

N° d'ordre.....



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Hadj Lakhdar Batna
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

THÈSE

Présentée Pour l'Obtention Du Diplôme de

Doctorat en Sciences

En Mécanique

Option : Construction mécanique

Par

BENHIZIA Abdennour

OPTIMISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE EN DOMAINE NON LINEAIRE DES MATERIAUX COMPOSITES PAR TECHNIQUE D'HOMOGENEISATION

Soutenue publiquement le: 09/04/2015 devant le jury composé de :

Pr. ZIDANI Kamel	- Université Hadj Lakhdar- Batna	Président du jury
Pr. OUTTAS Toufik	- Université Hadj Lakhdar- Batna	Rapporteur
Dr. KANIT Toufik	- Université de Lille1- France	Co-Rapporteur
Pr. ATI Abdelaziz	- Université Abderrahmane Mira- Béjaïa	Examineur
Pr. BENMOHAMMED Brahim	- Université Hadj Lakhdar- Batna	Examineur
Pr. DJEBAILI Hamid	- Université Abbès Laghrour- Khenchela	Examineur
Pr. HECINI Mabrouk	- Université Mohamed KHider- Biskra	Examineur

A mes parents

A ma femme

A ma petite fille

A toute ma famille

A. Benhizia

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au Laboratoire de Recherche en Mécanique des structures et Matériaux (LaMSM) du département de mécanique, Faculté de technologie, Université Hadj Lakhdar de Batna.

J'adresse mes tous premiers remerciements à mes directeurs de thèse le Pr. OUTTAS Toufik le directeur du laboratoire LaMSM et le Dr. KANIT Toufik de l'Université Sciences et Technologies de Lille1, France, pour leurs contributions très importantes sur tous les plans et pour la disponibilité durant cette période.

Je tiens aussi à remercier le Professeur ZIDANI kamel de l'Université Hadj Lakhdar de Batna pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier les membres du jury, le professeur ATI Abdelaziz de l'Université de Béjaïa, le professeur Mabrouk HECINI de l'Université de Biskra, le professeur DJEBAILI Hamid de l'Université de Khenchela ainsi que le professeur BENMOHAMMED Brahim de l'Université Hadj Lakhdar de Batna, pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse de doctorat en sciences.

Je réserve un remerciement tout spécial à ma chère femme qui m'a supporté tout au long de ce travail.

Enfin, je remercie mes amis et collègues de l'Université Hadj Lakhdar de Batna pour leur soutien, ainsi un remerciement pour tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations

A : Tenseur de localisation des déformations

A_{ESH}^i : Tenseur de localisation d'Eshelby

A_{MT}^i : Tenseur de localisation de Mori et Tanaka

A_i^{AC} : Tenseurs de localisation autocohérent

$A(z)$: Operateur tangent de localisation de déformation dans le matériau linéaire de comparaison (M.L.C)

A_r : Operateur tangent de localisation des déformations moyennes par phase r

B : Tenseur de concentration des contraintes

C_{AC} : Tenseur d'élasticité macroscopique autocohérent

C_{comp} : Matrice effective de rigidité du matériau homogénéisé

C_{ESH} : Rigidité équivalente du matériau homogénéisé d'Eshelby

C_i : Matrices de rigidité du renfort

C_m : Matrices de rigidité de la matrice

C_{MT} : Matrice de rigidité équivalente du matériau homogénéisé

$C_m^{tan,iso}$: Module tangent isotropique

C_{Reuss} : Matrice de rigidité de Reuss

\vec{d} : Normale à la surface de charge

E^I : Tenseur d'Eshelby

E_{ESH}^i : Tenseur de forme d'Eshelby

E : Module de Young

E : Déformation moyenne macroscopique

E^{eff} : Module d'élasticité effective

$\bar{\varepsilon}^P$: Déformation plastique cumulée

ε_{xx}^p : Déformation plastique moyenne dans le composite

ε^e : Déformation élastique

ε^p : Déformation plastique

ε_i : Déformation moyenne dans la phase i

e^I : Déformation libre

$\tilde{\varepsilon}^l$: Déformation de perturbation

F : Force

f : Frontière d'écoulement

G : Module de Coulomb

H^{eff} : Module élastoplastique effective

K : Module de compressibilité cubique

$L(z)$: Operateur tangent non linéaire de la phase constituante.

$\{L\}$: Matrice de Hooke ou de rigidité

L_{hom} : Module tangent effectif

$\{L\}_p$: Matrice de rigidité élastoplastique

$\tilde{\lambda}$: Multiplicateur plastique indéterminé

$\{M\}$: Matrice de souplesse

\vec{n} : Normale à la fonction de charge

P_i^0 : Tenseur de Hill

P_i : Fraction volumique de la phase ' i '

R : Domaine d'élasticité

R_0^f : Ecoulement plastique noté des fibres

R^{eff} : Limite élastique effective

R_e : Limite d'écoulement en traction uniaxiale

\underline{s} : Tenseur déviateur des contraintes.

S_{ijkl} : Matrice de souplesse

S_m : Matrices de souplesse de la matrice

S_{comp} : Matrice effective de souplesse du matériau homogénéisé

S_i : Matrices de souplesse du renfort

S : Surface

S_{Voigt} : Matrice de souplesse de Voigt

σ_{y0} : Contrainte d'écoulement initiale (sans déformation plastique)

$\bar{\sigma}$: Contrainte de Von Mises

σ_{y0} : Contrainte d'écoulement du matériau

σ_i : Contrainte moyenne dans la phase ' i '

σ : Contrainte

$\bar{\sigma}$: Contrainte moyenne macroscopique

σ^I : Contrainte dans l'inclusion

t_n : Temps

τ_{max} : Contrainte de Cisaillement max

μ : Coefficient d'écroutissage

ν : Coefficient de Poisson

VER : Volume Elémentaire Représentatif

$\underline{\underline{X}}$: Variable cinématique

SOMMAIRE

Introduction générale	1
CHAPITRE I: COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Notion de seuil de plastification.....	4
I.2.1. Courbe contrainte déformation.....	4
I.2.2. Valeur de la limite d'élasticité.....	5
I.3. Critères de plastification.....	5
I.3.1. Critère de Tresca.....	5
I.3.2. Critère de Von Mises.....	9
I.4. Loi de comportement: Relation contrainte-déformation.....	11
I.4.1. Matériau élastique linéaire isotrope.....	12
I.4.2. Matériaux transversalement isotropes.....	13
I.4.3. Matériaux orthotropes.....	14
I.5. Relations contraintes déformation incrémentales pour un matériau élasto-plastique	15
I.5.1. Formulation générale en notation matricielle.....	15
I.5.2. Matrice tangente pour un matériau élasto-plastique selon le critère de Von Mises.....	17
I.5.3. Matériaux sans écrouissage.....	18
I.5.4. Matériaux avec écrouissage.....	20
I.5.5. Ecriture générale des équations de l'élasto-plasticité uniaxiale.....	23
I.6. Conclusion.....	24
CHAPITRE II: TECHNIQUES D'HOMOGENEISATION DES MATERIAUX COMPOSITES	
II.1. Introduction.....	26
II.2. Modèles issus des techniques d'homogénéisation.....	29
II.2.1. Démarche générale d'homogénéisation.....	30
II.2.2. Borne de Voigt.....	34
II.2.3. Borne de Reuss.....	34
II.2.4. Modèle à base d'inclusion.....	34
II.3. Méthodologie d'homogénéisation non linéaire.....	41
II.3.1 Approche incrémentale.....	42
II.4. Conclusion.....	44
CHAPITRE III: MODELISATION DE LA MICROSTRUCTURE DU COMPOSITE A FIBRES	
III.1. Introduction.....	46
III.2. Principes et représentation du milieu hétérogène.....	47
III.2.1. Microstructures 2D ou quasi-2D.....	48
III.2.2. Microstructures 3D réelles.....	48
III.2.3. Modèles de microstructures aléatoires.....	48
III.2.4. Eléments de la microstructure.....	49
III.3. Génération de microstructures aléatoires à inclusions circulaires sans interpénétration.....	50
III.3.1. Algorithme de génération de nuages de points aléatoires.....	50
III.4. Développement d'un outil de caractérisation morphologique pour les matériaux composites.....	57
III.4.1. Passage de l'analogique au numérique.....	58

III.4.2. Segmentation des images.....	58
III.4.3. Identification des phases et calcul de la fraction surfacique dans les matériaux composites multiphasiques.....	59
III.4.4. Caractérisation de la morphologie.....	66
III.5. Conclusion.....	73
CHAPITRE IV: CALCUL DU COMPORTEMENT EFFECTIF NON LINEAIRE D'UN COMPOSITE TRANSVERSALEMENT ISOTROPE PAR UNE TECHNIQUE D'HOMOGENEISATION	
IV.1. Introduction et bibliographie	74
IV.2. Modélisation de la microstructure du composite à fibres.....	76
IV.2.1. Technique d'homogénéisation numérique	77
IV.2.2. Simulation du comportement en traction uniaxiale.....	78
IV.3. Effet du coefficient de Poisson sur le comportement élasto-plastique uniaxial.....	81
IV.4. Effet de la limite élastique des fibres parfaitement plastique sur le comportement élasto-plastique.....	83
IV.5. Effet de la dispersion aléatoire des fibres.....	85
IV.6. Simulation du comportement de la microstructure en compression.....	92
IV.7. Isotropie du comportement élasto-plastique.....	93
IV.8. Effet de la fraction volumique des fibres sur le paramètre d'écrouissage H^{eff}	95
IV.9. Etablissement d'une expression semi-analytique pour prédire le taux d'écrouissage en fonction de la fraction volumique.....	95
IV.10. Lois de comportement pour les microstructures tridimensionnelles. Effet de l'épaisseur.....	98
IV.10.1. Génération de modèles éléments finis de la microstructure 3D.....	99
IV.10.2. Influence de l'épaisseur sur le comportement mécanique.....	99
IV.11. Conclusion.....	103
Conclusion générale.....	105
Références bibliographiques.....	108
Annexe : Application de l'algorithme d'identification des particules dans un milieu aléatoire.....	113

INTRODUCTION GENERALE

Le calcul des microstructures est devenu un outil privilégié et accessible de la mécanique des matériaux hétérogènes. Il s'impose pour le calcul de composants industriels dont la taille est de l'ordre de grandeur de celle des hétérogénéités, en particulier dans le cas d'une microstructure aléatoire. Des méthodes ont été développées pour approximer l'hétérogénéité dans les matériaux en analysant une section représentative de la microstructure hétérogène, qui est universellement appelée volume élémentaire représentatif (VER). Pour de nombreux cas, en particulier pour les microstructures aléatoires, la modélisation analytique micromécanique reste complexe.

Le calcul de volumes élémentaires représentatifs pour les matériaux hétérogènes permet de prévoir l'influence de la morphologie des phases et de leur répartition sur les propriétés effectives linéaires ou non linéaires. Classiquement, le VER doit être choisi suffisamment grand par rapport à des hétérogénéités et contenir suffisamment d'informations sur la microstructure afin d'être représentatif, mais en même temps, il doit rester assez petit, beaucoup plus petit que le corps macroscopique, pour être considéré comme un élément de volume du matériau.

Les méthodes d'homogénéisation ont été développées pour borner ou estimer les propriétés effectives des mélanges de différents constituants (P. Suquet, 1997). Ces estimations peuvent être comparées à des calculs directs de volumes élémentaires représentatifs (VER) du matériau. On est en droit d'utiliser le calcul de microstructures comme méthode d'homogénéisation numérique. Lorsque les propriétés des constituants sont très contrastées ou lorsque l'on est confronté à des chargements macroscopiques imposés complexes (multiaxial, changements de trajets de chargement, comportement cyclique. . .), le calcul direct de microstructures peut très bien s'avérer être la seule solution fiable au problème de l'estimation des propriétés effectives.

Le calcul de microstructures procède en trois étapes principales : représentation réaliste de la microstructure, choix des méthodes numériques de résolution du problème aux limites et enfin, identification des lois de comportement des constituants.

Les matériaux hétérogènes présentent généralement une répartition aléatoire de phases selon une certaine distribution statistique de sorte qu'en général, une seule simulation ne sera pas suffisante. Un nombre suffisant de réalisations de la microstructure sera nécessaire pour estimer la propriété recherchée ainsi que sa dispersion.

Dans le cadre de ce travail de thèse, le comportement macroscopique d'un composite élasto-plastique à deux phases, matrice élastique renforcée avec une distribution aléatoire de fibres cylindriques parallèles parfaitement plastique, a été étudié par la technique d'homogénéisation.

Le problème abordé est très spécial et rarement étudié dans la littérature. La raison en est, qu'il est presque impossible de trouver des travaux sur les composites avec des fibres considérées parfaitement plastique, noyées dans une matrice élastique.

La technique d'homogénéisation utilisée est basée sur la notion de volume élémentaire représentatif VER et permet de prédire les propriétés effectives du composite. Le résultat le plus probant de ce travail, c'est le développement d'un modèle semi analytique de comportement mécanique macroscopique liée au comportement des deux phases du composite.

Le mémoire de thèse est réparti en quatre chapitres. Le premier chapitre donne un aperçu général du comportement élasto-plastique des matériaux, et sur sa modélisation en présentant les concepts fondamentaux sur lesquels il s'appuie; aussi différents critères et modèles du comportement mécanique élasto-plastique ont été présentés.

Le deuxième chapitre rappelle brièvement les bases de l'homogénéisation microscopique des milieux hétérogènes en élasticité linéaire et non linéaire.

Au troisième chapitre, la modélisation de la microstructure d'un composite à fibres longues est abordée, à cet effet, la méthode mise en œuvre pour réaliser des échantillons numériques de la microstructure aléatoire présentant une forte fraction volumique est clairement présentée. La méthode permet de générer aléatoirement des nuages de points représentant les centres des fibres. Plusieurs échantillons seront générés afin de caractériser leur comportement mécanique. Par la suite, nous présentons la méthode développée pour calculer la fraction volumique des constituants et la caractérisation de leur morphologie.

Dans le quatrième chapitre, la technique d'homogénéisation basée sur la notion de volume élémentaire représentatif VER est utilisée, pour prédire les propriétés effectives des microstructures. On est arrivé à développer un modèle semi analytique du comportement mécanique macroscopique lié au comportement des deux phases existantes dans le composite. Une conclusion générale et des perspectives ambitieuses viennent clôturer ce travail.

CHAPITRE I
COMPORTEMENT
ELASTO-PLASTIQUE

I.1. Introduction

L'étude du comportement mécanique des matériaux a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu dans ce domaine sont les contraintes et les déformations.

Les modèles macroscopiques élasto-plastiques sont basés sur l'hypothèse de la décomposition de la déformation totale en une partie élastique et une partie plastique, et l'hypothèse de l'indépendance du comportement plastique de la vitesse de déformation.

Plusieurs travaux sont menés pour définir, décrire et modéliser l'évolution de la surface de plasticité. Les travaux expérimentaux confrontés à ces modèles montrent leurs limites que se soit pour la description ou l'évolution de la surface de plasticité (A. Khalfallah, 2004). Les lois d'écrouissage sont les règles qui caractérisent l'évolution du domaine d'élasticité au cours de la déformation inélastique (M. Petelet, 2007). La plasticité décrit deux étapes de comportement:

- 1) La condition (ou critère) d'atteinte de l'état plastique.
- 2) Le comportement d'écrouissage une fois cet état plastique est atteint :
 - a) le durcissement ("hardening") plastique du matériau
 - b) l'adoucissement ("softening") plastique du matériau

Les lois élastoplastiques à écrouissage isotrope permettent de modéliser une augmentation de la taille de domaine élastique avec la déformation plastique identique dans toutes les directions (J.M Proix 2013).

Pour définir les paramètres d'une loi à écrouissage isotrope, il faut identifier le comportement sur une courbe de traction, en vérifiant que l'identification est bien effectuée dans la plage de déformations susceptibles d'être rencontrées au cours du calcul de structure envisagé.

En effet, si l'élasticité linéaire représente actuellement le cadre de la majorité des calculs de mécanique des milieux continus réalisés dans l'industrie, d'autres types de comportements sont de plus en plus utilisés car ils s'approchent plus de la réalité, et permettent donc un dimensionnement plus strict des structures ou de certains procédés de fabrication. Dans ce cadre, l'objectif de ce chapitre est de donner un aperçu général du comportement élasto-plastique des matériaux, et de sa modélisation en présentant les concepts fondamentaux sur lesquels il s'appuie.

I.2. Notion de seuil de plastification

I.2.1. Courbe contrainte déformation

Lors d'un essai de traction (Figure I.1.a) la plupart des matériaux présentent un domaine élastique caractérisé par une relation de proportionnalité entre la contrainte et la déformation. Si la contrainte est supprimée le matériau revient à son état naturel non déformé.

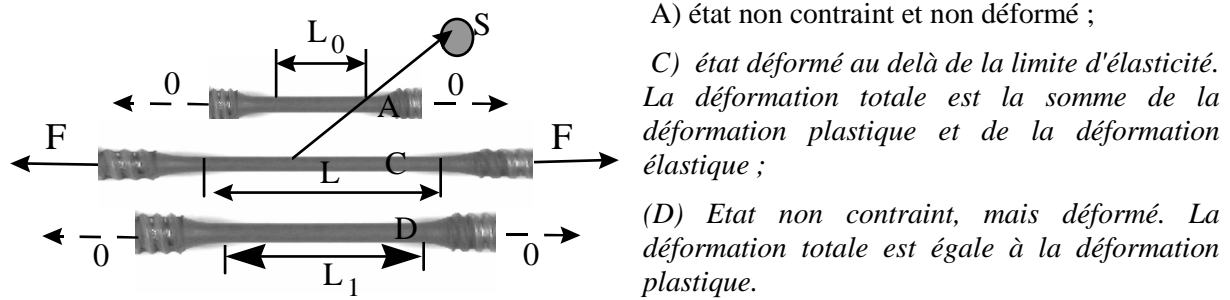


Fig. I.1.a : Déformation d'une éprouvette en traction simple.

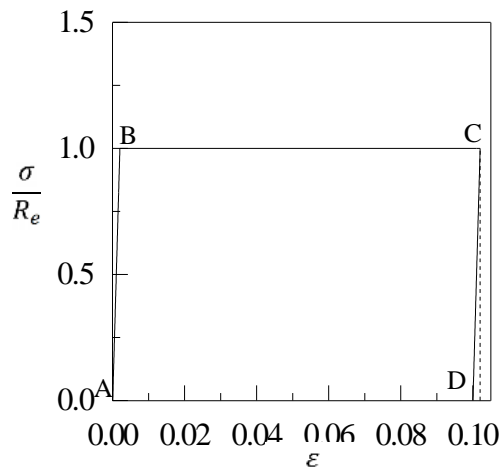


Fig. I.1.b : Courbe contrainte déformation correspondant à l'expérience montrée Figure I.1.a, $\sigma = F/S$.

Sur la Figure I.1.b le point A correspond à l'état non déformé et non contraint ; le point B correspond à la limite d'élasticité. Tout chargement atteignant ce niveau de contrainte conduit à une déformation permanente ou déformation plastique. La contrainte est définie comme le rapport de la force sur la surface actuelle ($\sigma = F/S$). La déformation totale peut être définie comme suit :

$$\epsilon = \ln(L / L_0) \tag{I.1}$$

La déformation plastique est donnée par :

$$\epsilon^P = \ln(L_1 / L_0) \tag{I.2}$$

La déformation élastique correspond à la partie récupérée lors de la décharge (déformation à l'état C - déformation à l'état D) :

$$\varepsilon^e = \ln(L / L_1) \quad (\text{I.3})$$

Ces définitions respectent la décomposition de la déformation en partie élastique (réversible) et partie plastique (irréversible) :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (\text{I.4})$$

Dans le cas général d'un chargement tridimensionnel, cette décomposition est généralement admise comme hypothèse.

1.2.2. Valeur de la limite d'élasticité

La limite d'élasticité est la contrainte à partir de laquelle un matériau arrête de se déformer d'une manière élastique, réversible et commence donc à se déformer de manière irréversible.

Par exemple, le niveau de contrainte observé à la plastification des matériaux métallique R_e est de l'ordre de $E/500$ ($E = 210$ GPa et $R_e = 400$ MPa pour un acier déformé à température ambiante).

1.3. Critères de plastification

Un critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou si elle reste dans le domaine élastique. De nombreux essais ont montré que l'on pouvait utiliser deux critères principaux : le critère de Tresca-Guest et le critère de von Mises.

1.3.1. Critère de Tresca

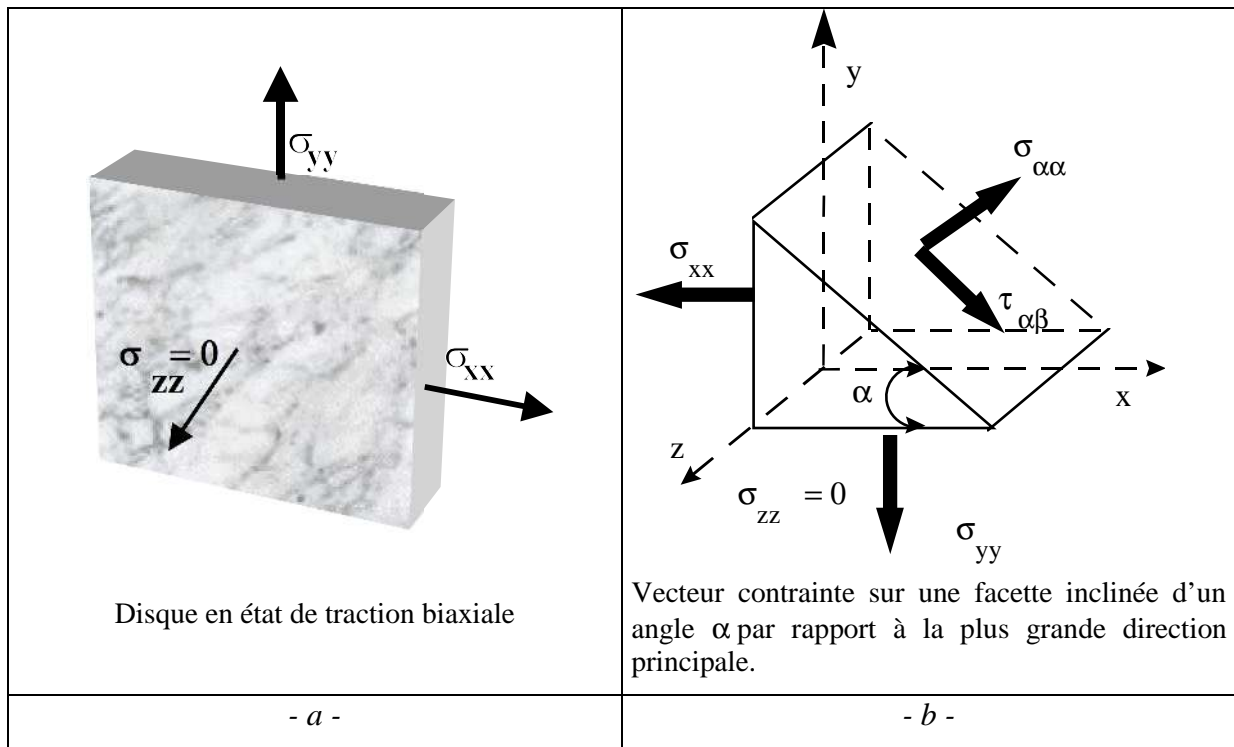
Pour un état de traction uni axiale, le critère de Tresca signifie que la plastification se produit quand le cisaillement maximum atteint la valeur critique (M. Bellet et al, 1998) $\frac{\sigma_0}{2}$:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \leq R_e \quad (\text{I.5})$$

R_e : la limite d'écoulement en traction uniaxiale.

Critère de Tresca en chargement multiaxial

Appliquons maintenant le critère de Tresca à des chargements biaxiaux (Figure I.2.a). Considérons un disque mince en chargement biaxial ($\sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$). Les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} peuvent varier indépendamment. Nous voudrions connaître le domaine admissible pour ces contraintes. En chargement biaxial, la contrainte de cisaillement maximale est donnée par la différence entre la plus grande contrainte principale et la plus petite contrainte principale. En effet, les figures I.2.b et I.2.c rappellent la variation de la contrainte avec l'orientation de la facette par rapport aux directions principales. Donc pour $\sigma_{yy} = 0$, σ_{xx} peut varier entre $-R_e$ et $+R_e$. De même pour $\sigma_{xx} = 0$, σ_{yy} peut varier entre $-R_e$ et $+R_e$.



