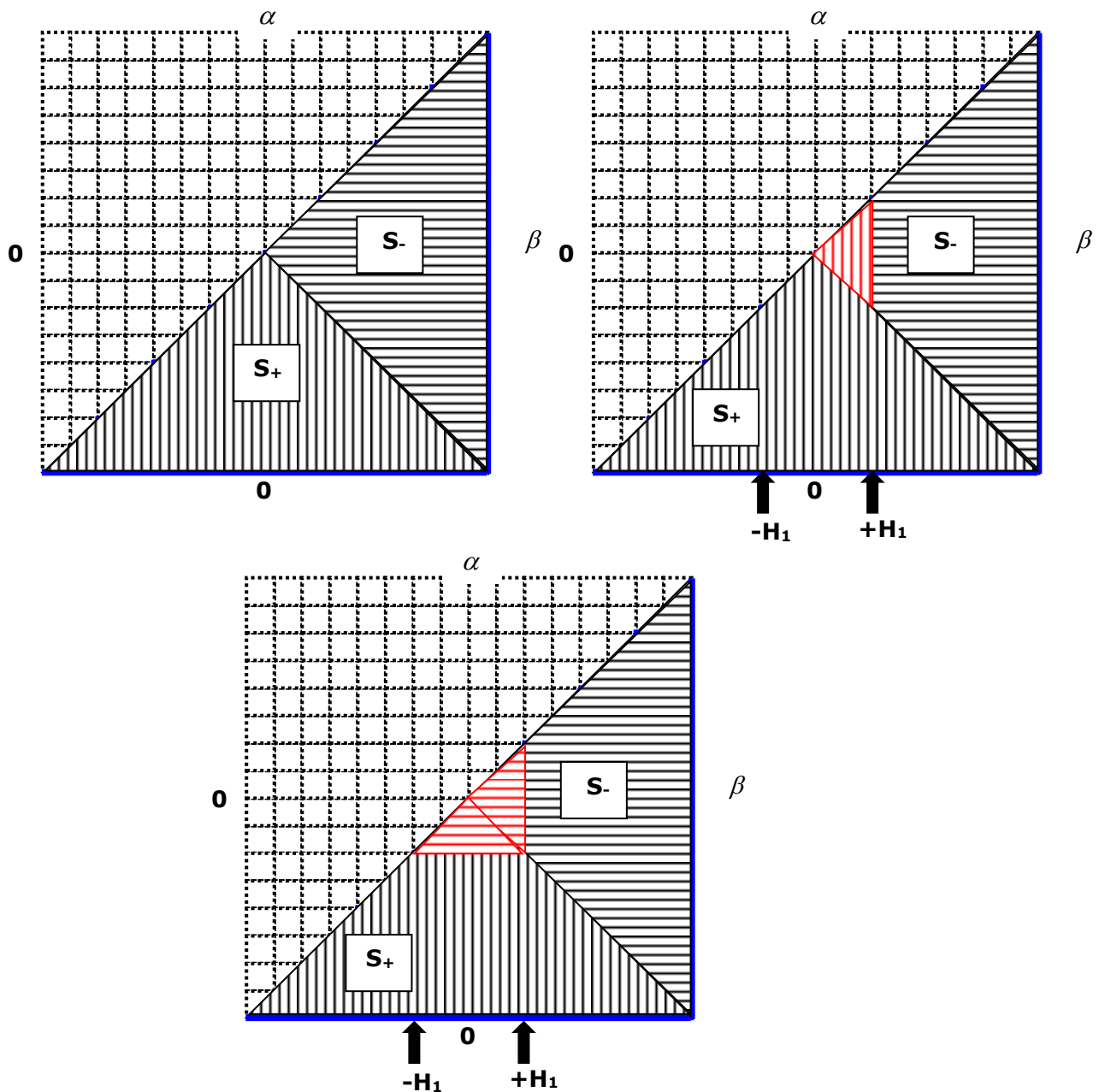


Fig. 14: Sous triangle $N^{\circ} 1$ correspondant au cycle centré d'amplitude $\pm H_1$.

Outre les correspondances montrées ci-dessus entre les sous triangles et les cycles centrés, chaque partie de cycle centré donne une information sur le contenu des mailles du triangle discrétisé de Preisach.

L'objectif à atteindre étant l'identification de l'information contenue dans ces mailles: il s'agit de la fonction de distribution de Preisach.

En prenant en compte l'hypothèse de la symétrie de la répartition de la fonction de distribution, sur les $nc(2nc + 1)$ mailles (valeurs de la fonction de distribution) répartie sur le triangle discrétisé, nous ne considérons finalement que $nc(nc + 1)$ valeurs inconnues (Fig.15).

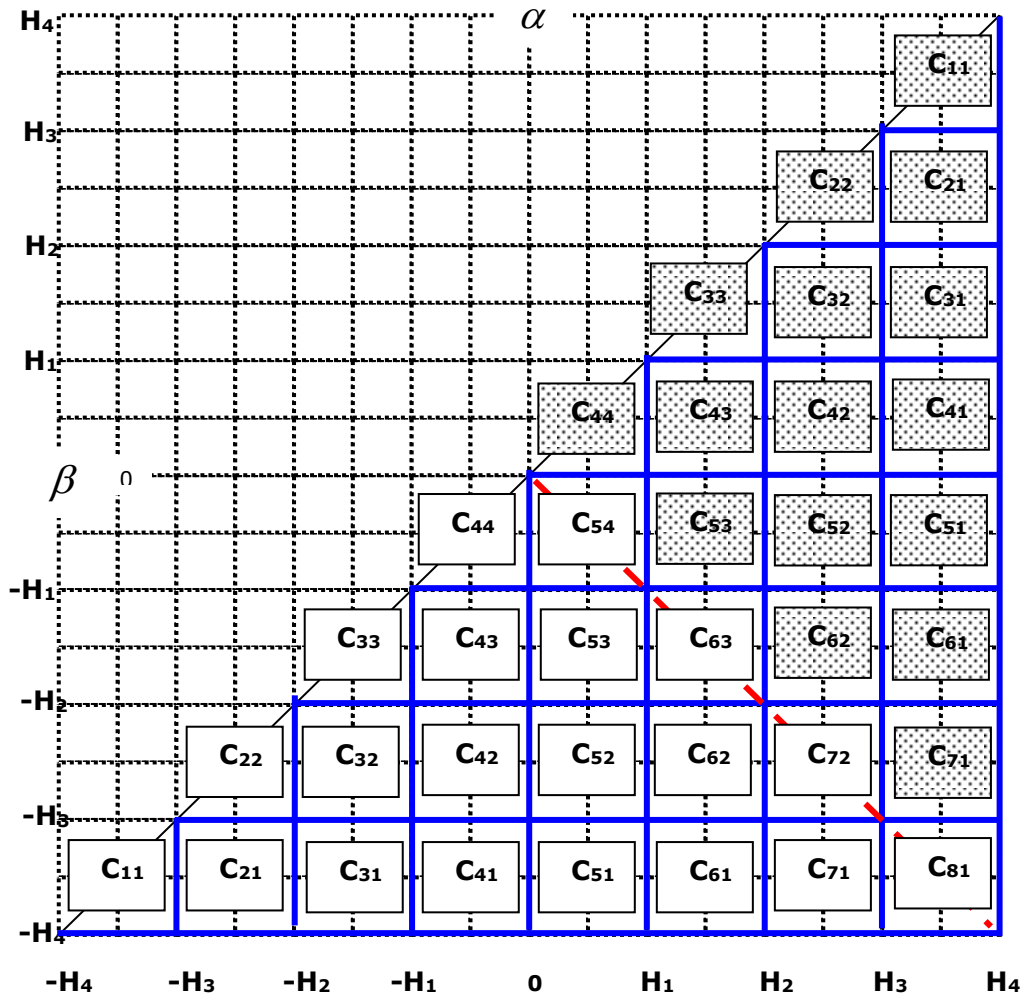




Fig. 15: Numérotation des mailles cas de $nc = 4$ cycles centrés
 (les cases  représentent les symétriques des cases .

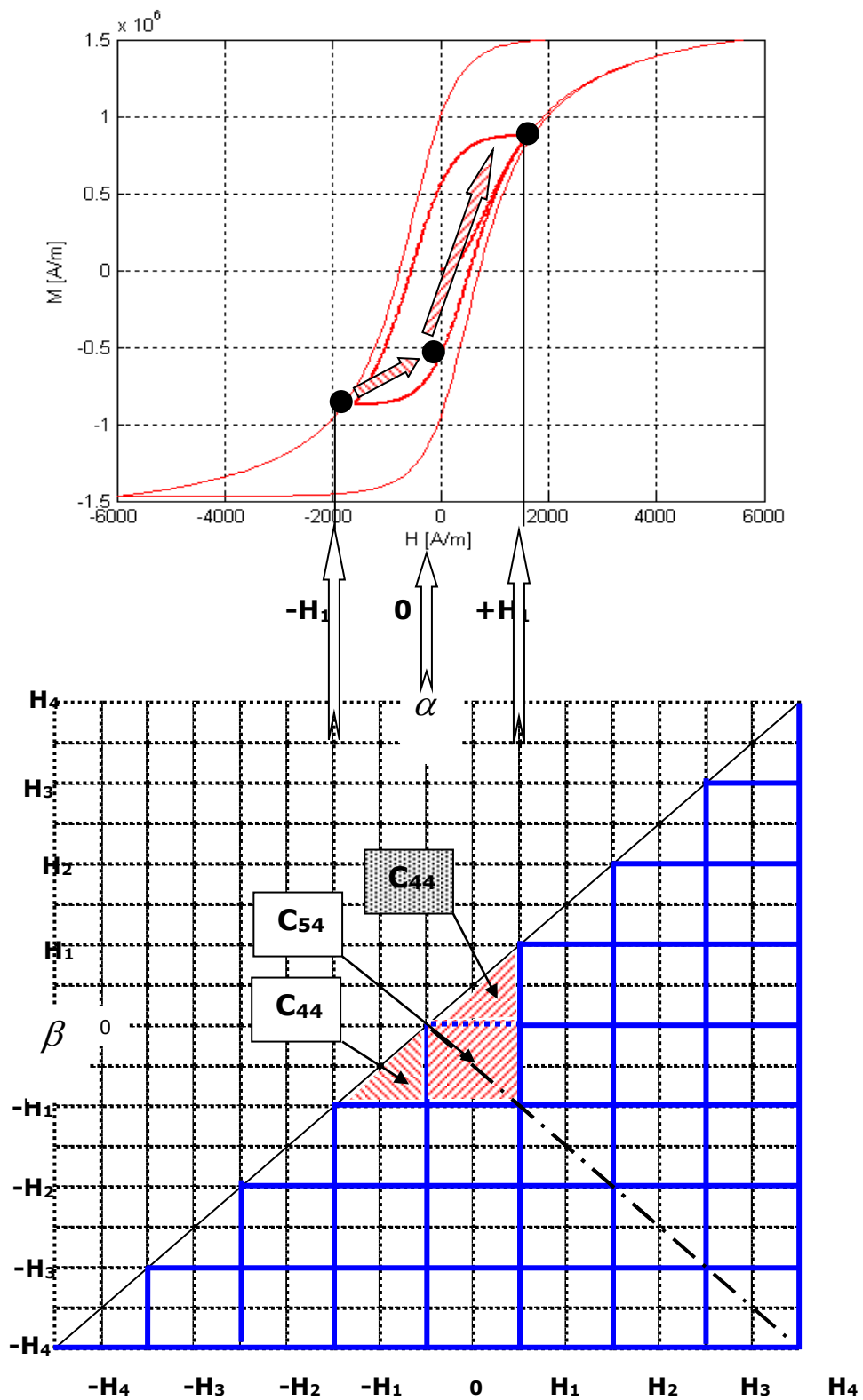


Fig. 16: Parallèle entre les contenus des mailles et les variations de l'aimantation pour le premier cycle centré.

Sur la Figure (Fig.16), on remarque que, pour le premier cycle centré, le passage de la valeur $-H_1$ à 0 de l'excitation (branche montante du cycle) ne fait intervenir que la maille C_{44} . Son contenu est donc déterminable à partir de la variation de la grandeur de sortie associée qui est l'aimantation (M) dont les valeurs discrètes sont notées ($M_{i,j}$) (Fig.17). De la même manière, la variation de

l'excitation faisant passer de la valeur 0 à $+H_1$, ne met en jeu que les mailles C_{54} et C_{44} (située au dessus de la maille C_{54}). Le contenu de la maille C_{44} ayant déjà été traité, il est alors possible de traiter le contenu de la maille C_{54} .

En poursuivant ce processus, le contenu de chacune des mailles du triangle de Preisach peut être déterminé. On fait par la suite l'hypothèse que la fonction de distribution est constante sur toute la surface de la maille correspondante. Sous cette hypothèse, l'intégrale de la fonction de distribution sur une maille s'écrit directement comme le produit de la fonction de distribution dans cette maille par la surface de la maille:

$$\iint_{Maille(i,j)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = S_{(i,j)} \mu(i, j) = \mu(i, j) \quad (\text{II.12})$$

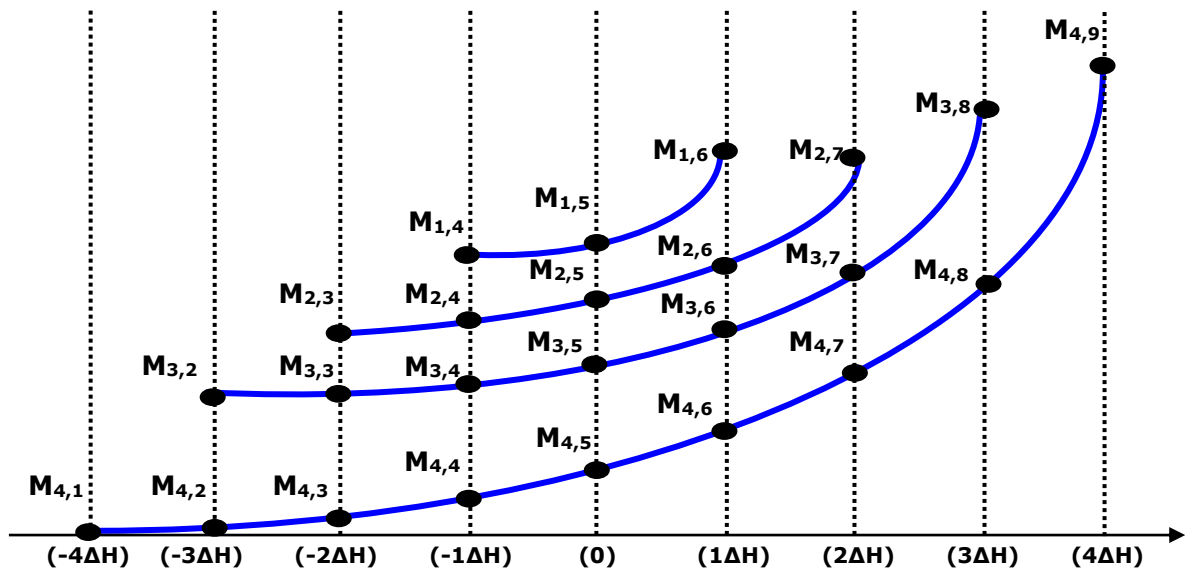


Fig. 17: Notations de l'aimantation relatives au calcul des variations ΔM (branches ascendantes pour $nc = 4$ cycles centrés).

II.2.2.4. MÉTHODOLOGIE DE CALCUL

Notations:

nc : représente le nombre de cycle centrés considérés (le cycle majeur compris).

$m = nc(nc + 1)$: représente le nombre total de valeurs discrètes de la fonction de distribution à calculer (en prenant en compte la symétrie de la fonction de distribution).

Les valeurs discrètes de la fonction de distribution constituent les inconnues du système algébrique à résoudre. Pour chaque cycle centré (i) les valeurs sont:

$$\{\mu\}_{(nc(nc+1),1)} = \left\{ \begin{array}{l} \mu_{nc,nc} \\ \mu_{nc+1,nc} \\ \mu_{nc-1,nc-1} \\ \dots \\ \mu_{nc+2,nc-1} \\ \mu_{nc-2,nc-2} \\ \dots \\ \mu_{nc+3,nc-2} \\ \dots \\ \dots \\ \mu_{nc-i+k,nc-(i-1)} \\ \dots \\ \mu_{nc+i,nc-(i-1)} \\ \dots \\ \dots \\ \mu_{1,1} \\ \dots \\ \mu_{2nc,1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{correspondantes au 1}^{\text{er}} \text{ sous triangle: 1}^{\text{er}} \text{ cycle } \mu_{ij} \\ \\ \text{correspondantes au 2}^{\text{eme}} \text{ sous triangle: 2}^{\text{eme}} \text{ cycle } \mu_{ij} \\ \\ \text{correspondantes au 3}^{\text{eme}} \text{ sous triangle: 3}^{\text{eme}} \text{ cycle } \mu_{ij} \\ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \text{correspondantes au } i^{\text{eme}} \text{ sous triangle: } i^{\text{eme}} \text{ cycle } \mu_{ij} \\ \quad \quad \quad k = 1, \dots, 2i \\ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \text{correspondantes au } nc^{\text{eme}} \text{ sous triangle: } \mu_{ij} \\ \quad \quad \quad nc^{\text{eme}} \text{ cycle} \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

Les indices des valeurs discrètes de la fonction de distribution correspondantes au (i^{eme} cycle) sont données par les relations suivantes:

$$\mu_{lm} \left\{ \begin{array}{l} l = nc - i + k, \quad (k = 1, 2i) \\ m = nc - (i - 1) \end{array} \right\} \quad (\text{II.14})$$

En considérant les notations relatives aux valeurs discrètes de l'aimantation pour chaque cycle centré (Fig.17), les variations de l'aimantation pour chaque cycle centré (i) sont rassemblées dans le vecteur noté $\{\Delta M\}$:

$$\{\Delta M\}_{(nc(nc+1),1)} = \left\{ \begin{array}{l}
M_{1,nc+1} - M_{1,nc} \\
M_{1,nc+2} - M_{1,nc+1} \\
M_{2,nc} - M_{2,nc-1} \\
M_{2,nc+1} - M_{2,nc} \\
M_{2,nc+2} - M_{2,nc+1} \\
M_{2,nc+3} - M_{2,nc+2} \\
\dots\dots \\
\dots\dots \\
M_{i,((nc+k)-(i-1))} - M_{i,((nc+k)-(i))} \\
\dots\dots \\
M_{i,((nc+k)-(i-1))} - M_{i,((nc+k)-(i))} \\
\dots\dots \\
\dots\dots \\
M_{nc,(k+1)} - M_{nc,(k)} \\
\dots\dots \\
M_{nc,(2nc+1)} - M_{nc,(2nc)}
\end{array} \right. \left. \begin{array}{l}
\text{er cycle 1} \\
\text{\u00e8me cycle 2} \\
\text{\u00e8me cycle } i \\
k = 1, 2i \\
\text{\u00e8me cycle } nC
\end{array} \right.$$

(II.15)

Pour chaque cycle centr\u00e9 (i), on dispose de ($2i$) variations de l'aimantation donn\u00e9es par l'expression suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l}
M_{i,((nc+k)-(i-1))} - M_{i,((nc+k)-i)} \\
k = 1, \dots, 2i
\end{array} \right. \quad (II.16)$$

Au total, et en tenant compte de (II.12), on dispose d'un syst\u00e8me alg\u00e8brique de ($nc(nc+1)$) \u00e9quations:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Delta M_{(1)}^{(1)} = M_{1,nc+1} - M_{1,nc} = 2\mu_{nc,nc} \\
\Delta M_{(2)}^{(1)} = M_{1,nc+2} - M_{1,nc+1} = 2\mu_{nc+1,nc} + \Delta M_{(1)}^{(1)} \\
\Delta M_{(1)}^{(2)} = M_{2,nc} - M_{2,nc-1} = 2\mu_{nc-1,nc-1} \\
\Delta M_{(2)}^{(2)} = M_{2,nc+1} - M_{2,nc} = 2\mu_{nc,nc-1} + \Delta M_{(1)}^{(1)} \\
\Delta M_{(3)}^{(2)} = M_{2,nc+2} - M_{2,nc+1} = 2\mu_{nc+1,nc-1} + \Delta M_{(2)}^{(1)} \\
\Delta M_{(4)}^{(2)} = M_{2,nc+3} - M_{2,nc+2} = 2\mu_{nc+2,nc-1} + 2 \sum_{m=1}^{2i-1=3} \mu_{nc-2+m,nc-1} \\
\dots\dots\dots \\
\Delta M_{(1)}^{(i)} = M_{i,nc-i+2} - M_{i,nc+1-i} = 2\mu_{nc-i+1,nc-(i-1)} \\
\Delta M_{(2)}^{(i)} = M_{i,nc+3-i} - M_{i,nc+2-i} = 2\mu_{nc+2-i,nc-(i-1)} + \Delta M_{(1)}^{(i-1)} \\
\Delta M_{(3)}^{(i)} = M_{i,nc+4-i} - M_{i,nc+3-i} = 2\mu_{nc+3-i,nc-(i-1)} + \Delta M_{(2)}^{(i-1)} \\
\dots\dots\dots \\
\Delta M_{(2i)}^{(i)} = M_{i,nc+i+1} - M_{i,nc+i} = 2\mu_{nc+i,nc-(i-1)} + 2 \sum_{m=1}^{2i-1} \mu_{nc-i+m,nc-(i-1)} \\
\dots\dots\dots \\
\Delta M_{(1)}^{(nc)} = M_{nc,2} - M_{nc,1} = 2\mu_{1,1} \\
\dots\dots \\
\Delta M_{(2nc)}^{(nc)} = M_{nc,2nc+1} - M_{nc,2nc} = 2\mu_{2nc,1} + 2 \sum_{m=1}^{2nc-1} \mu_{m,1}
\end{array} \right.$$

(II.17)

Sous forme condensée, le système algébrique précédent s'écrit:

$$[Mat]_{\{\mu\}} = \frac{1}{2} \{\Delta M\} \tag{II.18}$$

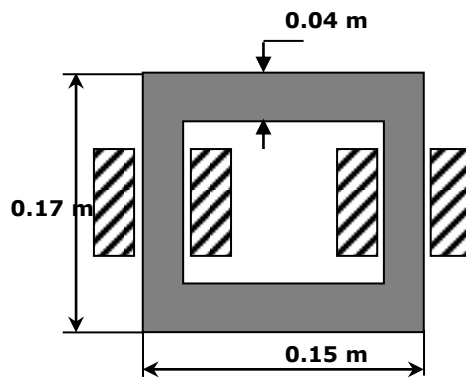
Pour ($nc = 4$) cycles centrés, le système précédent (II.18) s'écrit:

$$\begin{pmatrix}
10000000000000000000 \\
11000000000000000000 \\
00100000000000000000 \\
10010000000000000000 \\
11001000000000000000 \\
00111100000000000000 \\
00000010000000000000 \\
00100001000000000000 \\
10010000100000000000 \\
11001000010000000000 \\
00111100001000000000 \\
00000011111100000000 \\
00000000000010000000 \\
00000010000001000000 \\
00100001000000100000 \\
10010000100000010000 \\
11001000010000001000 \\
00111100000100000100 \\
00000011111100000010 \\
00000000000011111111
\end{pmatrix}
= \frac{1}{2M_s}
\begin{pmatrix}
\mu_{44} \\
\mu_{54} \\
\mu_{33} \\
\mu_{43} \\
\mu_{53} \\
\mu_{63} \\
\mu_{22} \\
\mu_{32} \\
\mu_{42} \\
\mu_{52} \\
\mu_{62} \\
\mu_{72} \\
\mu_{11} \\
\mu_{21} \\
\mu_{31} \\
\mu_{41} \\
\mu_{51} \\
\mu_{61} \\
\mu_{71} \\
\mu_{81}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_{15} - M_{14} \\
M_{16} - M_{15} \\
M_{24} - M_{23} \\
M_{25} - M_{24} \\
M_{26} - M_{25} \\
M_{27} - M_{26} \\
M_{33} - M_{32} \\
M_{34} - M_{33} \\
M_{35} - M_{34} \\
M_{36} - M_{35} \\
M_{37} - M_{36} \\
M_{38} - M_{37} \\
M_{42} - M_{41} \\
M_{43} - M_{42} \\
M_{44} - M_{43} \\
M_{45} - M_{44} \\
M_{46} - M_{45} \\
M_{47} - M_{46} \\
M_{48} - M_{47} \\
M_{49} - M_{48}
\end{pmatrix}
\tag{II.19}$$

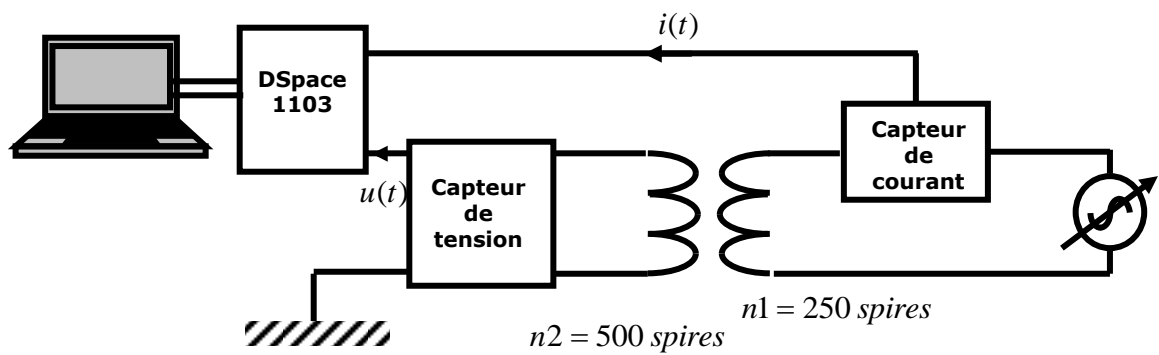
La résolution numérique du système (II.19) permet la détermination des valeurs discrètes de la fonction de distribution correspondant au triangle de Preisach précédemment discrétisé (Fig.15).

II.2.2.5. MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE

La méthode numérique précédemment exposée est basée sur des mesures expérimentales relevées à partir de la génération de faisceaux de cycles centrés. La figure ci-dessous (Fig.18) montre le dispositif expérimental utilisé au sein du LSPIEB (Laboratoire des Systèmes de propulsion – d'Induction Electromagnétique de Batna) pour générer de tels faisceaux.



(a)



(b)

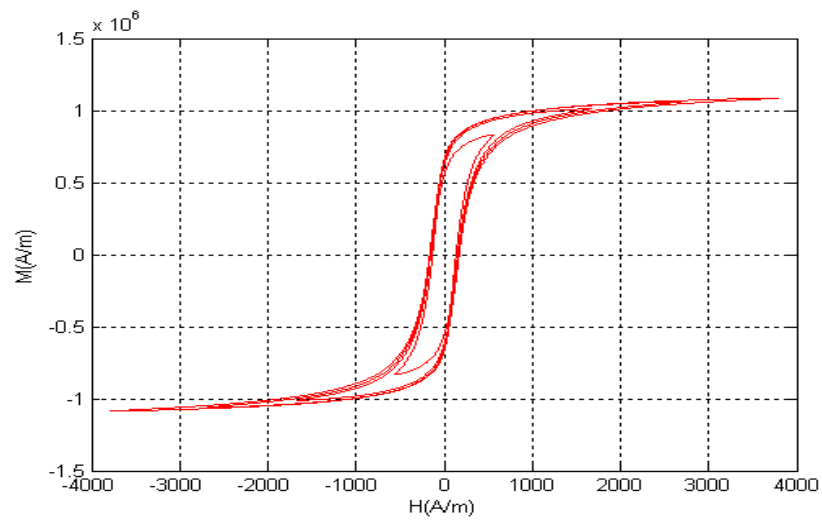
Fig. 18: (a) Circuit magnétique étudié. (b) Schéma électrique du dispositif expérimental.

1. En utilisant un pas de tension constant, on obtient un pas d'induction (aimantation) constant.
2. En utilisant un pas de courant constant, on obtient un pas d'intensité de champ constant.

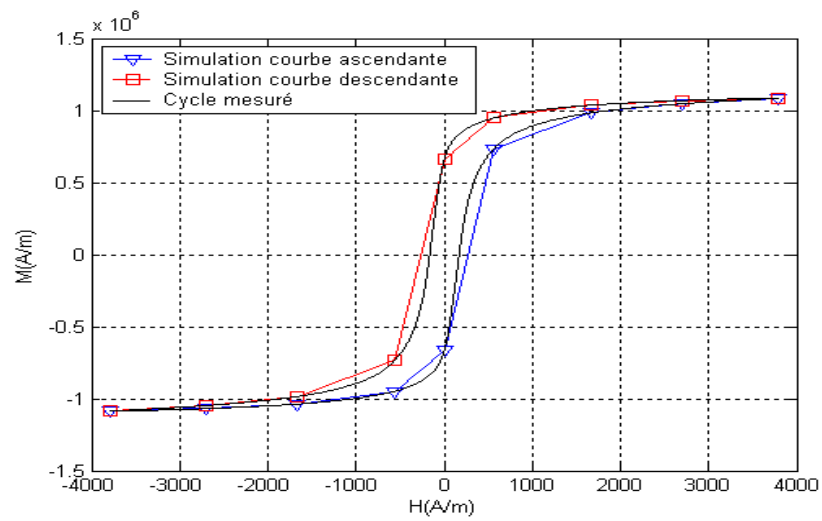
II.2.2.6. RÉSULTATS

Nous avons réalisé un programme de calcul des valeurs de la fonction de distribution utilisant des données expérimentales relevées à partir de cycles centrés expérimentaux. Les résultats présentés ci-dessous concernent 4, 8 et 16 cycles centrés (le cycle majeur compris).