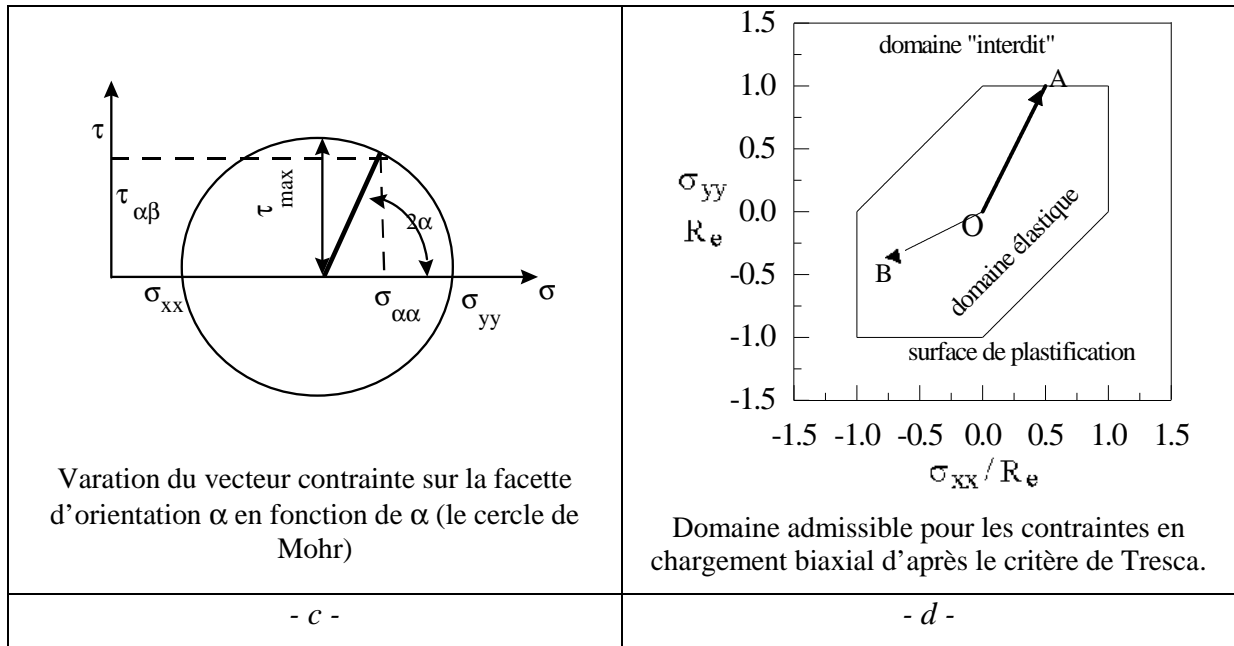


Fig. I.2 : Description schématique du critère de Tresca

1) Dans le 1^{er} quadrant

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = R_e \\ 0 < \sigma_{yy} < R_e \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (I.6)$$

Le critère donne :

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_{xx} = R_e \\ \sigma_{min} = \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{max} = \sigma_{xx}/2 = R_e/2 \end{cases} \quad (I.7)$$

Le critère correspond à une ligne par $\sigma_{xx} = R_e$ et le glissement se fait sur un plan incliné à 45° entre les plans $x = y = \text{constante}$.

2) Dans le 1^{er} quadrant

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = R_e \\ 0 < \sigma_{xx} < R_e \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (I.8)$$

Le critère donne :

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_{yy} = R_e \\ \sigma_{min} = \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{max} = \sigma_{yy}/2 = R_e/2 \end{cases} \quad (I.9)$$

Le critère correspond à une ligne par $\sigma_{yy} = R_e$ et le glissement se fait sur un plan incliné à 45° entre les plans $y = z = \text{constante}$.

3) Dans le 2^{ème} quadrant

$$\begin{cases} -R_e < \sigma_{xx} < 0 \\ 0 < \sigma_{yy} < R_e \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Le critère donne :

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_{yy} = R_e \\ \sigma_{min} = \sigma_{xx} < 0 \\ \tau_{max} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/2 = R_e/2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Le glissement se fait sur un plan incliné à 45° entre les plans $x = y = \text{constante}$.

4) Dans le troisième quadrant

$$\begin{cases} -R_e < \sigma_{xx} < 0 \\ -R_e < \sigma_{yy} < 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Le critère donne :

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_{yy} \\ \sigma_{min} = \sigma_{yy} \text{ ou } \sigma_{min} = \sigma_{xx} \\ \tau_{max} = \sigma_{yy}/2 \text{ ou } \tau_{max} = \sigma_{xx}/2 = R_e/2 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\text{donc } \sigma_{xx} = R_e \text{ ou bien } \sigma_{yy} = R_e \quad (1.14)$$

Le critère correspond à une ligne par $\sigma_{xx} = -R_e$ et le glissement se fait sur un plan incliné à 45° entre les plans $x = z = \text{constante}$ et à une ligne par $\sigma_{yy} = -R_e$ et le glissement se fait sur un plan incliné à 45° entre les plans $y = z = \text{constante}$.

5) Dans le quatrième quadrant

$$\begin{cases} 0 < \sigma_{xx} < R_e \\ -R_e < \sigma_{yy} < 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Le critère donne :

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_{xx} = R_e \\ \sigma_{min} = \sigma_{yy} < 0 \\ \tau_{max} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2 = R_e/2 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\text{donc : } \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = R_e \quad (1.17)$$

Le glissement se fait sur un plan incliné à 45° entre les plans $x=\text{constante}$ et $y=\text{constante}$.

I.3.2. Critère de Von Mises

Von Mises a considéré l'ellipse circonscrite au critère de Tresca [J.C Charmet, 1980]. La figure I.3 représente le critère de Von Mises pour un chargement plan. La contrainte de Von Mises est donnée par :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{trace}[\underline{s}\underline{s}]} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij}} \tag{I.18}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{21}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 + s_{32}^2)}$$

\underline{s} : le tenseur déviateur des contraintes.

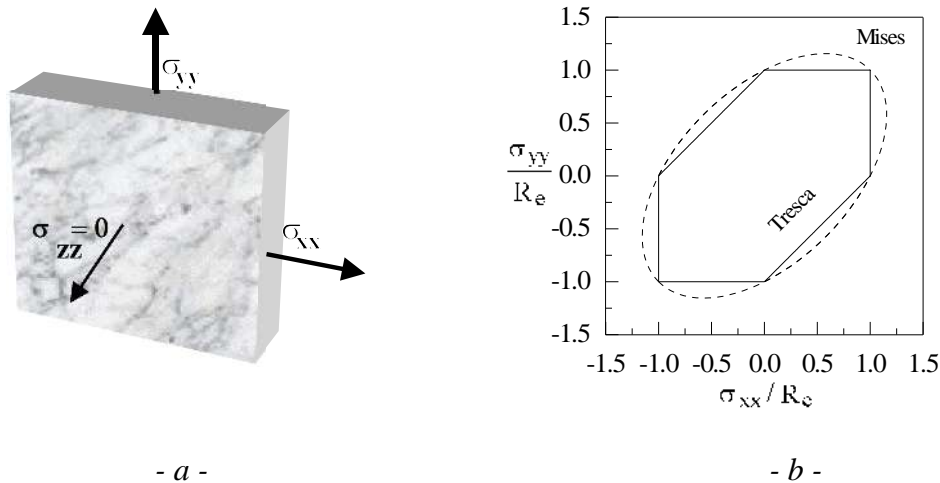


Fig. I.3 : (a) Disque en état plan de contrainte. (b) Comparaison entre le critère de Tresca et le critère de Von Mises.

Seules les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sont non nulles. Donc, le tenseur de contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte moyenne vaut :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{3} \tag{I.19}$$

Et le tenseur déviateur des contraintes est donné par :

$$\underline{\underline{s}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma_I - \sigma_{II} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{II} - \sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_I - \sigma_{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{I.20}$$

Ainsi la contrainte de Von Mises devient :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 \right]} \quad (I.21)$$

$$\text{Soit } \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}} \quad (I.22)$$

En traction biaxiale, cette dernière prend la forme compacte suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}} \leq R_e \quad (I.23)$$

La surface $\bar{\sigma} = R_e$ est appelée frontière de plastification. En traction biaxiale, la frontière de plastification correspond à une ellipsoïde inclinée à 45° par rapport aux axes des contraintes principales. Le grand axe correspond à un état de traction biaxiale ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = R_e$) ou de compression biaxiale ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -R_e$), sa longueur est de l'ordre de $2\sqrt{2}R_e$. Le petit axe correspond à un état de traction compression ($\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = R_e$) ou ($-\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = R_e$). Sa longueur vaut $2\sqrt{(2/3)}R_e$.

La contrainte de Von Mises est calculée à partir des composantes du tenseur déviateur des contraintes, elle est donc indépendante de la valeur de la pression. La figure I.4 représente la contrainte de Von Mises dans l'espace des contraintes principales pour un chargement triaxial. Dans l'espace des contraintes principales, la surface $\bar{\sigma} = R_e$ représente une cylindre à base circulaire d'axe parallèle à la trisectrice des axes (111).

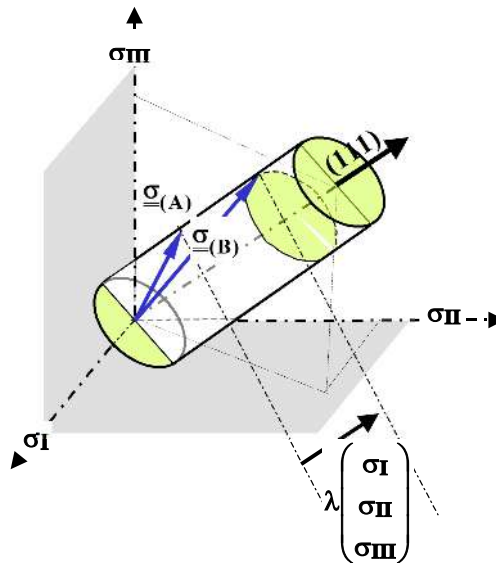


Fig. I.4 : Surface de von Mises dans l'espace des contraintes principales avec deux états de contraintes satisfaisant $\bar{\sigma} = R_e$.

Sur la figure I.4, deux états de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}_{(A)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}_{(B)}$ sont représentés. Les deux états de contraintes satisfont le critère de Von Mises, i.e. $\bar{\sigma} = R_e$. La différence entre les deux états de contraintes est un état de contrainte purement hydrostatique.

Plasticité associée de Von Mises

Dans le cadre de la plasticité associée, la frontière d'écoulement correspond au critère de Von Mises (P. Buhau, 2007) :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R_e) = \frac{\bar{\sigma}}{R_e} \tag{I.24}$$

f : est la frontière d'écoulement et le potentiel des vitesses de déformation. $\bar{\sigma}$ est la contrainte de Von Mises et R_e la limite d'écoulement en traction uniaxiale. Si $f < 1$, le matériau se déforme élastiquement, si $f = 1$, le matériau peut se plastifier et $f > 1$ n'existe pas.

I.4. Loi de comportement: Relation contrainte-déformation

Un comportement isotrope, caractérisé par deux grandeurs caractéristiques, soit le module de Young E et le coefficient de Poisson ν ou le module de Coulomb G et le module de compressibilité cubique K . La relation entre les contraintes σ_{ij} et les déformations ϵ_{ij} d'un matériau isotrope est modélisé par un tenseur d'ordre 4 C_{ijkl} contenant 81 coefficients élastiques. On a:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \\ \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \end{cases} \tag{I.25}$$

S_{ijkl}, C_{ijkl} : sont les matrices de souplesse et de rigidité respectivement.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}$$

- La matrice (6x6) correspond à la matrice de souplesse S_{ijkl}
- La condition de symétrie des contraintes $\Rightarrow \sigma_{kl} = \sigma_{lk} \Rightarrow S_{ijkl} = S_{ijlk}$
- La symétrie des déformations $\Rightarrow \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \Rightarrow S_{ijkl} = S_{jilk}$

- Seule la connaissance des coefficients de la sous-matrice (6x6) est nécessaire.
- L'application du théorème des travaux virtuels pour un σ particulier $\Rightarrow S_{ijkl} = S_{klij}$
 $\Rightarrow S_{ijkl}$ est symétrique \Rightarrow 21 coefficients à déterminer.

La relation de comportement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1113} & S_{1112} \\ S_{1211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2213} & S_{2212} \\ S_{1311} & S_{2322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3313} & S_{3312} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1311} & 2S_{1322} & 2S_{1333} & 4S_{1323} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1223} & 4S_{1213} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

1.4.1. Matériau élastique linéaire isotrope

Un matériau est dit isotrope lorsque ses propriétés ne varient pas avec la direction des sollicitations. Par conséquent, les matériaux isotropes ont les mêmes module d'élasticité, coefficient de Poisson, coefficient de dilatation thermique, conductivité thermique, etc. dans toutes les directions.

La matrice de raideur pour un matériau isotrope contient uniquement deux coefficients indépendants. Les sections suivantes décrivent les relations contrainte-déformation isotropiques en deux et trois dimensions.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Par ailleurs il peut être utile d'inverser la matrice de rigidité donnant les déformations en fonction des contraintes, dans ce cas on aura la matrice de souplesse donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

I.4.2. Matériaux transversalement isotropes

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie.

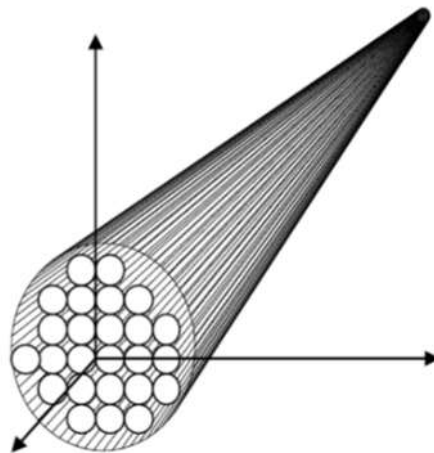


Fig. I.5: Matériau transversalement isotrope.

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients, la loi de comportement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22}-C_{33}}{2} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

I.4.3. Matériaux orthotropes

Un matériau est dit orthotrope si ses propriétés mécaniques ou thermiques sont différentes et indépendantes dans trois directions perpendiculaires les unes aux autres. Le bois, un grand nombre de cristaux et de métaux laminés sont des exemples de matériaux orthotropes.

Par exemple, les propriétés mécaniques du bois (figure I.6) en un point sont décrites dans les directions longitudinale, radiale et tangentielle. L'axe longitudinal (1) est parallèle à la direction des fibres. L'axe radial (2) est normal par rapport aux anneaux d'accroissement. L'axe tangentiel (3) est tangent par rapport aux anneaux d'accroissement

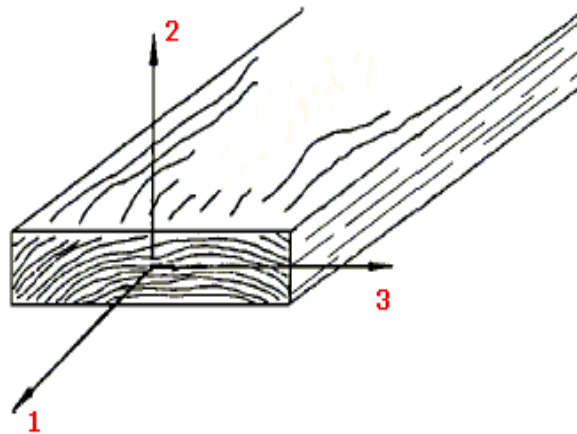


Fig. I.6: Exemple d'un Matériaux orthotrope- le bois.

La matrice de souplesse à la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Les formules de passage de G, K à E et ν sont :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{I.26}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (I.27)$$

A la différence des matériaux isotropiques, les matériaux orthotropiques ont des directions de force privilégiées mutuellement perpendiculaires. Les propriétés le long de ces directions (dites aussi directions principales) sont des valeurs extrêmes des coefficients d'élasticité.

I.5. Relations contraintes déformation incrémentales pour un matériau élasto-plastique

I.5.1. Formulation générale en notation matricielle

En admettant l'hypothèse (1.4) de la séparation des déformations en déformation élastique et déformation plastique sous la forme : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$

Les contraintes sont liées aux déformations élastiques par la loi de Hooke (1.28) :

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{el.} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{el.} \quad (I.28)$$

{L} : est la matrice de Hooke ou de rigidité.

soit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{el.} = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (I.29)$$

{M} : est la matrice de souplesse.

En pratique, pour faire des calculs de structure, on utilise plutôt une formulation matricielle, que la notation indicielle. Les tenseurs des seconds ordres des contraintes et déformations sont représentés par des vecteurs colonnes à 6 composantes et les tenseurs symétrique du quatrième ordre sont représentés par des matrices (6x6) symétriques. On définit les vecteurs contraintes $\vec{\sigma}$, déformations totale $\vec{\varepsilon}$, déformations élastiques $\vec{\varepsilon}^{el}$ et Soient $\dot{\vec{\sigma}}$, $\dot{\vec{\varepsilon}}$ et $\dot{\vec{\varepsilon}}^{el}$ leurs dérivées premières. Soit L la matrice de rigidité du matériau et soit $\dot{\vec{\varepsilon}}^p$ la vitesse de déformation plastique.

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \dot{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{32} \\ \dot{\sigma}_{31} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{32} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad \bar{\varepsilon}^{el} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{el.} \\ \varepsilon_{22}^{el.} \\ \varepsilon_{33}^{el.} \\ \varepsilon_{32}^{el.} \\ \varepsilon_{31}^{el.} \\ \varepsilon_{12}^{el.} \end{bmatrix} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^{el} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11}^{el.} \\ \dot{\varepsilon}_{22}^{el.} \\ \dot{\varepsilon}_{33}^{el.} \\ \dot{\varepsilon}_{32}^{el.} \\ \dot{\varepsilon}_{31}^{el.} \\ \dot{\varepsilon}_{12}^{el.} \end{bmatrix} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11}^p. \\ \dot{\varepsilon}_{22}^p. \\ \dot{\varepsilon}_{33}^p. \\ \dot{\varepsilon}_{32}^p. \\ \dot{\varepsilon}_{31}^p. \\ \dot{\varepsilon}_{12}^p. \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, la dérivée de la surface de charge par rapport aux contraintes se met sous la forme d'un vecteur colonne à 6 composantes \bar{n} .

$$\bar{n} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{32}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{31}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope, la matrice de Hooke, prend une forme particulièrement simple :

$$\{L\} = 2G \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) & \frac{\nu}{(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-2\nu)} & \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) & \frac{\nu}{(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1-2\nu)} & \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons écrire les équations précédentes sous forme matricielle. La loi de Hooke prend la forme :

$$\vec{\sigma} = \{L\} \vec{\varepsilon}^{el} \quad (I.30)$$

Ainsi l'incrément de contrainte peut s'écrire en tenant compte de la loi de normalité

$$\dot{\vec{\sigma}} = \{L\} \dot{\vec{\varepsilon}}^{el} = \{L\} \left[\dot{\vec{\varepsilon}} - \dot{\vec{\varepsilon}}^p \right] = \{L\} \left[\dot{\vec{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \vec{n} \right] \quad (I.31)$$

\vec{n} : est la normale à la fonction de charge.

$\dot{\lambda}$: multiplicateur plastique indéterminé est donné par :

$$\dot{\lambda} = \frac{\vec{n}^T \{L\} \dot{\vec{\varepsilon}}}{\left[\frac{1}{\mu} + \vec{n}^T \{L\} \vec{n} \right]} \quad (I.32)$$

μ : le coefficient d'écrouissage.

La formulation complète de l'incrément de contrainte pour un matériau élastoplastique en notation matricielle est donc donnée par :

$$\dot{\vec{\sigma}} = \left(\{L\} - \alpha \frac{\{L\} \vec{n} [\{L\} \vec{n}]^T}{\left[\frac{1}{\mu} + \vec{n}^T \{L\} \vec{n} \right]} \right) \dot{\vec{\varepsilon}} = \{L\}_{pl.} \dot{\vec{\varepsilon}} \quad (I.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{L\}_{pl.} = \{L\} - \alpha \frac{\vec{d} \vec{d}^T}{\left[\frac{1}{\mu} + \vec{n}^T \vec{d} \right]} \\ \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\sigma}} \\ \vec{d} = \{L\} \vec{n} = \{L\} \frac{\partial f}{\partial \vec{\sigma}} \end{array} \right. \quad (I.34)$$

La matrice $\{L\}$ est la matrice de Hooke ou de rigidité et la matrice $\{L\}_p$ est appelée matrice de rigidité élastoplastique ou matrice tangente, \vec{d} est la normale à la surface de charge. Les valeurs de cette matrice dépendent de la déformation subie par le matériau.

1.5.2. Matrice tangente pour un matériau élastoplastique selon le critère de Von Mises

Considérons un matériau élastoplastique isotrope suivant le critère de plastification de Von Mises. La matrice de Hooke, peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\sigma} = \{L\} \vec{\varepsilon} \Leftrightarrow \{L\} = 2G\{P\}_1 + 3K\{P\}_2 \quad (I.35)$$

$$\{P\}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \{P\}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice tangente s'écrit alors :

$$\{L\}_{pl.} = \{L\} - \alpha \frac{9G^2}{(\bar{\sigma} R_e)^2} \frac{\bar{s} \bar{s}^T}{\left[\frac{1}{\mu} + \frac{3G}{R_e^2} \right]} \tag{I.36}$$

1.5.3. Matériaux sans écrouissage

1.5.3.a. Comportement rigide parfaitement plastique

Souvent, on peut négliger les déformations élastiques par rapport aux déformations plastiques (figure I.7). Dans ce cas le matériau est décrit par une loi de comportement parfaitement plastique. Le comportement parfaitement plastique peut être représenté par un patin soumis à une loi de frottement.

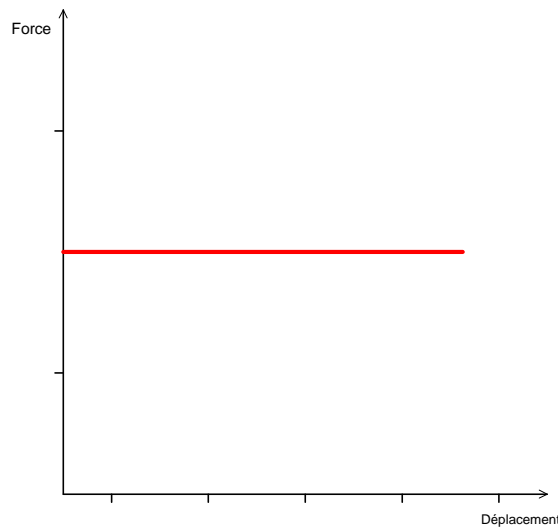


Fig. I.7 : Représentation de la loi de comportement rigide parfaitement plastique. courbe force-déplacement.

En dessous d'une force seuil, le déplacement du patin est nul. Si le seuil est atteint, le déplacement devient infini. Il faut noter que la représentation du comportement parfaitement

plastique sous forme d'un patin représente la loi de comportement (*i.e.* la relation contrainte σ / déformation ϵ).

Le comportement du matériau est alors défini par les relations (1.37) et la constante de la contrainte d'écoulement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}} &= \frac{3 s_{ij}}{2 \bar{\sigma}} \\ \bar{\sigma} &= \sigma_{y0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}} = \frac{3 s_{ij}}{2 \sigma_{y0}} \quad (I.37)$$

Où σ_{y0} : est la contrainte d'écoulement du matériau. Pour un matériau parfaitement plastique, le coefficient d'écrouissage $1/\mu$ tend vers 0. Ce comportement est utile pour l'analyse des procédés de mise en forme à froid si le matériau à été préécroui.

1.5.3.b. Comportement élastique parfaitement plastique

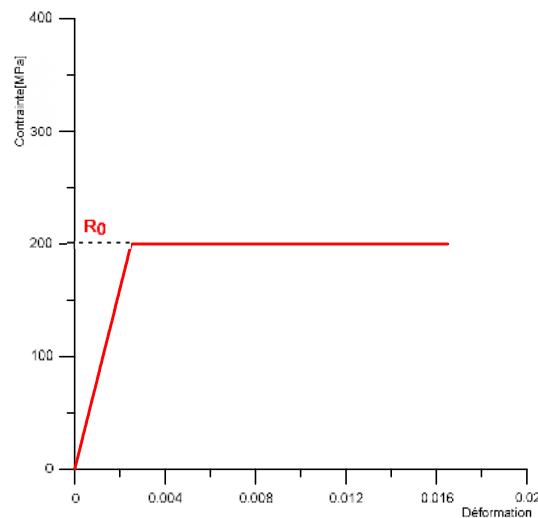


Fig. I.8: Représentation de la loi de comportement élastique- parfaitement plastique.

Si la pièce ou la structure considérée peut se décharger et générer des contraintes résiduelles, la déformation élastique ne peut être négligée. La prise en compte de l'élasticité est fondamentale si la structure peut se décharger pour estimer les contraintes résiduelles, c'est-à-dire les contraintes sous chargement extérieur nul. Le comportement élastique parfaitement plastique est souvent utilisé dans le calcul de structures. En effet, les structures du génie civil sont dimensionnées de façon à prévenir la plastification. Les déformations plastiques sont donc très petites. Il n'y a pas lieu de modéliser l'écrouissage dû à de grandes déformations plastiques ; cependant, la prise en compte d'un comportement élasto-plastique

est fondamentale pour estimer les contraintes résiduelles lors de surcharges exceptionnelles causant la plastification de parties de la structure.

Le comportement élastique parfaitement plastique d'un matériau isotrope est décrit par :

$$\{L\}_{pl.} = \{L\} - \alpha \frac{3G}{(\bar{\sigma})^2} \bar{s} \bar{s}^T \quad (I.38)$$

I.5.4. Matériaux avec écrouissage

Lors des opérations de mise en forme (laminage, forgeage, estampage) les pièces subissent de très grandes déformations plastiques. Dans ce cadre, l'approximation d'un comportement élastique parfaitement plastique s'avère généralement insuffisante. La contrainte d'écoulement augmente fortement avec la déformation plastique du à l'augmentation des dislocations dans le matériau. Cette augmentation de la contrainte d'écoulement avec la déformation plastique est appelée écrouissage. On distingue essentiellement deux types d'écrouissage : l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. La frontière d'écoulement, dépend donc de l'historique de chargement subie par matériau.

I.5.4.a. L'écrouissage isotrope

Consiste en une dépendance de la contrainte d'écoulement de la déformation de von Mises. L'augmentation de la contrainte d'écoulement est donc identique en traction et en compression.

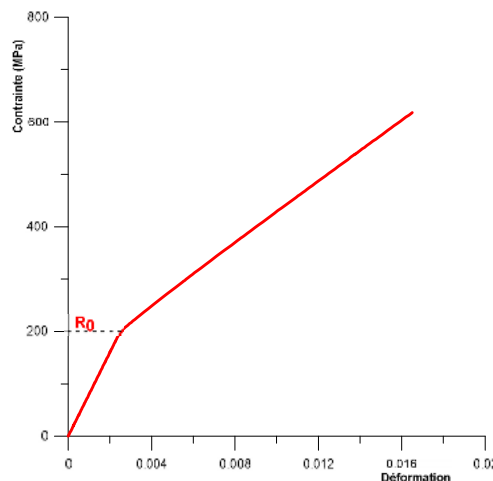


Fig. I.9 : Représentation de la loi de comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope.

La surface d'écoulement augmente de façon homothétique avec la déformation de Von Mises.

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, R_e) = \frac{\bar{\sigma}}{R_e(\bar{\varepsilon}^P)} = 1 \tag{I.39}$$

$\bar{\varepsilon}^P$ est une mesure de la déformation plastique cumulée. R_e est la limite de plastification correspondante à la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}^P$. La figure I.10 montre une évolution possible de la frontière de Tresca pour un matériau subissant un écrouissage isotrope.

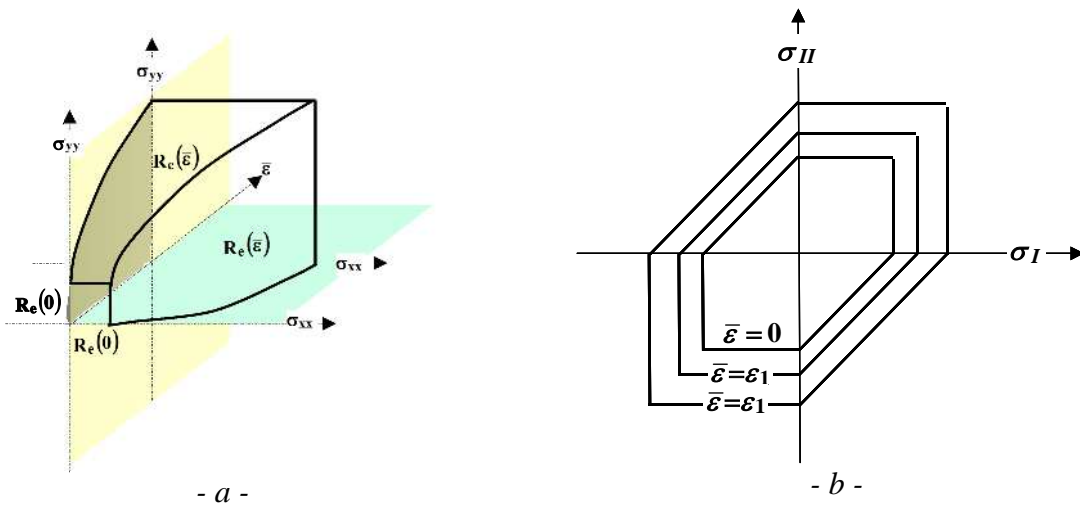


Fig. I.10: Evolution de la frontière d'écoulement de Tresca d'un matériau en contraintes planes subissant un écrouissage isotrope.(a) dans l'espace, (b) dans le plan des directions principales.

Beaucoup de lois d'écrouissage isotropes sont présentés dans la littérature. Les recherches actuelles portent sur la prédiction de la loi d'écrouissage à partir de la théorie des dislocations. Nous nous limitons ici à la loi d'écrouissage la plus simple donnée par :

$$\bar{\sigma} = R_e = \sigma_0 \left(1 + \frac{\varepsilon^P}{\varepsilon_0} \right)^n \tag{I.40}$$

σ_0 est la contrainte d'écoulement initiale (sans déformation plastique), ε^P est la déformation plastique cumulée et $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$, et n le taux d'écrouissage.

La formule (1.41) permet de calculer la matrice tangente.

$$\{L\}_{pl.} = \{L\} - \alpha \frac{9G^2}{(\bar{\sigma})^2} \left[\frac{\bar{s} \bar{s}^T}{\frac{n\sigma_0}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_0} \right)^{n-1} + 3G} \right] \quad (I.41)$$

Une augmentation du coefficient n (taux d'écrouissage) conduit à un retardement de l'apparition de la fissure. Dans les procédés de mise en forme de tôles plates par exemple, il est fondamental que le matériau puisse se déformer avec écrouissage. En traction simple, la déformation critique conduisant à l'apparition de la fissure est égal au coefficient n.

Ce dernier peut varier entre 0 et 1. Si n vaut 0, on retrouve un matériau élastique parfaitement plastique. Dans la déformation à froid, le coefficient n est généralement proche de 0,3 à 0,5. Cependant, pour beaucoup de matériaux métalliques, n n'est pas constant pendant la déformation et il a tendance à diminuer si la déformation plastique augmente.

Une des causes principales d'une diminution du coefficient d'écrouissage apparent est la recristallisation des matériaux métalliques. Ce phénomène est cependant significatif pour la déformation à chaud essentiellement.

1.5.4.b. L'écrouissage cinématique

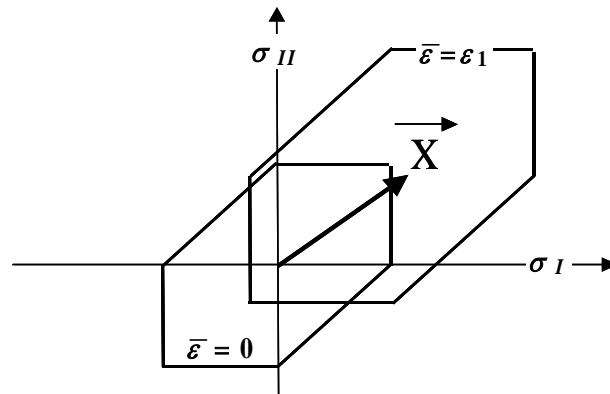


Fig. I.11 : Evolution de la frontière d'écoulement de Tresca d'un matériau en contraintes planes subissant un écrouissage cinématique.

L'écrouissage cinématique rentre dans le cadre de la formulation standard dans la plasticité de Von Mises, les variables d'écrouissage sont soustraites au tenseur de contraintes avant de calculer l'invariant de Von Mises. Le critère de plastification s'écrit alors

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R_e) = \frac{(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}{R_e} \quad (I.42)$$

$(\overline{\underline{\sigma} - \underline{X}})$ est l'invariant de Von Mises calculé à partir de la différence des tenseurs contraintes $\underline{\sigma}$ et le variable cinématique \underline{X} . La difficulté majeure de cette formulation est la nécessité de déterminer des lois d'évolution pour le tenseur \underline{X} sous la forme :

$$\underline{\dot{X}} = h(\underline{X}, \underline{\varepsilon}^p)$$

1.5.5. Ecriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de «charge – décharge» s'expriment par :

- domaine élastique si : $f(\sigma, R) < 0$ ($\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E$) (I.43)

- décharge élastique si : $f(\sigma, R) = 0$ et $(\dot{f}(\sigma, A_i)) < 0$ ($\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E$) (I.44)

- écoulement plastique si : $f(\sigma, R) = 0$ et $(\dot{f}(\sigma, A_i)) = 0$ ($\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^p$) (I.45)

Dans le cas général, le module d'écrouissage dépend de la déformation et/ou des variables d'écrouissage. La valeur du module plastique au point (σ, A_i) s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité au cours de l'écoulement. L'équation qui en découle s'appelle la condition de cohérence :

$$\dot{f}(\sigma, R) = 0$$
 (I.46)

Dans le cas d'un matériau dont le domaine d'élasticité voit sa taille augmenter, mais qui reste centré sur l'origine : il s'agit d'un écrouissage isotrope (G.I. Taylor and M.A. Quinney, 1931).

La variable d'écrouissage qui intervient dans f est la dimension du domaine d'élasticité, notée R :

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - \sigma_y$$
 (I.47)

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique. Elle s'exprimera donc en fonction de la déformation plastique cumulée p , variable dont la dérivée est égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique :

$$\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p|$$
 (I.48)

Bien entendu, il n'y a pas de différence entre p et ε^p tant que le chargement est monotone croissant. Dans ce cas, vérifier la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité.

- Pour l'écrouissage isotrope :

$$\sigma = R + \sigma_y$$
 (I.49)

- Pour l'écrouissage cinématique, cela s'écrit :

$$\sigma = X + \sigma_y \quad (\text{I.50})$$

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre, différents modèles du comportement mécanique élasto-plastique ont été présentés.

En complément de la déformation élastique définie par la loi de Hooke, les modèles élasto-plastiques intègrent un degré de déformation plastique permanent. Le matériau présente donc une élasticité linéaire jusqu'à un certain seuil (limite élastique) puis on note une déformation permanente du matériau. La déformation totale se décompose alors en deux parties une élastique et une autre plastique.

Un critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou si elle reste dans le domaine élastique. De nombreux essais ont montré que l'on pouvait utiliser deux critères principaux : le critère de Tresca-Guest ou le critère de Von Mises.

Pour un état de traction uni axiale, le critère de Tresca signifie que la plastification se produit quand le cisaillement maximum atteint la valeur critique $\sigma_0/2$.

Le critère de Von Mises prévoit qu'un matériau ductile commence à céder lorsque la contrainte de Von Mises atteint un niveau égal à la contrainte limite. Dans la plupart des cas, la limite d'élasticité est utilisée comme contrainte limite

Pour certains matériaux le phénomène d'écrouissage est absent ou peut être négligé. Le modèle de comportement correspondant est élastique parfaitement plastique. On remarquera que les matériaux parfaitement plastiques continuent de se déformer même sans accroissement de contraintes.

Le modèle rigide plastique peut être utilisé lorsque les déformations plastiques sont très importantes par rapport aux déformations élastiques : c'est, par exemple, le cas pour les problèmes de mise en forme.

Lorsqu'il y a un écrouissage, il faut se donner un modèle pour représenter l'évolution du domaine d'élasticité. Les deux modèles les plus simples sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. Ils sont basés sur l'utilisation de la courbe d'écrouissage du chargement monotone.

Le modèle d'écrouissage isotrope suppose une dilatation homothétique du domaine d'élasticité par rapport au domaine initial supposé connu. Le coefficient de dilatation dans le cas de l'écrouissage linéaire est défini par le module tangent.

Le modèle d'écroissage cinématique suppose une translation sans déformation du domaine d'élasticité initial supposé connu. La translation est définie à partir de la courbe d'écroissage monotone.

Chapitre II
Techniques d'homogénéisation des
matériaux composites

II.1. Introduction

Un matériau peut être considéré comme homogène ou hétérogène suivant l'échelle d'observation. À l'échelle du micromètre, le matériau composite est hétérogène et les phases qui le composent sont disjointes : on distingue bien les inclusions et la matrice qui les enrobe. Au contraire, à l'échelle macroscopique de la pièce on ne distingue plus les hétérogénéités du matériau qui doit être supposé et modélisé comme un milieu homogène. À l'échelle macroscopique, l'inclusion et la matrice sont continues, superposées et en interaction.

Un matériau peut être décrit dans le cadre de la mécanique des milieux continus par deux modèles :

- l'un à l'échelle dite microscopique où le comportement est hétérogène ;
- l'autre à l'échelle dite macroscopique où le comportement est homogène.

L'homogénéisation a pour objet l'étude des relations entre ces deux modèles, et en particulier, la détermination du comportement à l'échelle macroscopique en fonction de celui à l'échelle microscopique. Le concept de rendre « homogène » un matériau hétérogène est appelé le concept d'homogénéisation.

Un matériau homogénéisé est un milieu continu qui se comporte en « moyenne » comme le matériau hétérogène.

Diverses approches micromécaniques sont développées pour prédire les propriétés élastiques des matériaux composites renforcés par des fibres courtes (E. Harnamburu, 2003). De plus ces approches sont nombreuses et largement abordées dans la littérature.

Les premières méthodes d'homogénéisation développées pour les matériaux composites se basent sur les travaux d'Eshelby. La théorie micromécanique d'Eshelby (1957) a pour principe de remplacer une distribution d'hétérogénéités par un champ de déformation caractéristique (corrigeant la perturbation) ayant un comportement mécanique équivalent homogène. L'application à l'infini de diverses conditions aux limites (contraintes ou déformations macroscopiques imposées) permet de déduire plusieurs modules effectifs pour le milieu considéré chargé d'inclusions.

L'absence de prise en compte des interactions entre inclusions limite l'utilisation de cette méthode à de faibles fractions volumiques. Elle permet cependant d'obtenir, pour des géométries particulières, des expressions analytiques simples.

Plus tard, Mori et Tanaka (1972) ont développé une théorie qui est l'une des plus usitées dans le domaine des composites. Ils ont relevé l'importance de prendre en compte les interactions entre inclusions, à savoir considérer le volume élémentaire représentatif du

matériau (plusieurs inclusions au sein d'une matrice) comme étant de taille finie, ce que ne considère pas la théorie d'Eshelby.

Cette méthode permet de généraliser la précédente dans une certaine mesure à des applications à plus forte fraction volumique.

L'intérêt de ces approches micromécaniques est d'utiliser des solutions analytiques explicites tant que les géométries restent simples (inclusions circulaires ou elliptiques 2D, cylindriques ou ellipsoïdales 3D). Elles ne sont donc pas adaptées au cas des composites à renforts 3D, présentant des configurations plus complexes (sections lenticulaires et entrelacement) et des fractions volumiques plus élevées.

Compte tenu de ces différentes contraintes et de la périodicité des matériaux envisagés, une solution générale pour obtenir les modules effectifs est l'homogénéisation périodique. Le principe consiste à définir une cellule unité (plus petit volume permettant de reproduire la structure complète par périodicité) et à lui appliquer divers chargements sous conditions aux limites périodiques.

Cette méthode permet, sans restriction de fraction volumique, de déterminer le comportement équivalent d'un milieu tridimensionnel, voire d'une plaque bidimensionnelle dans le cas d'une structure composite mince. En général, la résolution est numérique par éléments finis et permet ainsi la description d'une géométrie complexe.

De nombreux schémas d'homogénéisation sont basés sur l'idéalisation qu'est la phase individuelle considérée comme inclusion dans un milieu infini, parce que des solutions explicites étaient disponibles dans ce cas-là. Les moyens de calcul sont tels aujourd'hui qu'on peut substituer à ces problèmes d'inclusions des configurations plus réalistes de la microstructure et coupler les modèles simplifiés à ces calculs de VER. Ils ont atteint un haut niveau de sophistication et d'efficacité, en particulier dans le cas des propriétés linéaires telles que la conductivité thermique ou l'élasticité. Ils peuvent être trouvés dans plusieurs références des articles scientifiques, des thèses universitaires, et des livres. [Willis (1981), Ponte-Castaneda and Suquet (1987), Sanchez-Palencia and Zaoui (1987) and Nemat-Nasser and Hori (1993)], ou, plus récemment, [Suquet (1997), Bessonnet al. (2001), Bornert et al. (2001) and Jeulin and Ostoja-Starzewski(2001)], où l'extension des propriétés non linéaires sont également proposés.

La prédiction de la réponse contrainte-déformation macroscopique des matériaux composites est liée à la description de leur comportement microstructural complexe illustré par l'interaction entre les constituants. En élasticité linéaire, de nombreux schémas d'homogénéisation ont été développés tels que ceux de Voigt et Reuss, voir Mori et Tanaka

(1973) et Swan et Kosaka (1997), le modèle auto-cohérent et le modèle d'interpolation d'inclusion double, voir Nemat Nasser et Hori (1999). L'extension à composites multi-phases et linéaire thermo élasticité ont été suivi, voir Camacho et al. (1990), Lielens (1999) et Pierard (2004). Ces relations peuvent être homogénéisées à chaque pas de temps en fonction des modèles valides classiques en élasticité linéaire. Toutefois, les prédictions macroscopiques semblent être trop rigide, voir Gilormini (1995).

L'extension des modèles d'homogénéisation au régime plastique a été pionnier par Hill (1965) et son travail a été suivi par beaucoup d'autres, voir PonteCastaneda et Suquet (1998) et Chaboche et al. (2005).

Fondamentalement, deux approches principales ont été adoptées. Dans la formulation tangente, chaque phase suit la théorie incrémentale de la plasticité, et le comportement macroscopique du composite est obtenu de manière incrémentielle par l'intégration le long du trajet de chargement le tenseur de rigidité du composite obtenu à partir des tenseurs de rigidité tangente de chaque phase, avec l'une des approximations linéaires disponibles, voir Hutchinson (1970), Pétermann et al. (1999) et Ju et Sun (2001).

La Formulation sécante traiter la déformation plastique dans le cadre de l'élasticité non linéaire, ou et la relation entre la contrainte et la déformation dans chaque phase est donnée par un tenseur de rigidité sécante, qui dépend de la contrainte équivalente de von Misses. Le tenseur de rigidité du composite global est calculé à partir de ceux de chaque phase par l'approximation linéaires choisi, voir Berveiller et Zaoui (1979) and Tandon et Weng (1988).

Les propriétés élastiques effectives sont calculées en utilisant des expressions de deux composites de phase proposés par Hashin (1979) et Christensen (1979). Dasgupta et Bhandarkar (1992) ont examiné un procédé pour obtenir les propriétés mécaniques thermo effectives transversalement isotrope des composites renforcés par des fibres cylindriques unidirectionnelles revêtus. Un modèle de contact élastique est développée par Hui et Zu-Tsu-Wei (1995), pour prédire le module de Young transversal, le coefficient de poisson, et le module de cisaillement des composites renforcés par des fibres unidirectionnelles avec décollement interfaciale.

Les Expressions analytiques pour calculé les coefficients effectives élastiques des composites renforcés par des fibres élastiques isotropes pour des cellules carrées et hexagonales dans des conditions de contact parfait aux interfaces sont proposees dans nombreux travaux, voir Molkov et Pobedria (1985), Guinovart-Díaz et al. (2001) et Rodríguez-Ramos et al.(2001).

En 2005 Tuncer présente des calculs numériques des propriétés élastiques des structures cellulaires qui ressemblent à des polymères cellulaires utilisés dans des applications électriques. Une expression de puissance de la loi avec une quadratique comme un terme d'exposant est proposé pour calculé le module de Young effectif en fonction de la fraction volumique.

Les Coefficients homogénéisées de la microstructure ont étudié par Moravec et Roman (2009). Ils ont développé une méthode numérique pour calculer les coefficients homogénéisés de tissu avec fibres élastiques.

Récemment, dans Guinovart-Díaz et al. (2011), le module élastique effectif de deux phases périodiques des composites a fibres est obtenu pour les différents types de cellules parallélogramme sur la base du la methode AHM.

Dans les composites a fibres ou les constituants présentent des propriétés transversalement isotropes. Raimondo et al. (2012) proposé une méthode peut appliquée pour prédire les propriétés élastiques et de rupture des composites polymères de fibre de carbone.

Plus récemment, en Guinovart-Díaz et al. (2013), proposé une expression analytique de la rigidité élastique effectif d'un composite renforcé par des fibres avec un contact imparfait entre la matrice et les fibres et obtenues en utilisant la méthode d'homogénéisation asymptotique.

II.2. Modèles issus des techniques d'homogénéisation

Les techniques d'homogénéisation nous permettent de déterminer les propriétés élastiques macroscopiques d'un matériau hétérogène (homogène équivalent) à partir des propriétés des différentes phases qui le constituent et de certains paramètres caractérisant leur répartition spatiale. L'homogénéisation se fait via l'opération de la moyenne sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER) du matériau. Sur ce volume sera calculé le comportement du matériau homogène équivalent. Par définition, ce volume doit être suffisamment grand pour contenir toutes les hétérogénéités de la microstructure (Les phases). Par ailleurs, il doit être suffisamment petit pour qu'on puisse considérer que la sollicitation qu'il subit reste « macroscopiquement » homogène (J. Fitoussi, 1995). Par la suite, il faut définir les liens entre les grandeurs mécaniques à l'échelle des hétérogénéités et à l'échelle du VER. Au sens large du terme, l'homogénéisation est la technique permettant de définir la loi de comportement mécanique à l'échelle du VER. Cette définition doit être cohérente avec les propriétés des constituants dans le sens où elle doit prendre en compte leurs effets à l'échelle macroscopique. Cependant, la

technique d'homogénéisation n'a pas pour vocation de rendre compte du comportement à l'échelle microscopique : c'est un passage « micro /macro ».

II.2.1. Démarche générale d'homogénéisation

La mise en place d'un modèle à partir d'une technique d'homogénéisation exige une démarche générale menée en trois étapes :

- * Etape de représentation où la constitution du VER est définie mécaniquement par les lois de comportement des constituants et géométriquement par leurs formes ou leurs distributions.
- * Etape de localisation qui permet de formaliser le lien entre la réponse mécanique à l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique par l'intermédiaire de lois.
- * Etape d'homogénéisation où la représentation et la localisation sont utilisées pour construire la loi de comportement « macro mécanique » du VER.

II.2.1.a. Etape de représentation

Cette étape identifie et caractérise les différents constituants du matériau hétérogène, c'est ainsi à partir de leurs identifications que les échelles macroscopiques et microscopiques du VER sont précisées. Dans le VER, les constituants du matériau hétérogène sont désignés comme des « phases ». Chacune est donnée comme un milieu homogène et continu avec des propriétés spécifiques. Lorsqu'il s'agit de matériaux à renforts, l'usage fait que l'on réduit souvent l'ensemble de phases à une « matrice » comportant des « hétérogénéités ».