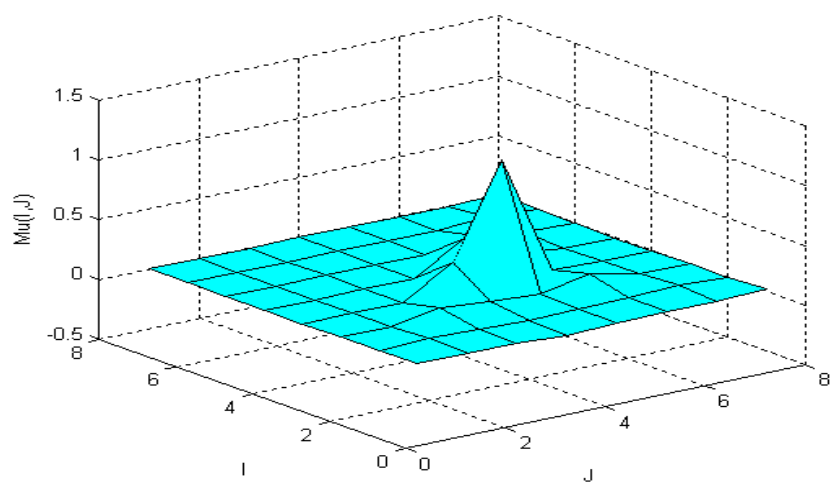
1. Résultats des simulations pour 4 cycles centrés:



(a)



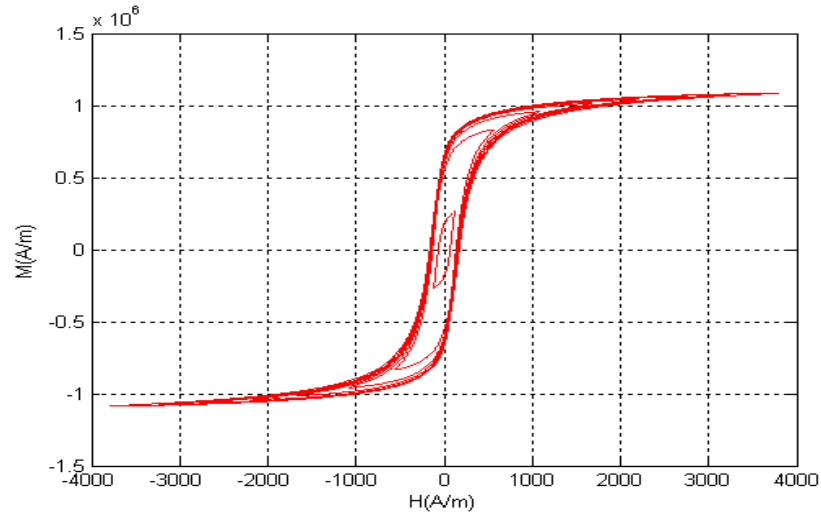
(b)



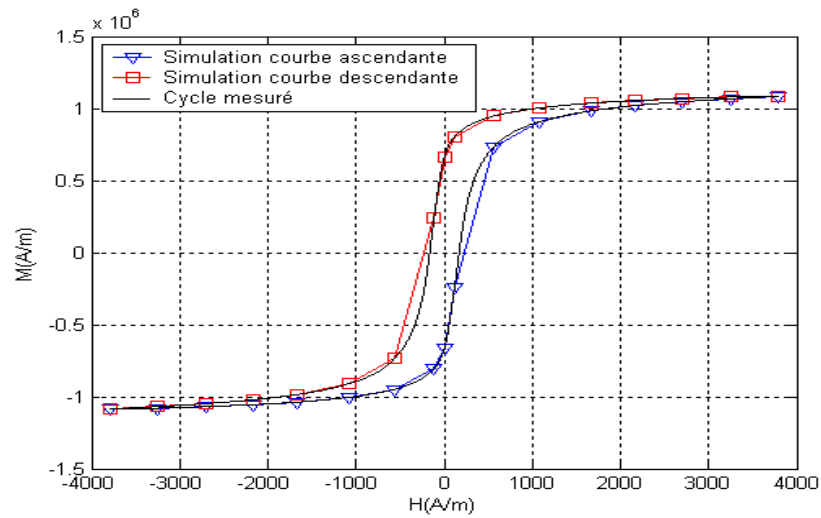
(c)

Fig. 19: (a) Faisceau de 4 cycles centrés. (b) Cycles majeurs expérimental et simulé. (c) Fonction de distribution.

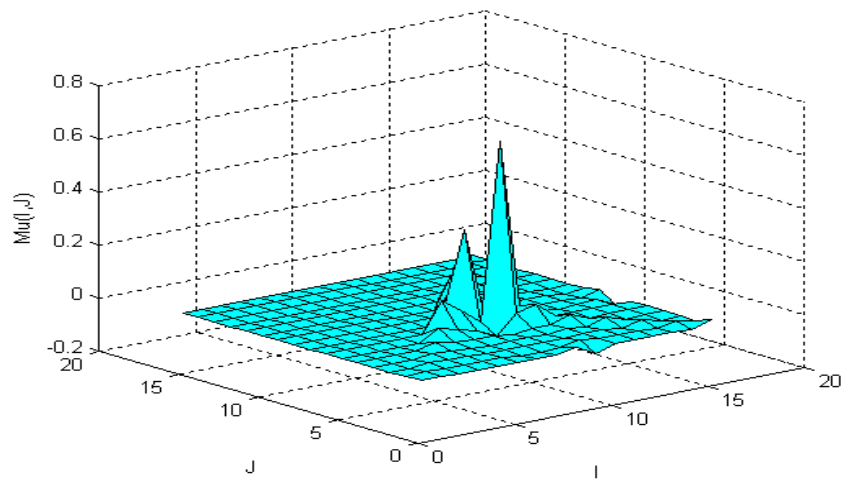
2. Résultats des simulations pour 8 cycles centrés:



(a)



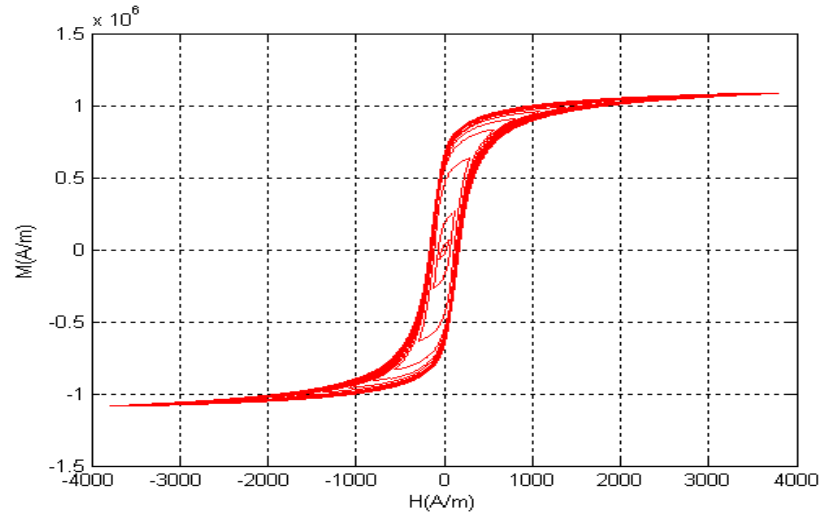
(b)



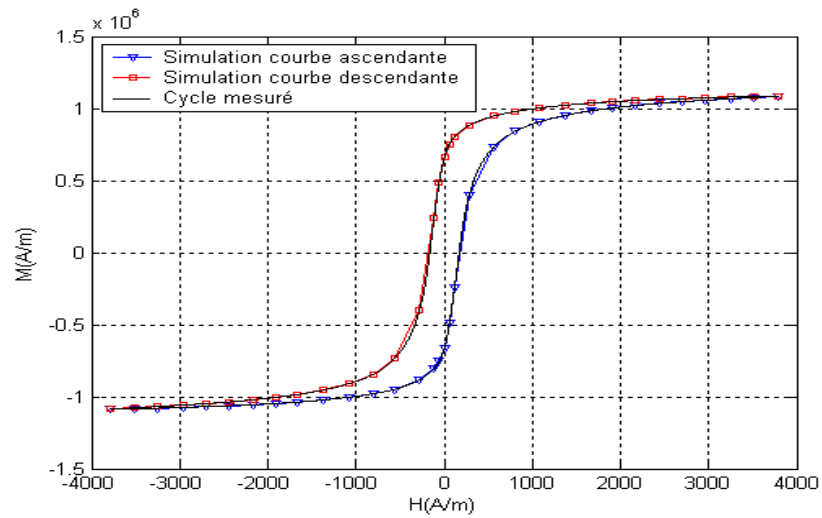
(c)

Fig. 20: (a) Faisceau de 8 cycles centrés. (b) Cycles majeurs expérimental et simulé. (c) Fonction de distribution.

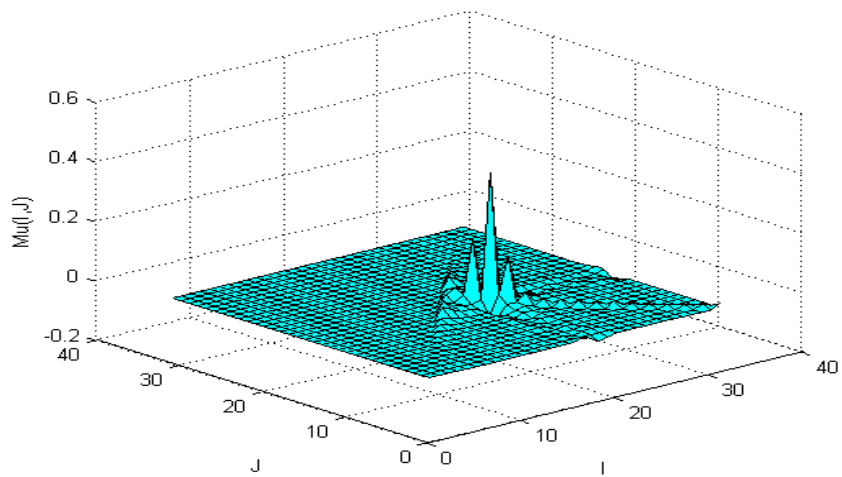
3. Résultats des simulations pour 16 cycles centrés:



(a)



(b)



(c)

Fig. 21: (a) Faisceau de 16 cycles centrés. (b) Cycles majeurs expérimental et simulé. (c) Fonction de distribution.

Nous constatons que l'augmentation du nombre de cycles centrés (on passe de 4 cycles centrés à 8 cycles centrés puis à 16 cycles centrés) permet d'obtenir une meilleure représentation du cycle expérimental par cette méthode (Fig.19.b, Fig.20.b et Fig.21.b).

La simulation numérique donne des valeurs très proches du cycle expérimental dans les zones de saturation.

L'augmentation du nombre de cycles entraîne par ailleurs une diminution de la taille de la surface des cases C_{ij} ce qui est en accord avec l'hypothèse de la distribution uniforme de la fonction de distribution par maille.

On remarque que la fonction de distribution comporte des valeurs négatives (Fig.19.c, Fig.20.c et Fig.21.c) et ceci dans des régions situées loin des cases triangulaires adjacentes à la droite $\alpha = \beta$.

Lors de l'utilisation du modèle (somme de valeurs), l'influence des valeurs négatives devient négligeable et la perméabilité (susceptibilité) reste positive, ce qui est cohérent avec le phénomène de l'hystérésis magnétique.

II.2.3. FORMULATION DE LA MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION[©]

En se basant sur l'idée développée dans la méthode de Mayergoyz et aussi sur le principe de base de la méthode des cycles centrés présentés précédemment, nous avons dans le cadre de cette thèse développé une nouvelle méthode numérique d'identification de la fonction de distribution de Preisach dont la mise en œuvre nécessite la connaissance de peu de données expérimentales extraites de la courbe de première aimantation (fournie généralement par les fabricants et fournisseurs de matériaux ferromagnétiques).

Dans les développements de cette nouvelle méthode, nous effectuerons quelques hypothèses simplificatrices :

- Lors de la discrétisation du triangle de Preisach chaque cellule $C_{(i,j)}$ du triangle de Preisach discretisé, représente une fonction de distribution $v(\alpha, \beta)$ constante:

$$\iint_{C_{(i,j)}} v(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = S_{(i,j)} \cdot v_{(i,j)} = v_{ij} \quad (\text{II.20})$$

où : $S_{(i,j)}$ est l'aire de la cellule $C_{(i,j)}$, $v_{(i,j)}$ la valeur discrète de la fonction de distribution de Preisach et v_{ij} la valeur discrète de la fonction de distribution multipliée par la surface de la cellule.

- Symétrie de la fonction de distribution par rapport à la ligne $(\alpha = -\beta)$ du triangle de Preisach .

On considère:

- (p) points expérimentaux $[(H_i, M_i), i=1, p]$ extraits directement de la courbe de première aimantation (Fig. 22.a) avec ΔH constant.

$$\Delta H = H_{i+1} - H_i \quad (\text{II.21})$$

- (p) points symétriques des points expérimentaux considérés par rapport à l'origine (0,0) notés $[(-H_i, -M_i), i=1, p]$ (Fig. 22.a).
- un nuage de (p^2) points créés, notés (H_{ij}^*, M_{ij}^*) et définis dans le plan (H, M) (Fig. 22.b.) par:

$$\begin{cases} -H_s < H_{ij}^* < +H_s \\ -M_s < M_{ij}^* < M_{fmc}(H) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Où $M_{fmc}(H)$ est la courbe de première aimantation complétée par sa symétrique par rapport à l'origine (0,0).

H_s et M_s sont respectivement le champ de saturation et l'aimantation à saturation obtenus à partir de la courbe de première aimantation.

Les points créés sont utilisés pour une discrétisation complète du triangle de Preisach. Ces derniers sont arrangés dans le plan (H, M) de la manière suivante:

a/ Positionnement horizontal:

Pour le $k^{\text{ème}}$ point expérimental (H_k, M_k) , on définit $[(H_{kj}^*, M_{kj}^*), j=1, 2k-1]$ points créés positionnés dans la région du plan (H, M) délimités par les droites $(H = H_k)$ et $(H = -H_k)$:

$$\begin{cases} H_{kj}^* < +H_k \\ -H_k < H_{kj}^* \end{cases} \quad (\text{II.23-1})$$

Il est à noter que les points créés sont équidistants:

$$\Delta H^* = \Delta H = H_{kj+1}^* - H_{kj}^* \quad (\text{II.23-2})$$

b/ Positionnement vertical:

La valeur de l'aimantation M_{kj}^* est déterminée en utilisant une grandeur notée δM_k qui représentera la variation de l'aimantation entre deux points expérimentaux successifs. Un facteur noté λ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) est utilisé pour le positionnement vertical des points créés (H_{kj}^*, M_{kj}^*) . Ainsi, pour chaque point expérimental, on obtiendra $(p-k)$ points créés arrangés verticalement en dessous.

Les conditions de l'équation (II.22) exigent que le facteur λ soit positif: $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Après l'étape de positionnement de tous les points dans le plan (H, M) et en prenant en compte la symétrie de la fonction de distribution de Preisach, on utilisera $p(p+1)$ cellules dans le triangle discrétisé de Preisach.

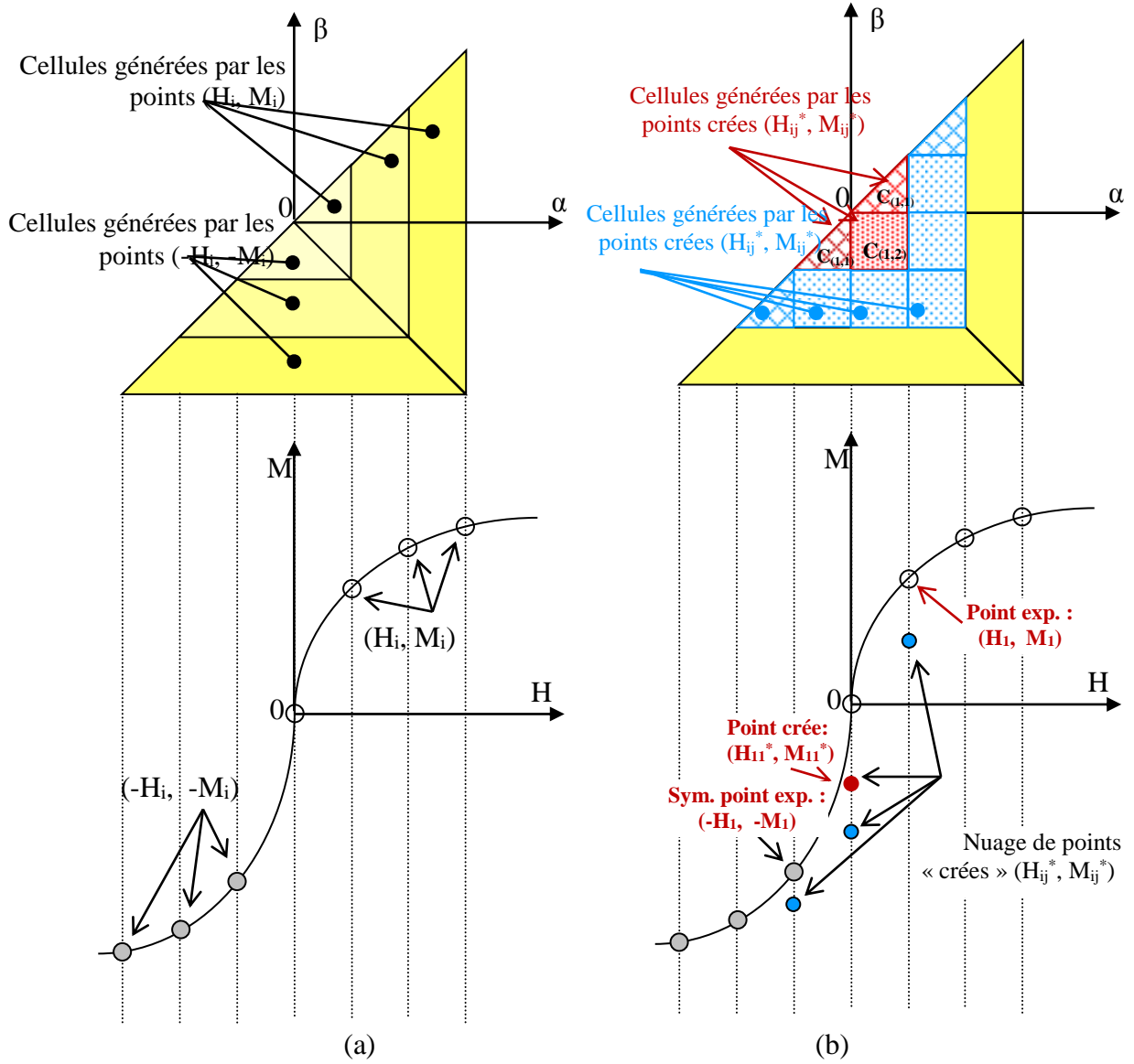


Fig.22 : Interprétation géométrique de la méthode proposée: (a) triangle de Preisach discretisé en considérant les points expérimentaux et leurs symétriques (b) Effet des points créés sur la discrétisation.

Pour bien expliquer le processus utilisé dans la nouvelle méthode d'identification développée, on considère $p=3$ points expérimentaux extraits de la courbe de première aimantation et leurs symétriques : $[(-H_3, -M_3), (-H_2, -M_2), (-H_1, -M_1), (H_0, M_0), (H_1, M_1), (H_2, M_2), (H_3, M_3)]$

Pour le premier point expérimental (H_1, M_1) et son symétrique $(-H_1, -M_1)$ (Fig. 22.b), dans le but d'identifier le contenu de la cellule $C_{(1,1)}$ correspondant à la valeur discrète de la fonction de distribution ν_{11} , on utilise le point crée (H_{11}^*, M_{11}^*) arrangé verticalement au dessous du point (H_0, M_0) (Fig. 22.b) et défini comme suit:

$$\begin{cases} -M_1 < M_{11}^* < M_1 < 0 \\ H_{11}^* = 0 \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

La valeur de l'aimantation M_{11}^* est déterminée en utilisant la grandeur note δM_1 qui représente la variation de l'aimantation entre les points expérimentaux $[(-H_1, -M_1), (H_0, M_0)]$ et le facteur λ qui permet le positionnement du point (H_{11}^*, M_{11}^*) par rapport aux points expérimentaux $[(-M_1, -H_1), (H_0, M_0)]$:

$$\delta M_1 = M_1 - (M_0) \quad (\text{II.25})$$

$$M_{11}^* = M_0 - \lambda \delta M_1 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{II.26})$$

La variation de l'aimantation entre $(-M_1)$ and (M_{11}^*) fait intervenir uniquement la cellule $C_{(1,1)}$ (Fig. 22.b), on aura :

$$M_{11}^* - (-M_1) = 2 \iint_{C_{(1,1)}} v(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 2\nu_{11} \quad (\text{II.27})$$

Ainsi, on peut déduire la valeur de la fonction de distribution correspondant à la cellule $C_{(1,2)}$ (Fig. 22.b):

$$(+M_1) - M_{11}^* = 2 \iint_{C_{(1,1)+C_{(1,2)}}} v(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 2(\nu_{11} + \nu_{12}) \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{cases} \Delta M_{(1)}^{(1)} = M_{11}^* - (-M_1) = 2\nu_{11} \\ \Delta M_{(2)}^{(1)} = M_1 - M_{11}^* = 2\nu_{12} + \Delta M_{(1)}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

À cette étape, nous avons déterminé les valeurs discrètes de la fonction de distribution ν_{11}, ν_{12} correspondants à la variation de l'aimantation entre $(-M_1, -M_{11}^*, M_1)$.

Pour le deuxième point expérimental (H_2, M_2) et son symétrique $(-H_2, -M_2)$, on utilise 3 points créés (H_{21}^*, M_{21}^*) , (H_{22}^*, M_{22}^*) et (H_{23}^*, M_{23}^*) positionnés verticalement et respectivement en dessous des points $(-H_1, -M_1)$, (H_{11}^*, M_{11}^*) , (H_1, M_1) et définis comme suit:

$$\begin{cases} \delta M_2 = M_2 - (M_1) \\ M_{21}^* = -M_1 - \lambda \delta M_2 \\ M_{22}^* = -M_{11}^* - \lambda \delta M_2 \\ M_{23}^* = M_1 - \lambda \delta M_2 \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{cases} \Delta M_{(1)}^{(2)} = M_{21}^* - (-M_2) = 2\nu_{22} \\ \Delta M_{(2)}^{(2)} = M_{22}^* - M_{21}^* = 2\nu_{23} + \Delta M_{(1)}^{(2)} \\ \Delta M_{(3)}^{(2)} = M_{23}^* - M_{22}^* = 2\nu_{24} + \Delta M_{(2)}^{(2)} \\ \Delta M_{(4)}^{(2)} = (M_2) - M_{23}^* = 2 \sum_{k=2}^5 \nu_{2k} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Pour le troisième point expérimental (H_3, M_3) et son symétrique $(-H_3, -M_3)$, on utilise 5 points créés notés (H_{31}^*, M_{31}^*) , (H_{32}^*, M_{32}^*) , (H_{33}^*, M_{33}^*) , (H_{34}^*, M_{34}^*) et (H_{35}^*, M_{35}^*) positionnés verticalement et respectivement en dessous des points $(-H_2, -M_2)$, (H_{21}^*, M_{21}^*) , (H_{22}^*, M_{22}^*) , (H_{23}^*, M_{23}^*) et (H_3, M_3) et définis comme suit:

$$\begin{cases} \delta M_3 = M_3 - (M_2) \\ M_{31}^* = -M_2 - \lambda \delta M_3 \\ M_{32}^* = -M_{21}^* - \lambda \delta M_3 \\ M_{33}^* = -M_{22}^* - \lambda \delta M_3 \\ M_{34}^* = -M_{23}^* - \lambda \delta M_3 \\ M_{35}^* = +M_2 - \lambda \delta M_3 \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{cases} \Delta M_{(1)}^{(3)} = M_{31}^* - (-M_3) = 2\nu_{33} \\ \Delta M_{(2)}^{(3)} = M_{32}^* - M_{31}^* = 2\nu_{34} + \Delta M_{(1)}^{(2)} \\ \Delta M_{(3)}^{(3)} = M_{33}^* - M_{32}^* = 2\nu_{35} + \Delta M_{(2)}^{(2)} \\ \Delta M_{(4)}^{(3)} = M_{34}^* - M_{33}^* = 2\nu_{36} + \Delta M_{(3)}^{(2)} \\ \Delta M_{(5)}^{(3)} = M_{35}^* - M_{34}^* = 2\nu_{37} + \Delta M_{(4)}^{(2)} \\ \Delta M_{(6)}^{(3)} = (M_3) - M_{35}^* = 2 \sum_{k=3}^8 \nu_{3k} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Finalement, en considérant (p) points expérimentaux, on obtient un système de $p(p+1)$ équations dont les inconnues sont les valeurs discrètes de la fonction de distribution de Preisach ν_{ij} .

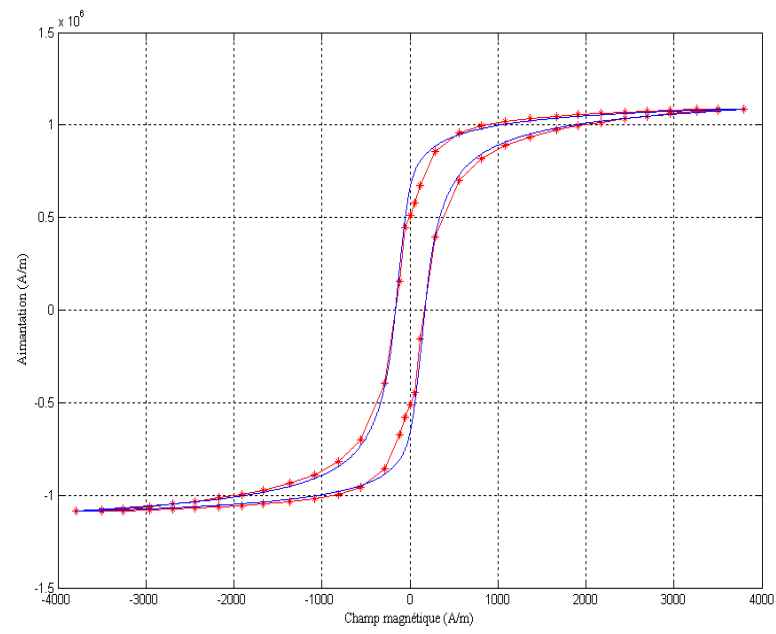
II.2.3.1. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Pour la validation de la méthode proposée nous avons développé un programme de simulation permettant dans un premier temps le positionnement des points créés par rapport aux points expérimentaux utilisés et ensuite la discrétisation du triangle de Preisach.

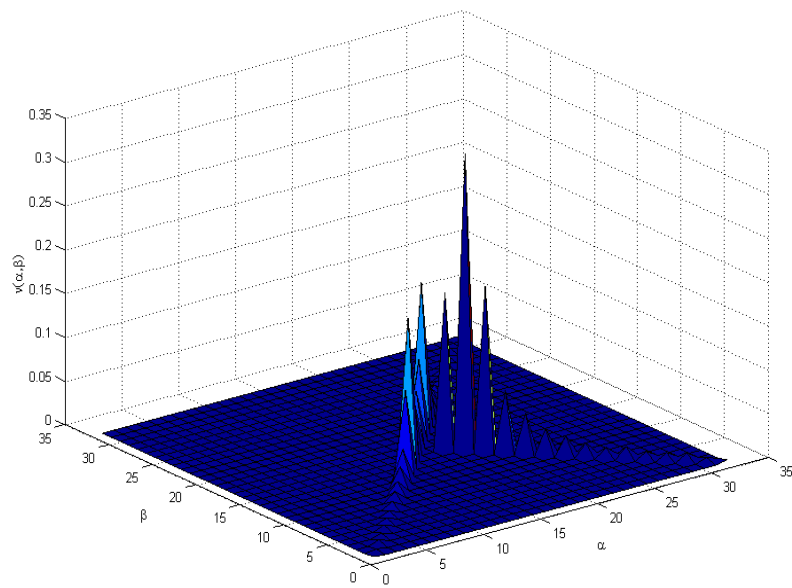
Pour les simulations, nous considérons 16 points expérimentaux extraits de la courbe de première aimantation expérimentale d'un alliage de matériau doux (Fe-Si).

Suivant la procédure développée avec toutes ses étapes, on obtient un système de 272 équations résolu numériquement. Des simulations numériques ont été effectuées pour différentes valeurs du facteur λ .