Ceci amène dans ce cas particulier à distinguer potentiellement $(n + 1)$ phases constitutives dans le VER avec « 1 » matrice et « n » tout autre type d'hétérogénéités tel qu'une fibre, une famille de fibres ayant les mêmes propriétés mécaniques, la même géométrie, et la même orientation (par exemple un composite est constitué d'une famille de fibres de verre courtes noyées dans la matrice polyester et disposées aléatoirement dans le plan) (Figure II.1)

Par la suite, toutes les grandeurs (Les grandeurs sont des caractéristiques de l'échelle microscopique : matrice de rigidité, contraintes / déformation, etc.) désignant la matrice sont notées avec l'indice ou l'exposant « m » tandis que l'indice ou l'exposant « i » est utilisé pour les autres phases ($i = 1$ à n). Elles sont aussi des attributs de l'échelle macroscopique qui décrivent la microstructure. On utilise classiquement, la fraction volumique (le taux volumique) de chaque phase, notée P_i , qui vérifie dans le VER :

$$1 = P_m + \sum_{i=1}^n P_i \quad (\text{II.1})$$

P_i : le taux volumique de fibres de la phase i .

n : le nombre de phases hors matrice.

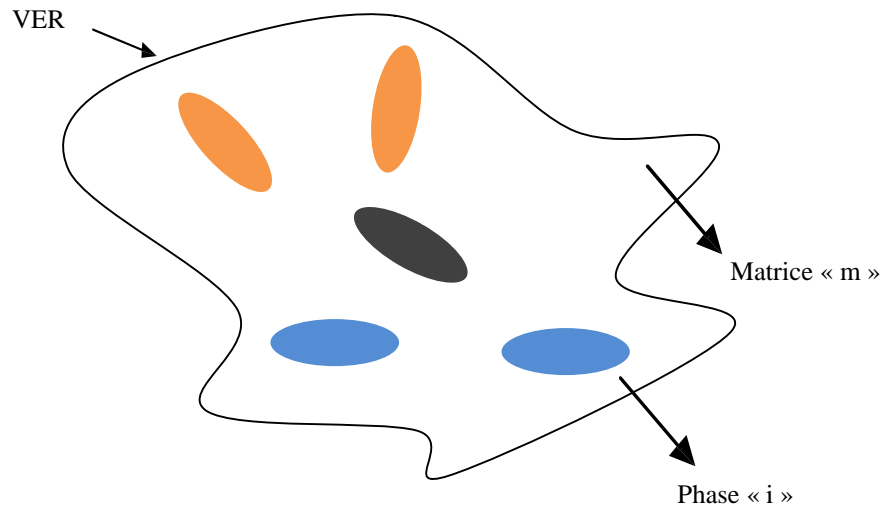


Fig. II.1: Représentation du VER.

II.2.1.b. Etape de localisation

Du fait de la mise en présence de différentes phases (hétérogénéités), les champs de contrainte $\sigma(x)$ et de déformation $\varepsilon(x)$ en un point x du VER sont non uniformes, et par conséquent les contraintes locales et globales sont généralement différentes. Il en est de même pour les déformations. Par conséquent, cette étape s'applique à la recherche des relations entre les grandeurs microscopiques (locales) et les grandeurs macroscopiques. Pour exprimer de manière simple les champs locaux, une première hypothèse consiste à introduire la notion de contrainte et de déformation moyenne dans les différentes phases (Hill, 1963). Par définition, on note la contrainte moyenne σ_i et la déformation moyenne ε_i sur la phase « i » de volume VER telle que :

$$\sigma_i = \langle \sigma \rangle_{VER} = \frac{1}{V_{VER}} \int_{V_{VER}} \sigma(x) dV \quad (\text{II.2})$$

$$\varepsilon_i = \langle \varepsilon \rangle_{VER} = \frac{1}{V_{VER}} \int_{V_{VER}} \varepsilon(x) dV \quad (\text{II.3})$$

Où : $\sigma(x)$ et $\varepsilon(x)$ sont les contraintes et déformations locales en tout point A du VER.

De même, à l'échelle macroscopique, on définit les mêmes grandeurs en moyenne dans le VER, notées $\langle \sigma \rangle_{VER}$ pour la contrainte et $\langle \varepsilon \rangle_{VER}$ pour la déformation. Il s'agit ensuite de relier ces grandeurs à celle de l'échelle locale des phases. On établit ainsi, suivant une modélisation du comportement de chacune des phases, les lois de localisation ou de concentration où l'on introduit le tenseur de localisation des déformations, noté A , et le tenseur de concentration des contraintes, noté B . Par définition, les lois de localisation A_i et de concentration B_i d'une phase « i » sont telles que :

$$\sigma_i = \langle \sigma \rangle_{VER} = B_i \cdot \sigma \quad (II.4)$$

$$\varepsilon_i = \langle \varepsilon \rangle_{VER} = A_i \cdot \varepsilon \quad (II.5)$$

Où : E et $\langle \sigma \rangle_{VER}$ sont respectivement les déformations et les contraintes moyennes macroscopiques, ε_i et σ_i sont respectivement les déformations et les contraintes moyenne dans la phase i , A_i et B_i sont respectivement le tenseur de localisation et le tenseur de concentration de la phase i .

II.2.1.c. Etape d'homogénéisation

Cette étape permet finalement de déterminer le comportement effectif du matériau hétérogène en effectuant le passage des grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques. Au sens large du terme, en calculant la moyenne des contraintes et des déformations sur tout le VER, ces moyennes doivent être égales aux grandeurs macroscopiques (D. François et al, 1990) :

$$\langle \sigma \rangle_{VER} = \frac{1}{V_{VER}} \int_{V_{VER}} \sigma(x) dV \quad (II.6)$$

$$E = \langle \varepsilon \rangle_{VER} = \frac{1}{V_{VER}} \int_{V_{VER}} \varepsilon(x) dV \quad (II.7)$$

Ce qui peut encore s'écrire en fonction des déformations et contraintes locales (grandeurs microscopiques) par :

$$E = P_m \varepsilon_m + \sum_{i=1}^n P_i \varepsilon_i = (1 - P) \varepsilon_m + \sum_{i=1}^n P_i \varepsilon_i \quad (II.8)$$

$$= P_m \sigma_m + \sum_{i=1}^n P_i \sigma_i = (1 - P) \sigma_m + \sum_{i=1}^n P_i \sigma_i = (1 - P) \cdot C_m \varepsilon_m + \sum_{i=1}^n P_i C_i \varepsilon_i \quad (II.9)$$

Où : C_m et C_i sont les matrices de rigidité de la matrice et du renfort respectivement, n : le nombre de phase présente dans la composite.

Les relations données par les équations (II. 8) et (II. 9) sont qualifiées de relations

de passage « micro/macro » car elles relient les grandeurs moyennes à l'échelle de la microstructure et les grandeurs à l'échelle du VER.

En combinant les deux équations précédentes, on aboutit à :

$$= C_m E + \sum_{i=1}^n P_i (C_i - C_m) \varepsilon_i \quad (\text{II.10})$$

De même, en exprimant E et σ_m en fonction des contraintes locales, on peut réécrire les Equations (II. 8) et (II. 9) sous la forme suivante :

$$E = (1 - P) \varepsilon_m + \sum_{i=1}^n P_i \varepsilon_i = (1 - P) \cdot S_m \sigma_m + \sum_{i=1}^n P_i S_i \sigma_i \quad (\text{II.11})$$

$$= (1 - P) \sigma_m + \sum_{i=1}^n P_i \sigma_i \quad (\text{II.12})$$

Où : S_m et S_i sont respectivement les matrices de souplesse de la matrice et du renfort.

Et aboutir après combinaison à :

$$E = S_m + \sum_{i=1}^n P_i (S_i - S_m) \sigma_i \quad (\text{II.13})$$

La loi de comportement effectif du composite peut finalement être déduit en introduisant dans les équations (II. 10 et II. 13) les relations de localisations données en (II. 4 et II. 5). On fait alors apparaître les matrices effectives de rigidité C_{comp} (ou de souplesse S_{comp}) du matériau homogénéisé en fonction des rigidités (ou souplesse) des phases et en fonction des lois de localisation (ou de concentration) des hétérogénéités.

$$C_{comp} = C_m + \sum_{i=1}^n P_i (C_i - C_m) : A_i \quad (\text{II.14})$$

$$S_{comp} = S_m + \sum_{i=1}^n P_i (S_i - S_m) : B_i \quad (\text{II.15})$$

Ces relations nous montrent que c'est par la connaissance des tenseurs de localisation dans chacune des phases du composite que les caractéristiques élastiques de celui-ci sont connues. C'est donc à travers l'étape de localisation que les modèles vont se différencier. En d'autres termes, ce qui différencie un modèle d'un autre est la manière de relier les grandeurs microscopiques aux grandeurs macroscopiques. Les équations (II. 14 et II. 15) sont communes à tous les modèles micromécaniques. Deux des applications les plus simples et les plus directes de ces équations sont issues des travaux de Voigt (W. Voigt, 1990) et de Reuss (A. Reuss, 1929).

Les bornes de Voigt et Reuss encadrent les propriétés élastiques d'un matériau hétérogène. Elles sont basées sur des approches variationnelles issues de théorèmes énergétiques [Zaoui et al, 1992].

II.2.2. Borne de Voigt

Dans l'hypothèse d'un champ de déformation uniforme dans tout le VER, on montre via le théorème de l'énergie potentielle qu'une borne supérieure de la rigidité peut s'écrire sous forme d'une loi des mélanges sur les rigidités des différentes phases :

$$C_{\text{Voigt}} = (1 - P_m)C_m + \sum_{i=1}^n P_i C_i \quad (\text{II.16})$$

ou :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_f = \varepsilon \quad (\text{II.17})$$

On remarque que, dans l'hypothèse de déformation uniforme, le tenseur de localisation des phases « i » est égal au tenseur identité.

En posant donc $A_i = 1$, on peut alors retrouver avec l'équation II. 14 l'expression de la borne de Voigt.

II.2.3. Borne de Reuss

De manière similaire, le théorème de l'énergie complémentaire permet de poser une borne supérieure en faisant l'hypothèse d'une contrainte uniforme dans toutes les phases. Il en découle une relation type loi des mélanges sur les souplesses qui donnent une borne supérieure de la souplesse du matériau :

$$S_{\text{Voigt}} = (1 - P_m)S_m + \sum_{i=1}^n P_i S_i \quad (\text{II.18})$$

ou :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma \quad (\text{II.19})$$

Dans l'hypothèse de contrainte uniforme, le tenseur de concentration des phases « i » est égal au tenseur identité. De la même manière, si on pose $B_i = 1$, alors la relation de Reuss peut être exprimée directement en introduisant cette égalité dans l'équation (II. 15).

Un milieu de référence très rigide conduit à l'estimation de Voigt, alors qu'un milieu de référence infiniment souple fournit l'estimation de Reuss.

Les approximations de Voigt et de Reuss sont utilisées lorsque l'on ne dispose que de très peu d'informations sur la microstructure, selon ces approximations $A_i=I$, $B_i=I$.

$$C_{\text{comp}} = C_m + \sum_{i=1}^n P_i (C_i - C_m) \quad (\text{II.20})$$

$$S_{\text{comp}} = S_m + \sum_{i=1}^n P_i (S_i - S_m) \quad (\text{II.21})$$

II.2.4. Modèle à base d'inclusion

Les modèles de matériaux hétérogènes à base d'inclusion établissent sous différentes hypothèses des lois de localisation des phases désignées comme hétérogénéités. Chacun se base sur la situation élémentaire d'un milieu infini (ou matrice) perturbé par la présence d'une

zone appelée inclusion.

- **1) Problème d'inclusion**

Les problèmes d'inclusion consistent à évaluer les relations du passage « micro/macro » dans un VER représenté par une matrice infinie élastique présentant une inclusion ellipsoïdale élastique. On note ici C^I la rigidité de l'inclusion « I » et C^m celle de la matrice (Figure II.2).

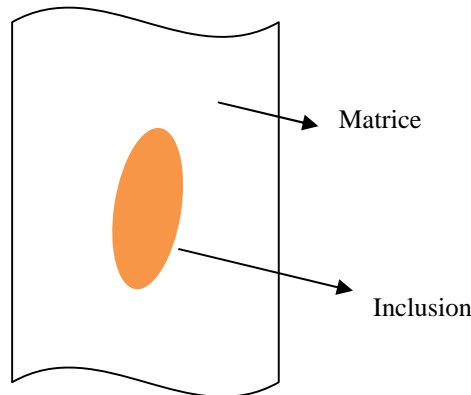


Fig. II.2 : VER du problème d'inclusion.

- **2) Problème d'Eshelby (Aucune interaction entre les fibres)**

On suppose que l'ensemble est homogène en terme de rigidité ($C^I = C^m$), et que la matrice et l'inclusion sont libres de tout chargement. Ce départ constitue la configuration de référence du problème de l'inclusion homogène aussi appelé problème d'Eshelby.

De manière arbitraire, on isole l'inclusion « I » qui est un domaine borné et on lui impose une déformation libre, notée e^I . Cette transformation n'est pas liée à une contrainte lorsque l'inclusion se déforme indépendamment de la matrice. Par contre, on note que, si la déformation libre était totalement bloquée, alors on ferait apparaître une contrainte dans l'inclusion égale à :

$$\bar{\sigma} = -C^m : e^I \quad (\text{II.22})$$

Celle-ci, que l'on retrouve sous le nom de « polarisation » dans la littérature [41], serait générée par le retour élastique de l'inclusion dans sa forme initiale de référence.

Mais, ceci n'est rigoureusement pas le cas de l'inclusion soumise à e^I puisque la matrice autour de l'inclusion s'oppose à cette transformation avec sa propre rigidité. Il s'établit un état d'équilibre dans lequel l'inclusion et la matrice sont dans un état de

contrainte/ déformation homogène mais non nulles. On parle de perturbation induite par la déformation libre e^I . Si on note $\tilde{\varepsilon}^I$ la déformation de perturbation satisfaisant les équations d'équilibre en tout point de la matrice ou de l'inclusion telle que:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^I = \tilde{\varepsilon}^I \quad (\text{II.23})$$

on montre alors que $\tilde{\varepsilon}^I$ est reliée à e^I par l'intermédiaire d'un tenseur d'ordre 4, noté E^I :

$$\tilde{\varepsilon}^I = E^I : e^I \quad (\text{II.24})$$

Où : pour l'inclusion « I », $\tilde{\varepsilon}^I$ est la déformation de perturbation du VER, e est la déformation libre et E est le tenseur d'Eshelby.

Cependant, puisque l'inclusion est un domaine borné et la matrice infinie, il est important de noter que la solution $\tilde{\varepsilon}^I$ n'existe dans la matrice qu'au voisinage de l'inclusion.

A l'infini, le milieu n'est pas perturbé et la perturbation $\tilde{\varepsilon}^I$ tend alors vers 0. Les équations de comportement dans l'inclusion et dans la matrice doivent donc s'écrire telles que (Bornert et al, 2001):

$$\bar{\sigma}^m = C^m : \tilde{\varepsilon}^I \text{ avec } \lim_{\tilde{\varepsilon}^I \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}^I \rightarrow 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\bar{\sigma}^I = -C^m : e^I + C^m : \tilde{\varepsilon}^I = C^m (E^I - I) : e^I \quad (\text{II.26})$$

Dans certains cas, la résolution du problème d'équilibre permet d'exprimer analytiquement les composantes de E^I (le tenseur d'Eshelby). Dans tous les cas, ces composantes sont sans dimension et ce tenseur vérifie les symétries : $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}$

- 3) *Problème d'inclusion avec chargement à l'infini*

On se place ici dans le cas d'une inclusion inhomogène pouvant aussi être désignée comme une hétérogénéité, sous entendu de rigidité. Elle est plongée dans une matrice infinie soumise à un chargement homogène générant un état de contrainte/déformation (Σ/E) à l'infini tel que la loi de comportement : $\Sigma = C^m . E$ est vérifiée loin de l'inclusion. Lorsque le milieu est homogène ($C^I = C^m$), la solution de ce problème d'équilibre est la superposition de celle d'Eshelby et du chargement à l'infini. Sur cette base, si on considère qu'une même déformation de perturbation $\tilde{\varepsilon}^I$ est introduite par l'hétérogénéité de rigidité et par l'inclusion homogène soumise à la déformation libre e^I , alors on peut identifier les équations de comportement dans l'inclusion pour les deux configurations :

$$\bar{\sigma}^I = C^I : (E + \tilde{\varepsilon}^I) = C^m (E + \tilde{\varepsilon}^I - e^I) \quad (\text{II.27})$$

Dans ce cas, la perturbation est donnée par la solution d'Eshelby (Eq. II. 22), ensuite

après manipulation de l'égalité de l'équation (II.25), la déformation libre e^I en fonction de la déformation appliquée E :

$$e^I = -[C^m + (C^I - C^m) : E^I]^{-1} : (C^I - C^m) : E \quad (II.28)$$

L'équation (II.28) permet de relier la déformation dans l'inclusion i (échelle microscopique) à la déformation appliquée à l'infini E (échelle macroscopique) :

$$\bar{\varepsilon}^I = [I + E^I : S^m : (C^I - C^m)]^{-1} : E \quad (II.29)$$

Où : E^I est le tenseur d'Eshelby, E est la déformation moyenne à l'échelle du VER.

Ce résultat constitue la loi de localisation d'une hétérogénéité plongée dans un milieu infini, et c'est le seul transport obtenu dans le problème de l'hétérogénéité de la déformation de perturbation donnée par l'inclusion soumise à une déformation libre.

II.2.4.a. Modèle d'Eshelby

Dans la continuité du problème élémentaire, Eshelby propose que chaque phase du VER joue le rôle d'une inclusion plongée dans un milieu infini indépendamment des autres phases. Localement, l'hétérogénéité est donc soumise à la déformation macroscopique E du VER (Figure II.3). Par conséquent, la loi de localisation d'une phase « i » est donnée par l'équation (II.29) :

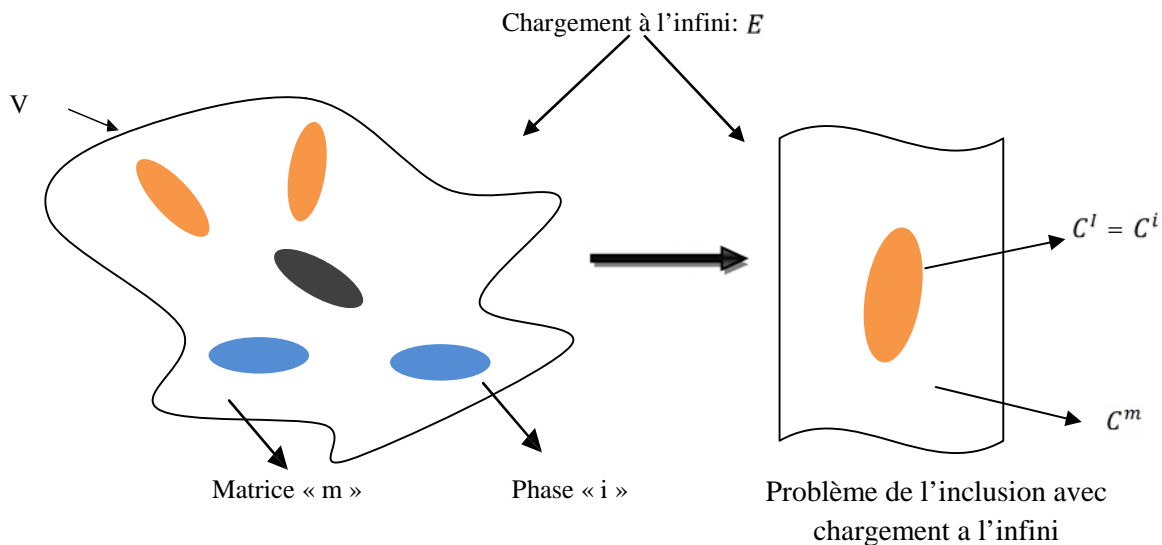


Fig. II.3: Modèle d'Eshelby : représentation du problème élémentaire.

$$A_{ESH}^i = [I + E^{ii} : S^m : (C^I - C^m)]^{-1} \quad (II.30)$$

Ensuite, à partir des lois de localisation calculées pour chaque phase « i », la rigidité équivalente du matériau homogénéisé est obtenue avec la sommation de la relation de l'équation (II. 20) :

$$C_{ESH} = C^m + \sum_{i=1}^N V f_i (C^I - C^m) : [I + E^i : S^m : (C^I - C^m)]^{-1} \quad (II.31)$$

Le modèle d'Eshelby ne peut pas être représentatif d'un matériau dépassant une certaine concentration d'hétérogénéités, car il ne considère que les perturbations locales des champs de contrainte et de déformation dans la matrice sans prendre en compte les interactions avec les autres phases. En plus, en utilisant ce modèle, les fractions volumiques doivent être inférieures à 1% (Tucker et Liang, 1999).

II.2.4.b. Modèle de Mori et Tanaka

Ce modèle, introduit par Mori et Tanaka en 1973 (Mori et Tanaka, 1973), a été reformulé par Y. Benveniste en 1985 (Y. Benveniste, 1987). Ce modèle permet de prendre en compte dans le comportement effectif (équivalent) du matériau homogénéisé la présence d'un grand nombre d'hétérogénéités et des interactions existant localement entre les phases. La matrice dans laquelle est plongée l'hétérogénéité correspond à un milieu déjà perturbé par la présence des autres hétérogénéités (F. Lachaud, P. Jetteur,.....). De plus, ce modèle constitue une amélioration du modèle de l'inclusion hétérogène équivalente d'Eshelby (Eshelby, 1961).

On introduit donc la déformation $\tilde{\varepsilon}^I$ qui représente la perturbation globale à laquelle toutes les phases contenues dans le VER contribuent. Chaque phase est plongée dans une matrice qui voit la déformation macroscopique E à laquelle s'ajoute la déformation globale de perturbation $\tilde{\varepsilon}^I$. Donc on parle d'un champ effectif dans lequel on se ramène à la résolution du problème d'hétérogénéité avec chargement à l'infini (Figure II.4).

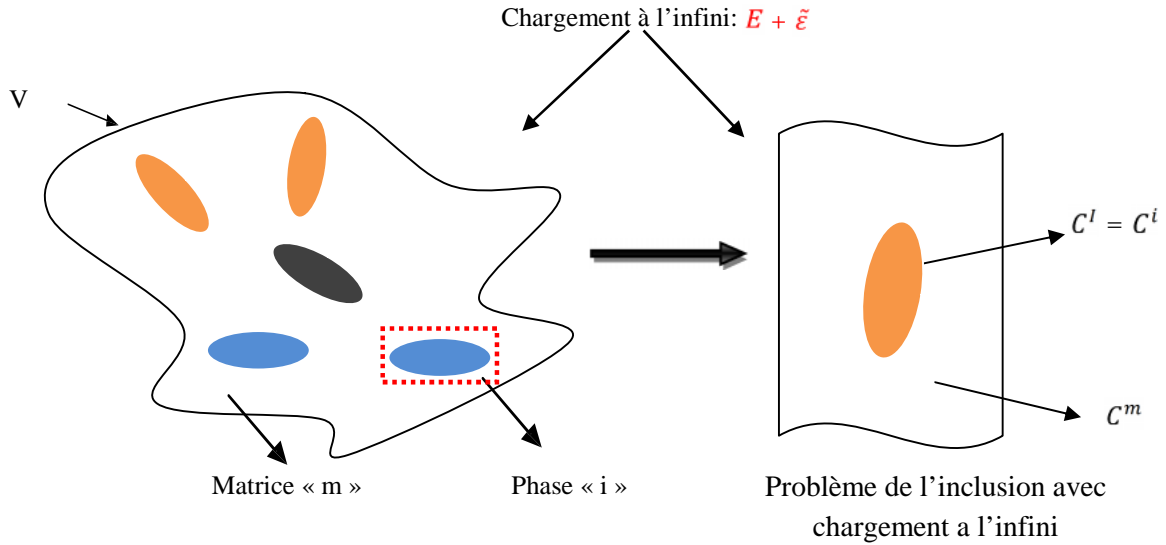


Fig. II.4 : Méthode de Mori et Tanaka : représentation du problème élémentaire.