Premier cas : $\lambda=0.5$



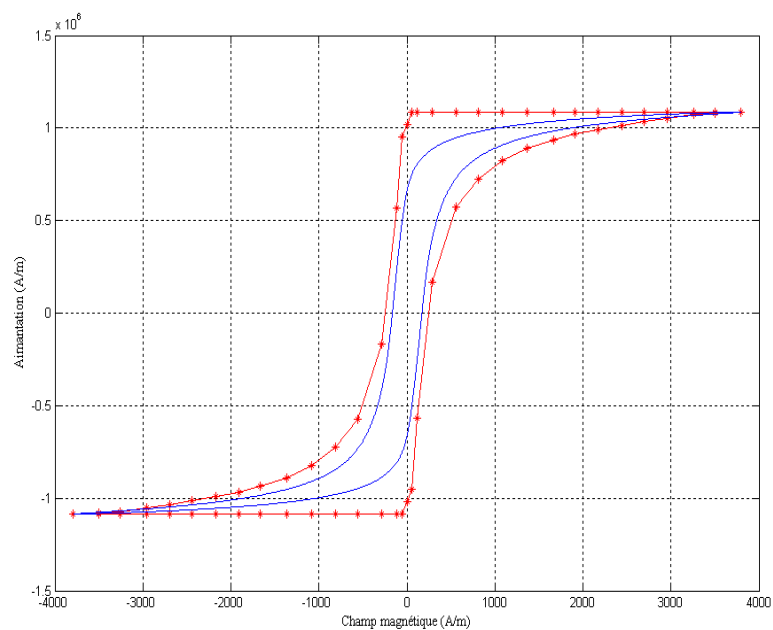
(a)



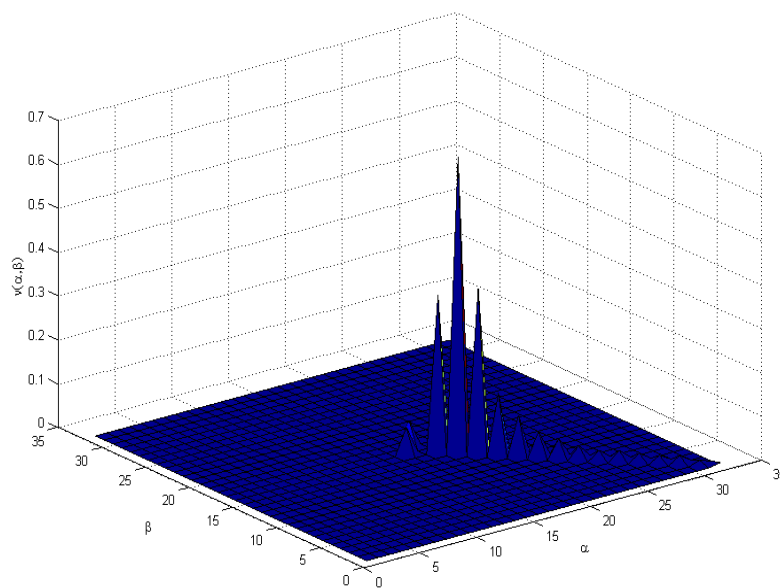
(b)

Fig. 23 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=0.5$.

Deuxième cas: $\lambda=1$



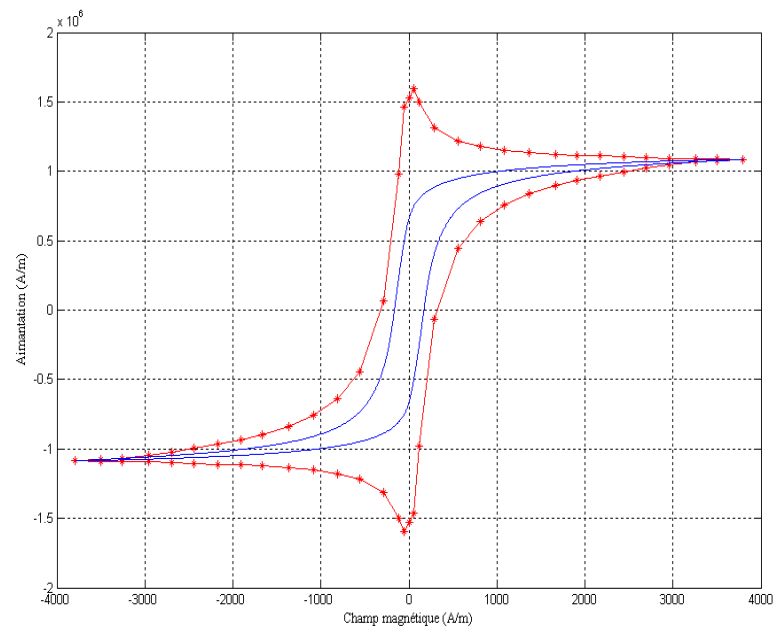
(a)



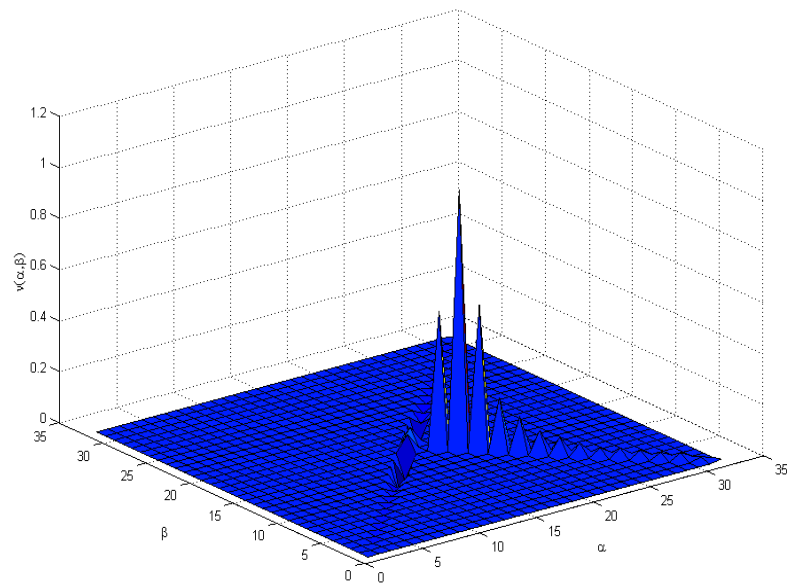
(b)

Fig. 24 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=1$.

Troisième cas: $\lambda=1.5$



(a)

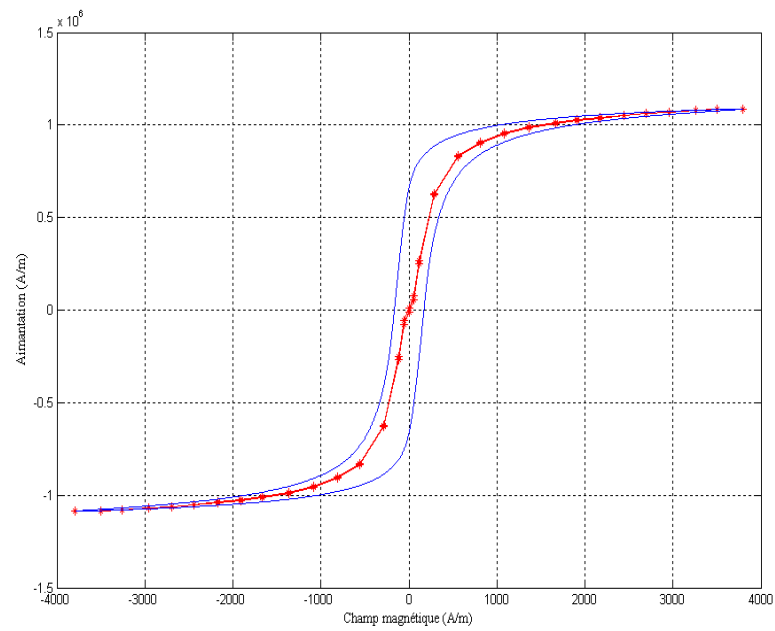


(b)

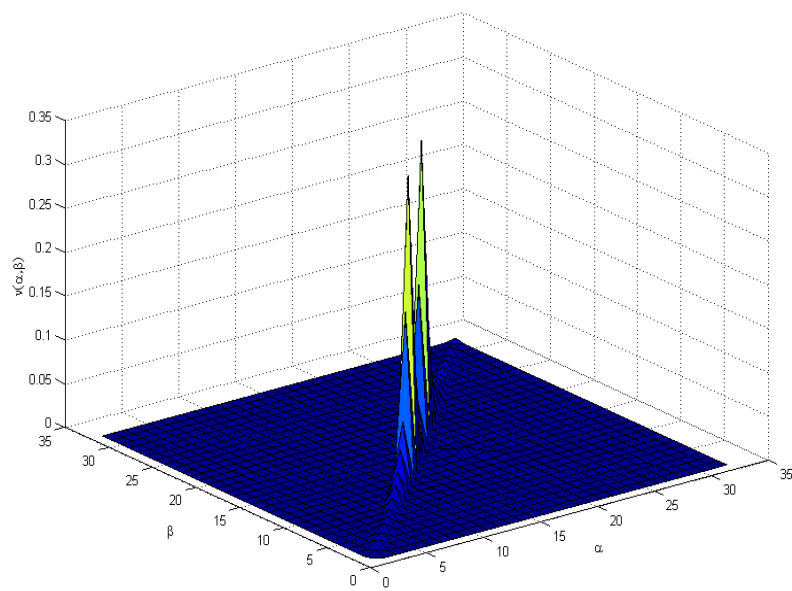
Fig. 25 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=1.5$.

Quatrième cas: $\lambda \rightarrow 0$:

- $\lambda=1/100$



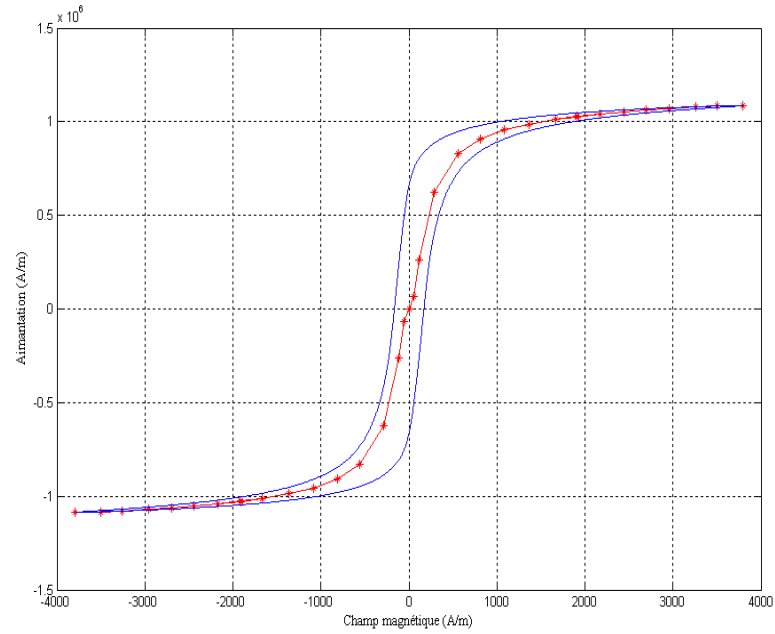
(a)



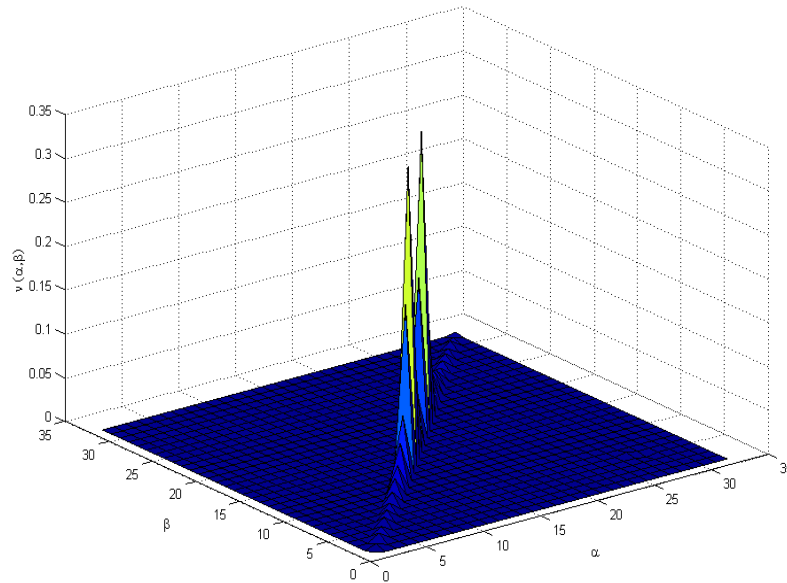
(b)

Fig. 26 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=1/100$.

- $\lambda=0$



(a)



(b)

Fig. 27 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\lambda=0$.

Pour différentes valeurs du facteur λ ($\lambda=0.5$, $\lambda=1$, $\lambda=1.5$, $\lambda=0.01$ and $\lambda=0.0$), nous avons représenté l'allure de la fonction de distribution identifiée et le cycle d'hystérésis correspondant. On remarque

que la valeur du facteur $\lambda=0.5$ permet d'obtenir une bonne restitution du cycle expérimental (Fig. 23.a) et le résultant est très significatif surtout dans la zone du champ coercitif, la fonction de distribution correspondante est représentée sur la figure (Fig. 23.b). Les valeurs $\lambda=1$ et $\lambda=1.5$ ne permettent pas d'obtenir une meilleure représentation du cycle expérimental et particulièrement dans la zone de rémanence (Fig. 24 et Fig. 25)

Enfin, pour $\lambda \rightarrow 0$ le cycle simulé représente la médiane du cycle expérimental (Fig. 26.a) et Fig. 27.a) et les valeurs maximales de la fonction de distribution sont situées sur la droite $\alpha = \beta$ et ceci est un résultat très significatif puisque si $\alpha = \beta$ il n'y a plus d'hystérésis (Fig. 24.b) et Fig. 25.b).

Dans le but de relier le paramètre λ aux propriétés matérielles du matériau (dont on ne dispose que de celles relevées sur la courbe de première aimantation à savoir : l'aimantation au niveau du coude de saturation que l'on notera M_{bs} et l'aimantation à saturation que l'on notera M_s), on a choisi pour le facteur λ le rapport ($\lambda = M_{bs}/M_s$).

Pour le matériau utilisé, avec $M_{bs} = 6.3192 \cdot 10^5$ (A/m) et $M_s = 1.0866 \cdot 10^6$ (A/m), on obtient pour le facteur $\lambda = 0.5815$.

Utilisant cette valeur du facteur λ , on obtient une bonne restitution du cycle expérimental (Fig. 28) et de la fonction de distribution correspondante (Fig. 29):

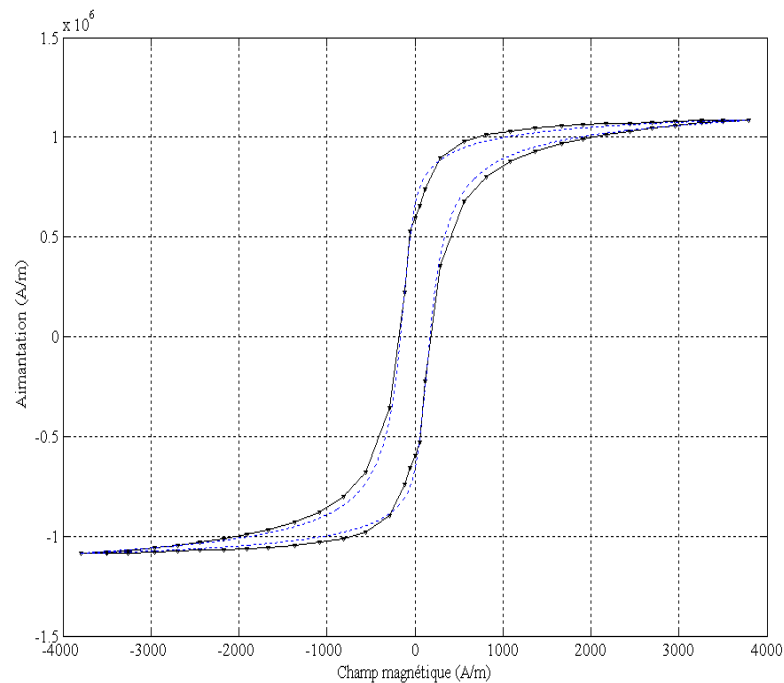


Fig. 28: Cycle mesuré (en pointillés) et cycle simulé généré par la méthode proposée avec $\lambda = 0.5815$.

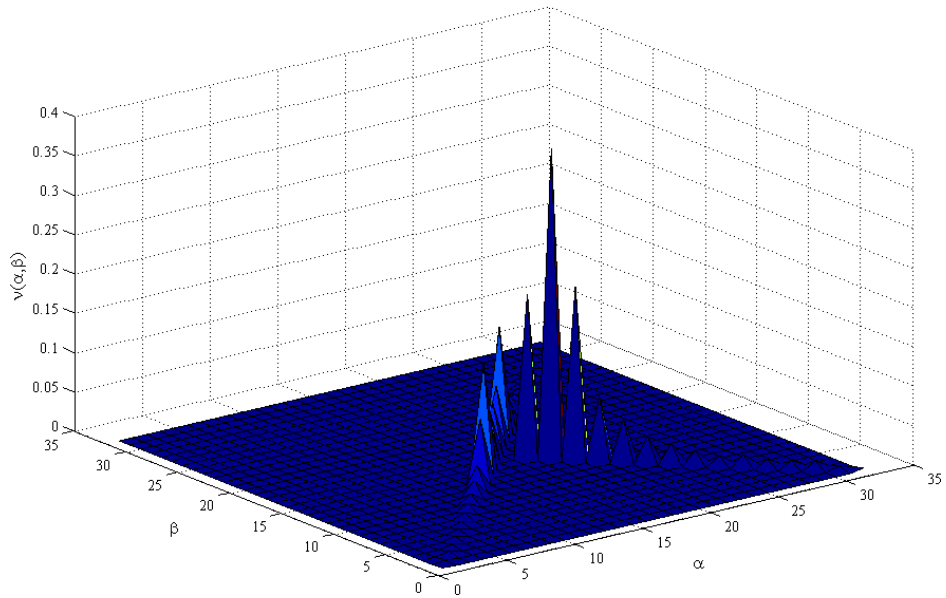


Fig. 29 : Fonction de distribution générée par la méthode proposée avec $\lambda = M_{bs}/ M_s=0.5815$.

En utilisant un autre matériau doux FeSi dont le cycle expérimental a été relevé à une fréquence de 0.5 Hz, et la courbe de première aimantation déterminée en utilisant le modèle de Jiles-Atherton

On obtient alors : $B_{bs} = 0.72$ (T) , $B_s = 1.2$ (T) et $\lambda = 0.6$.

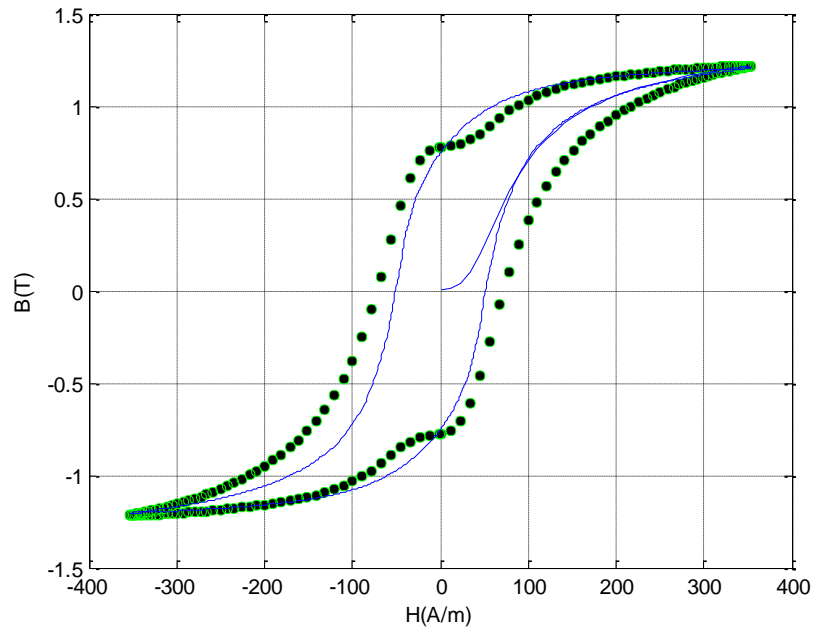


Fig. 30: Cycle mesuré et cycle simulé généré par la méthode proposée (en pointillés) avec $\lambda = 0.6$.

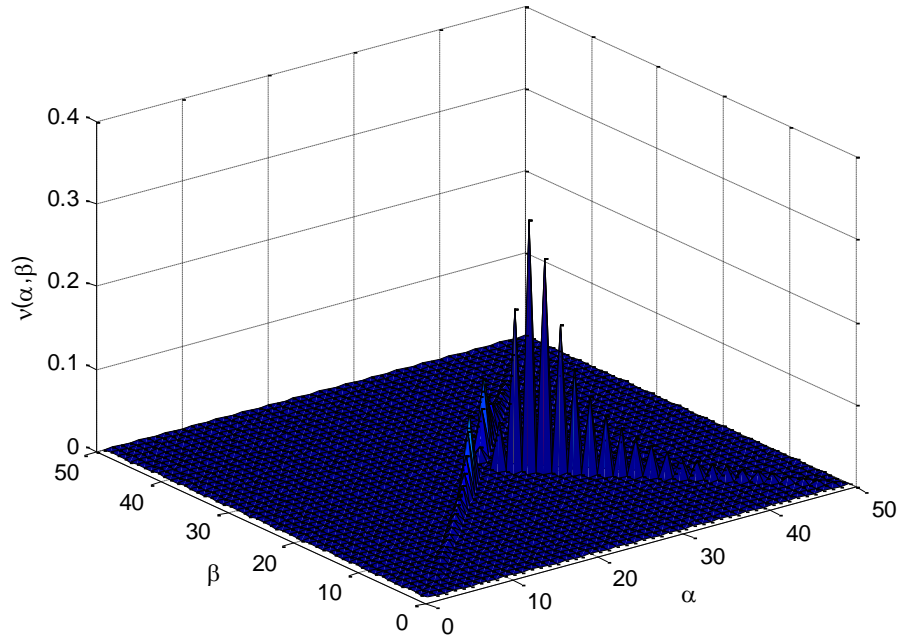


Fig. 31 : Fonction de distribution générée par la méthode proposée avec $\lambda = 0.6$.

II.3. FORMULATION DE LA MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION APPLIQUÉE A LA MODÉLISATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT INVERSE

Le modèle scalaire "direct" de Preisach exposé précédemment permettait d'obtenir une relation hystérétique donnant l'aimantation (ou l'induction) en fonction de l'excitation :

$$\begin{cases} M = f(H) \\ B = f(H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H(t) \xrightarrow{f} M(t) \\ H(t) \xrightarrow{f} B(t) \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Parfois, il est nécessaire de connaître la relation inverse, c'est-à-dire, la relation donnant l'excitation en fonction de l'aimantation (ou de l'induction):

$$\begin{cases} H = g(M) \\ H = g(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(t) \xrightarrow{g} H(t) \\ B(t) \xrightarrow{g} H(t) \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Ceci est particulièrement vrai dans le cas d'une analyse par éléments finis, suivant la formulation utilisée, potentiel scalaire ou vecteur, il est nécessaire d'avoir une relation, respectivement, de type (II.35).

Lors de l'utilisation de la méthode proposée à la modélisation du comportement inverse un ensemble de données expérimentales extraites d'une courbe de première aimantation inversée et sa symétrique sont alors utilisées.

Sur la figure ci-dessous (Fig. 32.) sont représentés la courbe de première aimantation inversée et sa symétrique ainsi que le nuage de points créés pour une discrétisation du triangle de Preisach.

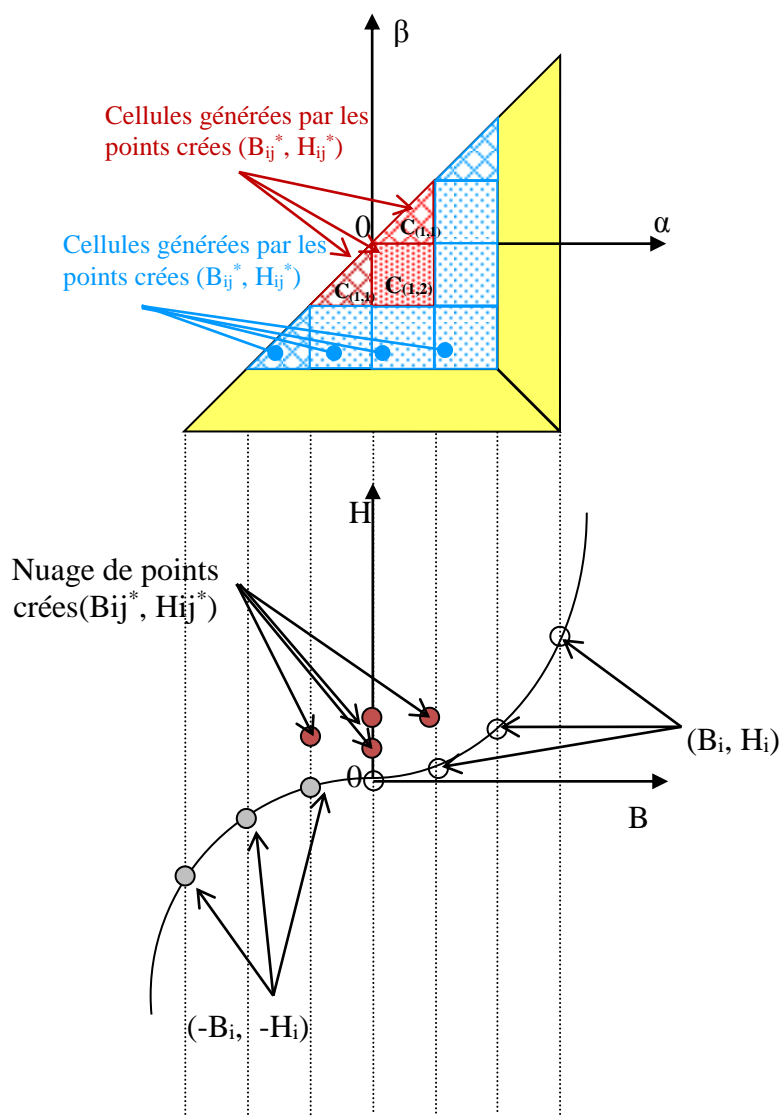


Fig.32 : Triangle de Preisach discretisé et nuage de points créés en considérant une courbe de première aimantation inversée.

Considérons trois points expérimentaux extraits de la courbe de première aimantation inversée $H=f(B)$ ($p=3$) et leurs symétriques : $[(-B_3, -H_3), (-B_2, -H_2), (-B_1, -H_1), (B_0, H_0), (B_1, H_1), (B_2, H_2), (B_3, H_3)]$

Pour le premier point expérimental (B_1, H_1) et son symétrique $(-B_1, -H_1)$ (Fig. 32.), dans le but d'identifier le contenu de la cellule $C_{(1,1)}$ correspondant à la valeur discrète de la fonction de distribution inverse ν_{11} , on utilise le point créé (B_{11}^*, H_{11}^*) arrangé verticalement au dessus du point (B_0, H_0) (Fig. 32.) et défini comme suit:

$$\begin{cases} -H_1 < H_{11}^* < H_1 > 0 \\ B_{11}^* = 0 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

La valeur de l'excitation H_{11}^* est déterminée en utilisant la grandeur note δH_1 qui représente la variation de l'excitation entre les points expérimentaux $[(-B_1, -H_1), (B_0, H_0)]$ et le facteur γ qui permet le positionnement du point (B_{11}^*, H_{11}^*) par rapport aux points expérimentaux $[(-B_1, -H_1), (B_0, H_0)]$:

$$\delta H_1 = H_1 - (H_0) \quad (\text{II.37})$$

$$H_{11}^* - H_0 = \gamma \delta H_1 \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{II.38})$$

La variation de l'excitation entre (H_1) et (H_{11}^*) fait intervenir uniquement la cellule $C_{(1,1)}$ (Fig. 32.), on aura :

$$H_{11}^* - (H_1) = 2 \iint_{C_{(1,1)}} \nu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 2\nu_{11} \quad (\text{II.39})$$

Ainsi, on peut déduire la valeur de la fonction de distribution inverse correspondant à la cellule $C_{(1,2)}$ (Fig. 32.):

$$(-H_1) - H_{11}^* = 2 \iint_{C_{(1,1)+C_{(1,2)}}} \nu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 2(\nu_{11} + \nu_{12}) \quad (\text{II.40})$$

$$\begin{cases} \Delta H_{(1)}^{(1)} = H_{11}^* - (H_1) = 2\nu_{11} \\ \Delta H_{(2)}^{(1)} = -H_1 - H_{11}^* = 2\nu_{12} + \Delta H_{(1)}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

À cette étape, nous avons déterminé les valeurs discrètes de la fonction de distribution inverse ν_{11}, ν_{12} correspondants à la variation de l'excitation entre $(-H_1, H_{11}^*, H_1)$.

Pour le deuxième point expérimental (B_2, H_2) et son symétrique $(-B_2, -H_2)$, on utilise 3 points créés (B_{21}^*, H_{21}^*) , (B_{22}^*, H_{22}^*) et (B_{23}^*, H_{23}^*) positionnés verticalement et respectivement au dessus des points $(-B_1, -H_1)$, (B_{11}^*, H_{11}^*) , (B_1, H_1) et définis comme suit:

$$\begin{cases} \delta H_2 = H_2 - (H_1) \\ H_{21}^* = H_1 + \gamma \delta H_2 \\ H_{22}^* = H_{11}^* + \gamma \delta H_2 \\ H_{23}^* = -H_1 + \gamma \delta H_2 \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta H_{(1)}^{(2)} = H_{21}^* - (H_2) = 2v_{22} \\ \Delta H_{(2)}^{(2)} = H_{22}^* - H_{21}^* = 2v_{23} + \Delta H_{(1)}^{(1)} \\ \Delta H_{(3)}^{(2)} = H_{23}^* - H_{22}^* = 2v_{24} + \Delta H_{(2)}^{(1)} \\ \Delta H_{(4)}^{(2)} = (-H_2) - H_{23}^* = 2 \sum_{k=2}^5 v_{2k} \end{array} \right. \quad (\text{II.43})$$

Pour le troisième point expérimental (B_3, H_3) et son symétrique $(-B_3, -H_3)$, on utilise 5 points créés notés (B_{31}^*, H_{31}^*) , (B_{32}^*, H_{32}^*) , (B_{33}^*, H_{33}^*) , (B_{34}^*, H_{34}^*) et (B_{35}^*, H_{35}^*) positionnés verticalement et respectivement au dessus des points $(-B_2, -H_2)$, (B_{21}^*, H_{21}^*) , (B_{22}^*, H_{22}^*) , (B_{23}^*, H_{23}^*) et (B_3, H_3) et définis comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta H_3 = H_3 - (H_2) \\ H_{31}^* = H_2 + \gamma \delta H_3 \\ H_{32}^* = H_{21}^* + \gamma \delta H_3 \\ H_{33}^* = H_{22}^* + \gamma \delta H_3 \\ H_{34}^* = H_{23}^* + \gamma \delta H_3 \\ H_{35}^* = -H_2 + \gamma \delta H_3 \end{array} \right. \quad (\text{II.44})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta H_{(1)}^{(3)} = H_{31}^* - (H_3) = 2v_{33} \\ \Delta H_{(2)}^{(3)} = H_{32}^* - H_{31}^* = 2v_{34} + \Delta H_{(1)}^{(2)} \\ \Delta H_{(3)}^{(3)} = H_{33}^* - H_{32}^* = 2v_{35} + \Delta H_{(2)}^{(2)} \\ \Delta H_{(4)}^{(3)} = H_{34}^* - H_{33}^* = 2v_{36} + \Delta H_{(3)}^{(2)} \\ \Delta H_{(5)}^{(3)} = H_{35}^* - H_{34}^* = 2v_{37} + \Delta H_{(4)}^{(2)} \\ \Delta H_{(6)}^{(3)} = (-H_3) - H_{35}^* = 2 \sum_{k=3}^8 v_{3k} \end{array} \right. \quad (\text{II.45})$$

Finalement, en considérant (p) points expérimentaux, on obtient un système de $p(p+1)$ équations dont les inconnues sont les valeurs discrètes de la fonction de distribution inverse du modèle de Preisach v_{ij} .

II.3.1. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Pour la validation de la méthode proposée pour la modélisation du comportement inverse nous avons développé un programme de simulation permettant dans un premier temps le positionnement des points créés par rapport aux points expérimentaux utilisés et ensuite la discrétisation du triangle de Preisach.

Pour les simulations, nous considérons 15 points expérimentaux extraits de la courbe de première aimantation expérimentale inversée.

Suivant la procédure développée avec toutes ses étapes, on obtient un système de 240 équations résolu numériquement. Plusieurs simulations numériques ont été effectuées pour différentes valeurs du facteur γ .

Premier cas : $\gamma = 1/2$

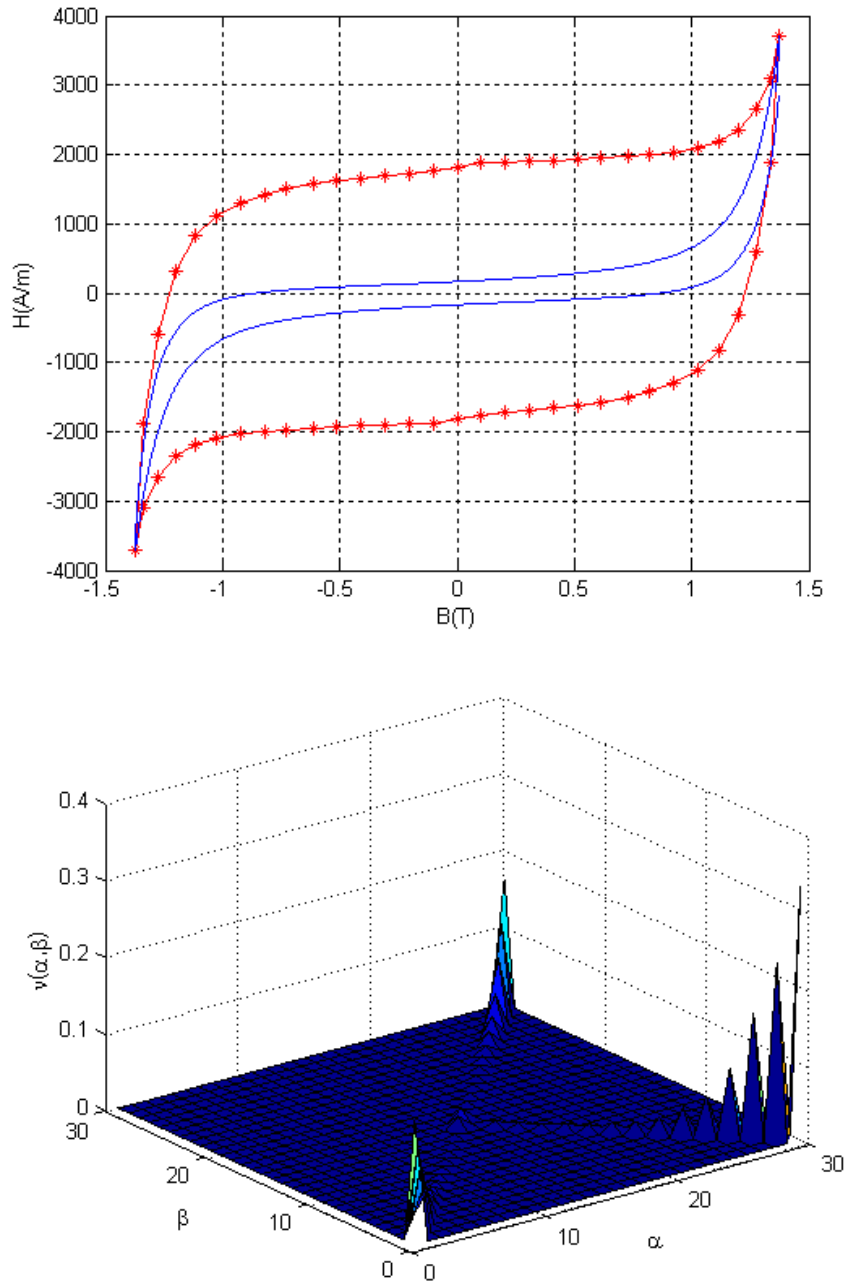


Fig. 33 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 1/2$.

Deuxième cas $\gamma = 1/20$

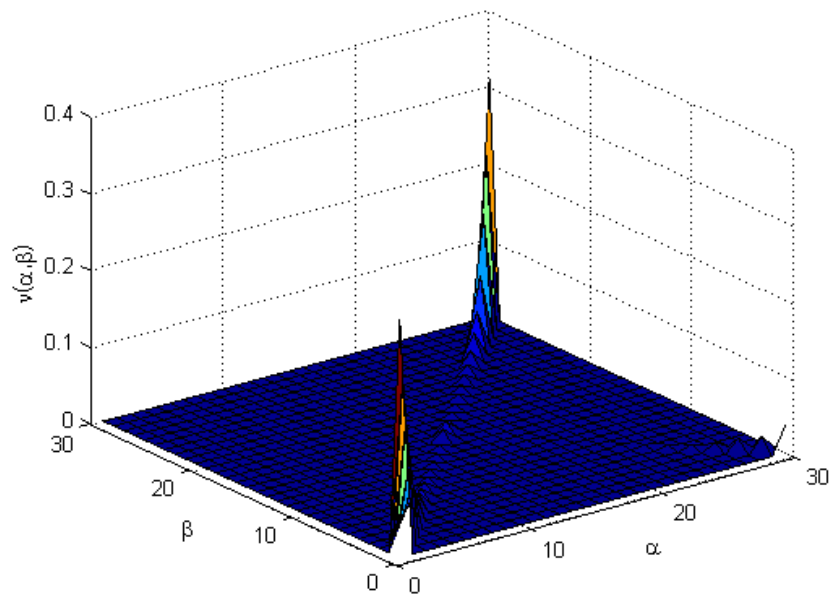
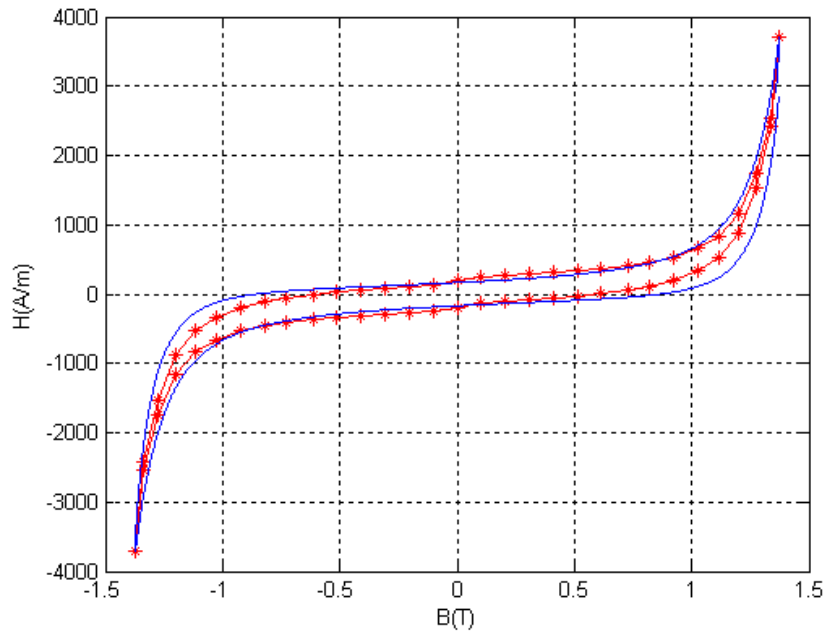


Fig. 34 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 1/20$.

Troisième cas $\gamma = 1/10$

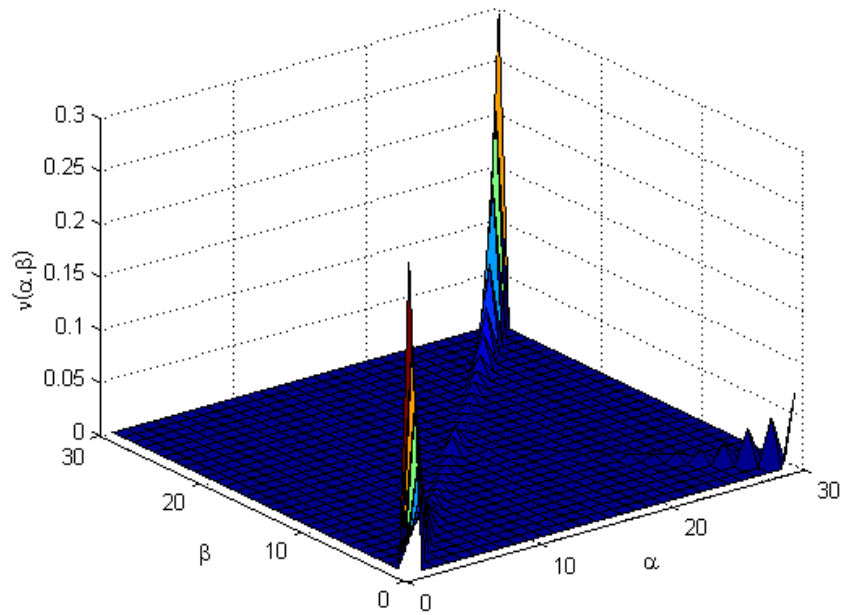
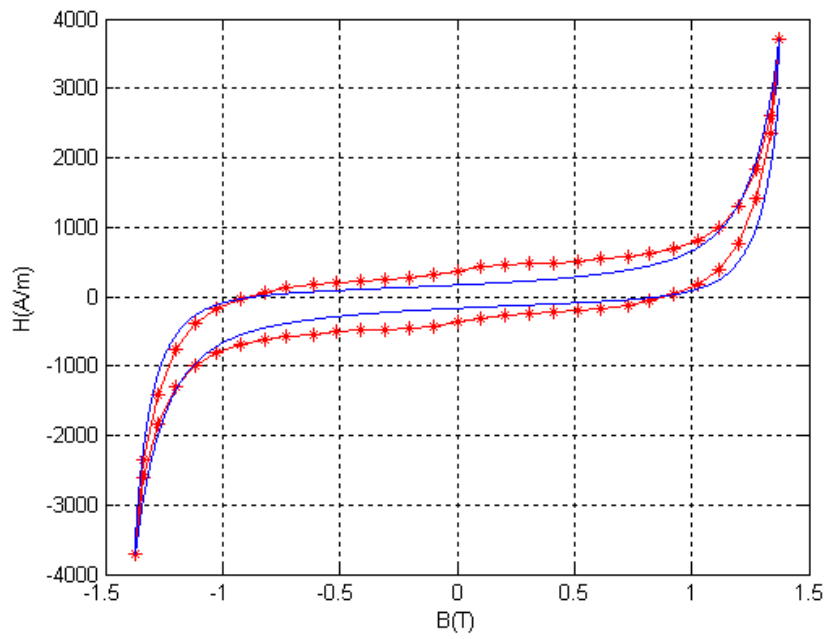


Fig. 35 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 1/10$.

Quatrième cas $\gamma = 3/20$

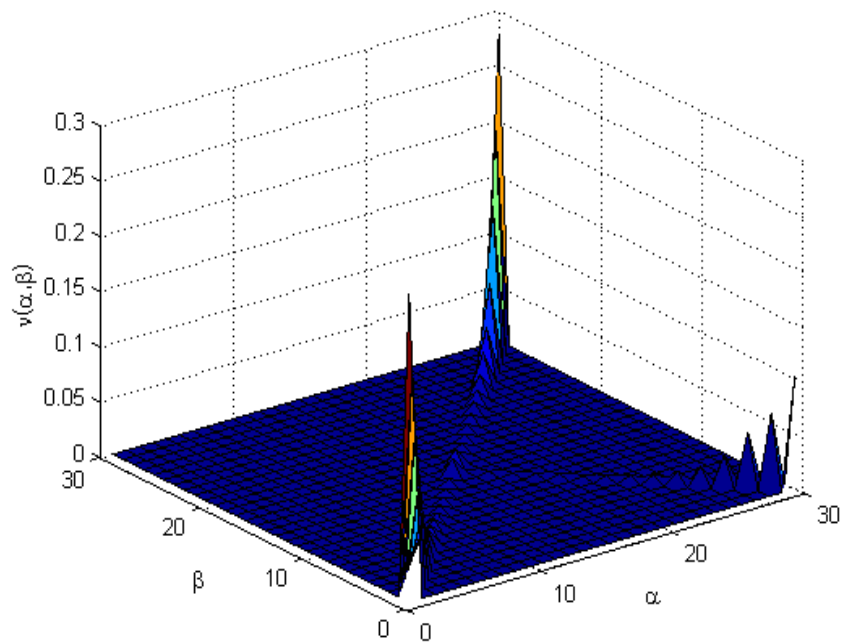
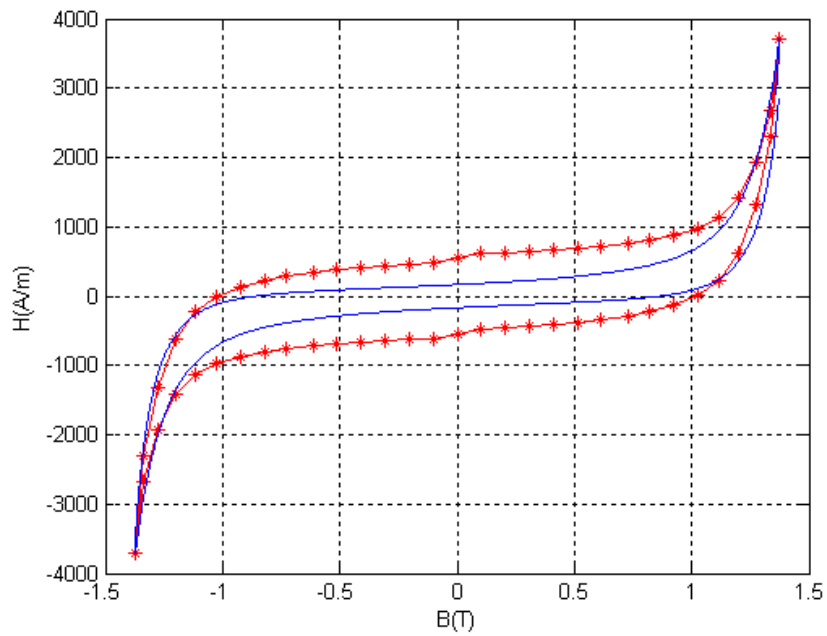


Fig. 36 : (a) Courbe expérimentale et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 3/20$.

Cinquième cas $\gamma = 0$

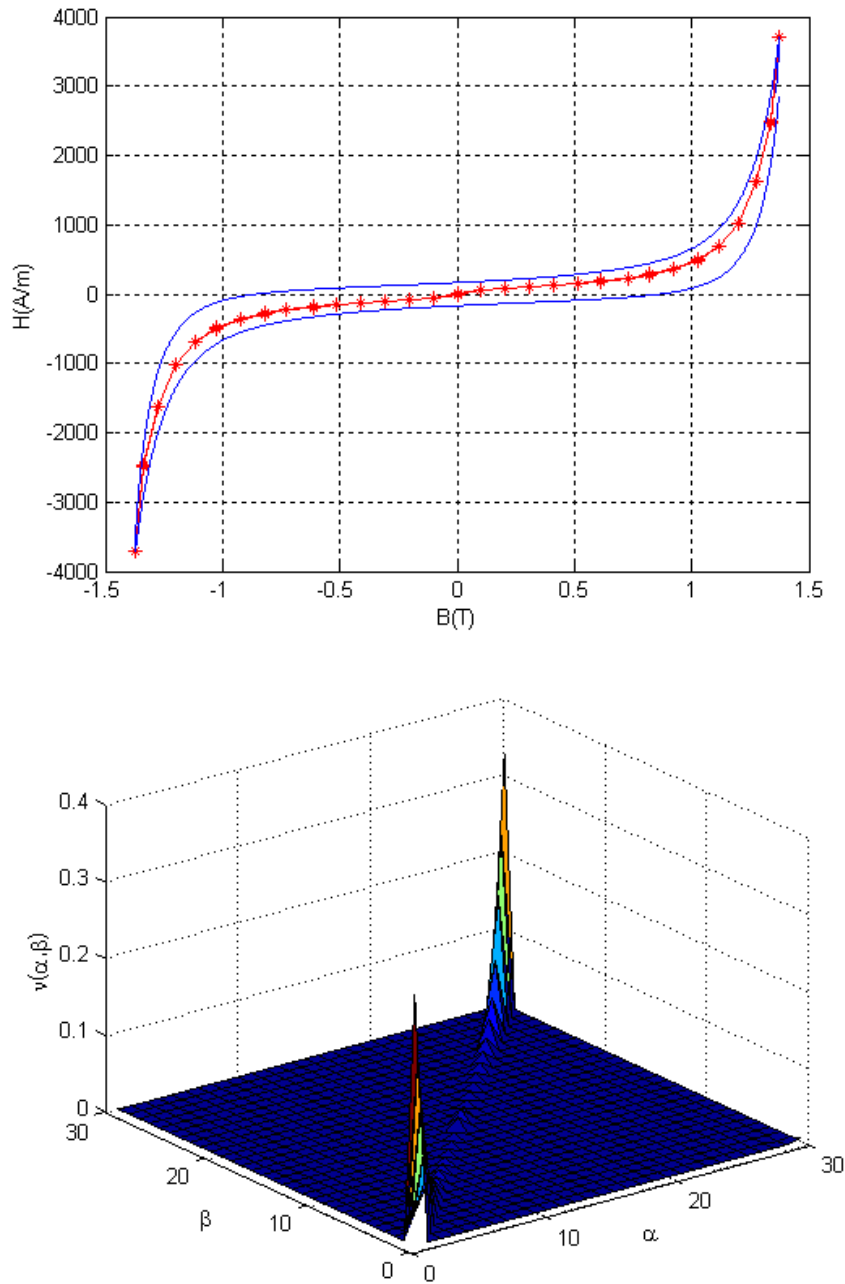


Fig. 37 : (a) Courbe expérimentale (pointillés) et courbe simulée (trait continu avec étoiles) générées par la méthode proposée. (b) Fonction de distribution de Preisach générée par la méthode proposée pour $\gamma = 0$.

II.4. DONNEES NÉCESSAIRES A L'IDENTIFICATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION DU MODÈLE DE PREISACH POUR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

Plusieurs méthodes d'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach sont présentées dans la littérature, sur le tableau ci-dessous sont regroupées les différentes méthodes utilisées et les données utilisées pour l'identification. La méthode d'identification proposée

nécessite la connaissance de la courbe de première aimantation qui est généralement fournie par le constructeur de matériaux.

<i>Méthodes</i>	<i>Données nécessaires</i>	<i>Mesures nécessaires</i>
Gaussienne	Hc, Bs, Br	Cycle majeur
Lorentzienne	Hc, Bs	Cycle majeur
Lorentzienne modifiée	Hc, Bs, Br	Cycle majeur
Biorci et Pescetti	3N variations de M (ou de B)	Première aimantation et cycle majeur
Mayergoyz	N(N+1) variations de M (ou de B)	N courbes de renversement
Cycles centrés	N(N+1) variations de M (ou de B)	N cycles centrés
MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION	N variations de M (ou de B)	Courbe de première aimantation

Tab. 1 Données et mesures nécessaires pour les différentes méthodes d'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach

II.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté des méthodes analytiques et des méthodes numériques d'identifications de la fonction de distribution. Les méthodes analytiques ne nécessitent que le relevé du cycle majeur d'hystérésis du matériau.

La fonction de distribution de type lorentzienne est simple d'utilisation mais son faible nombre de paramètres est un facteur limitatif de la précision. La fonction de distribution de type lorentzienne modifiée nécessite des méthodes d'optimisation pour la détermination des paramètres.

Les méthodes numériques d'identification de la fonction de distribution font appel à des données expérimentales autres que le cycle majeur.

La méthode numérique proposée nommée **MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION** a été testée dans le cas des matériaux magnétiques doux avec l'introduction du facteur λ , elle donne des résultats très cohérents avec les relevés expérimentaux et paraît très intéressante vu que les mesures sont simples à acquérir (courbe de première aimantation) comparée à d'autres méthodes (méthode de Mayergoyz utilisant les cycles de renversement de premier ordre et la méthode des cycles centrés). Les avantages mentionnés rendent la procédure mis au point un outil puissant pour l'identification numérique de la fonction de distribution du modèle de Preisach.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **I. D. MAYERGOYZ**, "Mathematical models of hysteresis", IEEE Trans. Magn, vol 22, pages 603–608, 1986.
- [2] **G. BERTOTTI**, "Hysteresis in Magnetism", Academic Press, San Diego, page 480, 1998.
- [3] **M. RUDERMAN, T. STROHLA, T. BERTRAM**, "Use of Jiles–Atherton and Preisach Hysteresis Models for Inverse Feed-Forward Control", IEEE Trans. Magn, vol 46, pages 3984–3989, 2010.
- [4] **C. RAGUSA**, "Analytical method for the identification of the Preisach distribution function", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol 254-255C, pages 259–261, 2003.
- [5] **E. CARDELLI, L. FIORUCCI AND E. DELLA TORRE**, "Identification of the Preisach probability functions for soft magnetic materials", IEEE Trans. Magn, vol 37, pages 3366–3369, 2001.
- [6] **D. DAVINO, A. GIUSTINIANI AND C. VISON**, "Fast inverse Preisach models in algorithms for static and quasistatic magnetic-field computations", IEEE Trans. Magn, vol 44, pages 862–865, 2008.
- [7] **M. RUDERMAN, M.T. BERTRAM**, "Identification of soft magnetic B-H characteristics using discrete dynamic Preisach model and a single measured hysteresis loop", IEEE Trans. Magn, vol 48, pages 1281–1284, 2012.
- [8] **OLAF HENZE, WOLFGANG M. RUCKER**, "Identification Procedures of Preisach Model" IEEE Trans. Magn, vol 38, N° 2, 2002.
- [9] **A. IVANYI**, "Hysteresis models in Electromagnetic computation", Akadémiai Kiado, Budapest, 1997.
- [10] **Y. BERNARD**, "Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques en tenant compte du phénomène d'hystérésis. Extension du modèle de Preisach adaptées au calcul de champ", Thèse de doctorat Université de Paris-Sud, France 2000.
- [11] **Y. OULED AMOR**, "Contribution à la modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de l'analyse par éléments finis des systèmes de chauffage par induction", Thèse de doctorat Université de Nantes, France, 2000.

TROISIÈME CHAPITRE :
MÉTHODES SANS MAILLAGES « ÉTAT DE L'ART »

III. 0. INTRODUCTION

Les équations gouvernant de nombreux phénomènes physiques, sont résolues classiquement par des méthodes de discrétisation telles que la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des volumes finis (MVF), etc.... Ces méthodes nécessitent la construction d'un maillage du domaine étudié par ce qu'on appelle éléments. La notion d'élément est très importante dans ces méthodes ; elle définit une connectivité fixe entre les nœuds.

Le maillage est donc un élément fondamental qui influe sur la qualité des résultats numériques obtenus. L'un des grands pas dans le domaine des méthodes numériques était l'invention de la MEF dans les années cinquante [1]. L'entière maîtrise et le développement de cette méthode ont permis sa large utilisation dans tous les domaines de l'engineering, différents codes commerciaux sont disponibles et permettent sa mise en œuvre. Cependant, la MEF possède les inconvénients des méthodes numériques qui dépendent d'un maillage ou d'éléments interconnectés par des nœuds dans un ordre prédéfini [2].

La nécessité d'outils mathématiques permettant la reconstruction exacte de fonctions à partir de l'information stockée en un ensemble de points dispersés aléatoirement a accéléré le développement de puissantes méthodes d'interpolation. Ces techniques d'interpolations liées aux méthodes de discrétisations ont cédé la place à une variété d'approximations permettant de résoudre des équations différentielles régissant différents types de problèmes dans le domaine de l'engineering.

L'émergence des méthodes sans maillage plus connues par la communauté scientifique sous les noms « meshless methods » ou bien « meshfree methods » découle donc de la volonté de s'affranchir des difficultés liées à la génération et à la gestion des maillages.

Le concept fondateur de ces méthodes est la non-existence du maillage, ce qui leur confère une plus grande souplesse vis-à-vis de la discrétisation spatiale. En effet, la discrétisation des équations aux dérivées partielles du problème considéré repose sur un ensemble de nœuds non connectés les uns aux autres. Lorsqu'un raffinement local de la solution est nécessaire, il est possible soit de repositionner ou d'augmenter le nombre de nœuds, soit d'augmenter le degré de l'approximation utilisée.

III.1. GÉNÉRALITÉS ET HISTORIQUE

L'origine des méthodes sans maillage remonte à la fin des années soixante dix, mais leurs développements sont restés très limités jusqu'au début des années quatre-vingt dix.

La première méthode sans maillage est la méthode particulière Smooth Particle Hydrodynamics (SPH), qui a été présentée en 1977 et conçue pour résoudre des problèmes d'astrophysique et des problèmes en dynamique du fluide [3-6] plus tard, Libersky et al. [7] ont été les premiers utilisateurs de la méthode SPH en mécanique des solides. Les premières versions de cette méthode ont rencontré des difficultés lors de la résolution des problèmes d'instabilité de la méthode. Par la

suite, plusieurs développements et améliorations ont été proposés [4-8]. Cette méthode est basée sur une formulation forte tandis que les versions développées à partir des années 1990 s'appuient sur une formulation faible.