Au sens du problème de l'inclusion équivalente (Eq. II.29), l'hétérogénéité est remplacée par une inclusion soumise à la déformation libre e^I qui introduit la déformation de perturbation locale $i \tilde{\varepsilon}^I$. En identifiant de la même manière les équations de comportement dans l'inclusion équivalente et dans l'hétérogénéité, on obtient la relation de localisation des déformations i de la phase « i » par rapport à la déformation à l'infini de la matrice égale par hypothèse à $(E + \tilde{\varepsilon}^I)$:

$$\bar{\varepsilon}^I = [I + E^I : S^m : (C^I - C^m)]^{-1} : (E + \tilde{\varepsilon}^I) \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}^I = A_{ESH}^i : (E + \tilde{\varepsilon}^I) \quad (II.32)$$

On exprime ensuite le terme $(E + \tilde{\varepsilon}^I)$ en tenant compte du fait que la déformation $\tilde{\varepsilon}^I$ vérifie l'égalité entre la déformation macroscopique moyenne et les déformations des phases du VER (Eq. II. 8) :

$$\langle \varepsilon \rangle = E = V_m (E + \tilde{\varepsilon}^I) + \sum_{i=1}^n V f_i A_{ESH}^i : (E + \tilde{\varepsilon}^I) \quad (II.33)$$

$$E = \left[V_m \cdot I + \sum_{i=1}^n V f_i A_{ESH}^i \right] : (E + \tilde{\varepsilon}^I) \quad (II.34)$$

$$(E + \tilde{\varepsilon}^I) = \left[V_m \cdot I + \sum_{i=1}^n V f_i A_{ESH}^i \right]^{-1} : E \quad (II.35)$$

D'où, avec la relation d'Equation (II. 32), la loi de localisation de la phase « i » pour la méthode de Mori et Tanaka :

Selon le modèle utilisé, le tenseur de localisation de la phase i est donné par l'expression suivante :

$$A_{MT}^i = A_{ESH}^i : [(1 - vf).I + A_{ESH}]^{-1} \quad (II.36)$$

Ce tenseur de localisation est fonction du tenseur de localisation effectif d'Eshelby donnée par :

$$A_{ESH}^i = [I + E_{ESH}^i : S^m (C^I - C^m)]^{-1} \quad (II.37)$$

$$A_{ESH} = \sum_{i=1}^N Vf_i A_{ESH}^i \quad (II.38)$$

Où : A_{ESH}^i est le tenseur de localisation d'Eshelby, E_{ESH}^i est le tenseur de forme d'Eshelby.

Enfin, en utilisant la sommation de la relation (Eq. II. 30), on exprime la matrice de rigidité équivalente du matériau homogénéisé par la méthode de Mori :

$$C_{MT} = C_{Comp} = C_m + \sum_{i=1}^N Vf_i (C^I - C^m) : A_{ESH}^i : [(1 - Vf).I + A_{ESH}]^{-1} \quad (II.39)$$

II.2.4.c. Schéma autocohérent classique

Ce schéma a été introduit par Hershey (1954) pour le matériau polycristallin et reformulé par Hill (1965) pour le matériau comportant des inclusions ellipsoïdales. Dans ce schéma, on suppose que chaque particule (matrice ou inclusion) est entourée par les autres phases du milieu et donc par le milieu homogène équivalent. Ce milieu homogène équivalent est soumis à une déformation moyenne E :

$$\varepsilon_i = [I + P_i^{AC} : (C_i - C_{AC})]^{-1} : E \quad (II.40)$$

Dans le cas d'inhomogénéités de même forme et de même orientation, l'estimation des tenseurs de localisation pour chaque phase s'écrit :

$$A_i^{AC} = [I + P_i^{AC} : (C_i - C_{AC})]^{-1} \quad (II.41)$$

A partir de la relation (1.23), l'estimation du tenseur d'élasticité macroscopique s'obtient :

$$C_{AC} = C_1 + \sum_{i=2}^n Vf_i (C_i - C_1) : A_i^{AC} \quad (II.42)$$

$$= C_1 + \sum_{i=2}^n Vf_i (C_i - C_1) : [I + P_i^{AC} : (C_i - C_{AC})]^{-1} \quad (II.43)$$

ou Vf_i ($i = 2, \dots, n$) désigne la fraction volumique de la phase i.

II.3. Méthodologie d'homogénéisation non linéaire

Dans cette section, on se propose de rappeler brièvement les différentes méthodes d'homogénéisation non linéaire. La méthode d'homogénéisation non linéaire s'appuie souvent sur la linéarisation des lois constitutives locales en utilisant le concept de milieu linéaire de comparaison (M.L.C). Ce concept permet d'appliquer la procédure de l'homogénéisation linéaire à un matériau hétérogène de comportement non linéaire.

Les solutions du milieu hétérogène initial reposent donc sur celles du milieu linéaire de comparaison (M.L.C). Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été proposées pour homogénéiser le comportement non linéaire d'un matériau hétérogène. La limitation de chaque méthode a été montrée par plusieurs auteurs dans des synthèses sur la correction des différentes méthodes d'homogénéisation non linéaire [J. L. Chaboche et P. Kanoute, 2003; J. L. Chaboche et al, 2007; D.P. Do., 1998; J. C. Michel et P. Suquet, 2003,2004; A. Rezik et al, 2007; A. Rezik et al, 2005; P. Suquet, 1995,1997). La correction de la méthode d'homogénéisation est souvent effectuée par comparaison de sa prédiction avec celle de calculs aux éléments finis (E.F). Ces auteurs ont démontré généralement que la méthode sécante classique de Hutchinson (1976) donne des prédictions plus raides notamment à l'échelle microscopique et dans le cas des matériaux poreux ou fortement non linéaires. Les prédictions des deux approches équivalentes, la méthode sécante modifiée de Suquet (1991) et l'approche variationnelle de Ponte-Castaneda (1991), ne sont pas très concordantes avec les solutions de référence (E.F) pour les déformations microscopiques.

Pourtant, en raison de sa simplicité, la méthode sécante modifiée est souvent utilisée. La méthode d'analyse des champs de transformation de Dvorak et Benveniste (1992) et l'approche incrémentale classique de Hill (1965) rendent les réponses macroscopiques trop raides par rapport à la référence (E.F) (J. L. Chaboche, P. Kanoute, 2005). L'approche incrémentale modifiée qui est mentionnée dans les travaux (I. Doghri et A. Ouair, 2003; C. Gonzalez and J. Llorca, 2000) en utilisant le module tangent isotropie amène à des prédictions plus souples en accord avec les calculs E.F. Dans la littérature, l'approche incrémentale de Hill et sa modification sont largement d'enveloppées et utilisées pour la prédiction du comportement non linéaire des matériaux hétérogènes (J. L. Chaboche, P. Kanoute, 2005; I. Doghri et A. Ouair, 2003; A. Guery, 2007; T. Jiang et J.F. Shao,2009; O. Pierard et I. Doghri, 2006). Dans le paragraphe suivant, on expose brièvement les principes de base de cet approche ainsi que l'estimation de l'approche en utilisant les différentes procédures d'isotropisation.

II.3.1 Approche incrémentale

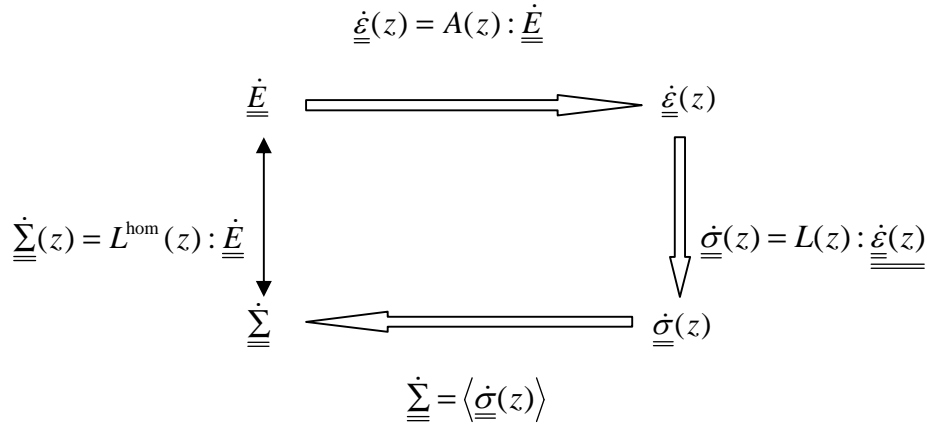


Fig. II.5: Processus de l'approche d'homogénéisation incrémentale

Le processus de l'approche incrémentale de Hill (1965) est brièvement illustre par la figure (II.5).

Les taux de déformation locale aux taux de contrainte locale et aux taux de déformation macroscopique sont donnés par les relations suivantes :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}(z) = L(z) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(z) \tag{II.44}$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(z) = A(z) : \underline{\underline{\dot{E}}} \tag{II.45}$$

ou $L(z)$ et $A(z)$ désignent respectivement l'opérateur tangent non linéaire de la phase constituante et l'opérateur tangent de localisation de déformation dans le matériau linéaire de comparaison (M.L.C). Le taux de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}(z) = L^{hom}(z) : \underline{\underline{\dot{E}}} \tag{II.46}$$

$$L^{hom} = \langle L(z) : A(z) \rangle \tag{II.47}$$

L'opérateur ou le module tangent effectif L_{hom} est déterminé par les opérateurs tangents locaux $L(z)$ et de localisation $A(z)$ en chaque point z de la phase constituante (V_r). $L(z)$ est un opérateur tangent non linéaire. La méthode incrémentale de Hill introduit un opérateur tangent uniforme et la relation liant le taux de déformation au taux de contrainte peut être approchée par :

$$\forall z \in V_r, \dot{\sigma} = L_r : \dot{\epsilon}(z) \tag{II.48}$$

L_r : étant pris pour un état de référence r qui est choisi simplement par la déformation moyenne dans la phase (r), la relation incrémentale de localisation se simplifie sous la forme :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_r = A_r : \dot{\underline{E}} \quad (\text{II.49})$$

Où A_r est l'opérateur tangent de localisation des déformations moyennes par phase r . L'opérateur tangent de localisation A_r est déterminé sur la base du problème d'Eshelby comme pour les milieux élastiques linéaires, il dépend du tenseur d'Eshelby ou du tenseur de Hill et des propriétés tangentes L_r des phases constituantes. Dans le cas d'un milieu biphasique inclusion - matrice, en adoptant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka, l'opérateur tangent de localisation A_r s'écrit :

$$A_M^{MT} = [Vf_M I + Vf_I [I + P_I^0 : (L_I - L_M)]]^{-1} \quad (\text{II.50})$$

$$A_I^{MT} = [I + P_I^0 : (L_I - L_M)]^{-1} : [Vf_M I + Vf_I [I + P_I^0 : (L_I - L_M)]]^{-1} \quad (\text{II.51})$$

Le tenseur de Hill P_I^0 est relié au tenseur d'Eshelby et au tenseur tangent de la phase matrice par :

$$P_I^0 = S^E(L_M) : L_M^{-1} \quad (\text{II.52})$$

On peut noter que L_M et ainsi le milieu de référence sont par nature anisotropes. Enfin on peut déduire l'opérateur tangent homogénéisé :

$$L^{hom} = \sum_r Vf_r L_r : A_r^{MT}, r = 1, M \quad (\text{II.53})$$

L'approche incrémentale repose sur l'homogénéisation pas à pas du comportement macroscopique du M.L.C. Chaque pas correspond à une intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Supposons qu'à t_n , nous avons les données suivantes : la contrainte et la déformation macroscopiques totales (Σ_n, E_n) , la contrainte imposée Σ , la déformation moyenne de la phase matrice $\bar{\varepsilon}_{m,n}$. Le problème est de déterminer la déformation macroscopique E_{n+1} d'après le schéma de résolution suivant :

- Initialisation :

$$\bar{\sigma}_i = \Delta \Sigma \quad (\text{II.54})$$

– Itération (j) (indice j omis pour la simplicité) :

1. Evaluer la déformation moyenne $\bar{\varepsilon}_m$ de la matrice :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\Delta \Sigma - Vf_i \Delta \bar{\sigma}_i}{1 - Vf_i} \quad (\text{II.55})$$

$$\bar{\varepsilon}_m = (C_m^{tan})^{-1} : \bar{\sigma}_m \quad (\text{II.56})$$

2. Déterminer $\bar{\epsilon}_{m,n+1}$, γ_{n+1}^p et le module tangent C_m^{tan} de la matrice à partir des $\bar{\epsilon}_{m,n}$, γ_n^p et $\bar{\epsilon}_m$.

3. Calculer le module tangent isotropique $C_m^{tan,iso}$ en appliquant la méthode de Bornert (M. Bornert et al, 2001) :

$$C_m^{tan,iso} = (J : C_m^{tan})J + \frac{1}{5} (K : C_m^{tan})K \quad (II.57)$$

4. Calculer le tenseur d'Eshelby $S^E(C_m^{tan,iso})$.

5. Déterminer le tenseur de Hill :

$$P_i^{cas1} = S^E(C_m^{tan,iso}) : (C_m^{tan})^{-1} \quad (II.58)$$

les tenseurs de localisation des inclusions rigides A_i^{MT} et le module macroscopique homogénéisé C_{hom}^{tan} .

$$A_i^{MT} = [I + P_i^{cas1} : (C_I - C_m^{tan})]^{-1} : [Vf_m I + Vf_i [I + P_i^{cas1} : (C_I - C_m^{tan})]]^{-1} \quad (II.59)$$

$$C_{hom}^{tan} = C_{hom}^{tan} + Vf_m (C_I - C_m^{tan}) : A_i^{MT} \quad (II.60)$$

$$B_i^{MT} = c_i : [A_i^{MT} : (C_{hom}^{tan})^{-1}] \quad (II.61)$$

6. Vérifier la compatibilité de la déformation moyenne des inclusions sphériques en calculant les résidus :

$$R_i = B_i^{MT} = \bar{\Sigma} - \bar{\sigma}_i \quad (II.62)$$

7. Si $R_i \leq Tol$, sortir de la boucle.

8. Si non, nouvelle itération (passer 'a l''etape 1) avec les nouveaux $\bar{\epsilon}_i$:

$$E_{n+1} = E_n + \bar{E} \quad (II.63)$$

$$\bar{E} = Vf_i (C_i)^{-1} : \bar{\sigma}_i + (1 - Vf_i) \bar{\epsilon}_m \quad (II.64)$$

II.4. Conclusion

Ce chapitre présente la méthodologie de l'approche de changement d'échelle qui permet de déterminer les lois de comportement d'un milieu hétérogène.

La méthode d'homogénéisation est utilisée pour déterminer les lois de comportement d'un milieu hétérogène à l'échelle macroscopique à partir d'une description de ses constituants à l'échelle microscopique.

Pour homogénéiser des matériaux hétérogènes, la méthodologie d'homogénéisation en trois étapes a été proposée par A. Zaoui (1998):

- L'étape de représentation qui permet de d'écrire le matériau 'à l'échelle microscopique : définition des phases et description de leur répartition spatiale et de leur comportement mécanique.
- L'étape de localisation permet de modéliser le comportement mécanique et de déterminer les relations entre les quantités définies à l'échelle microscopique et les quantités définies macroscopiques équivalentes.
- L'étape d'homogénéisation permet d'analyser les résultats précédents et de les mettre dans la forme globale attendue.

Les premiers modèles d'homogénéisation sont ceux de Voigt et de Reuss. Dans le modèle de Voigt, il est supposé que chaque phase voit la même déformation que E . Dans le modèle de Reuss, il est supposé que chaque phase voit la même contrainte que E . Ces deux modèles sont donc insensibles à la forme et à l'orientation des renforts.

Malgré qu'ils soient largement utilisés dans la pratique, ils proposent des encadrements très peu utiles.

En 1957 Eshelby propose une base aux méthodes d'homogénéisations utilisées pour l'estimation des propriétés effectives d'un milieu hétérogène. Son schéma correspond à des matériaux présentant un faible taux de renfort ou de porosité et les interactions entre les hétérogénéités sont négligées. Pour améliorer cela, Mori & Tanaka proposent en 1973 un modèle permettant de tenir compte des interactions entre les hétérogénéités.

En 1961, un schéma dit auto-cohérent suppose que l'inclusion était noyée dans le composite effectif représentant un milieu homogène équivalent soumis à une déformation moyenne E . Certains auteurs interprètent le modèle auto-cohérent comme un modèle applicable au cas des polycristaux où il n'y a pas vraiment de phase 'matrice', mais un agencement de grains collés les uns sur les autres.

Dans le cas des problèmes non linéaires, on se heurte à des difficultés très importantes. En effet, pour des morphologies, contrastes et comportements non linéaires des phases, la forme de la loi de comportement ne peut être déterminée dans un cadre général, un processus incrémental s'avère nécessaire dans ce cas.

Les principes de base de l'approche incrémentale de Hill est l'une des approches les plus couramment utilisées dans les méthodes d'homogénéisation non-linéaire des matériaux hétérogènes.

Chapitre III

Modélisation de la microstructure du composite à fibres

III.1. Introduction

Afin de construire des modèles de comportement prédictifs, des efforts ont été entrepris depuis plusieurs années pour prendre en compte le caractère hétérogène de la matière à l'échelle microscopique dans la modélisation de son comportement macroscopique. La modélisation par changement d'échelles consiste à substituer un milieu homogène équivalent (MHE) à un milieu hétérogène. Une telle modélisation permet :

- De simplifier la représentation du milieu hétérogène.
- D'estimer les propriétés mécaniques des matériaux hétérogènes.
- D'améliorer le caractère prédictif des lois de comportement.

Dans ce chapitre, on présente la modélisation de la microstructure d'un composite à fibres longues en décrivant une méthode mise en œuvre pour réaliser des échantillons numériques de la microstructure, c'est-à-dire comment générer aléatoirement des nuages de points représentant les centres des fibres, puis mailler les échantillons. Pour cela, les hypothèses suivantes ont été considérés :

- la microstructure est supposée constituée des fibres cylindriques de même diamètre D .
- Les fibres sont réparties aléatoirement et uniformément dans l'espace sans contact entre elles.
- La fraction volumique des fibres peut varier de 10 à 60 %.
- La matrice recouvre tout l'espace non occupé par les fibres, c'est-à-dire qu'on néglige la présence de porosité et on suppose qu'aucune décohésion de particules avec la matrice n'existe.

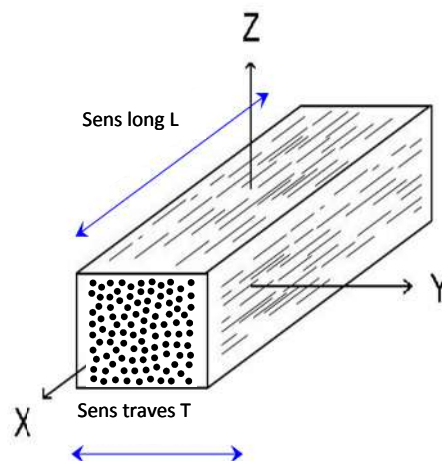


Fig. III.1: géométrie de base d'un composite unidirectionnel.

Les échantillons numériques réalisés sont sous la forme d'un carré avec une distribution aléatoire d'inclusions circulaires. Nous présentons dans un premier lieu, la méthode développée pour générer les échantillons numériques en fonction des différentes fractions volumiques des constituants du composite. Par la suite, nous présentons la méthode développée pour calculer la fraction volumique des constituants dans les images ou micrographies des matériaux composites biphasique et multiphasique et la caractérisation de leur morphologie.

III.2. Principes et représentation du milieu hétérogène

Les observations microscopiques (optiques ou électroniques à balayage) fournissent généralement des vues bidimensionnelles de la distribution des hétérogénéités au sein de la microstructure, qui peuvent parfois être suffisantes pour prédire son influence sur le comportement mécanique résultant. Toutefois, dans le cas général, des informations tridimensionnelles sur la morphologie, sont nécessaires pour obtenir une représentation réaliste de la microstructure. Par exemple, sur la figure (III.2) représentant la micrographie d'une structure biphasique Ferrito-Perlitique, la connaissance du comportement mécanique global est très difficile, sans description précise de la morphologie dans la troisième direction.

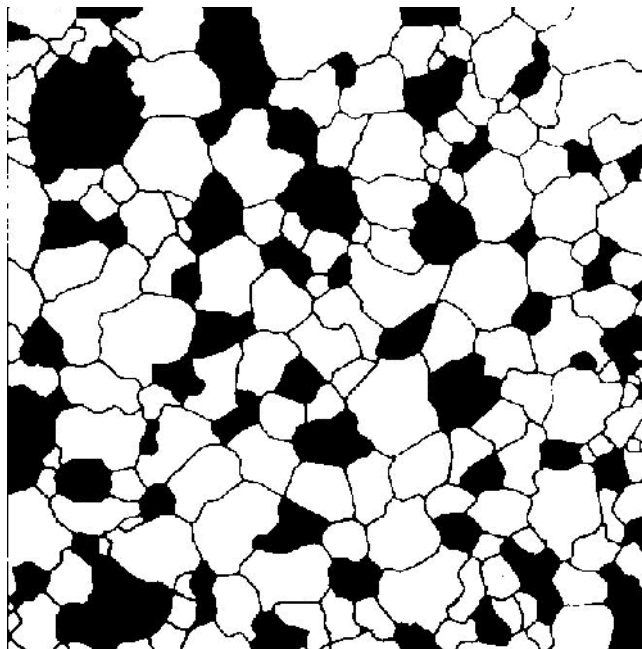


Fig. III.2: Structure biphasique ferrito-perlitique. La phase noire (1) est la perlite, noyée dans la phase blanche (2) qui est la ferrite.

III.2.1. Microstructures 2D ou quasi-2D

Le cas des films minces ou des revêtements contenant un seul grain dans l'épaisseur peut être traité de manière relativement simple puisqu'une caractérisation bidimensionnelle donne une représentation complète de la microstructure.

III.2.2. Microstructures 3D réelles

Dans le cas général, le volume de matériau étudié contient un grand nombre d'hétérogénéités cachées au cœur du volume.

L'observation de la morphologie des phases présentes et leur distribution dans l'espace est une difficulté majeure qui souvent reste sans solution ou exige des efforts considérables. Cependant, des techniques spécifiques d'imagerie tridimensionnelle sont d'ores – et – déjà disponibles. Si les phases ont des densités très différentes, la tomographie aux rayons X peut être utilisée. C'est le cas par exemple des mousses métalliques, matériaux qui ont suscité un intérêt scientifique et industriel considérable dans les dernières décennies, surtout pour des applications dans le domaine de l'absorption d'énergie (X. Badiche et al ,2000; L.J. Gibson et M.F. Ashby , 1998; E. Maire et al, 1999).

III.2.3. Modèles de microstructures aléatoires

En l'absence d'images tridimensionnelles réelles de la microstructure, il est possible de les simuler numériquement en utilisant des modèles de structures aléatoires, par exemple. Il faut dans ce cas vérifier que le modèle statistique retenu rend bien compte des informations obtenues sur des images 2D telle que: la fraction volumique des phases, la distribution des tailles, la covariance et la connexité.

Au-delà des idéalizations périodiques, les modèles de structures aléatoires sont disponibles pour décrire par exemple la microstructure des matériaux cellulaires : réseaux de Voronoï, nids d'abeilles aléatoires, réseaux de poutres quasipériodiques (X. Badiche et al ,2000). La Figure (III.3.a) montre ainsi l'utilisation d'un réseau de poutres élastoplastiques pour simuler le comportement des mousses en traction, mais on pourrait aussi penser à utiliser les structures obtenues à l'aide de systèmes dynamiques comme celle de la Figure (III.3.b).