Ces dernières ont été utilisées dans la plupart des cas en mécanique des solides. Ensuite, la méthode des éléments diffus (MED) a été proposée par Nayroles, Thouzot et Villon [9] qui consiste à utiliser une approximation de type moindre carré glissants avec une discrétisation de type Galerkin. Une autre version modifiée, dite méthode de Galerkin sans maillages (Element Free Galerkin « EFG »), a été développée en 1994 par Belytschko et al. [10]. Cette méthode est l'une des premières méthodes sans maillage basée sur une formulation faible. Une année plus tard, la méthode Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) a été développée [11]. Par la suite d'autres méthodes sans maillage de type Galerkin ont été proposées ; on peut citer la "Partition of Unity Finite Element Method" de Babuska et Melenk [12], la "Meshless Local Petrov-Galerkin method" de Atluri et Zhu [13], la méthode des éléments naturels (NEM) [14,15], la méthode nommée "the constrained naturel element method "C-NEM [16] etc.

La méthode sans maillage la plus récente est dite méthode des éléments naturels (Natural Element Method) [17]. Cette méthode est basée sur des principes totalement différents. Elle utilise des fonctions de forme basées sur des constructions géométriques telles que le diagramme de Voronoi et la triangulation de Delaunay.

Actuellement, le travail sur les méthodes sans maillage est consacré à l'amélioration des versions existantes. Le but des recherches récentes, dans ce domaine, est d'adapter ces méthodes à des problèmes spécifiques ou au traitement des conditions aux limites, comme par exemple, la méthode sans maillage dite méthode des moindres carrés glissants continue (Continuous Moving Least Squares CMLS) [17], [19], cette méthode, proposée en 2012 est une version modifiée de la méthode sans maillage des moindres carrés glissants (Moving Least Squares (MLS)) [18-20].

III.2. CLASSIFICATION DES MÉTHODES SANS MAILLAGES

Les méthodes sans maillage sont devenues des outils intéressants qui permettent de traiter des problèmes dans lesquels on observe des distorsions de maillage, de grandes déformations ou encore des discontinuités ou fragmentations du domaine d'étude.

Ces méthodes ne demandent qu'un ensemble de points pour construire une solution approchée où la qualité des résultats est faiblement liée à la position relative de ces points. C'est l'origine de la notion dite sans maillage. Le but est de chercher des solutions numériques précises et stables des équations aux dérivées partielles (EDP) ou des équations intégrales en certains points arbitrairement distribués et ce pour toute forme de frontière du domaine étudié.

III.2.1. LES MÉTHODES SANS MAILLAGES DE TYPE GALERKIN

Ces méthodes sont une sorte d'évolution naturelle de la MEF. En effet, elles utilisent la formulation faible de l'EDP et très souvent elles nécessitent une partition du domaine (ceci sans une connectivité fixe entre les sous domaines). La première méthode sans maillage utilisant la formulation de Galerkin fut la MED introduite par Nayroles et al [9]. Dans cette méthode les fonctions de forme sont construites en utilisant la méthode des moindres carrés glissants. Bien qu'un maillage explicite ne soit pas nécessaire dans cette méthode, une subdivision du domaine est utilisée pour calculer numériquement les intégrales introduites par la formulation de Galerkin [10]. Toujours en utilisant la méthode des moindres carrés glissants, Belytschko et al [10] ont proposé en 1994 "Element Free Galerkin Method" (EFGM) qui est une amélioration de la MED. Cette méthode utilise aussi un maillage implicite pour l'évaluation des intégrales numériques. Toutefois le coût de mise en place de ce maillage est négligeable. En effet ce maillage doit juste couvrir le domaine et n'est pas contraint de décrire la frontière de ce dernier. L'EFGM a été beaucoup utilisée en électromagnétisme et plusieurs travaux ont prouvé sa précision [21-24].

En s'inspirant de la "smoothed particles method" (SPH), Liu et al ont développé une autre classe de méthodes sans maillage de type Galerkin appelée la "Reproducing Kernel Particle Method" (RKPM) [11], contrairement à la MED et à l'EFGM, cette méthode construit les fonctions de forme sur tout le domaine, ce qui évite une décomposition du domaine pour l'évaluation des intégrales.

Bien que les méthodes sans maillage de type Galerkin utilisent des maillages implicites, il est à noter que, dans ces méthodes, seuls les nœuds sont considérés aux dépens des éléments. Ce qui leur permet de traiter des problèmes mal posés pour la MEF tels que les problèmes de grandes déformations et les problèmes de propagation de fissures. Néanmoins dans ces méthodes, l'intégration engendre des coûts de calcul importants. D'autre part, vu que le maillage implicite utilisé ne décrit pas correctement le domaine, ces méthodes nécessitent un grand nombre de points de Gauss pour avoir une bonne convergence, ce qui est aussi une source de coût de calcul.

III.2.2. LES MÉTHODES SANS MAILLAGES DE TYPE COLLOCATION

Contrairement aux méthodes de type Galerkin, ces méthodes utilisent la forme forte de l'EDP. Ainsi aucune intégration numérique ne se présente dans leur formulation et par conséquent il n'y a pas besoin de maillage implicite. Leurs adeptes parlent parfois de "vraie méthode sans maillage" (true meshless). En 1977 Lyszka et Orkisz [25] furent les premiers à utiliser la formulation forte. Mais il a fallu attendre 1990 pour avoir une méthode robuste proposée par Kansa [26,27].

Dans les méthodes sans maillages de type collocation, la recherche des fonctions de formes se fait avec des interpolations polynomiales ou des fonctions radiales. Il existe une autre classe de méthodes de type collocation inspirées des BEM (Boundary element method), la méthode de la solution fondamentale (MFS) [18, 19]. L'efficacité de cette méthode a été prouvée à travers son

application à des problèmes linéaires tels que l'équation de Laplace, l'équation d'Helmholtz, l'équation de Poisson, etc. [28]. L'application de cette méthode a été étendue aux problèmes non linéaires, en la couplant avec des méthodes itératives comme la méthode de Newton Raphson [29], ou à la méthode asymptotique numérique [30]. Les méthodes sans maillages de type collocation ont l'avantage d'être rapides et simples d'implémentation. Généralement elles ont du mal à approcher des conditions aux limites de type Neumann. Plusieurs techniques ont été développées pour rendre possible cette application, par exemple l'utilisation des nœuds fictifs, les interpolations de type Hermite. Les méthodes de type collocation sont en général instables et peu robustes [31].

III.3. PRINCIPE DES MÉTHODES SANS MAILLAGE

Les méthodes sans maillage permettent d'obtenir une transformation des systèmes d'équations aux dérivées partielles en systèmes d'équations algébriques sur tout le domaine d'étude sans pour autant utiliser un maillage prédéfini. Elles utilisent un ensemble de points (nœuds) répartis à l'intérieur du domaine d'étude ainsi qu'à sa frontière [32]. Les nœuds sont les lieux de l'espace du domaine d'étude où l'on évalue la distribution des fonctions inconnues. La différence fondamentale entre la méthode des éléments finis et les méthodes sans maillage est la construction des fonctions de forme. La génération de la géométrie, l'insertion des données matérielle, matrice globale et les étapes de post-traitement sont les procédures habituelles que les deux méthodes partagent. Ces deux méthodes divergent à l'étape de la création du maillage. La figure ci-dessous (FIG.1) résume ces différences:

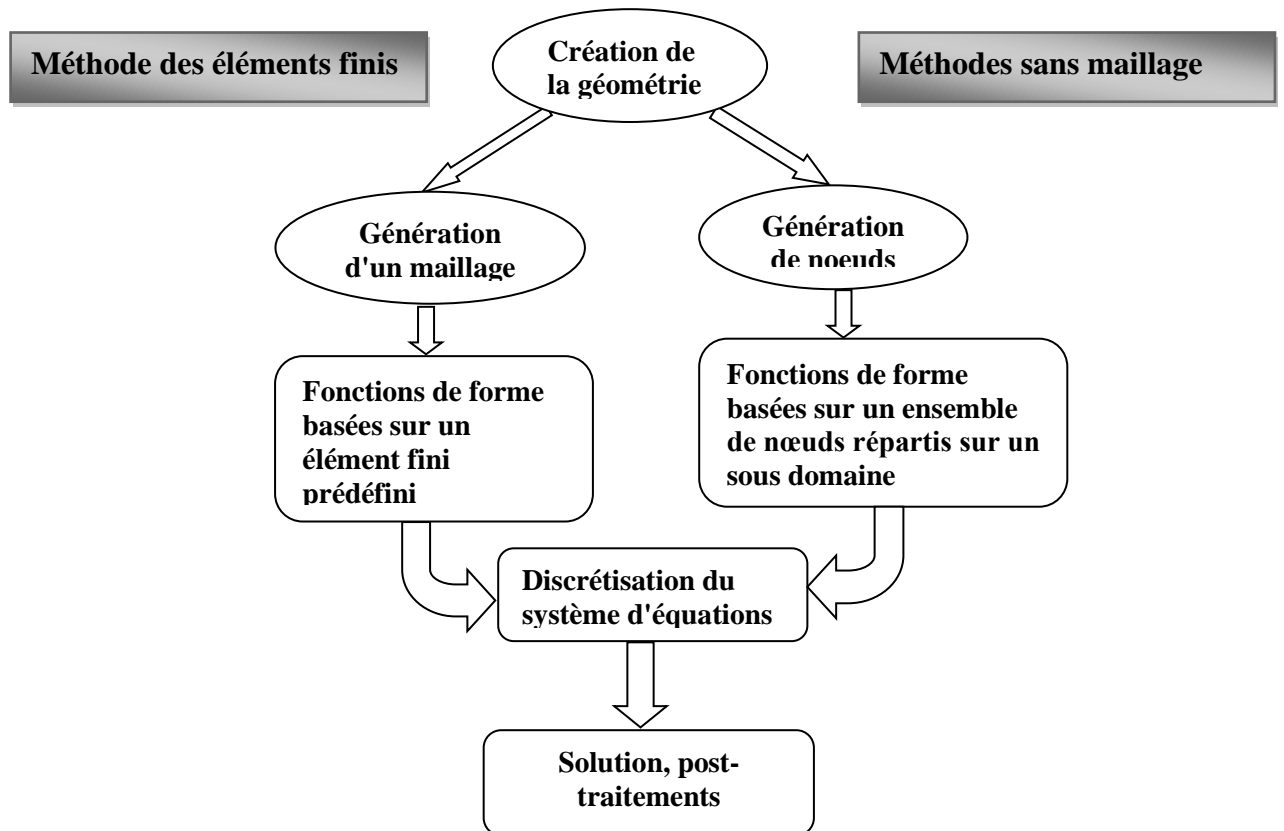


Fig.1 : Différences entre la MEF et les méthodes sans maillage.

La figure (FIG.2) montre les représentations du domaine d'étude pour les deux méthodes éléments finis, et méthodes sans maillage.

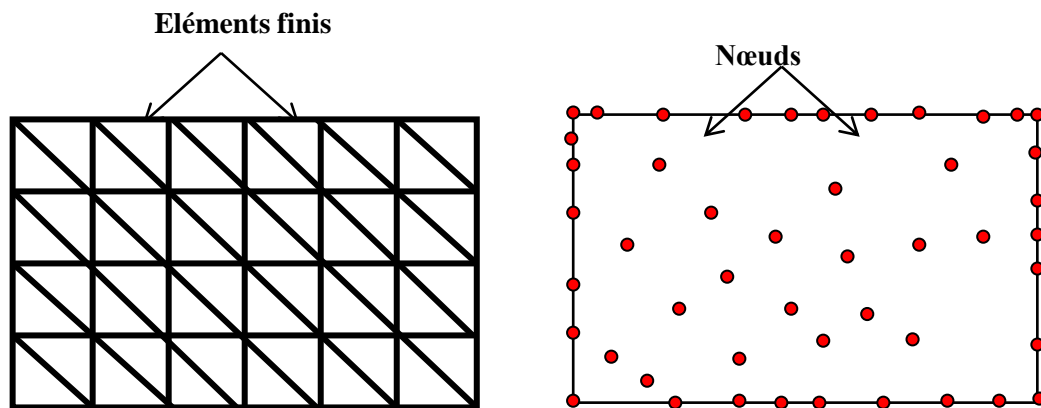


Fig. 2 : Illustration méthode des éléments finis / méthodes sans maillage.

III.4. CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME

La construction de fonctions de forme efficaces, est une étape très importante dans le développement d'une méthode Meshfree. L'exactitude de l'approximation effectuée pour un nœud considéré du domaine d'étude, dépend principalement des nœuds contenus dans la région du domaine appelée domaine d'influence ou domaine support. Toutefois, il est impératif de définir le concept de domaine d'influence ou domaine support qui est souvent utilisée dans les approximations Meshfree.

III.4.1 DOMAINE D'INFLUENCE OU DOMAINE SUPPORT

Ce sont les régions de l'espace du domaine d'étude où l'on cherche à calculer les inconnus (FIG.3). Pour un nœud quelconque, la dimension du domaine d'influence d_s est déterminée par [32]:

$$d_s = \alpha_s d_c \tag{III.1-a}$$

où :

α_s , est la taille adimensionnelle du domaine d'influence,

d_c est l'espacement nodal au voisinage du nœud considéré.

Si les nœuds sont uniformément répartis, d_c est la distance entre deux nœuds voisins. Si les nœuds sont répartis d'une manière aléatoire, d_c peut être défini par la moyenne des espacements au voisinage du nœud considéré.

Pour les cas unidimensionnels, l'espacement nodal moyen peut être défini par la relation [19]:

$$d_c = \frac{D_s}{(n_{D_s} - 1)} \quad (\text{III.1-b})$$

D_s représente une approximation de d_s et n_{D_s} est le nombre de nœuds à l'intérieur du domaine d'influence de dimension D_s .

Pour les cas bidimensionnels, l'espacement nodal moyen peut être défini par la relation:

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s}} - 1} \quad (\text{III.2})$$

A_s représente une approximation de l'aire du domaine d'influence et n_{A_s} le nombre de nœuds contenus dans le domaine de surface A_s .

De la même façon et pour les cas tridimensionnels, on a:

$$d_c = \frac{\sqrt[3]{V_s}}{\sqrt[3]{n_{V_s}} - 1} \quad (\text{III.3})$$

où :

V_s , représente une approximation du volume du domaine d'influence et n_{V_s} le nombre de nœuds contenus dans le domaine de volume V_s . Lors de l'approximation le nœud considéré est situé au centre du domaine d'influence.

Différentes formes de domaines sont utilisés circulaire, rectangulaire et polygonal [19].

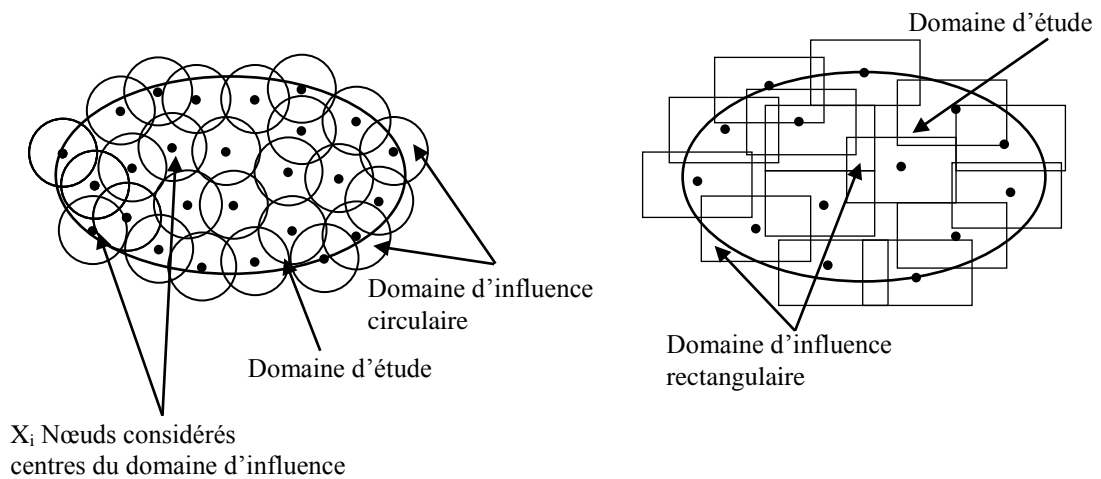


Fig. 3 : Représentations du domaine d'influence.

Notons que la précision de l'approximation dépend du nombre de nœuds dans le domaine d'influence. En effet, lors de la définition d'un domaine d'influence, il est primordial qu'il existe suffisamment de nœuds à l'intérieur du domaine. Ceci évite de rencontrer des problèmes de

singularité lors du calcul de la fonction de forme à cause d'un nombre insuffisant de noeuds dans le support considéré [19].

III.4.2 LES MÉTHODES D'APPROXIMATIONS UTILISÉES DANS LES MÉTHODES SANS MAILLAGE

III.4.2.1 LES MÉTHODES D'INTERPOLATION PONCTUELLES (MIP)

On considère une fonction scalaire $u(X)$ définie sur le domaine d'étude Ω représenté par un ensemble de noeuds, La méthode d'interpolation ponctuelle (MIP) approxime $u(X)$ au niveau du noeud \tilde{X} par [32]:

$$u(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^m B_i(\tilde{X}) a_i \tag{III.4}$$

où :

$B_i(X)$ sont les fonctions de base définies dans l'espace cartésien de coordonnées $X^T [x, y]$

m est le nombre de fonctions de base et a_i les coefficients.

Suivant le choix du type de la base, on distingue deux types de la méthode d'interpolation ponctuelle:

- La méthode d'interpolation ponctuelle (MIP) à base polynomiale;
- La méthode d'interpolation ponctuelle (MIP) à base radiale.

III.4.2.2. LA MÉTHODE D'INTERPOLATION PONCTUELLE (MIP) A BASE POLYNOMIALE

Dans cette version, on utilise une base polynomiale complète. La base polynomiale complète d'ordre p s'exprime par:

- Dans le cas unidimensionnel (1D):

$$\{p(X)\}^T = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^{(p-1)} \quad x^{(p)} \rangle \tag{III.5}$$

- Dans le cas bidimensionnel (2D):

$$\{p(X)\}^T = \langle 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \dots \quad x^{(p)} \quad y^{(p)} \rangle \tag{III.6}$$

L'interpolation de $u(X)$ au niveau du point \tilde{X} , est donnée par:

$$u(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^m p_i(\tilde{X}) a_i = \{p(\tilde{X})\}^T \{a\} \tag{III.7}$$

avec,

$\{p(\tilde{X})\}$: vecteur des éléments de la base polynomiale de dimension m .

$\{a\}$: vecteur des coefficients de l'interpolation.

La détermination des coefficients a_i s'effectue en suivant les étapes:

1. Détermination du domaine d'influence associé au point \tilde{X} contenant un nombre de nœuds égal à n (pour une MIP classique $m = n$).
2. On force alors $u(X)$ à passer à travers tous les nœuds du domaine d'influence et à prendre les valeurs nodales associées à ces nœuds ($u_i \ i = 1, \dots, n$). Cette condition conduit au système algébrique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_{i=1}^m a_i \quad p_i(X_1) = a_1 p_1(X_1) + a_2 p_2(X_1) + \dots + a_m p_m(X_1) \\ u_2 = \sum_{i=1}^m a_i \quad p_i(X_2) = a_1 p_1(X_2) + a_2 p_2(X_2) + \dots + a_m p_m(X_2) \\ \dots \\ \dots \\ u_n = \sum_{i=1}^m a_i \quad p_i(X_n) = a_1 p_1(X_n) + a_2 p_2(X_n) + \dots + a_m p_m(X_n) \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

Le système (8) peut s'écrire sous forme matricielle:

$$\{U_s\} = [P_m] \{a\} \quad (\text{III.9})$$

La matrice $[P_m]$ est appelée matrice moment, elle est symétrique pour la méthode d'interpolation ponctuelle classique ($m = n$).

$$[P_m] = \begin{bmatrix} p_1(X_1) & p_2(X_1) & \dots & p_n(X_1) \\ p_1(X_2) & p_2(X_2) & \dots & p_n(X_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1(X_n) & p_2(X_n) & \dots & p_n(X_n) \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Le vecteur $\{U_s\}$ est le vecteur des valeurs nodales:

$$\{U_s\} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n\}^T \quad (\text{III.11})$$

Le vecteur $\{a\}$ est le vecteur des coefficients inconnus de l'interpolation.

$$\{a\} = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n\}^T \quad (\text{III.12})$$

On résout le système précédent par rapport au vecteur des coefficients $\{a\}$:

$$\{a\} = [P_m]^{-1} \{U_s\} \quad (\text{III.13})$$

En remplaçant l'équation (13) dans (7), on a:

$$u(X) = \{p\}^T \{a\} = \{p\}^T [P_m]^{-1} \{U_s\} = \sum_{i=1}^n (\phi_i u_i) = \{\Phi(X)\}^T \{U_s\} \quad (\text{III.14})$$

avec :

$\{\Phi(X)\}$: vecteur des fonctions de forme donné par:

$$\{\Phi(X)\}^T = \{p\}^T [P_m]^{-1} = \langle \phi_1(X) \quad \phi_2(X) \dots \dots \phi_n(X) \rangle \quad (III.15)$$

Il est à noter que tant que l'on utilise le même domaine d'influence (relatif au point \tilde{X}), les coefficients a_i restent constants (car la matrice moment dépend uniquement des coordonnées des nœuds contenus dans le domaine d'influence). Les fonctions de forme obtenues sont polynomiales, par conséquent, leurs dérivées sont facilement déterminables:

Les l èmes dérivées des fonctions de formes de la MIP sont données par:

$$\frac{\partial^{(l)} \{\Phi(X)\}}{\partial X^{(l)}} = \frac{\partial^{(l)} ([P_m]^{-1} \{p\})}{\partial X^{(l)}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^{(l)} \phi_1(X)}{\partial X^{(l)}} \\ \frac{\partial^{(l)} \phi_2(X)}{\partial X^{(l)}} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{\partial^{(l)} \phi_n(X)}{\partial X^{(l)}} \end{array} \right\} = \frac{\partial^{(l)} (\{p\}^T)}{\partial X^{(l)}} [P_m]^{-1} \quad (III.16)$$

III.4.2.3. LA MÉTHODE D'INTERPOLATION PONCTUELLE (MIP) A BASE RADIALE

Afin d'éviter les singularités rencontrées avec l'utilisation de bases polynomiales dans la méthode d'interpolation ponctuelle, on utilise des bases dites radiales [32-33]. L'approximation de la fonction scalaire $u(X)$ s'écrit:

$$u(X) = \sum_{i=1}^n R_i(X) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(X) b_j = \{R(X)\}^T \{a\} + \{p(X)\}^T \{b\} \quad (III.17)$$

La variable $R_i(X)$ utilisée pour le calcul des composantes de la base radiale est la distance entre le nœud considéré \hat{X} et un nœud X_i du domaine d'influence. Pour le cas bidimensionnel, cette distance est donnée par:

$$r = \sqrt{(\hat{x} - x_i)^2 + (\hat{y} - y_i)^2} \quad (III.18)$$

Il existe plusieurs types de bases radiales [32-33], les plus utilisées sont:

Nom de la base radiale	Expression	Paramètres
Multi quadratique	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, q$

Gaussienne (exponentielle)	$R_i(x, y) = \exp\left(-\alpha_c \left(\frac{r_i}{d_c}\right)^2\right)$	α_c
TPS (Thin Plate Spline)	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	η
Logarithmique	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log(r_i)$	η

Tab.1 Les bases radiales les plus utilisées [32-33].

La détermination des coefficients a_i et b_j de (III.17), exige que l'approximation vérifie les valeurs nodales pour les n nœuds du domaine d'influence relatif au nœud \bar{X} . Ceci se traduit par un système linéaire de n équations dont la forme matricielle est:

$$\{U_s\} = [R_0]\{a\} + [P_m]\{b\} \quad (\text{III.19})$$

où,

$\{U_s\}$ est le vecteur des valeurs nodales:

$$\{U_s\} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}^T \quad (\text{III.20})$$

La matrice moment de la base radiale est:

$$[R_0] = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_1(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_1(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(r_n) & R_1(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (\text{III.21})$$

où r_k ($k=1, \dots, n$) dans $R_j(r_k)$ ($j=1, \dots, n$) est donné par:

$$r_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \quad (\text{III.22})$$

La matrice moment de la base polynomiale est:

$$[P_m]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m(X_1) & p_m(X_2) & \dots & p_m(X_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (\text{III.23})$$

Les vecteurs $\{a\}$ et $\{b\}$ sont donnés par:

$$\{a\}^T = \langle a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \rangle \quad (\text{III.24})$$

$$\{b\}^T = \langle b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m \rangle \quad (\text{III.25})$$

Dans le système (III.19), on a $(n+m)$ inconnues pour n équations qui correspondent aux n nœuds du domaine d'influence. Les m équations supplémentaires sont déterminées à partir de :

$$\sum_{i=1}^n p_j(X_i) a_i = [P_m]^T \{a\} = 0, \text{ avec } : j = 1, \dots, m \quad (\text{III.26})$$

En combinant (III.19) et (III.26), on a :

$$\{\hat{U}_s\} = \begin{Bmatrix} U_s \\ 0 \end{Bmatrix} = [G] \{a_0\} = \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Le vecteur $\{a_0\}$ est donné par :

$$\{a_0\}^T = \langle a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m \rangle \quad (\text{III.28})$$

Le vecteur $\{\hat{U}_s\}$ est donné par :

$$\{\hat{U}_s\} = \langle u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \rangle \quad (\text{III.29})$$

La matrice $[R_0]$ étant symétrique, il en est de même pour $[G]$, on obtient :

$$\{a_0\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = [G]^{-1} \{\hat{U}_s\} \quad (\text{III.30})$$

En remplaçant dans l'expression donnant l'approximation on aura :

$$u(X) = [R(X)]^T \{a\} + [p(X)]^T \{b\} = \langle [R(X)]^T \quad [p(X)]^T \rangle \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$$u(X) = \langle [R(X)]^T \quad [p(X)]^T \rangle [G]^{-1} \{\hat{U}_s\} = \{\hat{\Phi}(X)\}^T \{\hat{U}_s\} \quad (\text{III.32})$$

Les fonctions de forme pour la base radiale sont données par :

$$\{\hat{\Phi}(X)\}^T = \langle [R(X)]^T \quad [p(X)]^T \rangle [G]^{-1} = \langle \phi_1(X) \quad \phi_2(X) \quad \dots \quad \phi_{n+1}(X) \quad \dots \quad \phi_{n+m}(X) \rangle \quad (\text{III.33})$$

III.4.3. APPROXIMATION PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS GLISSANTS

III.4.3.1. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS CLASSIQUES

Considérons une certaine fonction inconnue $u(X)$ connaissant quelques valeurs u_I aux points X_I , appelés nœuds, en nombre N . Cherchons l'équation d'une fonction approchée $u^h(X)$ en se basant sur les valeurs u_I . Si on considère un cas linéaire à une dimension on cherche alors une fonction de la forme :

$$u^h(X) = a_0 + a_1 X \quad (\text{III.34})$$

$$u^h(X) = P^T(X) a \quad (\text{III.35})$$

avec $P^T(X) = [1, X]$ et $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$

La minimisation de la fonctionnelle ci-dessous :

$$J = \sum_{I=1}^N [u^h(X_I) - u_I]^2 \quad (\text{III.36})$$

permet alors la détermination des paramètres a_0 et a_1 .

III.4.3.2. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS PONDÉRÉS [32]

Afin d'améliorer l'ajustement des moindres carrés classiques, Il est possible d'attribuer un poids différent W positif à chaque valeur u_i en cherchant encore à minimiser la fonctionnelle (III.36) [34] :

$$J = \sum_{I=1}^N W_I [P^T(X_I) a - u_I]^2 \quad (\text{III.37})$$

L'équation $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$ conduit à la résolution d'un système linéaire, fournissant le vecteur des constantes $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$.

Il est possible d'approximer à l'aide d'une fonction non linéaire, il suffit juste d'utiliser la base $P^T(X)$ nécessaire.

III.4.3.3. LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS GLISSANTS (MLS) [10, 35]

Contrairement à l'approximation par les moindres carrés classiques, la méthode par Moindres Carrés Glissants (MLS) assure un caractère local de l'approximation en introduisant une dépendance de chaque noeud « I ».

III.4.3.3.1. DÉFINITION DES FONCTIONS POIDS

La mise en œuvre de l'approximation MLS repose sur l'expression mathématique des fonctions poids associées à chaque noeud « I ». La fonction poids W est strictement positive en un sous-domaine du support d'influence d'un point X_I et nulle au bord du domaine (FIG.4). Les différentes fonctions affectent considérablement la précision des résultats numériques et doivent satisfaire les conditions suivantes:

- $W > 0$ à l'intérieur du domaine d'influence ;
- $W = 0$ à l'extérieur du domaine d'influence ;
- W est monotone décroissante.

Nous remarquons aussi que la fonction poids affecte l'approximation qui en résulte car, si la fonction poids est continue alors les fonctions de forme le sont également.