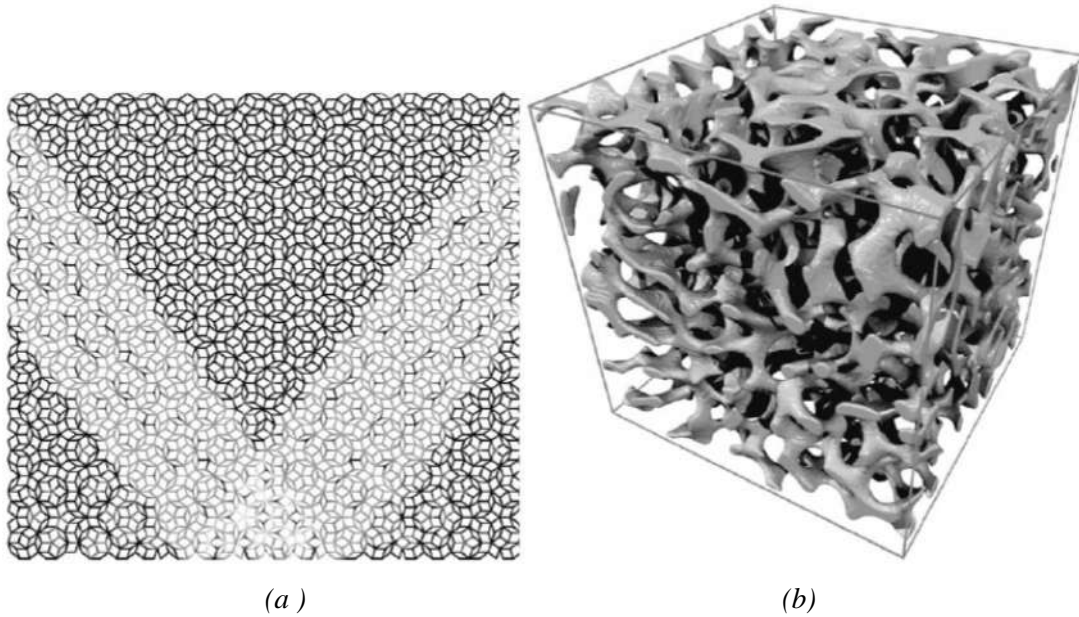


Fig. III.3: Modèles de structures cellulaires : (b) réseau de Penrose de poutres élastoplastiques; (a) microstructure poreuse obtenue à partir d'un système dynamique réaction-diffusion [L. Decker et al, 1999).

III.2.4. Éléments de la microstructure

On identifie sur une image d'une microstructure les trois éléments principaux (figure III.4). La particule, quasiment sphérique, qui est la plus petite entité physique ; l'agrégat qui se définit comme l'association d'au moins deux particules et qui représente le plus petit élément structurant de la microstructure et la matrice polymère enrobant les agrégats de noir de carbone.

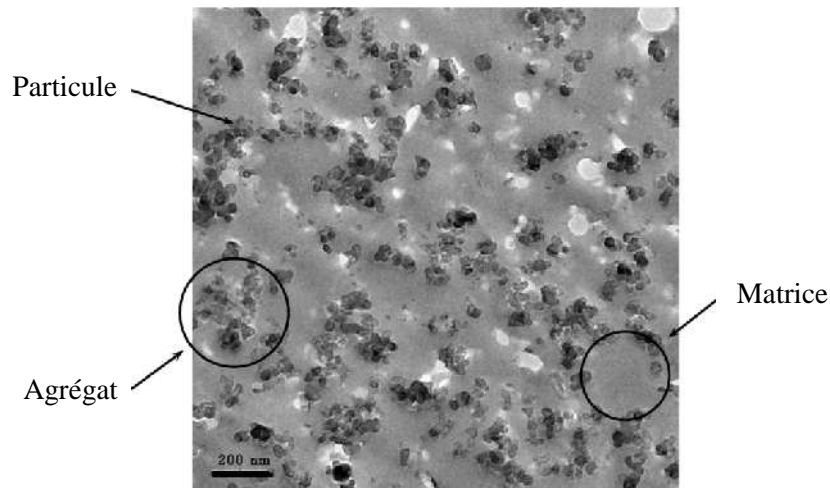


Fig.III.4: Zone d'une microstructure d'un élastomère chargé.

III.3. Génération de microstructures aléatoires à inclusions circulaires sans interpénétration

Nous présentons, dans cette partie, un modèle numérique pour générer des microstructures à inclusions circulaires aléatoires sans interpénétration.

L'objectif est de générer des échantillons numériques de la microstructure d'un matériau composite, constitué d'inclusions circulaires (que l'on désignera également par le terme particules) de même diamètre, dispersées aléatoirement sans interpénétration dans une matrice, et dont la fraction volumique est relativement élevée (jusqu'à 50 %).

Les images des réalisations obtenues serviront de bases de données pour étudier le comportement mécanique de la microstructure par la méthode d'homogénéisation, objet du prochain chapitre.

Le modèle aléatoire proposé est basé sur la méthode de Monte-Carlo, qui consiste à placer les particules de diamètre D les unes après les autres dans une surface fixe (carré ou rectangle), jusqu'à obtenir le nombre de particules souhaitées, on obtient ainsi automatiquement les coordonnées de leurs centres de manière aléatoire. À chaque insertion d'une nouvelle particule, l'algorithme vérifie la condition de non interpénétration avec les particules précédemment placées. En cas d'interpénétration, l'insertion est annulée et une nouvelle particule est placée.

Chaque particule placée correctement est définitivement acceptée et sa position est fixée. En cas de saturation de l'espace bidimensionnel avant d'atteindre le nombre de particules désirées, cet espace est partitionné horizontalement et verticalement selon un pas choisi et un balayage est opéré pour détecter le moindre espace disponible pour une nouvelle insertion.

Cette méthode est simple à mettre en œuvre et semble la plus adéquate pour générer une distribution aléatoire de cercles de même diamètre. Cette méthode permet d'atteindre des fractions volumiques de particules de 54.2%, La fraction surfacique limite du problème en 2D a été estimée numériquement dans la littérature à 54. 2%,

III.3.1. Algorithme de génération de nuages de points aléatoires

L'algorithme, développé (Figure III.5) pour réaliser une distribution de N cercles avec une fraction volumique cible P compte deux étapes essentielles :

1) La première étape consiste à tirer aléatoirement, la position des points dans un domaine carrée ou rectangulaire. Une particule i tirée aléatoirement est acceptée si ses coordonnées x_i vérifient la condition suivante :

- la distance entre la particule i et les particules déjà acceptées ($j = 1, \dots, i - 1$) doit être supérieure ou égale à une distance d'exclusion : $D_{exl} = 2.001 \ dr$.

La condition précédente doit être vérifiée pour chaque couple de particules, ce qui donne (i-1) conditions à vérifier pour la particule i . Si la particule i intersecte une particule déjà placée, sa position est exclue et le tirage est réitéré.

Les tentatives de placement d'une nouvelle particule sont limitées à un nombre maximal Nx .

2) la deuxième étape consiste à contourner le phénomène de saturation, en effet si le nombre maximal Nx est atteint avant d'obtenir le nombre de particules souhaitée, l'espace bidimensionnel est partitionné horizontalement et verticalement selon un pas choisi et un balayage est opéré pour détecter le moindre espace disponible pour une nouvelle insertion jusqu'à l'obtention du nombre de particules final N .

Les paramètres de départ de l'algorithme sont propres à la microstructure que l'on souhaite créer.

Il s'agit de :

- * N : nombre de particules souhaité dans le carrée ou rectangle ;
- * P : fraction volumique de particules visée ;
- * D_{exl} : facteur d'exclusion entre les centres des particules.
- * Nx : nombre maximal de tirages effectué pour placer une nouvelle particule ;

Le choix de ces paramètres influe grandement sur la rapidité d'exécution de l'algorithme. Cet algorithme a été développé sous environnement Fortran. De nombreux tests ont été réalisés. Le programme s'avère robuste et les durées de génération des nuages de points sont relativement courtes, ils sont de l'ordre de 1 seconde.

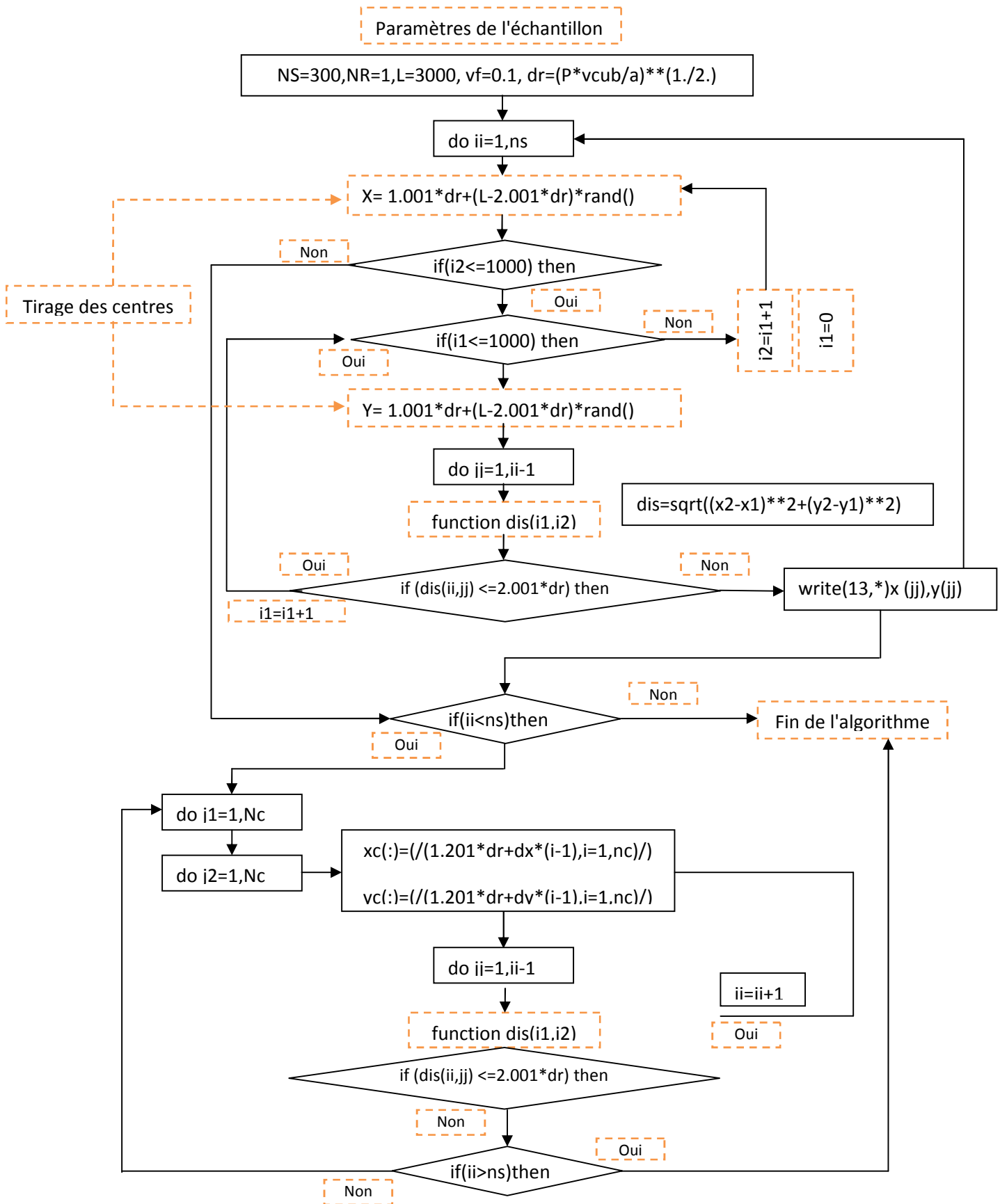


Fig. III.5: Organigramme de la méthode proposée.

Cet algorithme est utilisé pour générer des échantillons numériques représentant la microstructure du matériau composite qui sera prochainement étudié dans le cas où nous étudions l'influence de la dispersion aléatoire des fibres sur le comportement mécanique effectif du composite.

Dans la figure (III.6), quatre réalisations d'échantillons numériques sont superposées pour la fraction volumique $P = 0.1$. Pour bien illustrer la distribution aléatoire des particules, on a utilisé différentes couleurs, chaque couleur correspond à une réalisation.

La même représentation est illustrée dans les figures (III.7), (III.8), (III.9) et (III.10) correspondant respectivement aux fractions volumiques $P = 0.2$, $P = 0.3$, $P = 0.4$ et $P = 0.5$.

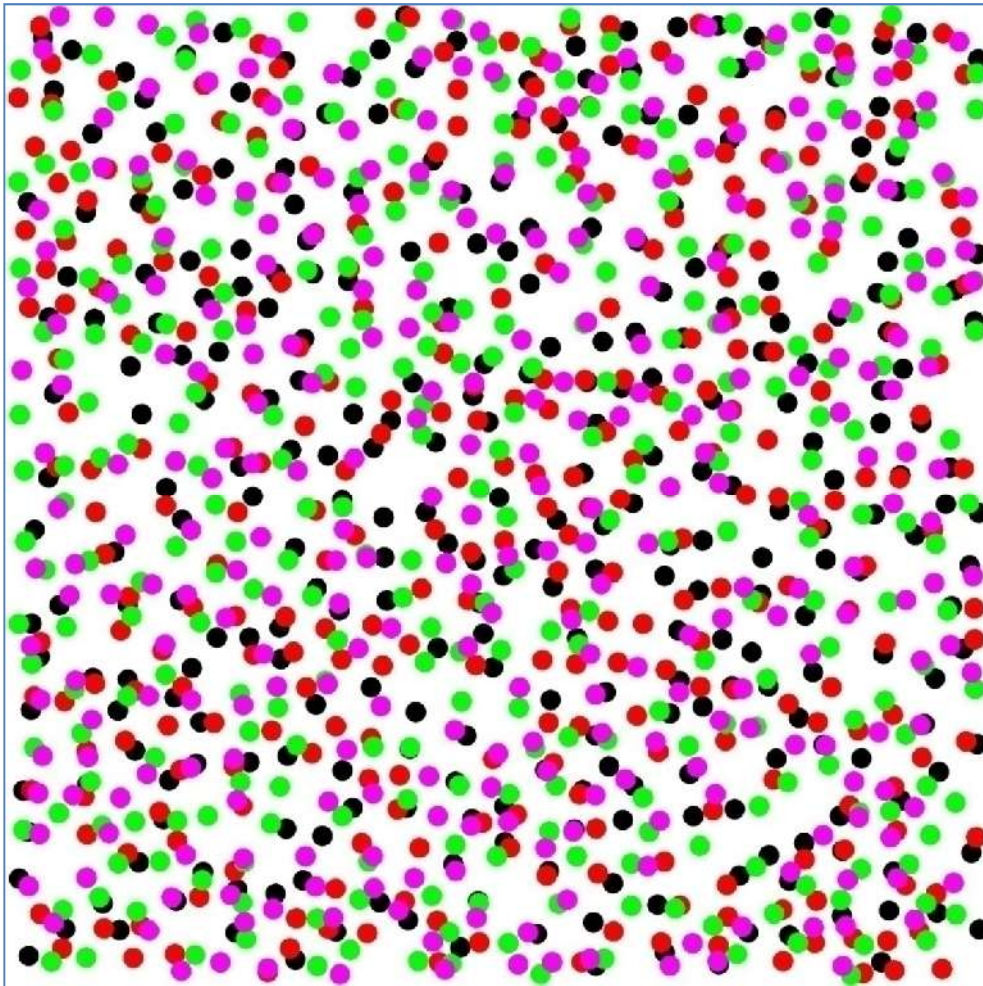


Fig. III.6: Superposition de quatre réalisations d'échantillons numériques de couleurs différentes, pour la fraction volumique: $P = 0.1$.

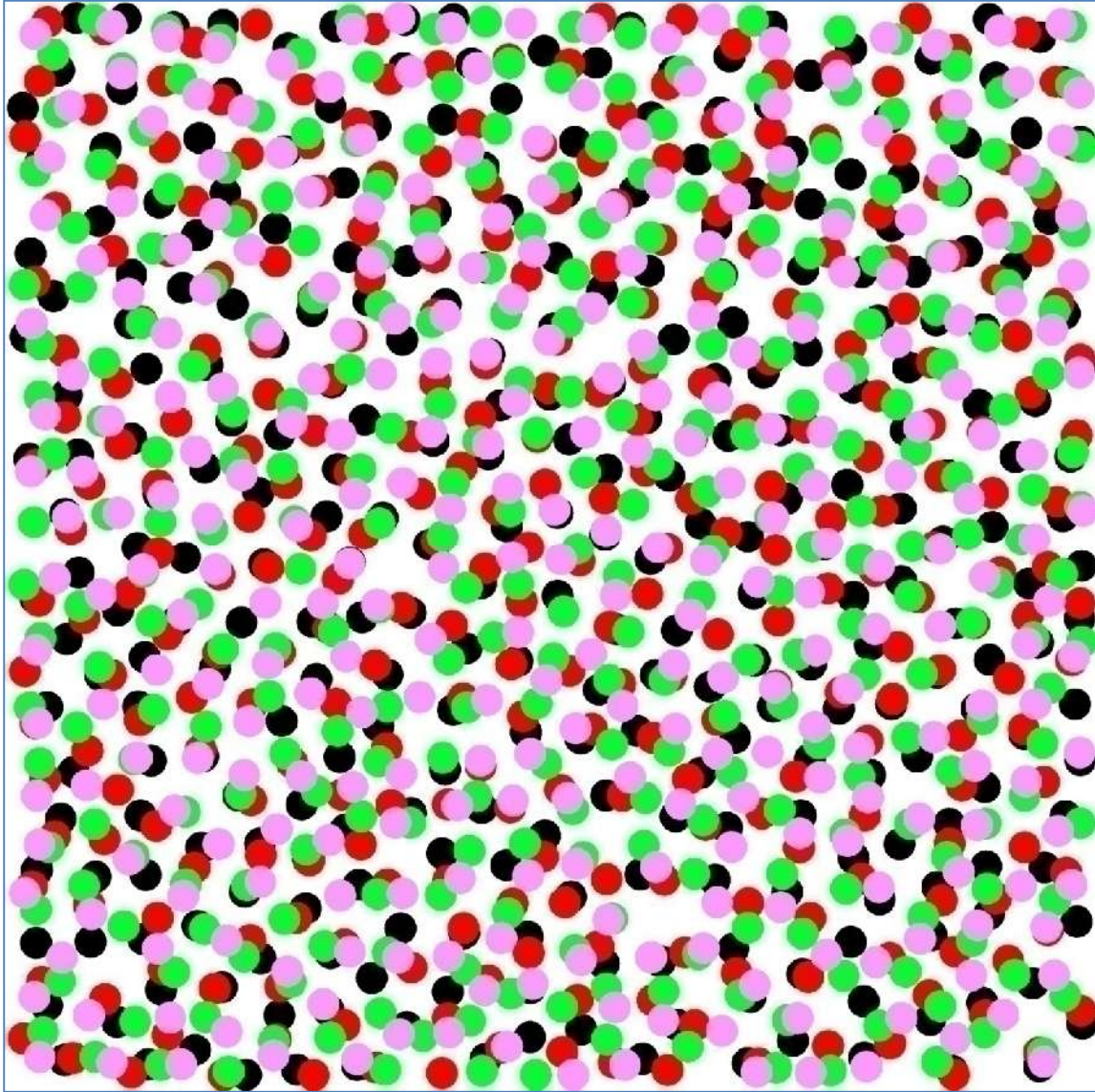


Fig. III.7: Superposition de quatre réalisations d'échantillons numériques de couleurs différentes, pour la fraction volumique: $P = 0.2$.

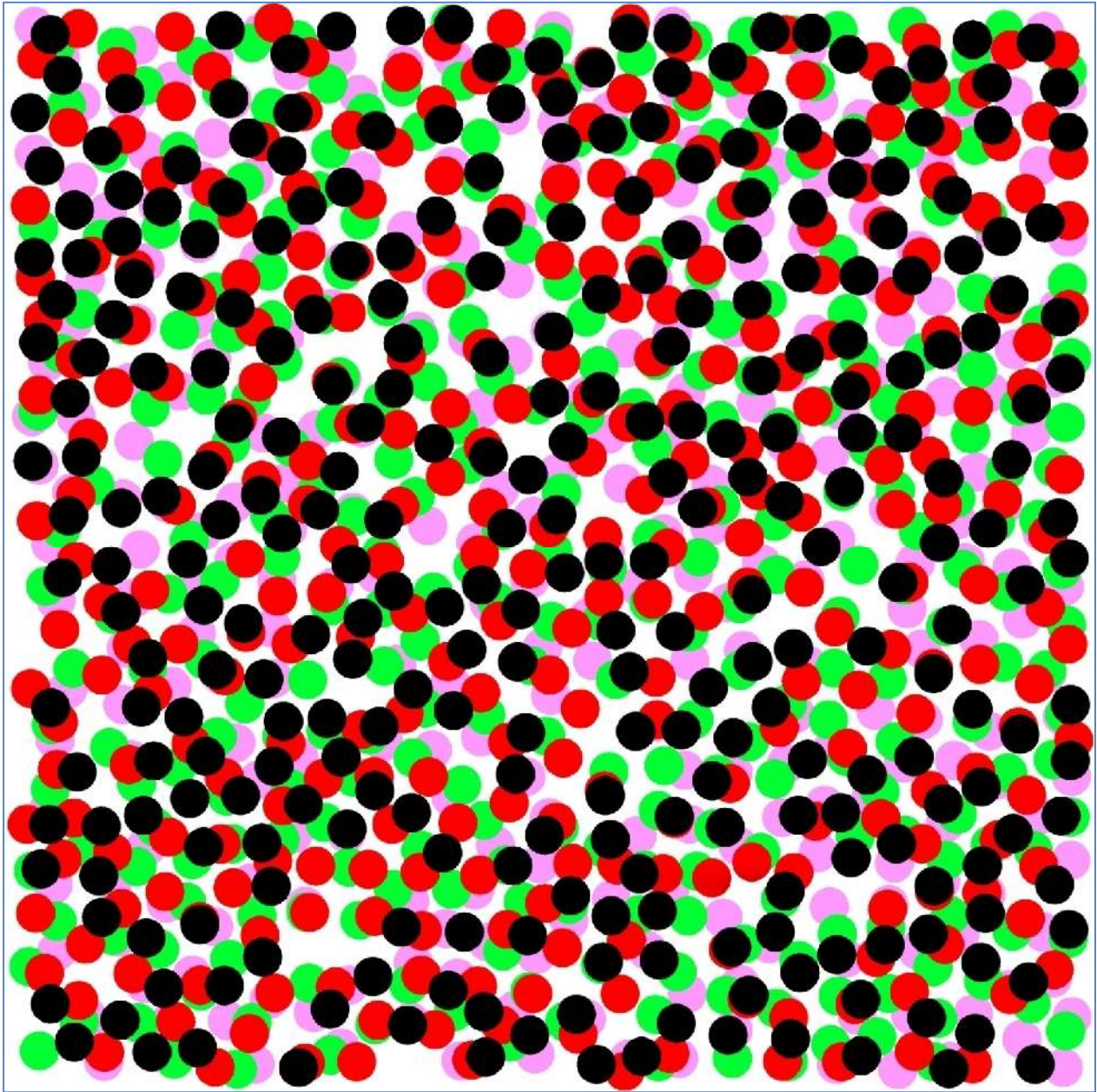


Fig.III.8: Superposition de quatre réalisations d'échantillons numériques de couleurs différentes, pour la fraction volumique: $P = 0.3$.

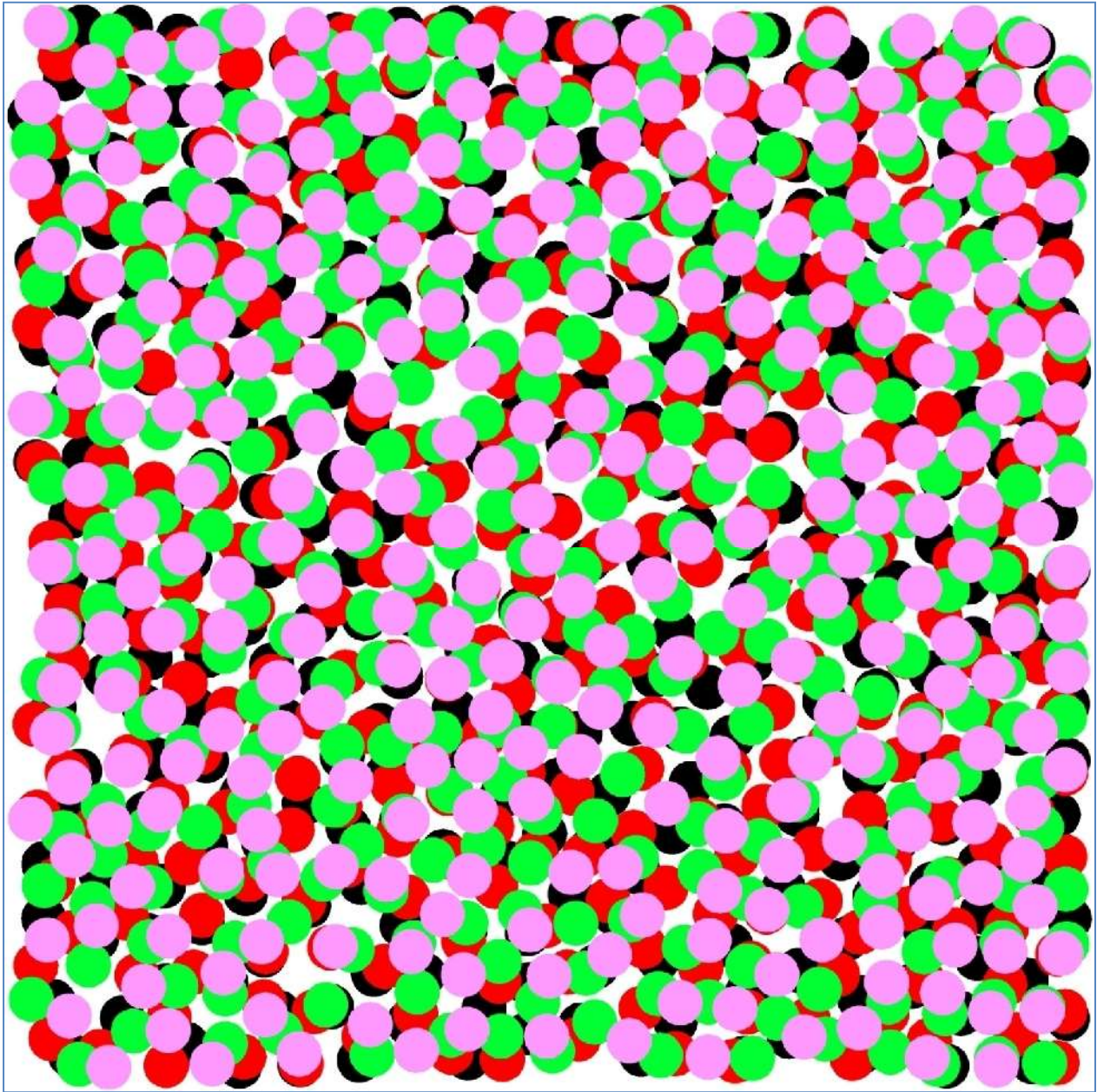


Fig. III.9: Superposition de quatre réalisations d'échantillons numériques de couleurs différentes, pour la fraction volumique: $P = 0.4$.

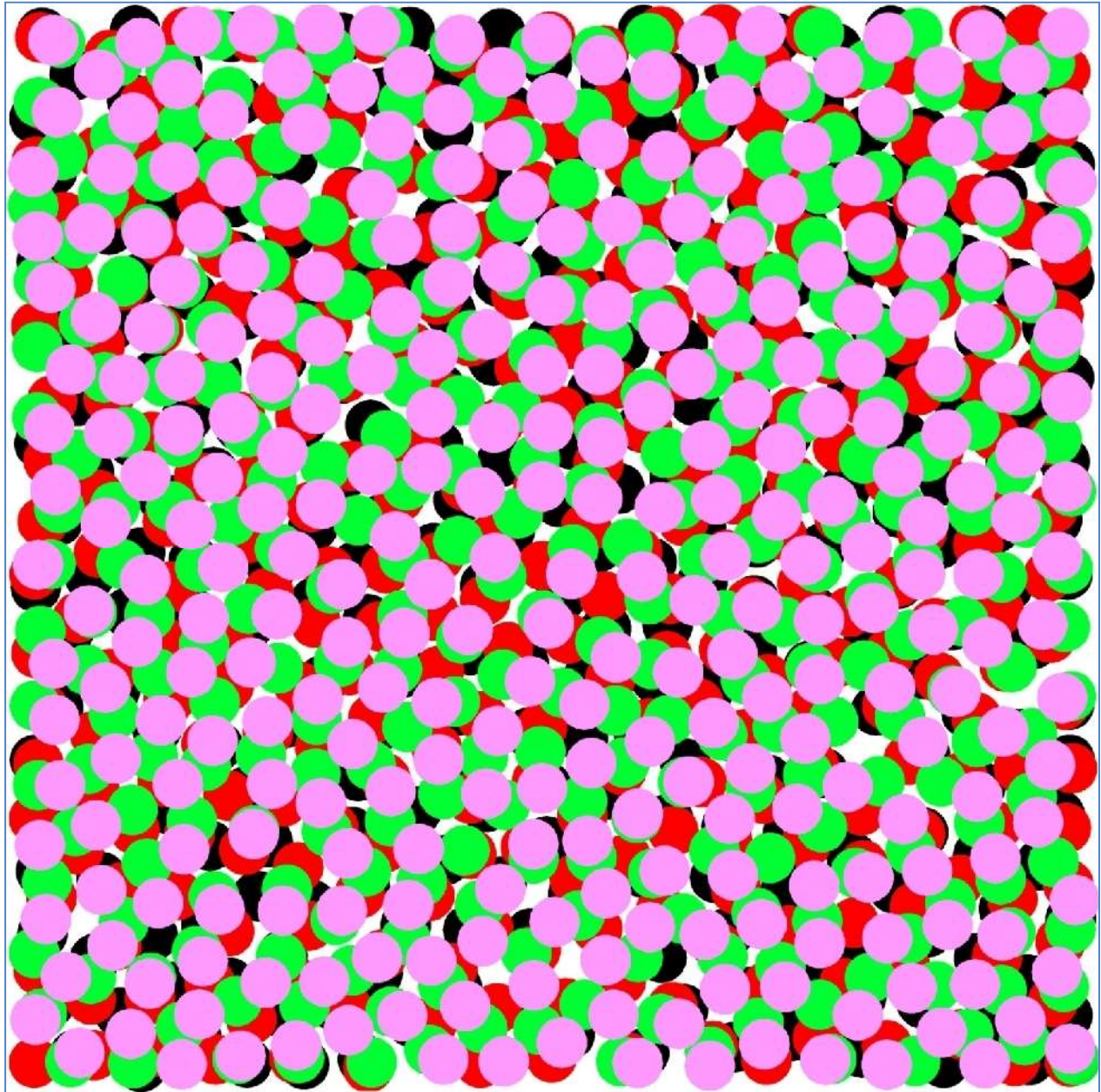


Fig.III.10: Superposition de quatre réalisations d'échantillons numériques de couleurs différentes, pour la fraction volumique: $P = 0.5$.

III.4. Développement d'un outil de caractérisation morphologique pour les matériaux composites

Le but de l'analyse d'image est de fournir une description quantitative de l'image (nombre de cellules d'une certaine taille) ou une reconnaissance de forme (utile si les caractéristiques

morphologiques de l'image sont liées aux propriétés de l'objet). Elle trouve des applications dans de nombreux domaines : sciences des matériaux, sciences de la vie, géologie, robotique...

Une image «réelle » va être transformée en une image numérique par différents outils de transformation (caméra, scanner, satellite...).

L'image numérique est constituée de pixels contenant chacun différentes informations (intensité lumineuse, couleur...).

Il faudra donc simplifier l'image pour essayer de ne garder que les informations utiles à l'analyse par l'utilisation de filtres permettant d'éliminer les effets indésirables et purifier l'image.

En fonction des formes recherchées (grains de telles tailles, zones de couleurs particulières), on va séparer les structures intéressantes des autres par l'opération de seuillage. Elle consiste à donner la valeur 1 aux structures qui vérifient les critères sélectionnés et 0 aux autres. On obtient donc une matrice binaire.

III.4.1. Passage de l'analogique au numérique

Une image est digitalisée lorsqu'elle est échantillonnée et quantifiée selon une forme qui peut être lue par un ordinateur. Elle est simplement transformée en une longue suite de signaux «on/off ».

Le plus petit élément d'une photo conventionnelle est un grain. L'élément digital équivalent est le pixel (« pix » vient de Picture et « el » de l'élément). Digitaliser une image c'est comme superposer une grille très fine sur une scène en analysant la couleur et la luminosité à travers les mailles puis de noter les valeurs dans une grande liste avec un certain ordre.

Différents traitements peuvent être réalisés, que ce soit sur l'image numérique ou l'image binaire. Effectués après le seuillage, les traitements binaires sont destinés à définir le plus précisément possible les objets à analyser.

III.4.2. Segmentation des images

La segmentation transforme une image décrite en nuances de gris (16 bits) en image binaire (8 bits) en vue de l'analyser. L'algorithme de segmentation doit prendre en considération la qualité des images et chercher à minimiser la perte d'informations sur la microstructure engendrée par la simplification de l'image due à la transformation.

Les mesures de segmentation ont permis d'isoler dans l'image les objets à quantifier ou à reconnaître. Les mesures possibles sont très nombreuses et dépendent du problème posé.

Les objectifs doivent être bien définis, au préalable, pour limiter le plus possible l'acquisition et la rendre efficace.

III.4.3. Identification des phases et calcul de la fraction surfacique dans les matériaux composites multiphasiques

L'image issue de l'observation microscopique d'un échantillon peut être analysée de façon à déterminer ses principales caractéristiques et propriétés.

Chaque type d'élément constitutif présente une couleur différente sur l'image numérique figure (III.11.a). L'opération consiste à isoler une catégorie de constituants dans l'échantillon par sa couleur. Le traitement de l'image pourra ensuite permettre de déterminer différents paramètres tels que :

- * Proportion en nombre et en volume (correspondant à la compacité), i.e.
- * Importance d'un constituant dans un échantillon,
- * Taille des grains de ces constituants,
- * répartition spatiale (répartition uniforme dans l'espace, présence d'agrégats,...).

Par l'utilisation du logiciel MATLAB, l'image multicolore est convertie automatiquement en image à niveaux de gris figure (III.11.b).

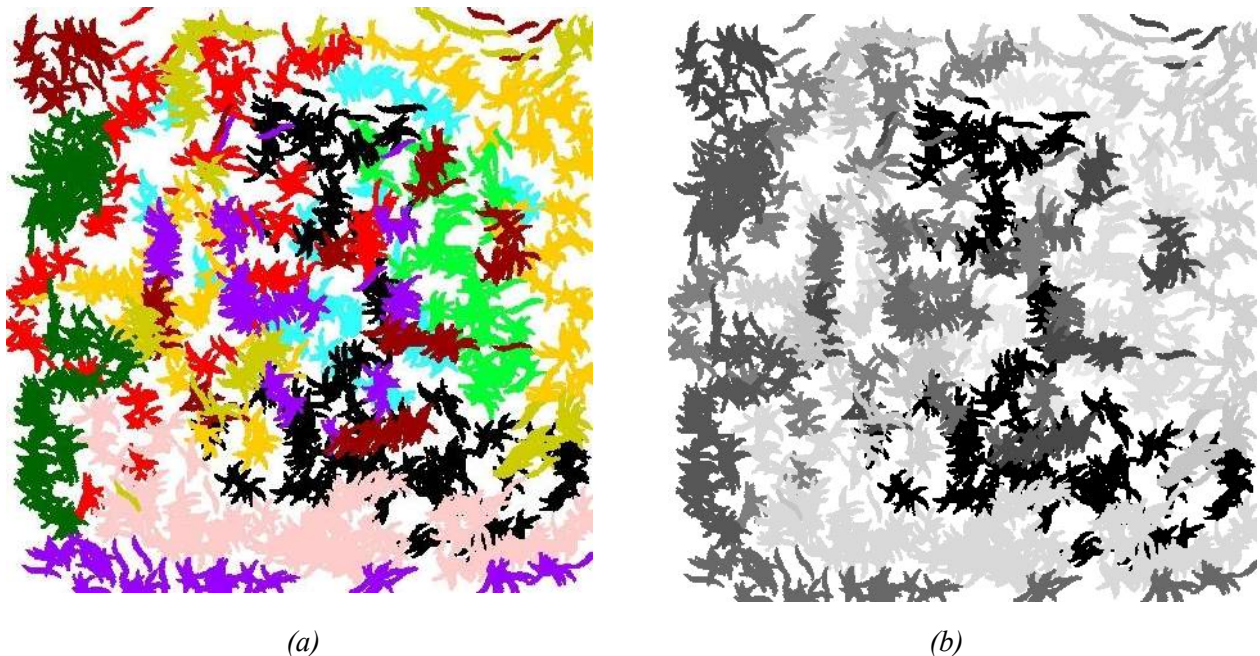


Fig. III.11: Micrographie d'un échantillon numérique (500×500pixels): a): couleur ; b) : niveau de gris.

- 3) Calculer la fraction surfacique pour chaque phase i dans le vecteur T :
 - Identification de tous les pixels qui ont un niveau de gris correspondant au code couleur $T(i)$.
 - Stocker la fraction P des phases dans une matrice B

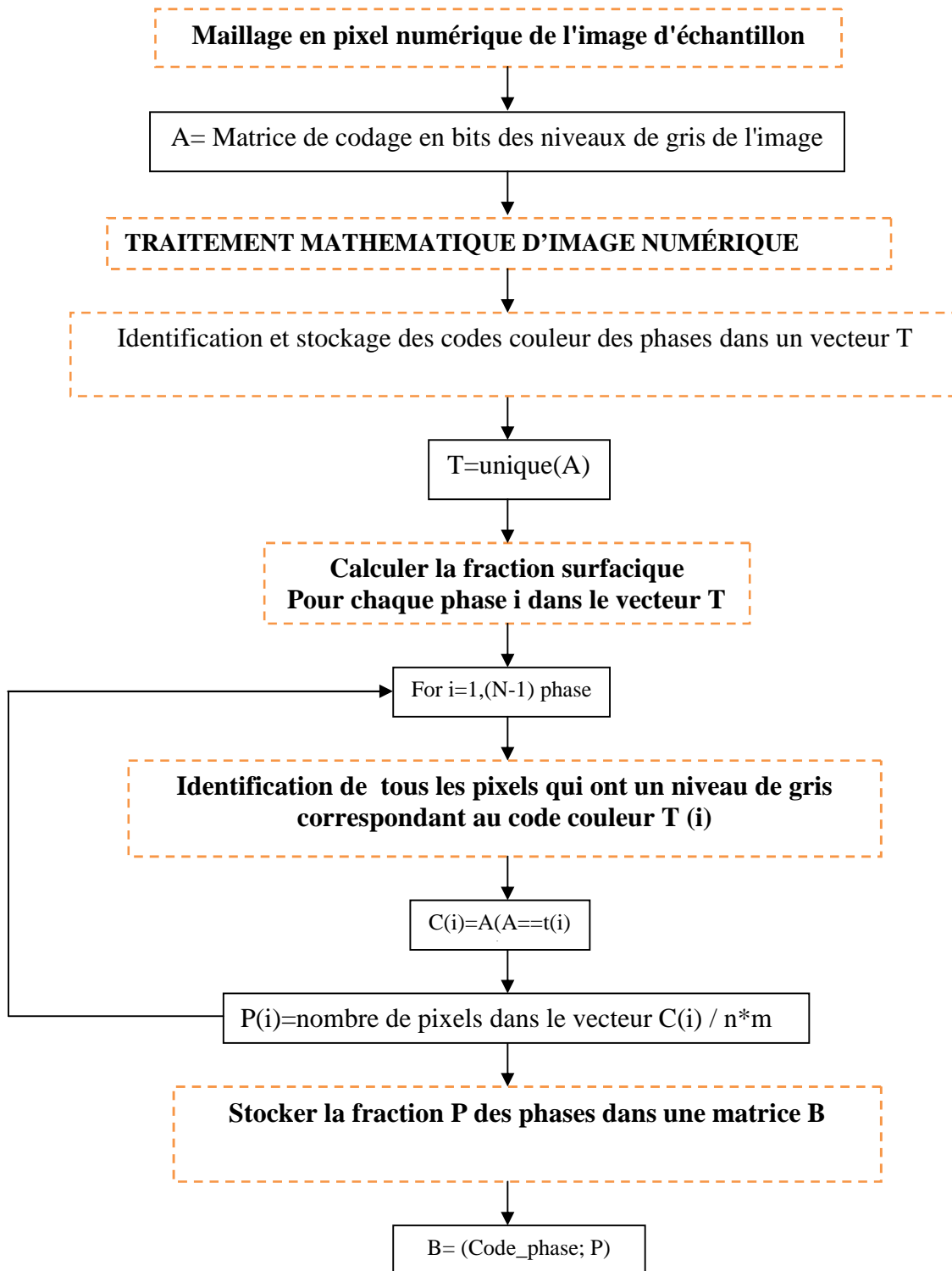


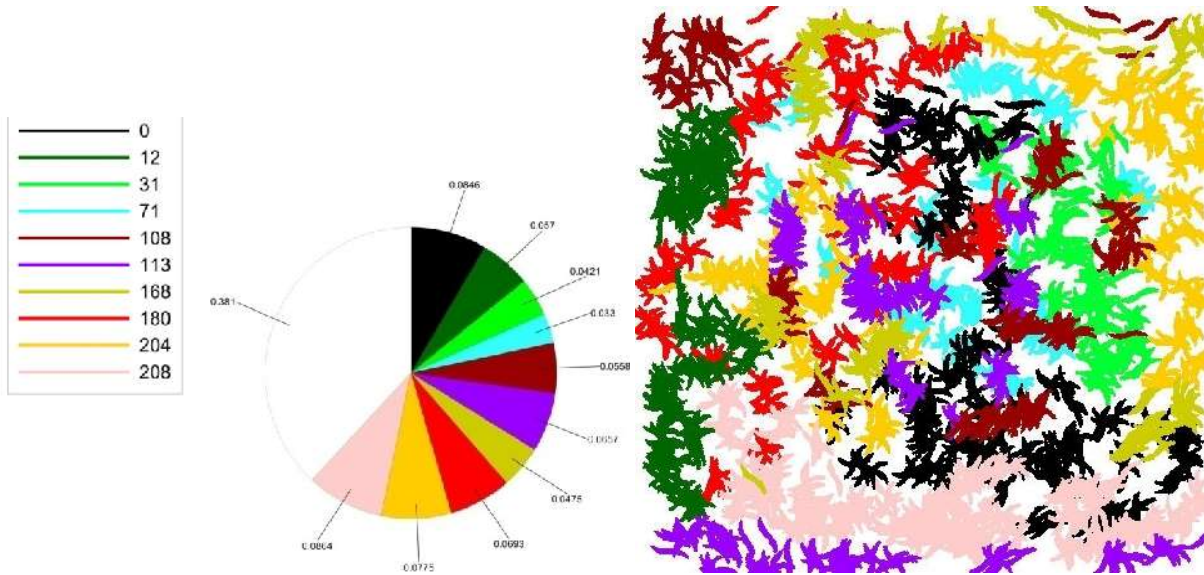
Figure III-13. Principe de l'algorithme d'identification des phases et calcul de la fraction volumique.

L’algorithme a été testé sur de nombreux échantillons numériques représentant les différentes microstructures des matériaux composites. L’algorithme s’avère robuste et les durées de convergence relativement courtes elles sont de l’ordre de 1 seconde.

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats de calcul des fractions volumiques à partir d’images ou de micrographies pour les cas suivants :

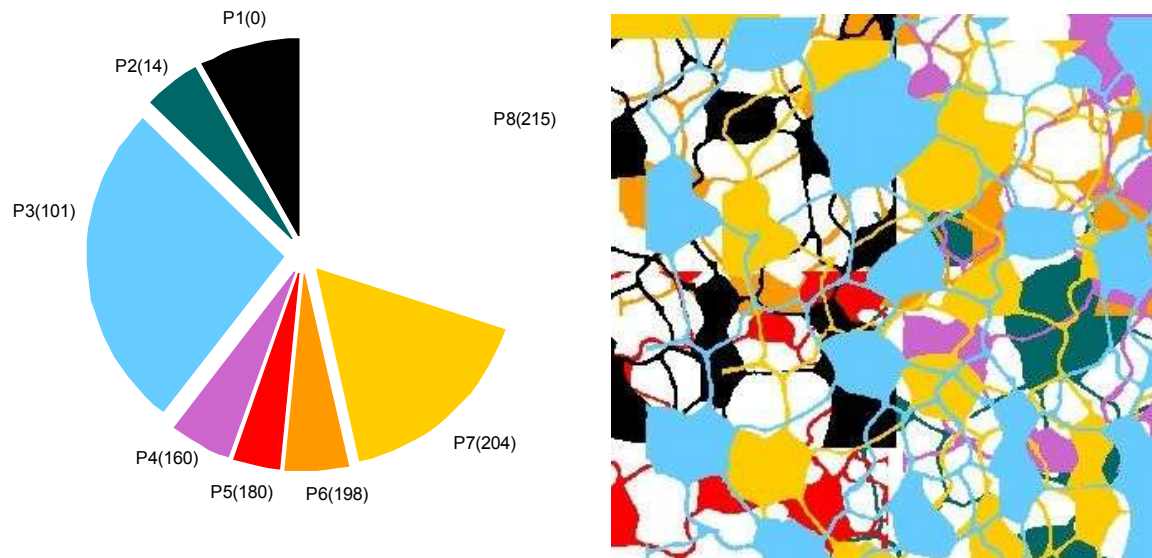
- une microstructure avec phases pénétrées.
- une microstructure avec phases liées.
- une microstructure biphasique aléatoire.
- une microstructure multiphasique aléatoire.

1) Cas d'une microstructure avec phases pénétrées



Codes couleur des phases	0	12	31	71	108	113	168	180	204	208	215
Fraction	0,0846	0,057	0,0421	0,033	0,0558	0,0657	0,0475	0,0693	0,0775	0,0864	0,381

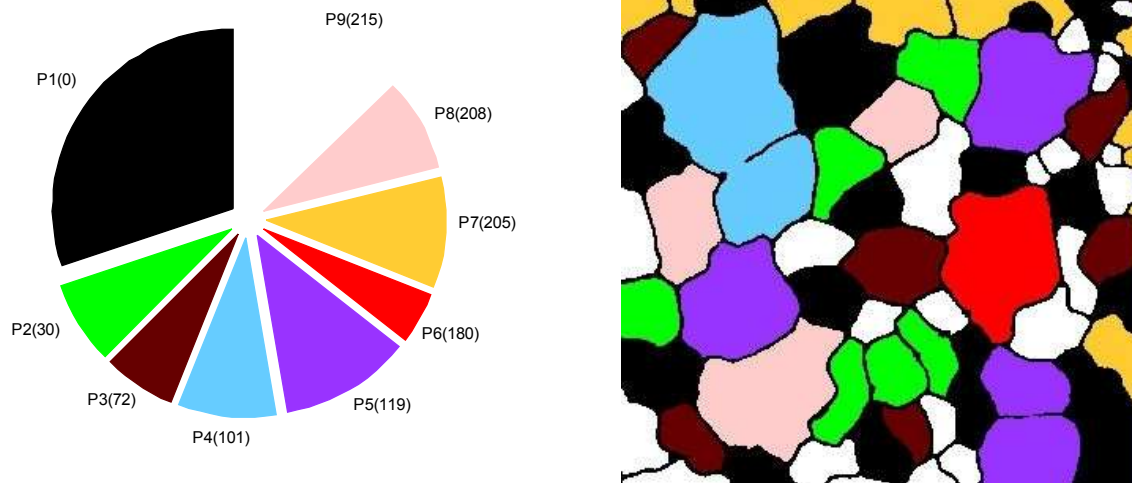
Fig. III.14: Cas d'une microstructure avec phases pénétrées multiples.