La fonction poids définie existe sous plusieurs formes dans la littérature, les plus utilisées sont la cubique spline, et la quartic spline. Dans la présente étude, nous utilisons la cubique spline définie par:

$$\omega(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{pour } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{pour } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{pour } r > 1 \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

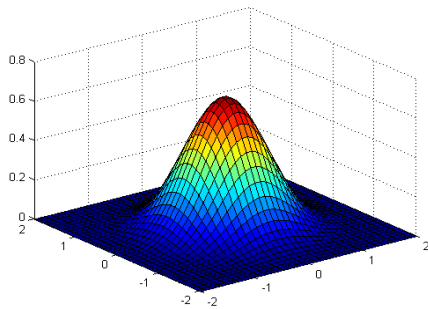
La quartic spline :

$$\omega(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{pour } r \leq 1 \\ 0 & \text{pour } r > 1 \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

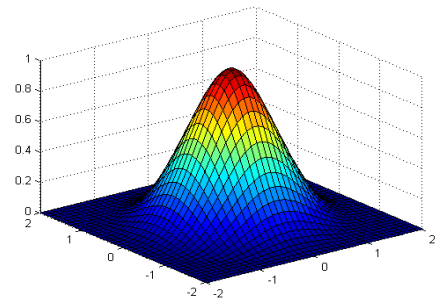
Dans (38), r est une distance normalisée:

$$r = \frac{\|X - X_I\|}{d_I} \quad (\text{III.40})$$

où d_I représente la taille du domaine d'influence correspondant au nœud I .



(a)



(b)

Fig. 4 : Allure de la fonction poids au nœud central (40x40) nœuds (a) spline cubique et (b) quartic spline.

III.4.3.3.2. DÉTERMINATION DES FONCTIONS DE FORME

Avant de construire la fonction de forme, il est nécessaire de choisir une fonction poids, qui délimite le support de la fonction de forme, et une base polynômiale $\langle P^T(X) \rangle$.

L'approximation de la fonction $u(X)$, notée $u^h(X)$, est définie comme un polynôme d'ordre m mais avec des coefficients variables.

L'approximation locale au voisinage d'un point \bar{X} est donnée par :

$$u_L^h(X, \bar{X}) = \{P(X)\}^T \{a(\bar{X})\} \quad (\text{III.41})$$

Où $P^T(X)$ est une base polynomiale d'ordre m

$$P^T(X) = [1, X, X^2, \dots, X^m] \quad (\text{III.41-1})$$

Et $\{a(\bar{X})\}$ contenant des coefficients variables :

$$a^T(X) = [a_0(X); a_1(X), a_2(X), a_3(X), \dots, a_m(X)] \quad (\text{III.41-2})$$

Les paramètres inconnus $a_j(X)$ seront déterminés en minimisant la différence entre l'approximation locale et les valeurs nodales u_I :

$$J = \sum_{I=1}^N W(X - X_I) [u_L^h(X_I, X) - u_I]^2 \quad (\text{III.42})$$

$$J = \sum_{I=1}^N W(X - X_I) [P^T(X_I) a(X) - u_I]^2 \quad (\text{III.43})$$

où N est le nombre de nœuds au voisinage de X et où la fonction poids $W(X - X_I) \neq 0$.

L'équation $\partial J / \partial a = 0$ conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^N W(X - X_I) 2p_1(X_I) [P^T(X_I) a(X) - u_I] &= 0 \\ \sum_{I=1}^N W(X - X_I) 2p_2(X_I) [P^T(X_I) a(X) - u_I] &= 0 \\ \sum_{I=1}^N W(X - X_I) 2p_3(X_I) [P^T(X_I) a(X) - u_I] &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{I=1}^N W(X - X_I) 2p_m(X_I) [P^T(X_I) a(X) - u_I] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

en notation vectorielle :

$$\sum_{I=1}^N W(X - X_I) 2P(X_I) [P^T(X_I) a(X) - u_I] = 0 \quad (\text{III.45})$$

Après réarrangement et élimination du facteur 2 on obtient :

$$\sum_{I=1}^N W(X - X_I) P(X_I) P^T(X_I) a(X) = \sum_{I=1}^N W(X - X_I) P(X_I) u_I \quad (\text{III.46})$$

Sous forme matricielle on obtient :

$$A(X) a(X) = B(X) u \quad (\text{III.47})$$

où :

$$A(X) = \sum_{I=1}^N W(X - X_I) P(X_I) P^T(X_I) \quad (\text{III.48})$$

et

$$B(X) = [W(X - X_1)P(X_1) \quad W(X - X_2)P(X_2) \quad W(X - X_3)P(X_3) \dots W(X - X_N)P(X_N)] \quad (\text{III.49})$$

de l'équation (III.47) on aboutit à :

$$a(X) = [A(X)]^{-1} B(X) u \quad (\text{III.50})$$

Pour que la matrice $A(X)$ soit inversible, il faut que les nœuds soient en nombre suffisant : $N > m$ où m est la taille du vecteur des fonctions de base $P^T(X)$.

En remplaçant (III.50) dans (III.41) nous aboutissons à la forme de l'approximation MLS :

$$u^h(X) = P^T(X)[A(X)]^{-1} B(X) u \quad (\text{III.51})$$

que nous réécrivons aussi

$$u^h(X) = \sum_{I=1}^N \phi_I(X) u_I = \phi^T(X) u \quad (\text{III.52})$$

avec $\phi_I(X)$: fonction de forme associée au nœud I exprimée par:

$$\phi_I(X) = P^T(X)[A(X)]^{-1} W(X - X_I) P(X_I) \quad (\text{III.53})$$

La fonction de forme MLS s'écrit alors :

$$\phi^T(X) = P^T(X)[A(X)]^{-1} B(X) \quad (\text{III.54})$$

À la différence des fonctions de forme de la méthode des éléments finis, les fonctions de forme MLS sont différentes de 1 au nœud auquel elles sont associées et ne sont pas nécessairement nulles aux autres nœuds [15]:

$$\phi_i(X_j) \neq \delta_{ij} \quad (\text{III.55})$$

C'est pour cette raison que l'approximation MLS est effectivement une approximation et non une interpolation :

$$u^h(X_i) \neq u_i \quad (\text{III.56})$$

Pour les cas bidimensionnel et tridimensionnel X devient un vecteur.

Pour les cas bidimensionnels la base $P(X)$ est donnée par :

$$\text{Base linéaire : } P^T(X) = [1 \quad X \quad Y]$$

$$\text{Base quadratique : } P^T(X) = [1 \quad X \quad Y \quad X^2 \quad Y^2 \quad XY]$$

III.4.3.3.3. MODÉLISATION DE LA GÉOMÉTRIE

Dans la méthode EF, les parties complexes de la géométrie et des frontières peuvent être modélisées en utilisant les éléments (surfaciques ou curvilignes) d'ordre élevé.

Le nombre et l'ordre des éléments utilisés conditionnent l'exactitude de la solution. Un maillage plus fin peut généralement mener à des résultats plus précis.

Dans les méthodes sans maillage, la frontière (non discrétisée) est représentée par des nœuds. À un point quelconque entre deux nœuds sur la frontière, on peut approximer en utilisant une fonction de forme sans maillage.

Une frontière incurvée peut être rapprochée très exactement même avec une base de polynômes linéaires. En effet, les fonctions de forme sans maillages sont créées en utilisant des nœuds dans un domaine local mobile.

III.4.3.3.4. CONDITIONS AUX LIMITES

Puisque les fonctions de forme ne possèdent pas la propriété du symbole de Kronecker, des techniques spéciales sont exigées pour imposer les conditions aux limites essentielles telles : Les multiplicateurs de Lagrange, la méthode de pénalité et la méthode de Nietche [32,35].

Dans notre travail, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour l'imposition des conditions aux limites. Pour comprendre le principe de cette méthode, on considère la fonctionnelle définie sous forme intégrale par :

$$\Pi = \int_{\Omega} F(u, u_x, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} E(u, u_x, \dots) d\Gamma \quad (\text{III.57})$$

où :

u : est la fonction inconnue,

F et E : des opérateurs différentiels.

La solution du problème continu est une fonction u qui va rendre la fonctionnelle stationnaire par n'importe quelle variation δu

Posons $C(u) = 0$ sur Γ pour satisfaire cette contrainte, on construit la nouvelle fonctionnelle :

$$\bar{\Pi}(u, \lambda) = \Pi(u) + \int_{\Gamma} \lambda^T C(u) d\Gamma \quad (\text{III.58})$$

La variation de cette nouvelle fonctionnelle est :

$$\delta \bar{\Pi} = \delta \Pi + \int_{\Gamma} \delta \lambda^T C(u) d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda^T \delta C(u) d\Gamma \quad (\text{III.59})$$

Afin d'obtenir les équations discrètes, les multiplicateurs de Lagrange doivent être approximés

$$\lambda(X) = \sum_{I=1}^l N_I^L(X) \lambda_I \quad (\text{III.60})$$

où l est le nombre de fonctions de formes nécessaires pour approximer les multiplicateurs de Lagrange sur les frontières.

Plusieurs méthodes d'approximation de $N_I^L(X)$ sont utilisées à savoir :

l'interpolation sur les frontières utilisée dans la méthode des éléments finis ;

l'approximation Meshless sur les frontières ;

la méthode de collocation par points, et qui utilise la fonction delta de Dirac :

$$N_I^L(X) = \delta(X - X_I^L) \quad (\text{III.61})$$

X_I^L : nœuds situés sur la frontière Γ .

III.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue quelques méthodes sans maillage, ainsi que les approximations utilisées par ces méthodes. Ces méthodes sont depuis toujours vues comme une alternative prometteuse pour surmonter les difficultés que rencontre la méthode des éléments finis.

D'un point de vue théorique idéalisé, les avantages de ces méthodes sont les suivants :

- l'absence de connectivités fixes entre les nœuds supprime les effets indésirables de la MEF dus à la déformation du maillage ;
- le raffinement de la discrétisation est facilité, puisqu'il est très simple de rajouter des nœuds (pas de traitement particulier tel que l'adaptation du maillage) .

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **J.L. BATOZ, G. DHATT**, "Modélisation des structures par éléments finis", Edition Hermes, Paris, 1992.
- [2] **J. YVONNET**, "Nouvelles approches sans maillage basées sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme", Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Arts et Métiers Paris, 2004.
- [3] **R. A. GINGOLD, J. J. MONAGHAN**, "Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol 181, pages 375-389, 1977.
- [4] **J. BONET, S. KULASEGARAM**, "Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with application in metal forming simulations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 47, issue 6, pages 1189-1214, 2000.
- [5] **J.J. MONAGHAN**, "Why particle methods work", SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, vol 3, issue 3, pages 422-433, 1982.
- [6] **J.J. MONAGHAN**, "An introduction to SPH", Computer Physics Communications, vol 48, issue 1, pages 89-96, 1988.
- [7] **L. D. LIBERSKY, A. G. PETSCHKE, T. C. CARNEY, J. R. HIPPEL, F. A. ALLAHDADI**, "High strain Lagrangian hydrodynamics", Journal of Computational Physics, vol 109, pages 67-75, 1993.
- [8] **J. BONET, T. LOK**, "Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 180, issues 1-2, pages 97-115, 1999.
- [9] **B. NAYROLES, G. TOUZOT, P. VILLON**, "The diffuse approximation", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série II, vol 313, issue 3, pages 293-296, 1991.
- [10] **T. BELYTSCHKO, Y. Y. LU, L. GU**, "Element Free Galerkin methods", International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol 37, pages 229-256, 2004.
- [11] **W.K. LIU, S. JUN, Y.F. ZHANG**, "Reproducing kernel particle methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 20, pages 1081-1106, 1995.
- [12] **J. M. MELENK, I. BABUSKA**, "The partition of unity finite element method : Basic theory and applications", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 139, pages 289-314, 1996.
- [13] **S. N. ATLURI, T. ZHU**, "A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics", Computational Mechanics, vol 22, pages 117-127, 1998.
- [14] **E. CUETO, N. SUKUMAR, B. CALVO, M. A. MARTINEZ, J. CEGONINO, M. DOBLARE**, "Overview and recent advances in Natural Neighbour Galerkin methods", Archives of Computational Methods in Engineering, vol 10, issue 4, pages 307-384, 2003.
- [15] **N. SUKUMAR, B. MORAN, T. BELYTSCHKO**, "The Natural Element Method in Solid Mechanics", International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol 43, issue 5, pages 839-887, 1998.

- [16] **J. YVONNET, F. CHINESTA, PH. LORONG, D. RYCKELYNCK**, "The constrained natural element method (C-NEM) for treating thermal models involving moving interfaces", *International Journal of Thermal Sciences*, vol 44 (6), pages 559-569, 2005.
- [17] **G. SHOBEYRI, M. H. AFSHAR**, " Corrected discrete least-squares meshless method for simulating free surface flows", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 36, pages 1581-1594, 2012.
- [18] **V. NGUYEN, T. RABCZUK, S. BORDAS, M. DUFLOT**, " Meshless methods : A review and computer implementation aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol 79, pages 763-813, 2008.
- [19] **T. BELYTSCHKO, Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING, P. KRYSL**, " Meshless methods : An overview and recent developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 139, issues 1-4, pages 3-47, 1996.
- [20] **P. LANCASTER, K. SALKAUSKAS**, "Surfaces generated by moving least-squares methods", *Mathematics of Computation*, vol 37, pages 141-158, 1981.
- [21] **V. CINGOSKI , N. MIYAMOTO, H. YAMASHITA**, "Element-free Galerkin method for electromagnetic field computations", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, N° 5, pages 3236-3239, 1998.
- [22] **F.Z. LOUAI, N.NAIT-SAID, S. DRID**, "Numerical analysis of electromagnetic axisymmetric problems using Element Free Galerkin method", *Journal of Electrical Engineering Elektrotechnický časopis*, vol. 57, N° 2, pages 99–104, 2006.
- [23] **S. L. HO, S.YANG, J. M. MACHADO, H. C. WONG**, "Application of a meshless method in electromagnetics", *IEEE Trans. Magn*, vol. 37, N° 5, pages 3198-3202, 2001.
- [24] **L. XUAN, Z. ZENG, B. SHANKER, L. UDPA**, "Element-free Galerkin method for static and quasistatic electromagnetic field computation", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, N° 1, pages 12-20, 2004.
- [25] **T. LISZKA, J. ORKISZ**, "The finite difference method at arbitrary irregular grids 179 Bibliographie and its application in applied mechanics", *Computers & Structures*, vol 11, pages 83 – 95, 1980.
- [26] **E. J. KANSA**, "Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. I. Surface approximations and partial derivative estimates", *Computers Mathematics with Applications*, vol 19, pages 127 – 145, 1990.
- [27] **E. J. KANSA**, "Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations", *Computers Mathematics with Applications*, vol 19, pages 147 – 161, 1990.
- [28] **M. A. GOLBERG**, "The method of fundamental solutions for Poisson's equation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 16, pages 205 – 213, 1995.
- [29] **H. WANG, Q. H. QIN**, "A meshless method for generalized linear or nonlinear Poisson-type problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 30, pages 515 –521, 2006.
- [30] **A. TRI, H. ZAHROUNI, M. POTIER-FERRY**, "Perturbation technique and method of fundamental solution to solve nonlinear Poisson problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 35, pages 273 – 278, 2011.
- [31] **Y. TAMPANGO** " Développement d'une méthode sans maillage utilisant les approximations de Taylor " thèse de Doctorat, Université de Lorraine, 2012.

- [32] **G.R. LIU**, "An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming", National University of Singapore, Springer, 2005.
- [33] **J. WANG, G. LIU**, " A point interpolation meshless method based on radial basis functions ", Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 54, N° 11, pages 1623-1648, 2002.
- [34] **M. DUFLOT**, "Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture", Thèse de doctorat, Université de Liège, 2004.
- [35] **V. NGUYEN**, "Meshless methods and their computer implementation aspects", Paris, Hermès, 2006.

QUATRIÈME CHAPITRE :
APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GALERKIN SANS
MAILLAGES À LA RÉOLUTION DU PROBLÈME
MAGNÉTOSTATIQUE NON LINÉAIRE

IV.0. INTRODUCTION

La modélisation consiste à établir une structure mathématique capable de décrire les phénomènes physiques. En électromagnétisme, les équations de Maxwell associées aux lois de comportement du milieu constituent un modèle mathématique. L'adaptation de ces équations aux différentes applications, et leur résolution est l'enjeu principal de nombreux travaux de recherche.

Dans le cas de systèmes simples, les équations de Maxwell peuvent être résolues analytiquement. C'est le cas par exemple d'étude des tôles magnétiques dans l'hypothèse d'un comportement linéaire. En revanche dans le cas de systèmes complexes, l'utilisation de méthodes numériques comme la méthode des éléments finis ou aussi les méthodes sans maillages est indispensable.

Une des techniques sans maillages la plus répandue en électromagnétisme est la méthode de Galerkin sans maillages (Element free Galerkin method (EFG)), qui combine l'approximation par les moindres carrés glissants (MLS) et la méthode de Galerkin [1]. Cette technique, appliquée initialement pour l'analyse de champ électrostatique et magnétostatique en deux dimensions (2-D) [2-8], est aujourd'hui utilisée dans des problèmes plus complexes faisant intervenir des champs électromagnétiques variables dans le temps, également en présence de courants de Foucault [9-10]. Cette méthode a aussi été utilisée pour la modélisation des films minces magnétostrictifs [11].

L'élimination du maillage rend les méthodes sans maillage particulièrement attractives pour surmonter les difficultés liées à la discrétisation des domaines tridimensionnels (3-D) [12]. Comme souligné dans la littérature, la EFG montre deux inconvénients majeurs: elle présente un temps de calcul plus lent dans la construction de fonctions de forme que la méthode des éléments finis (FEM), elle nécessite aussi des méthodes particulières pour l'imposition de conditions aux limites, puisque les fonctions de forme ne sont pas interpolées [13-14]. Plusieurs alternatives ont été présentées dans la littérature pour surmonter ces difficultés, la méthode EFG peut être couplée avec la FEM, pour combiner les avantages des deux techniques [15]. En effet, le traitement des discontinuités matérielles et des conditions aux limites peut être réalisée directement par la EFG, tel que proposé dans plusieurs ouvrages consacrés à l'analyse électromagnétique [5-6].

Nous commençons ce chapitre par une présentation des équations de Maxwell ainsi que les différentes lois de comportement des matériaux étudiés. Le phénomène de l'hystérésis étant très présent dans les matériaux ferromagnétiques, Le modèle statique de Preisach est alors choisi.

Nous avons développé deux algorithmes intégrant *La méthode de la première aimantation* d'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach, pour la résolution du problème magnétostatique non linéaire (2D) en utilisant la méthode EFG (Element Free Galerkin) et la méthode des éléments finis.

Le problème non linéaire est résolu par la méthode du point fixe [16], lors de l'imposition des conditions aux limites dans méthode EFG nous avons utilisé les multiplicateurs de Lagrange [1], [3].

IV.1. LOIS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

IV.1. 1. ÉQUATIONS DE MAXWELL

L'ensemble des dispositifs électromagnétiques sont décrits par les grandeurs suivantes [17-18] :

\vec{H} : le champ magnétique ;

\vec{B} : l'induction magnétique ;

\vec{E} : le champ électrique ;

\vec{D} : l'induction électrique;

\vec{J} : densité de courant électrique;

ρ : densité de charge électrique.

La combinaison de ces grandeurs vectorielles constitue des relations régissant les phénomènes électriques et magnétiques présentées par J. C. Maxwell (1864) sous forme d'équations aux dérivées partielles [18-19]:

Loi de Faraday – Maxwell :

$$\text{Rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{IV.1})$$

Loi d'Ampère – Maxwell :

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{IV.2})$$

Loi de Gauss – Maxwell :

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{IV.3})$$

Loi de conservation du flux magnétique :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Ces équations sont dites universelles, c'est-à-dire vraies quelque soit le système. Dans le cas où les courants de déplacement (terme $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$) sont négligés, on se trouve alors dans le cadre des hypothèses du régime quasi-statique. L'équation (2) devient :

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{IV.5})$$

Les équations de Maxwell seront complétées par les lois constitutives du milieu et les conditions aux limites.

IV.1.2. LOIS CONSTITUTIVES DU MILIEU

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{IV.6})$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{IV.7})$$

$$\vec{J} = J_0 + \sigma \vec{E} + \sigma (\nu \wedge \vec{B}) \quad (\text{IV.8})$$

où:

μ : est la perméabilité magnétique;

σ : est la conductivité électrique;

ε : est la permittivité électrique;

v : représente la vitesse des pièces en mouvements;

\vec{M} : représente l'aimantation des matériaux magnétiques.

J_0 : la densité de courants sources;

$\sigma \vec{E}$: représente les courants induits dans les parties conductrices.

IV.1.3. LES CONDITIONS AUX LIMITES

On considère un système électromagnétique, afin d'étudier ce système, nous définissons un domaine d'étude Ω [18].

La frontière du domaine Ω notée Γ est décomposée en deux parties Γ_B et Γ_H où $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_H$ (figure 1).

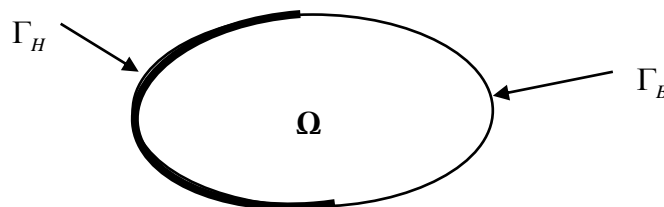


Fig.1 : Domaine d'étude et ses frontières.

L'unicité de la solution du modèle mathématique ainsi que les lois de comportement, est assurée par la définition des conditions aux limites temporelles et spatiales associées aux champs.

Les conditions aux limites temporelles sont fixées grâce à la répartition initiale de l'induction ou du champ magnétique. En général, le champ H est pris égal à zéro à l'instant initial. Les conditions aux limites spatiales sont quant à elles définies sur la frontière Γ du domaine d'étude Ω :

$$\vec{H} \wedge \vec{n} \Big|_{\Gamma_H} = \vec{0} \quad (\text{IV.9})$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma_B} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

avec \vec{n} la normale de la frontière Γ .

En combinant (5) et (9) ainsi que (1) et (10), nous obtenons :

$$\vec{E} \wedge \vec{n} \Big|_{\Gamma_B} = \vec{0} \quad (\text{IV.11})$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma_H} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

IV.2. FORMULATION MAGNETOSTATIQUE

La magnétostatique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques en régime stationnaire. La répartition du champ magnétique est alors invariante dans le temps.

Les équations qui décrivent ce phénomène sont issues des équations de Maxwell où les dérivées temporelles sont prises égales à zéro.

À partir de la loi de conservation du flux (4) on définit le potentiel vecteur \vec{A} :

$$\text{Rot } \vec{A} = \vec{B} \quad (\text{IV.13})$$

En combinant les équations (5), la loi constitutive des milieux ferromagnétiques (7) et l'équation (13), on obtient l'équation non linéaire:

$$\text{Rot}(\text{Rot } \vec{A}) = \mu_0 (\vec{J} + \text{Rot } \vec{M}) \quad (\text{IV.14})$$

IV.3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GALERKIN SANS MAILLAGE (EFG) POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME MAGNÉTOSTATIQUE NON LINÉAIRE

La méthode (EFG) développée par Belytschko et al. (1994) [1], est basée sur la construction de fonction de forme en utilisant l'approximation des moindres carrés glissants (MLS), le système discret global est issu de la forme faible de Galerkin et des cellules sont utilisées pour calculer les intégrales.

Pour la construction des fonctions de forme deux éléments principaux sont nécessaires :

Un vecteur contenant les éléments de la base polynomiale et un ensemble de noeuds répartis dans le domaine d'étude. À chacun de ces noeuds correspond une fonction poids.

Les fonctions de forme MLS possèdent les propriétés suivantes :

- Localité: la fonction de forme est nulle en dehors du support de la fonction poids
- Absence d'interpolation: les fonctions de forme sont différentes de l'unité aux points auxquels elles sont associées et ne sont pas nécessairement nulles. Cela constitue la différence avec des fonctions de forme de la MEF. Pour cette raison, l'approximation MLS est effectivement une approximation et non une interpolation
- l'approximation ne satisfait pas aux conditions du delta de Kronecker, de telle façon que les conditions de Dirichlet ou essentielles ne peuvent être imposées directement.

IV.3.1. FORMULATION DU PROBLÈME AXISYMETRIQUE

Le problème axisymétrique est représenté par l'équation électromagnétique en termes de potentiel vecteur magnétique (14). Dans le cas axisymétrique la densité de courant source J possède uniquement la composante azimutale (J_φ) indépendante de φ , donc le vecteur potentiel résultant possède uniquement la composante (A_φ) [3]. En utilisant les coordonnées cylindriques (r, z) pour le cas bidimensionnel; l'équation (IV.14) devient:

$$\left(-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 r A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 r A_\varphi}{\partial z^2}\right)\right) = \mu_0 \left(J_\varphi + \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}\right)\right) \quad (\text{IV.15})$$

Dans l'équation (IV.15), M_r, M_z sont les composantes du vecteur aimantation respectivement suivant r et z obtenues à partir du modèle statique de Preisach.

En introduisant les transformations:

$$\begin{cases} A = r A_\varphi \\ J_s = J_\varphi \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

L'équation (IV.15) devient alors:

$$\left(-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)\right) = \mu_0 \left(J_s + \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}\right)\right) \quad (\text{IV.17})$$

Soit Ω le domaine d'étude et ses frontières définies sur $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$. Considérons le modèle mathématique de l'équation (IV.17) et les conditions aux limites décrites ci-dessous :

$$\begin{cases} A = \bar{A} \text{ sur } \Gamma_u \\ \frac{\partial A}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_q \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

\bar{A} est le potentiel vecteur connu, sur la frontière Γ_u , n est la normale à la frontière Γ_q .

La fonctionnelle correspondant à l'équation (IV.17) avec les conditions aux limites (IV.18) est donnée par:

$$\begin{aligned} I(A) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 - 2\mu_0 A \left(J_s + \left(\frac{\partial M_r(A)}{\partial z} - \frac{\partial M_z(A)}{\partial r} \right) \right) \right] dr dz \\ & + \int_{\Gamma_q} \frac{\partial A}{\partial n} A ds + \int_{\Gamma_u} \lambda (A - \bar{A}) \mu ds \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Où λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange utilisé pour imposer les conditions aux limites essentielles. Exprimé à travers le contour s par :

$$\lambda_s = \sum_I^{n_\lambda} N_I(s) \lambda_I \quad (\text{IV.20})$$

Où:

$N_I(s)$: est la fonction de forme de type Lagrange (exemple: $N_0(s) = \frac{(s-s_1)}{(s_0-s_1)}$, $N_1(s) = \frac{(s-s_0)}{(s_1-s_0)}$);

où :

s , est la longueur curviligne le long de Γ_u ;

λ_I , est le multiplicateur de Lagrange du nœud I ;

n_λ , est le nombre de nœuds utilisés pour l'interpolation.

La variation du multiplicateur de Lagrange donne :

$$\delta\lambda_s = \sum_I^{n_\lambda} N_I(s)\delta\lambda_I \quad (\text{IV.21})$$

La minimisation de l'équation (19) nous donne:

$$\begin{aligned} \delta_A I(A, \delta) = \int_{\Omega} [(\delta A)_r \frac{A_r}{r} + (\delta A)_z \frac{A_z}{r} - \mu_0(\delta A)J_s \\ - \mu_0(M_r(\delta A)_z - M_z(\delta A)_r)] dr dz + \int_{\Gamma_u} \lambda(\delta A) ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

$$\delta_\lambda I(A, \lambda) = \int_{\Gamma_u} \delta\lambda(A - \bar{A}) ds = 0 \quad (\text{IV.23})$$

δA et $\delta\lambda$ sont les fonctions test, $(\delta A)_r$ et $(\delta A)_z$ (A_r et A_z) sont les dérivées respectives de δA (A) en fonction de r et z .

En utilisant l'approximation MLS de A :

$$A^h(X) = \sum_{I=1}^n \phi_I(X) A_I = \phi(X) A \quad (\text{IV.24})$$

Avec $\phi_I(X)$: fonction de forme au nœud I , et n le nombre de nœud contenus dans le domaine d'influence.

Après intégration, on obtient le système algébrique:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

où

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \left((\phi_i)_r \frac{1}{r} (\phi_j)_r + (\phi_i)_z \frac{1}{r} (\phi_j)_z \right) dr dz \quad (\text{IV.25-a})$$

$$f_i = \iint_{\Omega} \left(\mu_0 \phi_i J_s + \mu_0 (M_r (\phi_i)_z - M_z (\phi_i)_r) \right) dr dz \quad (\text{IV.25-b})$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma_u} \phi_i N_j ds \quad (\text{IV.25-c})$$

$$q_i = \int_{\Gamma_u} N_i \bar{A} ds \quad (\text{IV.25-d})$$

Où $(\phi_i)_r$ et $(\phi_i)_z$ représentent les dérivés par rapport à r et z respectivement. Afin d'évaluer les intégrales précédentes, en utilisant l'intégration par la méthode de quadrature de Gauss-Legendre, une structure cellulaire appelée cellules d'intégration qui est indépendante des nœuds est utilisée.

IV.3.2. MÉTHODE DU POINT FIXE APPLIQUÉE À LA RÉOLUTION DU PROBLÈME NON LINÉAIRE

Une fois que les formulations sont établies, la méthode du point fixe est choisie pour la résolution du problème non linéaire [16]. Elle consiste à résoudre le problème de manière itérative jusqu'à la convergence.

Le principe de la méthode du point fixe consiste à remplacer toute équation non linéaire $f(x) = 0$ par une application $g(x) = x$ tel que :

$$f(x) = g(x) - x \quad (IV.26)$$

A l'état initial x vaut x_0 , l'équation récurrente de la méthode du point fixe est:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (IV.27)$$

Après un certain nombre d'itérations la méthode converge si:

$$x_{n+1} \approx x_n \Leftrightarrow x_n \approx g(x_n) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0 \quad (IV.28)$$

Le problème non linéaire est résolu en utilisant l'algorithme développé :

Etape 1	Initialisation: $k=1$, $i=1$ et l'erreur imposée ε
Etape 2	Initialisation de A^i , M^i , et J^k ,
Etape 3	Calculer A^{i+1} avec la méthode EFG à partir de l'équation: $\nabla \times (\nabla \times A^{i+1}) = \mu_0 (J^k + \nabla \times M^i)$,
Etape 4	Calculer B^{i+1} à partir de l'équation : $B^{i+1} = \nabla \times A^{i+1}$,
Etape 5	Déterminer H^{i+1} en utilisant le modèle de Preisach avec la méthode d'identification de la fonction de distribution proposée "Méthode de la première aimantation",
Etape 6	Calculer M^{i+1} en utilisant l'équation $M^{i+1} = B^{i+1} / \mu_0 - H^{i+1}$,
Etape 7	Calculer la précision τ ,
Etape 8	si $\tau \leq \varepsilon \Rightarrow$ convergence $k = k+1$ et $i = i+1$ aller à 2,
Etape 9	si $\tau > \varepsilon$ (pas de convergence) alors $i = i+1$ aller à 3,
Etape 10	Résultats.

IV.3.3. PROBLÈME TEST

Considérons un dispositif composé d'un échantillon ferromagnétique cylindrique d'une longueur de 0,080 m et 0,02 m de diamètre, entourée d'une bobine d'excitation, de longueur 0,012 m alimentée par un courant sinusoïdal de densité $J=1 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$, l'air entoure la bobine et l'échantillon ferromagnétique (Figure 2).

Pour la modélisation numérique, les limites infinies théoriques du domaine d'étude sont ramenées à une distance finie qui peut varier en fonction de la précision souhaitée. Dans notre cas, ces limites ont été fixées à une distance de 0,2 m. Compte tenu de la nature axisymétrique du problème, seulement 1/4 du domaine est considéré. Les conditions aux limites sont représentées sur toutes les limites indiquées dans la figure (2).

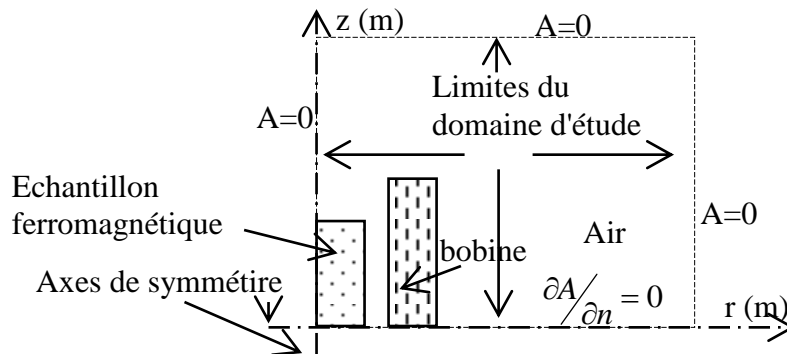


Fig.2 : Problème test et conditions aux limites.

IV.3.4. PARAMÈTRES DE LA MÉTHODE EFG UTILISÉS POUR LE CALCUL

Les paramètres de la méthode sans maillage EFG utilisés lors des simulations sont présentés dans le tableau 1, et représentés sur la figure (figure 3) :

Base polynomiale	Fonction poids	Domain d'influence	Intégration numérique	Conditions aux limites essentielles
Linéaire	Cubic Spline	Rectangulaire $d_{\max} = 1.5$	Gauss quadrature (4x4)points	multiplicateurs de Lagrange

Tab1. Paramètres de la méthode EFG.

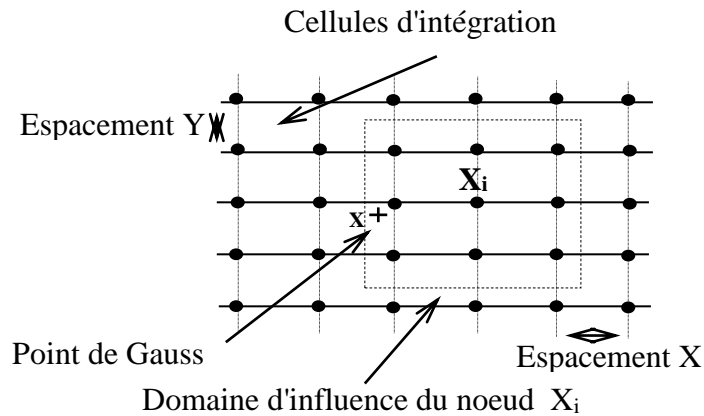


Fig.3 : Représentation des paramètres de la méthode EFG.

IV.4. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Pour résoudre le problème 2D magnétostatique non linéaire des simulations numériques ont été effectuées en utilisant des programmes développés dans un environnement MATLAB. Les résultats obtenus par la méthode EFG ont été comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis (FEM) en utilisant la norme d'erreur:

$$\|\mathcal{E}\| = |A_{EFGM} - A_{FEM}| \quad (IV.29)$$

A_{EFGM} et A_{FEM} sont respectivement les solutions obtenues par les deux méthodes EFG et FEM en terme de potentiel vecteur magnétique.

Ci-dessous sont représentés les résultats obtenus par les deux méthodes respectives EFG et EF

- Le potentiel vecteur magnétique;
- L'évolution du champ magnétique dans l'échantillon ferromagnétique dans les points représentés sur (figure 5) et notées C1, et C2 ;
- L'induction magnétique au niveau des points C1, et C2 ;
- Le cycle d'hystérésis au niveau des points C1, et C2 ;
- l'erreur ;
- l'influence du domaine d'influence sur la solution.

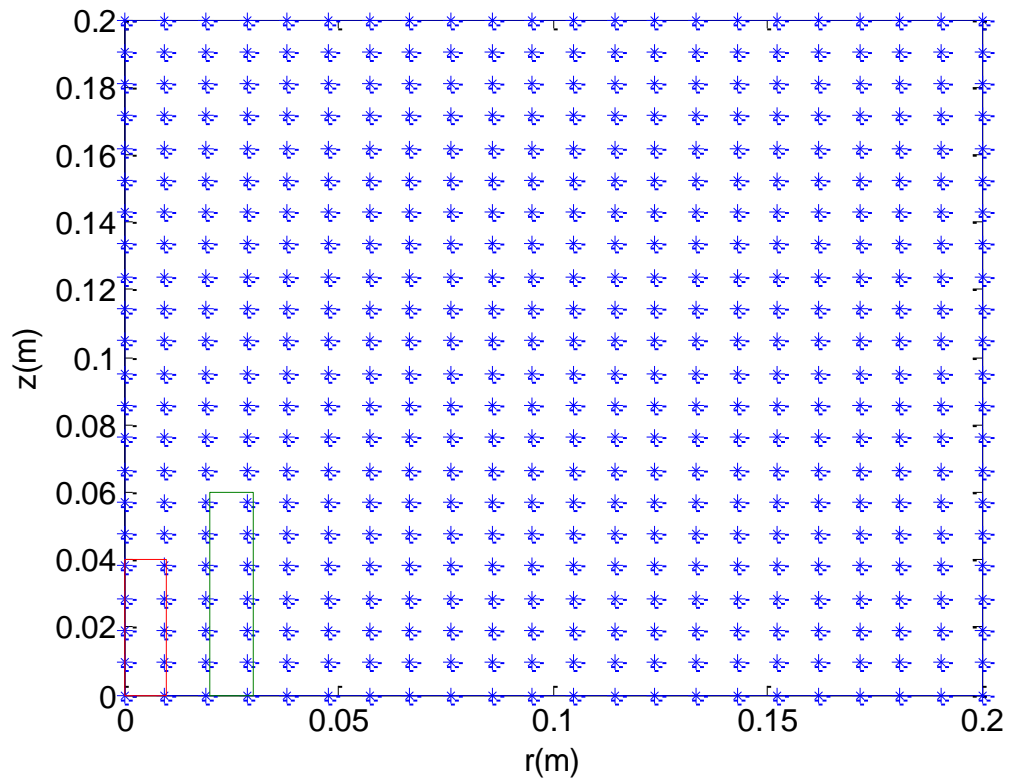


Fig. 4 a : Espacement nodal uniforme (21X21 nœuds).

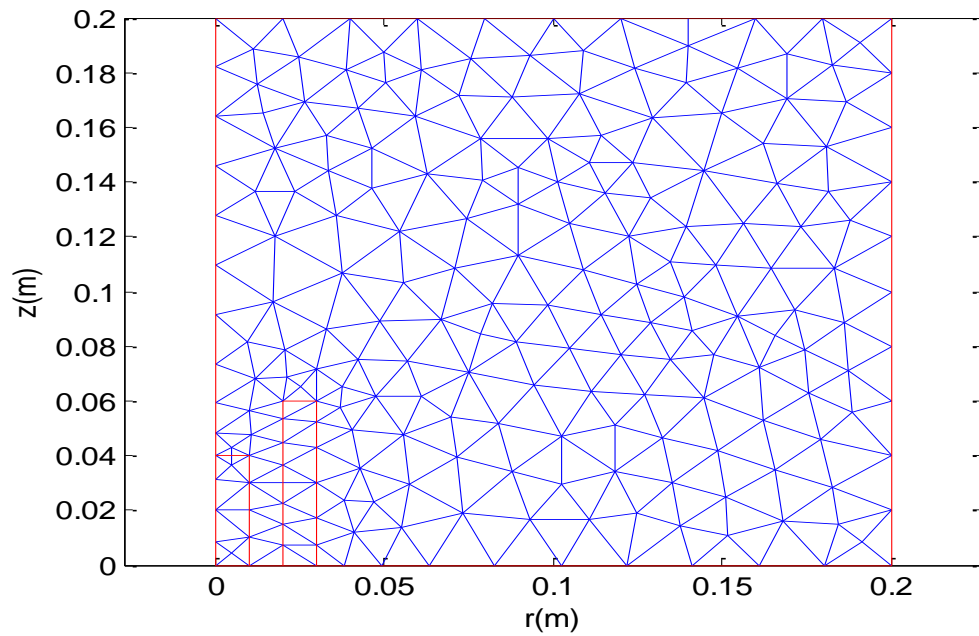


Fig. 4 b : maillage utilisé pour la méthode FEM.

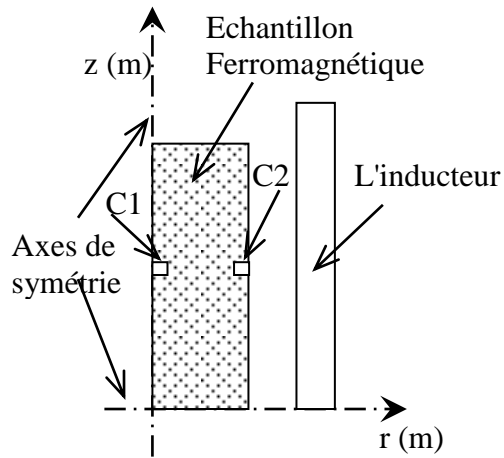


Fig. 5 : Position des points sélectionnés au niveau de la charge.

Les simulations numériques effectuées en utilisant le programme développé ont permis la représentation des distributions du potentiel vecteur magnétique dans le domaine d'étude, les valeurs maximales sont atteintes au voisinage de l'inducteur (Figure 6).

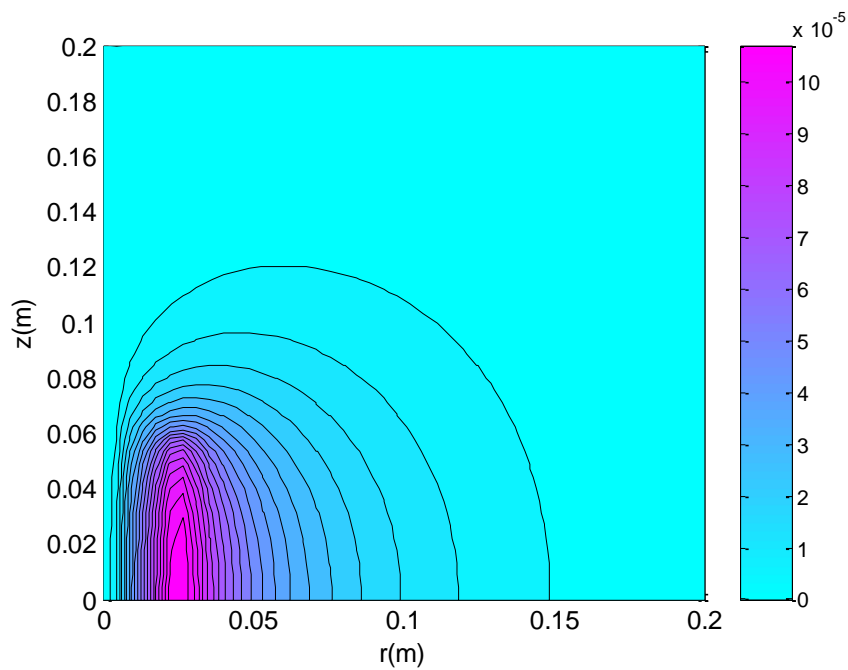


Fig.6.a : Le potentiel vecteur magnétique obtenu par la méthode EFG (35x35 nœuds).

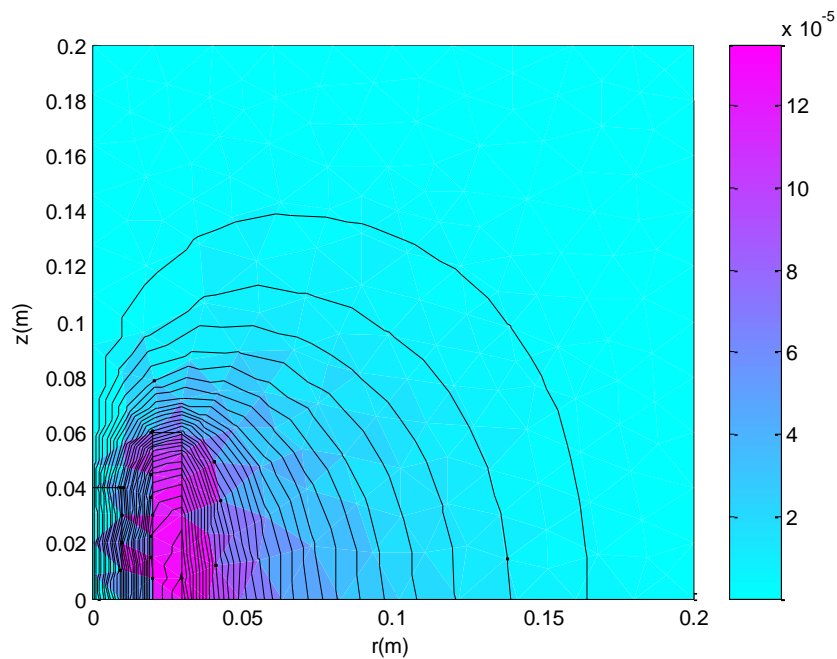


Fig.6.b : Le potentiel vecteur magnétique obtenu par la méthode EFG (380 nœuds).

L'évolution du champ magnétique au niveau des points C1, et C2, de l'échantillon ferromagnétique (Figure 7).

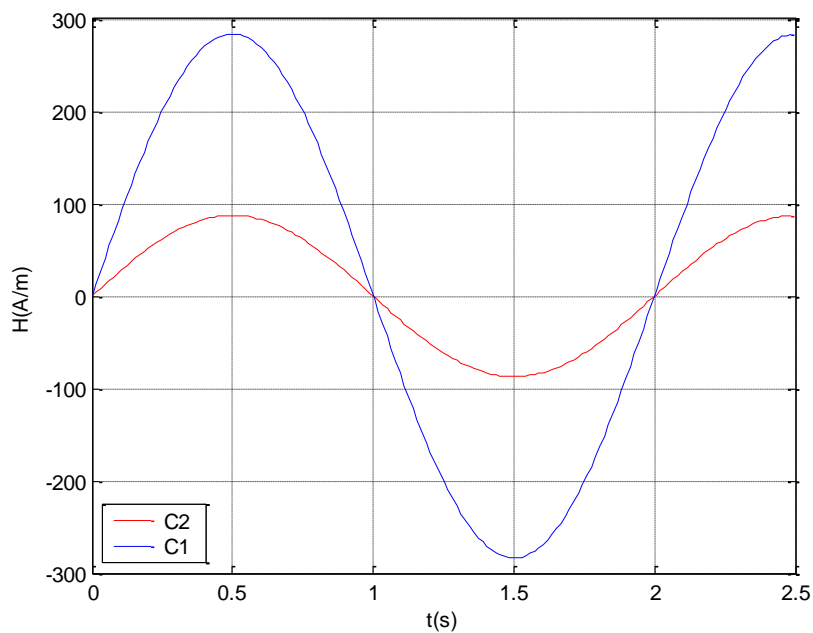


Fig. 7 : L'évolution du champ magnétique au niveau des points C1, et C2 (35x35 noeuds).

Nous représentons aussi l'évolution temporelle de l'induction magnétique au niveau des points sélectionnés sur la charge.

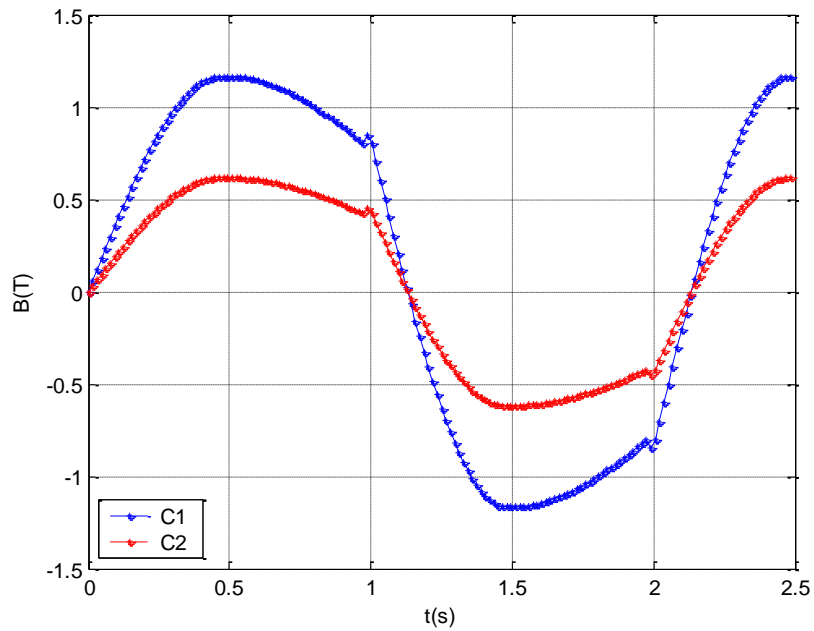


Fig. 8 : Induction magnétique dans les points sélectionnés au niveau de la charge (35x35 noeuds).

Sur la figure 9 sont représentés les cycles d'hystérésis dans les points sélectionnés de la charge.

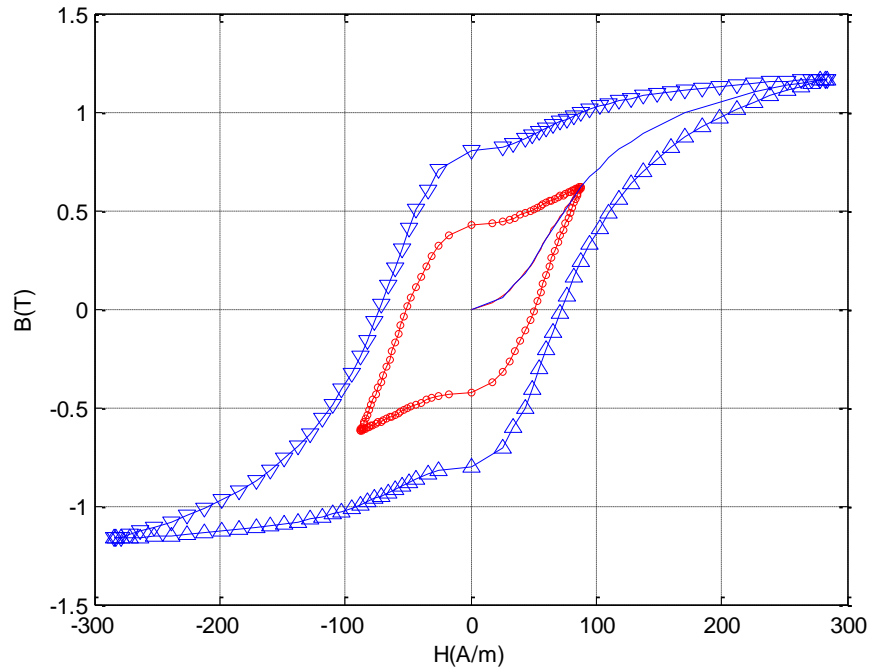


Fig. 9 : Evolution des cycles d'hystérésis dans les différents points sélectionnés de la charge.

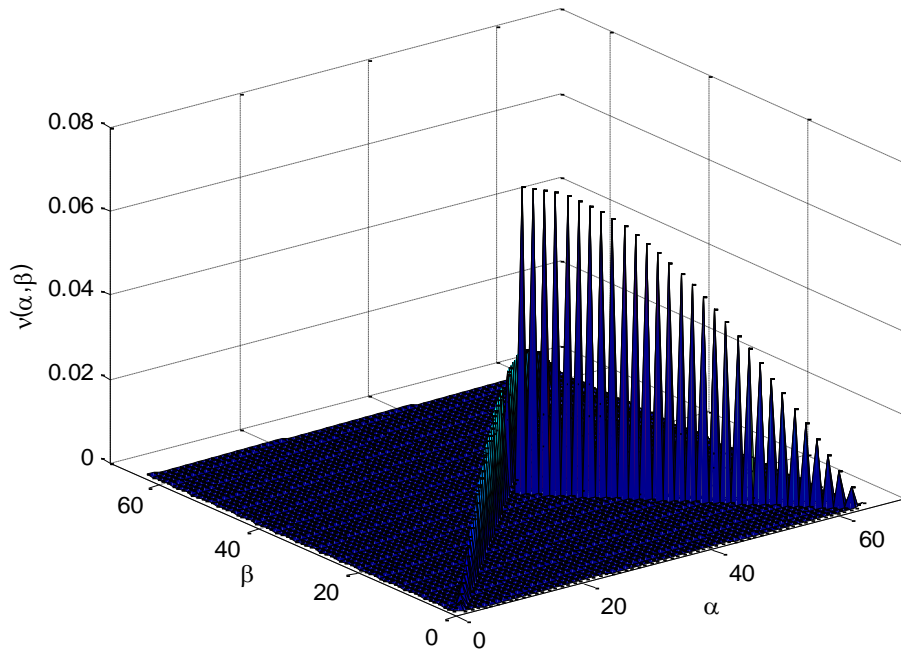


Fig. 10 : Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C1.

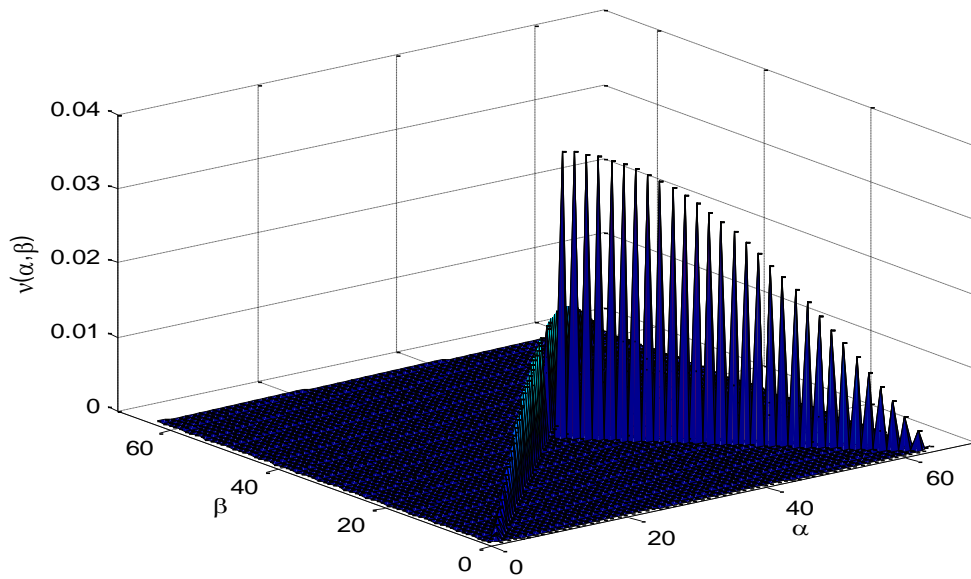


Fig. 11 : Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C2.

Pour valider la nouvelle méthode développée dans cette thèse, nous l'avons intégré dans un programme élément finis développé pour la résolution du problème magnéto-statique non linéaire 2D.

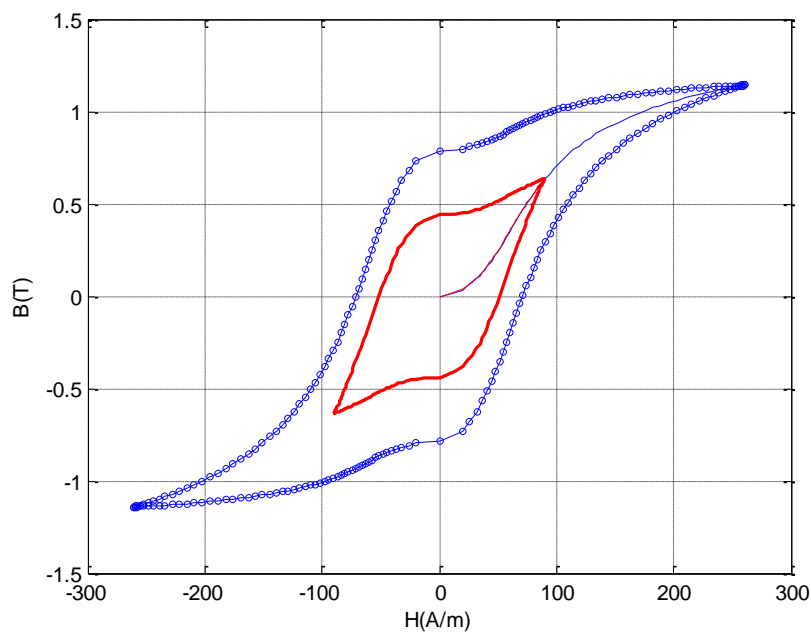


Fig. 12. Evolution des cycles d'hystérésis dans les différents points sélectionnés de la charge (FEM).

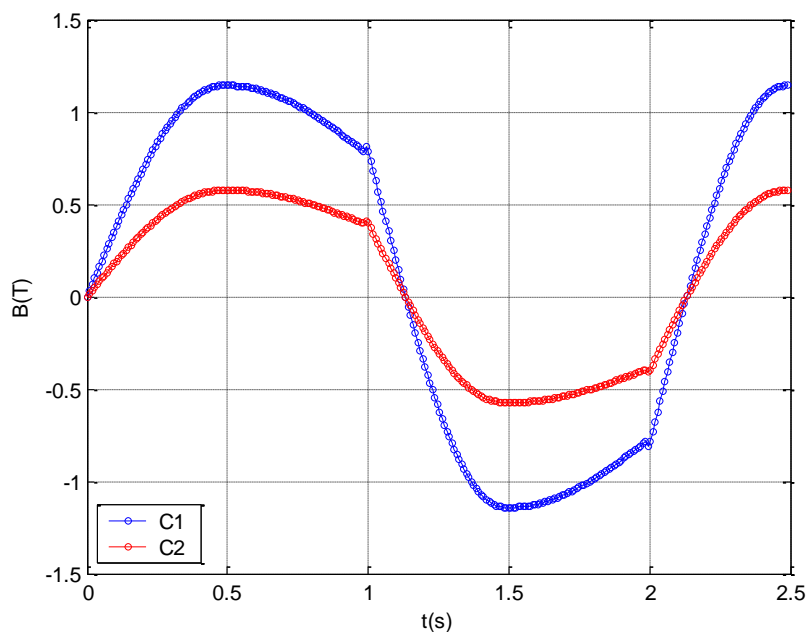


Fig. 13 : Induction magnétique dans les points sélectionnés au niveau de la charge (FEM).

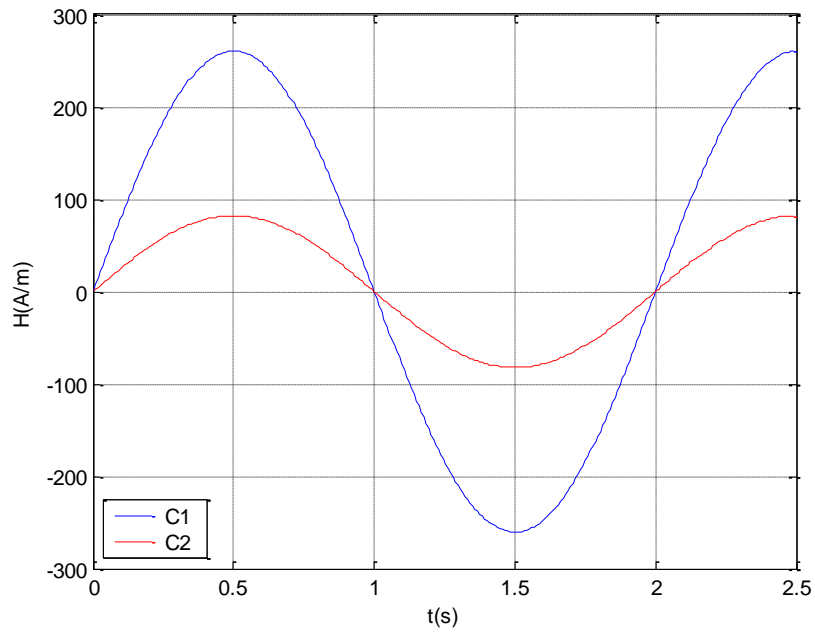


Fig. 14 : L'évolution du champ magnétique au niveau des points C1, et C2 (FEM).

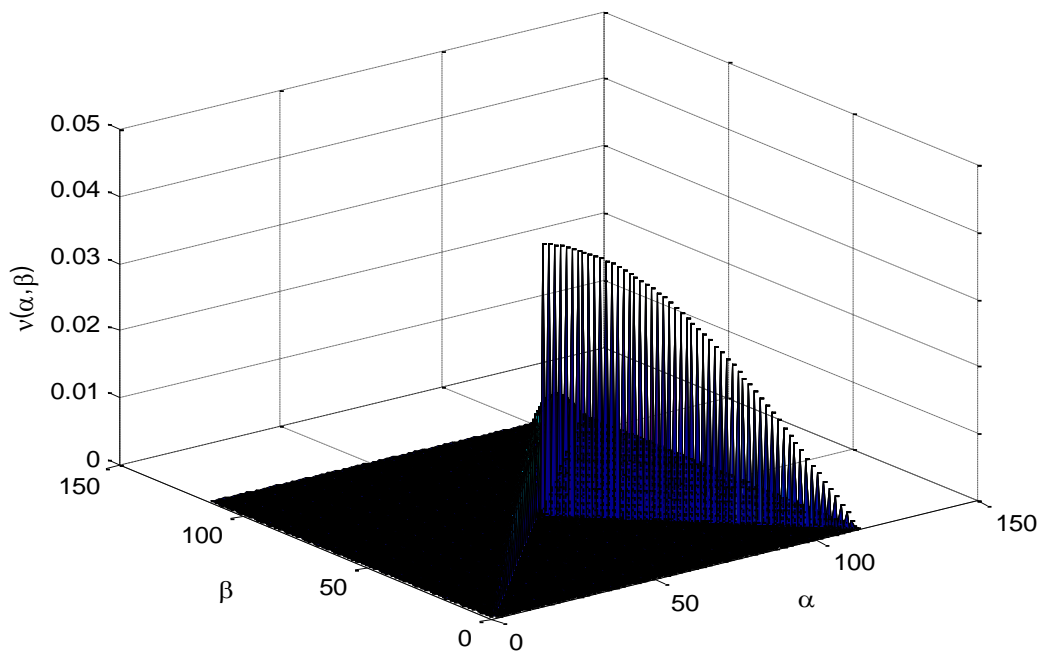


Fig. 15 : Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C1 (FEM).

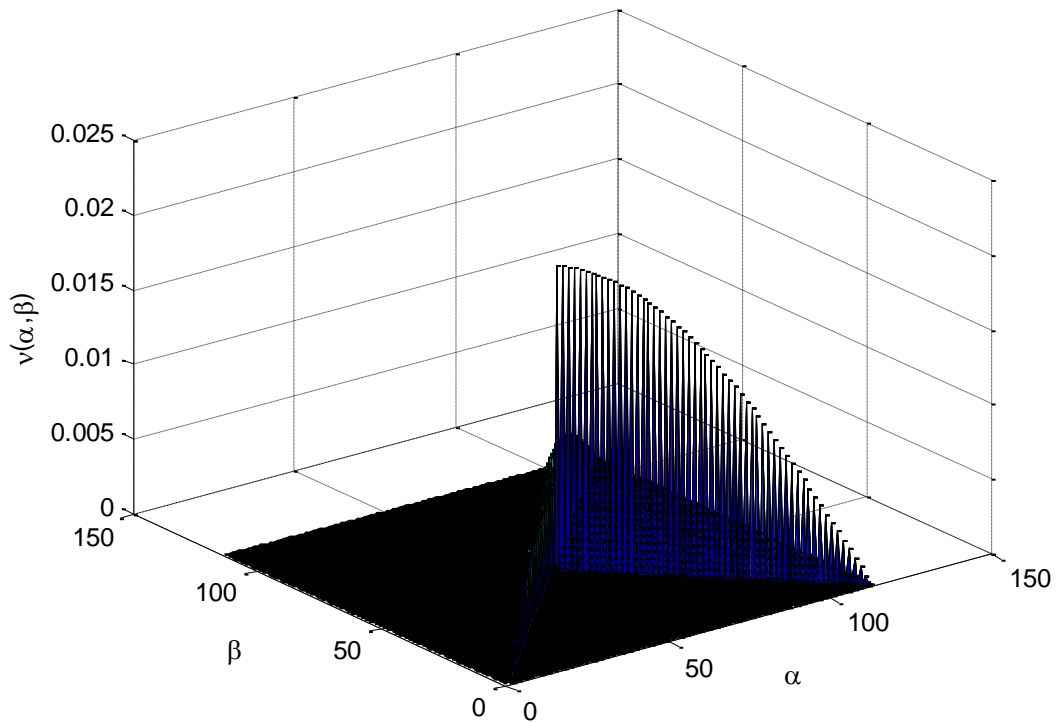


Fig. 16 : Fonction de distribution du modèle de Preisach utilisé lors du tracé du cycle au niveau de la cellule C2 (FEM).

On étudie la sensibilité de la solution EFG en terme de potentiel vecteur en la comparant avec la solution obtenue par la méthode FEM (figures 17 et 18). L'erreur absolue calculée est très faible et dépend du nombre de noeuds utilisés. Elle devient négligeable avec l'augmentation du nombre de noeuds.

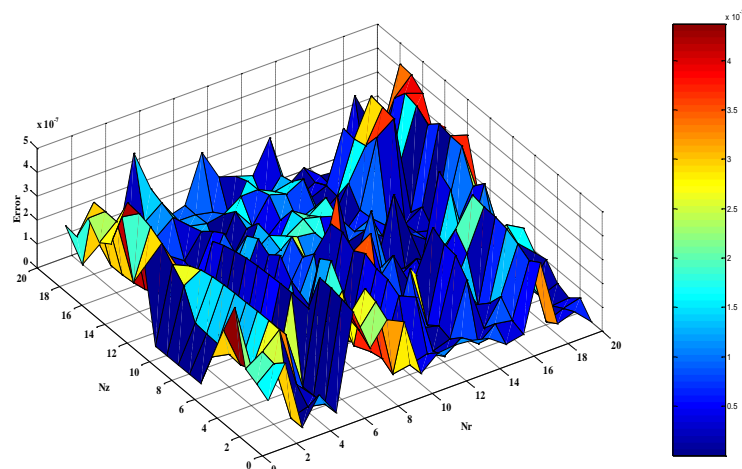


Fig. 17 : Erreur : (380 noeuds).

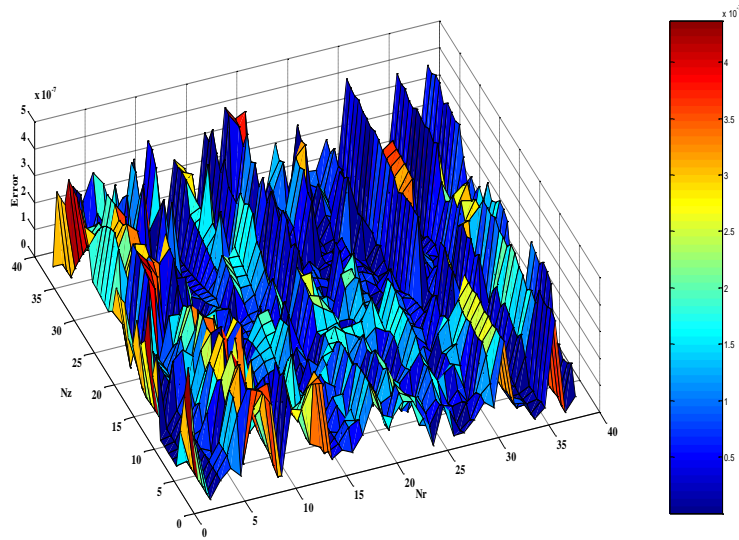


Fig. 18 : Erreur: (1444 noeuds).

VI.5. EFFET DU DOMAINE D'INFLUENCE SUR LA SOLUTION

La précision de la méthode EFG dépend fortement du choix de la taille du domaine d'influence contrôlée par le paramètre d_{max} , plus ce paramètre augmente et plus le temps de calcul augmente et la solution est alors influencée Figures (19, 20, 21).

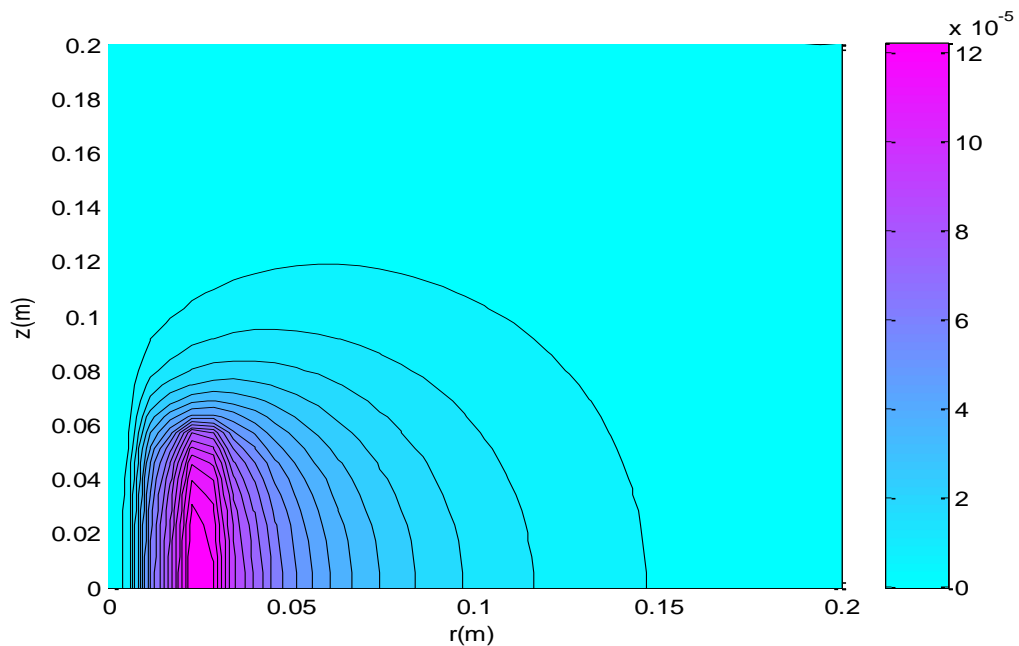


Fig. 19 : Potentiel vecteur magnétique par la méthode EFG $d_{max}=2.0$.

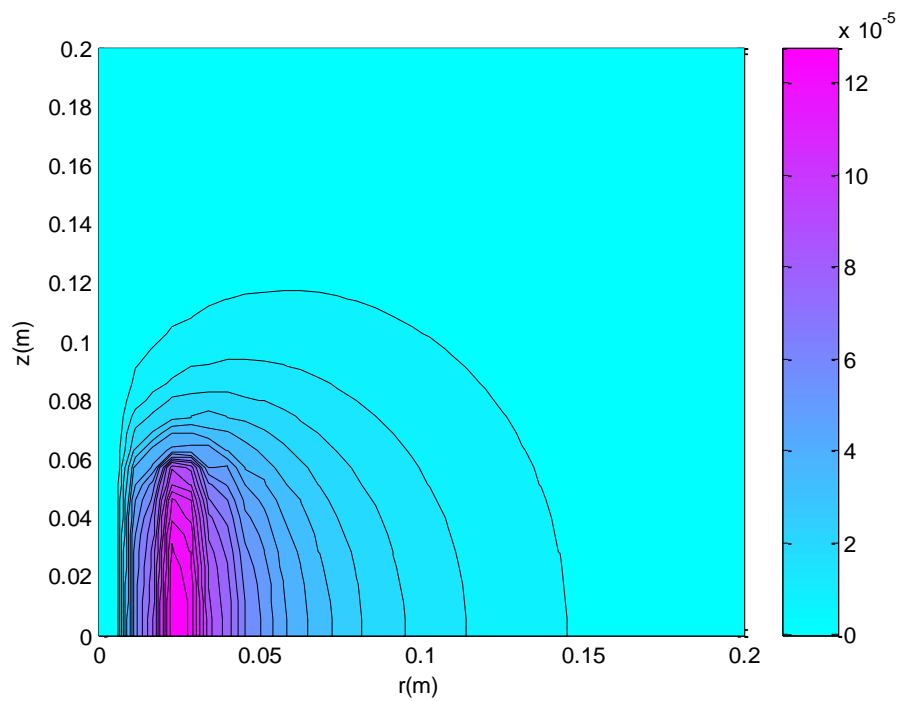


Fig. 20 : Potentiel vecteur magnétique par la méthode EFG $d_{\max}=2.5$.

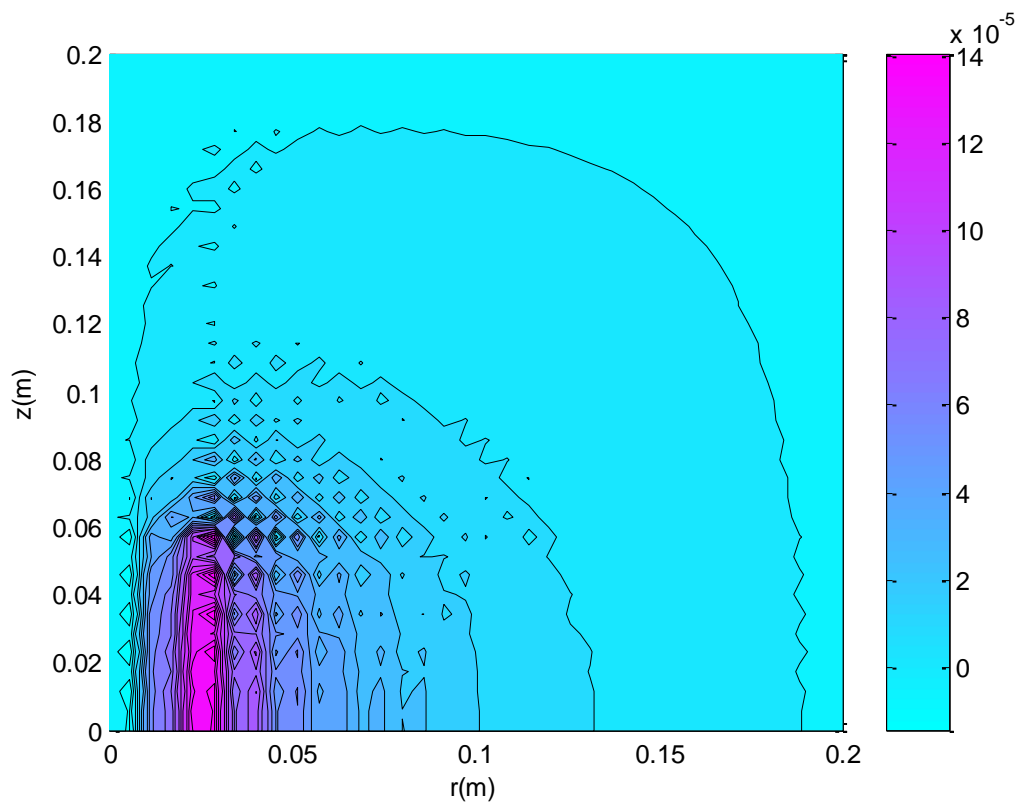


Fig. 21 : Potentiel vecteur magnétique par la méthode EFG $d_{\max}=3$.

IV.6. CONCLUSION

La méthode de Galerkin sans maillage a été appliquée à la résolution de l'équation non linéaire en magnétostatique, en présence du comportement hystérétique des matériaux ferromagnétiques, en utilisant le modèle de Preisach et la nouvelle méthode d'identification de sa fonction de distribution développée au cours de cette thèse.

Pour ce faire, la non-linéarité a été traitée par la méthode itérative de point fixe, plusieurs simulations ont permis de vérifier l'exactitude et la convergence de l'algorithme proposé par rapport à la méthode des éléments finis.

La méthode a été trouvée capable de fournir une bonne précision, également en présence d'un nombre limité de nœuds. En particulier, la comparaison avec la méthode des éléments finis montre la même précision. Cette méthode est moins efficace du point de vue temps de calcul et sa précision dépend fortement du choix de la taille du domaine d'influence contrôlée par le paramètre d_{max} dans la littérature ce paramètre est pris entre 2 et 3 donne de bons résultats [1] dans notre cas nous avons varié le paramètre pour étudier son influence sur la solution, ce paramètre donne de bon résultats entre $d_{max}=1.5$ et $d_{max}=2$ son augmentation influe aussi sur le temps de calcul (augmentation).

En conclusion, la méthode de Galerkin sans maillage (EFG) est très prometteuse dans la résolution des problèmes électromagnétiques, et dans les calculs de champs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **J. DOLBOW, T. BELYTSHKO**, "An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method", *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol 05, n° 5, pages 207-241, 1998.
- [2] **A. KAMITANI, K. HASEGAWA, T.YOKONO**, "Element-free Galerkin method for static and quasi-static electromagnetic field computation", *IEEE Trans. Magn*, vol40, pages 12-20, 2004.
- [3] **F.Z. LOUAI, N. NAIT-SAID, S. DRID**, "Implementation of an efficient element-free Galerkin method for electromagnetic computation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 31, pages 191–199, N°3 2007.
- [4] **Y. ZHAI ET AL.**, "Element-free galerkin method in electromagnetic Field computation", *ICIC Express Letters*, vol 2, N° 3, 2008.
- [5] **O. BOTTAUSCIOA, M. CHIAMPIB, A. MANZIN**, "Eddy current problems in nonlinear media by the element-free Galerkin method", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol 304, pages e823–e825, 2006.
- [6] **G. F. PARREIRA, R. C. MESQUITA, A. R. FONSECA, E. J. SILVA**, "Element-free galerkin method in eddy-current problems with ferromagnetic media", *IEEE Trans. Magn*, vol 42, N°5, pages 1577-1584, 2006.
- [7] **A. R. FIROOZJAEI, E. HENDI, F. FARVIZI**, "Element Free Gelerkin Method for 2-D otential Problems", *Applied Mathematics*, vol 6, pages149-162, 2015.
- [8] **S. L. Ho, S. Yang, J. M. Machado, H. C. Wong**, " Application of a meshless method in electromagnetics", *IEEE Trans. Magn*, vol 37, N° 5, pages 3198-3202, 2001.
- [9] **S. L. HO, S. YANG, G. NI, H. C. WONG, Y. WANG**, "Numerical Analysis of Thin Skin Depths of 3-D Eddy-Current Problems Using a Combination of Finite Element and Meshless Methods", *IEEE Trans. Magn*, vol 40, N°2, 2004.
- [10] **B. Shanker , Z. Zeng, L. Xuan, L. Udpa**, "Meshless method for numerical modeling of pulsed eddy currents", *IEEE Trans. Magn*, vol 40 , pages 3457-3462 , 2004.
- [11] **H. CHEN, Q. YANG, S. LIU, W. YANG, R. YAN, W. YAN**, "Element-free Galerkin modeling of giant magnetostrictive thin films". *IEEE Trans. Magn*, vol 41, N° 5, pages 1512-1515, 2005.
- [12] **G.F. PARREIRA, R.C. MESQUITA, E.J. SILVA, A.C. LISBOA, A.R. FONSECA**, "The element-free Galerkin method in three-dimensional electromagnetic problems", *IEEE Trans. Magn*, vol 42, pages 711-714, 2006.
- [13] **C. HERAULT, Y. MARECHAL**, "Boundary and interface conditions in meshless methods", *IEEE Trans. Magn*, vol 35, N° 3, pages 1450-1453, 1999.
- [14] **H. NETUZHYLOV**, "Enforcement of boundary conditions in meshfree methods using interpolating moving least squares ", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 32, pages 512–516, 2008.
- [15] **S. L. HO, S. YANG, N. GUANGZHENG, H. C. WONG, Y.WANG**, "Numerical Analysis of Thin Skin Depths of 3-D Eddy-Current Problems Using a Combination of Finite Element and Meshless Methods", *IEEE Trans. Magn*, vol 40, N°2, 2004.

- [16] **E. DLALA, A. BELAHCEN, A. ARKKIO**, "A Fast Fixed-Point Method for Solving Magnetic Field Problems in Media of Hysteresis", IEEE Trans. Magn, vol 44 , pages 1214-1217 ,2008.
- [17] **B. S. GURU, H. HIZIROVGLU**, "Electromagnetic Field Theory Fundamentals", Cambridge University press, UK, 2004.
- [18] **A. BENABOU**, "Contribution à la caractérisation et A la modélisation de matériaux Magnétiques en vue d'une Implantation dans un code de calcul De champ ", thèse de doctorat Université Lille I, Spécialité : Génie électrique, 2002.
- [19] **M. BELKADI**, "Contribution à l'homogénéisation multi-échelle des propriétés électromagnétiques des matériaux en poudres de fer", thèse de doctorat Université de Nantes, Spécialité : Génie électrique, 2009.

CONCLUSION GÉNÉRALE

A l'issue de cette thèse de doctorat en sciences, une étude générale sur le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques lors de leurs utilisations dans les dispositifs et systèmes électromagnétiques a pu être réalisée.

Quatre points principaux ont été abordés :

- Les matériaux ferromagnétiques : comportement magnétique et modélisation.
- Modélisation du comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques doux par le modèle de Preisach.
- Méthodes sans maillages : état de l'art
- Application de la méthode de Galerkin sans maillages à la résolution du problème magnétostatique non linéaire.

1. Synthèse des réalisations :

Les principaux phénomènes physiques à l'origine du magnétisme ont été rappelés. Aussi, une attention particulière a été portée aux matériaux ferromagnétiques (principales caractéristiques et utilisations dans les systèmes électromagnétiques). L'hystérésis observé et associé au comportement fortement non linéaire des matériaux ferromagnétiques, ainsi que sa modélisation mathématique, ont été largement discutés. Il s'avère qu'un modèle physique performant est nécessaire à la représentation du phénomène d'hystérésis. Dans la littérature spécialisée, plusieurs modèles sont proposés et discutés. Les plus utilisés et qui sont basés sur la physique des matériaux ferromagnétiques sont les modèles de Preisach et Jiles-Atherton.

Le modèle de Preisach nécessite l'identification d'une fonction de distribution nécessaire à sa mise en œuvre numérique. Le modèle de Jiles-Atherton quant à lui, nécessite l'identification de paramètres. Des données expérimentales sont nécessaires lors des étapes d'identification pour les deux modèles. Une étude comparative des deux modèles (Preisach et Jiles-Atherton) a été présentée et discutée. Dans cette étude, le modèle de Preisach a été utilisé pour la modélisation du comportement non linéaire des matériaux ferromagnétique doux.

Deux méthodes d'identification, l'une analytique basée sur le choix de la forme analytique de la fonction de distribution et sur l'optimisation des paramètres de celle-ci, l'autre numérique, nécessitant l'utilisation de données expérimentales.

Dans cette étude, une nouvelle méthode numérique d'identification de la fonction de distribution a été développée nommée **MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION** et

est utilisée. Alors que les méthodes d'identification classiques (méthode de Mayergoz et méthode des cycles centrés) font appel à un grand nombre de données expérimentales, la méthode développée présente la particularité de n'utiliser qu'un faible nombre de données expérimentales extraites principalement de la courbe de première aimantation fournie généralement par le constructeur. La méthode numérique proposée donne des résultats très cohérents comparés à des données expérimentales disponibles. La technique développée est un outil puissant pour l'identification numérique de la fonction de distribution du modèle de Preisach.

Un modèle mathématique (2D) intégrant à la fois l'équation magnétostatique non linéaire et le modèle de Preisach, utilisant la nouvelle méthode d'identification de sa fonction de distribution développée au cours de cette thèse, est obtenu, et nécessite une résolution numérique. Généralement la méthode des éléments finis (MEF) est souvent utilisée pour solutionner les problèmes électromagnétiques. Malgré sa robustesse légendaire, cette méthode présente dans certains cas de figures des limitations liées à la génération des fonctions de forme (besoin d'un maillage utilisant des sous-domaines : éléments finis). La distorsion du maillage affecte largement la solution éléments finis.

L'émergence des méthodes sans maillage découle de la volonté de s'affranchir des difficultés liées à la génération et à la gestion des maillages. Ces méthodes sont depuis toujours vues comme une alternative prometteuse pour surmonter les difficultés que rencontre la méthode des éléments finis.

Une étude bibliographique concernant quelques méthodes sans maillage ainsi que les approximations utilisées par ces méthodes a été réalisée. Dans cette étude, la méthode de Galerkin sans maillage a été appliquée à la résolution de l'équation non linéaire en magnétostatique en présence du comportement hystérétique des matériaux ferromagnétiques. La non-linéarité a été traitée par la méthode itérative du point fixe.

Un algorithme de résolution a été développé, utilisant le modèle de Preisach avec la nouvelle méthode d'identification de sa fonction de distribution proposée et développée au cours de ce travail son efficacité et sa précision ont été vérifiées par une campagne de tests numériques relatifs à différents paramètres tels la géométrie et la taille du domaine d'influence. Les résultats sont comparés à ceux de la méthode des éléments finis ce qui permet de confirmer que la méthode EFG est robuste pour le traitement des problèmes non linéaires en électromagnétisme.

2. Perspectives

La technique numérique d'identification développée peut être utilisée pour l'identification de la fonction de distribution du modèle de Preisach dynamique.

Aussi, l'algorithme développé peut être utilisé pour solutionner l'équation magnétodynamique.

L'extension au cas tridimensionnel permet l'étude d'un large éventail de problèmes électromagnétiques.

Abstract:

The Modeling of the nonlinear behavior of ferromagnetic materials by the Preisach model, whose implementation is closely linked to the identification of its distribution function.

In the literature, various analytical and numerical methods of identification are available.

A new numerical method was developed and named '**MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION (FIRST MAGNETIZATION CURVE METHOD)**' requiring the use of experimental points, directly extracted from the first magnetization curve.

The Meshless methods or Meshfree methods, whose success is growing, also the approximations used by these methods are presented. Indeed, while the finite element shape functions being defined on subdomains, meshless methods generate their shape functions based on a cloud of point.

An application of Element Free Galerkin method for solving the nonlinear magnetostatic equation in the presence of hysteretic behavior of ferromagnetic materials. To do this, the Preisach model using the **MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION (FIRST MAGNETIZATION CURVE METHOD)** developed during this thesis is then applied, the non-linearity was treated by using the fixed point method.

Keywords: ferromagnetic materials, nonlinear behavior, Preisach model, distribution function, FIRST MAGNETIZATION CURVE METHOD, meshless methods, Element free Galerkin method, fixed point method.

ملخص

نمذجة السلوك غير الخطية من المواد المغناطيسية من النموذج Preisach، الذي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بتحديد دالة التوزيع في العديد من دراسات، تتوفر مختلف الأساليب التحليلية و الطرق الرقمية لتحديد دالة التوزيع. وقد تم تطوير طريقة رقمية جديدة واسمها "**MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION**" التي تتطلب استخدام النقاط التجريبية، المستخرجة مباشرة من منحنى المغنطة الأول. يتم عرض الأساليب Meshless أو Meshfree، الذي ينمو بنجاح، أيضاً تقريبيّة المستخدمة من قبل هذه الأساليب. في الواقع، في حين أن وظائف شكل العناصر المحدودة التي تعرف على النطاقات الفرعية، طرق meshless تولد وظائف شكلها بناء على سحابة نقطة. تطبيق طريقة Element Free Galerkin من أجل حل المعادلة مغناطيسي غير الخطية في وجود سلوك المواد المغناطيسية. للقيام بذلك، ثم يتم تطبيق نموذج Preisach باستخدام "**MÉTHODE DE LA PREMIÈRE AIMANTATION**" وضعت خلال هذه الأطروحة تمت معالجة اللاخطية باستخدام أسلوب النقطة الثابتة.