Codes couleur des phases	0	14	101	160	180	198	204	215
Fraction	0.080996	0.046294	0.26822	0.050547	0.038116	0.051013	0.16489	0.29992

Fig. III.15: Cas d'une microstructure avec phases pénétrées

2) Cas d'une microstructure avec phases liées



Codes couleur des phases	0	30	72	101	119	180	205	208	215
Fraction	0.30114	0.07426	0.064229	0.087458	0.11637	0.046294	0.09884	0.083606	0.1278

Fig. III.16: Cas d'une microstructure avec phases liées

3) Cas d'une microstructure biphasique aléatoire

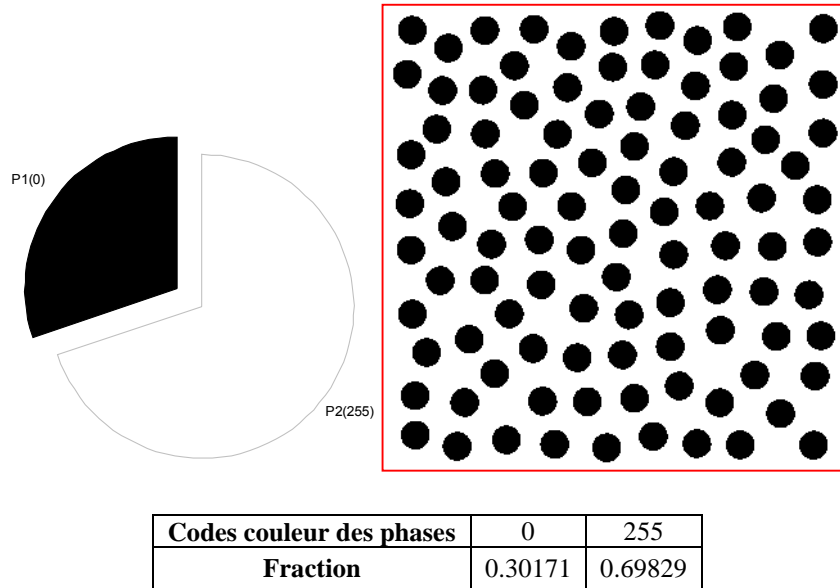
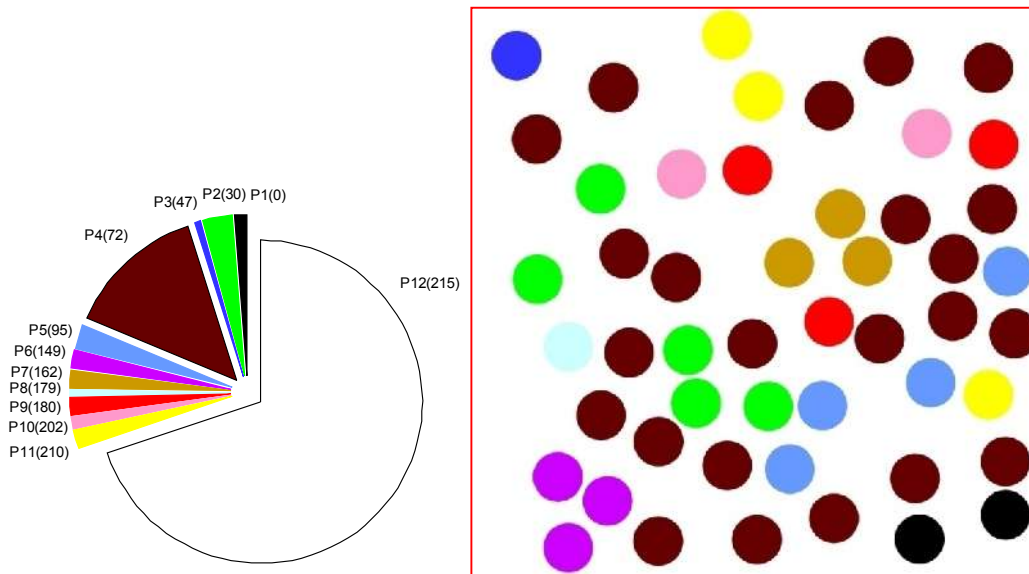


Fig. III.17: Cas d'une microstructure biphasé aléatoire.

4) Cas d'une microstructure multiphasique aléatoire



Codes couleur des phases	0	30	47	72	95	149	162	179	180	202	210	215
Fraction	0,012	0,030	0,0060	0,13	0,024	0,0181	0,0180	0,0060	0,0181	0,012	0,0181	0,698

Fig. III.18: Cas d'une microstructure multiphasique aléatoire.

III.4.4. Caractérisation de la morphologie

III.4.4.a. Développement d'un algorithme de localisation des fibres

Pour caractériser la morphologie, telle que la dispersion des fibres ou des particules dans la matrice, et leurs localisations (coordonnée, rayon, nombre), les descripteurs locaux permettent d'analyser le voisinage de chaque inclusion. Ce voisinage peut être identifié à l'aide de polyèdres de Voronoï associés aux centres des fibres. On rappelle que ces polyèdres ne se recouvrent pas et sont délimités par les plans médiateurs des segments de la triangulation de Delaunay. Ce découpage de l'espace est nommé partition de Voronoï. La figure III.19 présente la partition de Voronoï d'un ensemble de points dans l'espace à deux dimensions.

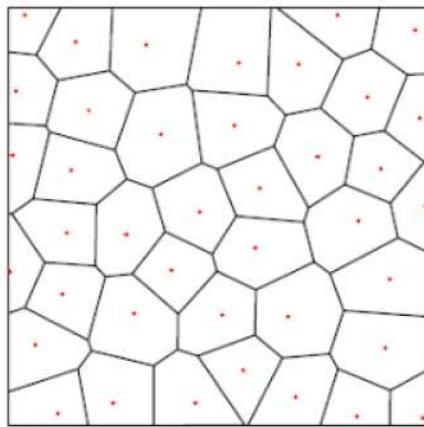


Fig. III.19: Partition de Voronoï d'un ensemble de points en 2D.

La forme et le volume des cellules peuvent être utilisés pour caractériser le voisinage des inclusions. À partir de cette partition, plusieurs descripteurs peuvent être calculés, renseignant sur les distances entre inclusions, la fraction volumique locale et l'isotropie des échantillons. On s'intéresse notamment à la distribution des grandeurs suivantes :

- * Le nombre de cercles, qui correspond au nombre des particules dans un composite.
- * La distance, qui correspond à la taille d'une inclusion, on s'intéresse également à la distance dans l'échantillon qui correspond aux coordonnées d'une particule.

L'objectif de cette partie est de développer un algorithme permet d'acquérir des données objectives et précises dans la morphologie du composite tels que :

- 1) Le nombre des particules dans le composite.
- 2) La taille des particules et les coordonnées des centres des particules.

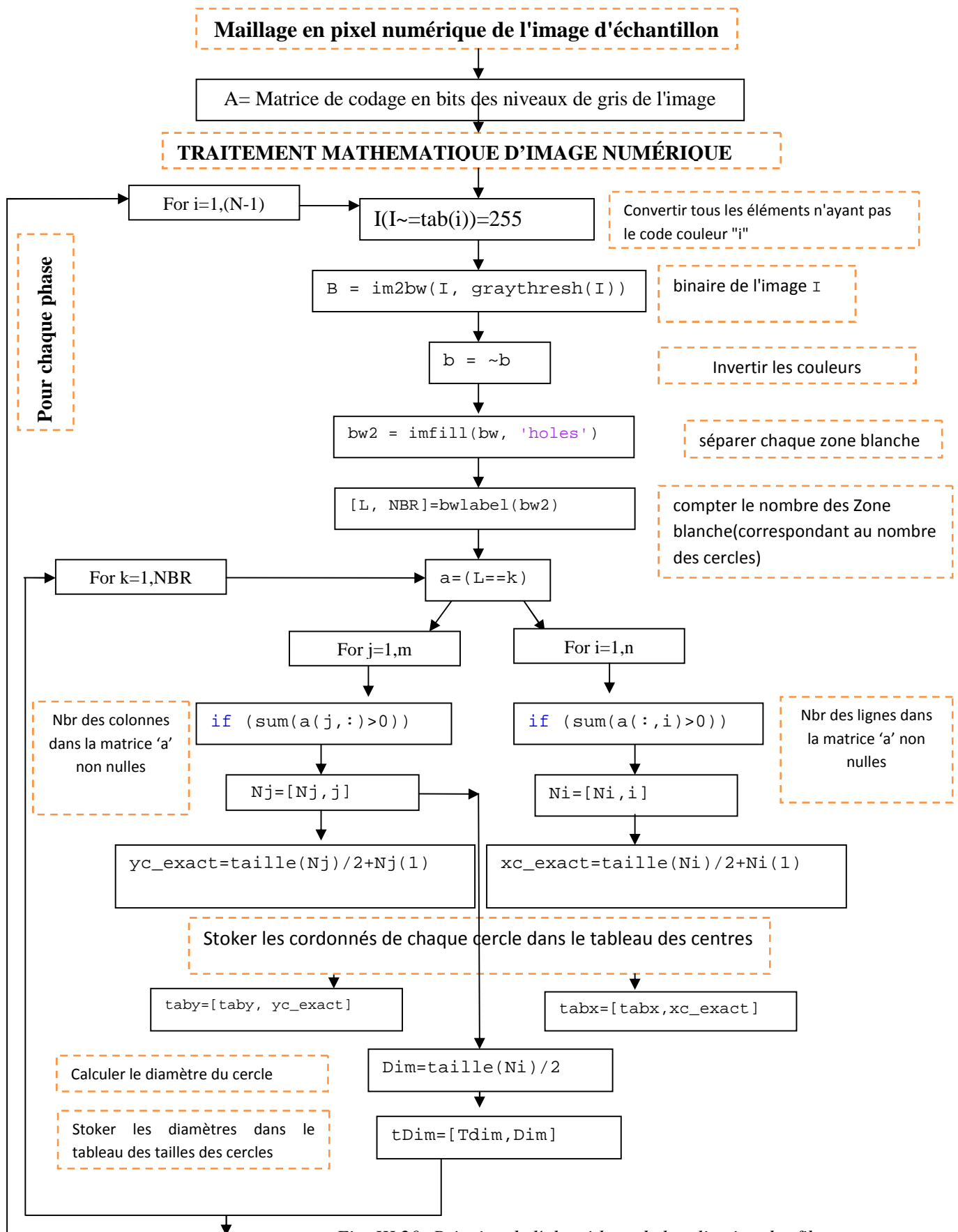
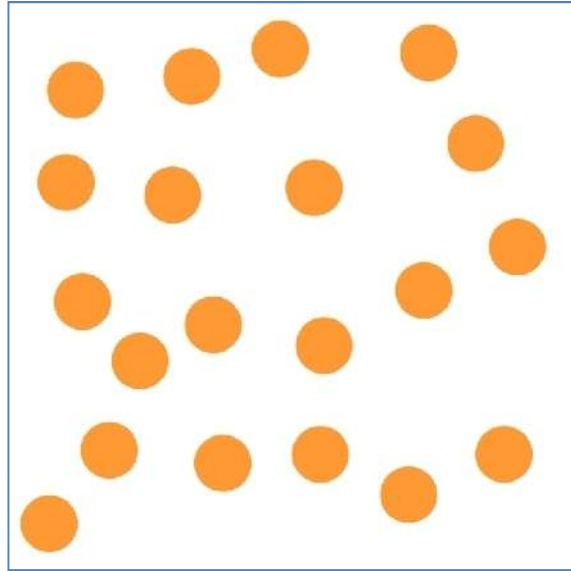


Fig. III.20: Principe de l'algorithme de localisation des fibres.

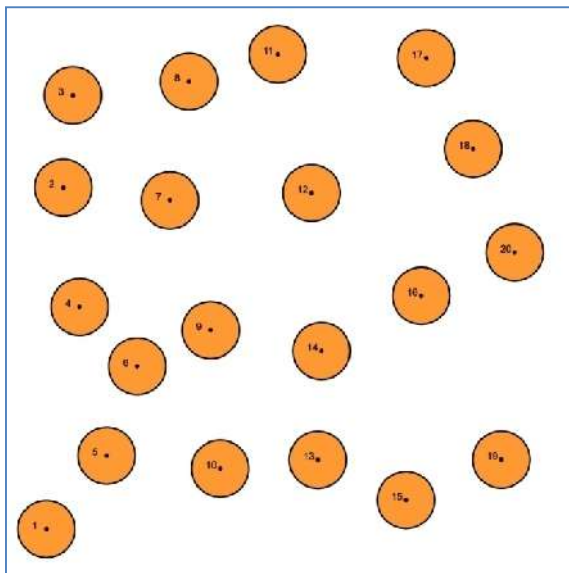
III.4.4.b. Application de l'algorithme pour l'identification des particules dans un milieu aléatoire biphasique

a) Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles

- Composite à 20 inclusions:



(a)



(b)

N	X	Y	R
1	209.5	2760	150.5
2	298.5	953.5	150.5
3	348.5	465.5	150.5
4	384.5	1585	150.5
5	526.5	2372	150.5
6	687.5	1899	150.5
7	859.5	1021	150.5
8	959.5	392.5	150.5
9	1074	1708	150.5
10	1124	2440	150.5
11	1427	248.5	150.5
12	1605	982	150.5
13	1638	2394	150.5
14	1657	1818	150.5
15	2102	2607	150.5
16	2182	1526	150.5
17	2208	268.5	150.5
18	2455	748.5	150.5
19	2604	2393	150.5
20	2674	1296	150.5

Fig. III.21: Identification des particules dans un milieu aléatoire biphasé- Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles : $N = 20$, la taille et les centres des cercles sont clairement illustrés sur la figure (b)

- Composite à 300 inclusions:

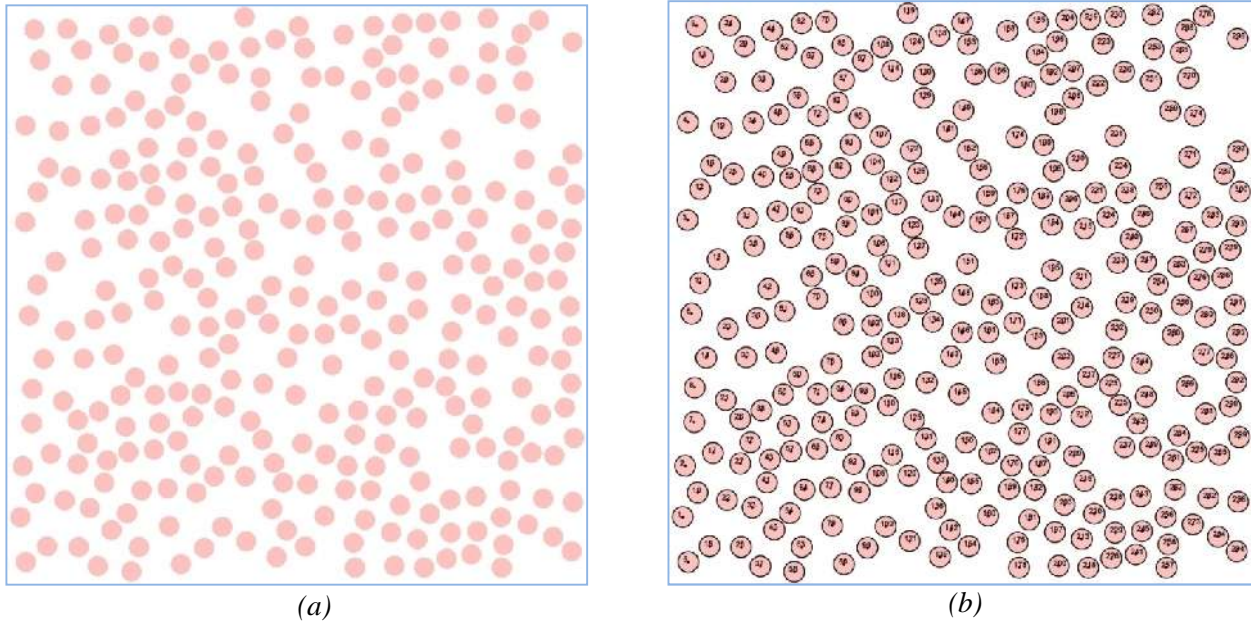


Fig.III.22: Identification des particules dans un milieu aléatoire biphasé- Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles : $P = 0.30494$; $N = 300$, la taille et les centres des cercles sont clairement illustrés sur la figure (b), les résultats des coordonnées sont en Annexe.

b) Cas d'une répartition de particules de tailles différentes

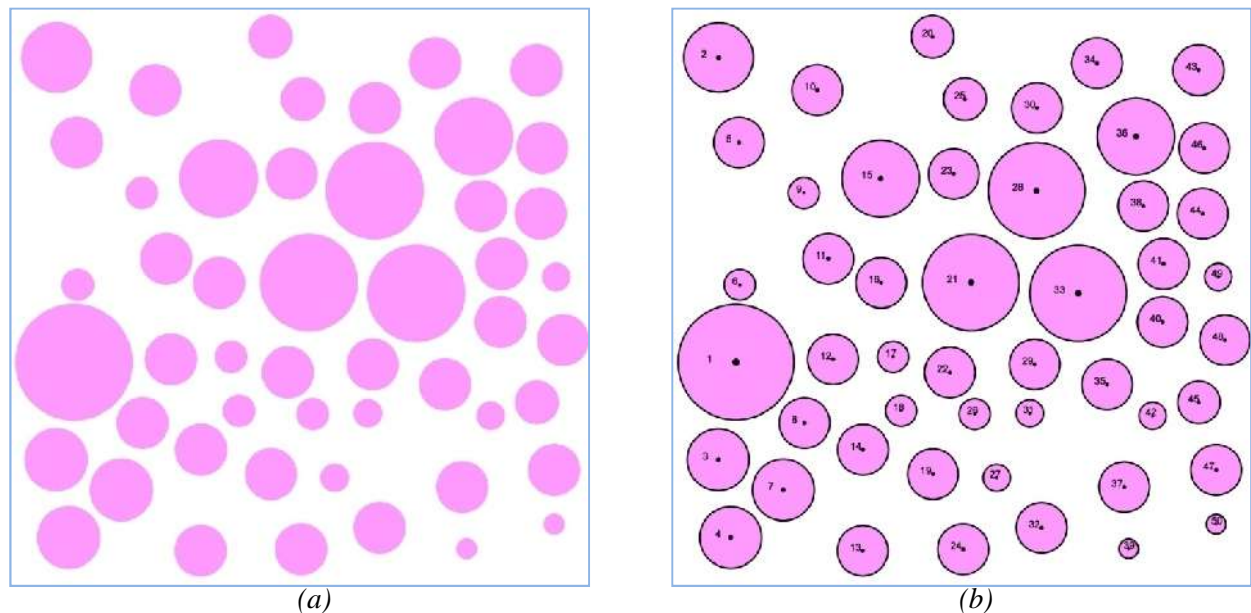
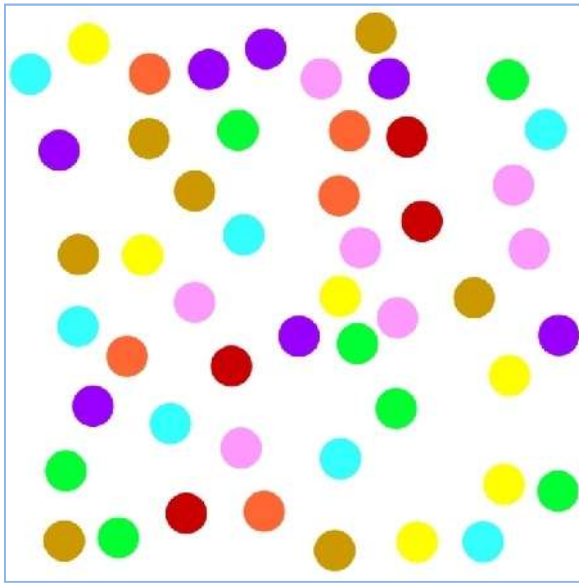


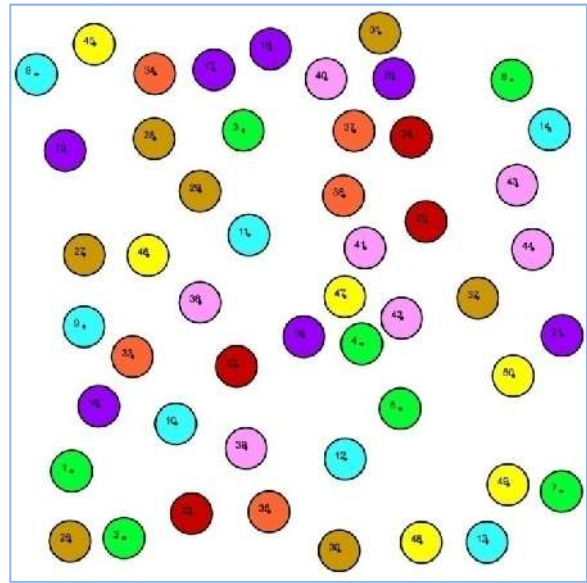
Fig. III.23: Identification des particules dans un milieu aléatoire biphasé- Cas d'une répartition de particules de tailles différentes : $N = 50$. La taille et les centres des cercles sont clairement illustrés sur la figure (b), les résultats des coordonnées sont en Annexe.

III.4.4.c. Identification des particules dans un milieu aléatoire multiphasique

a) Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles



(a)

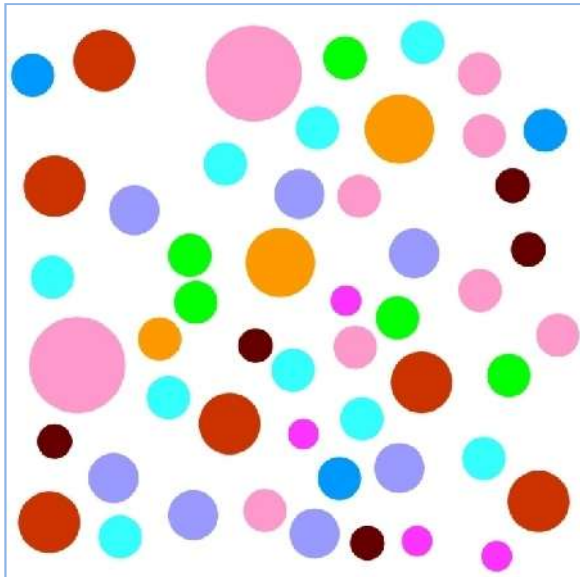


(b)

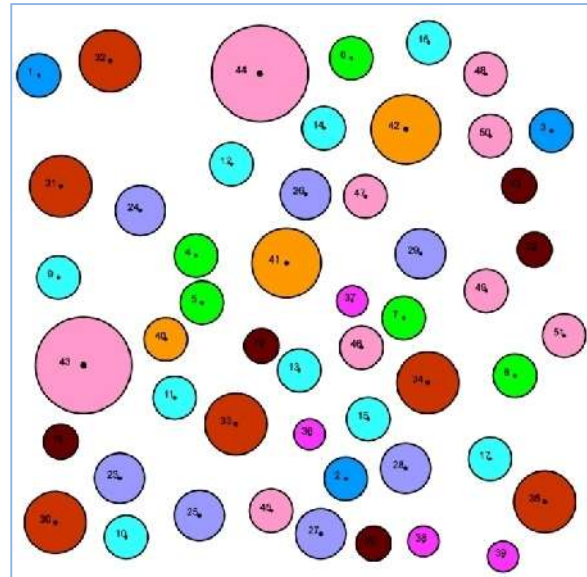
Codes couleur des phases	31	71	113	144	162	193	203	210	215
Quantité	7	7	7	4	7	5	7	6	1

Fig. III.24 : Identification des particules dans un milieu aléatoire multiphasique- Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles. La taille et les centres des cercles sont clairement illustrés sur la figure (b), les résultats des coordonnées sont en Annexe.

b) Cas d'une répartition de particules de tailles différentes



(a)



(b)

Codes couleur des phases	23	30	71	72	131	150	191	198	202	215
Quantité	3	5	9	5	7	6	4	3	9	/

Fig.III.25: Identification des particules dans un milieu aléatoire multiphasique- Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles Cas d'une répartition de particules de tailles différentes. La taille et les centres des cercles sont clairement illustrés sur la figure (b), les résultats des coordonnées sont en Annexe.

III.4.4.d. Domaines d'application d'un tel algorithme

En médecine, l'analyse d'image est un outil performant pour la recherche et l'aide au diagnostic. Elle permet d'acquérir des données objectives, précises, reproductibles sur l'importance des composants tissulaires, la manière dont ils sont organisés au sein du tissu, la morphologie des cellules (taille, forme, couleur), la quantité d'acide désoxyribonucléique (ADN) nucléaire, l'intensité d'un marquage et sa répartition.

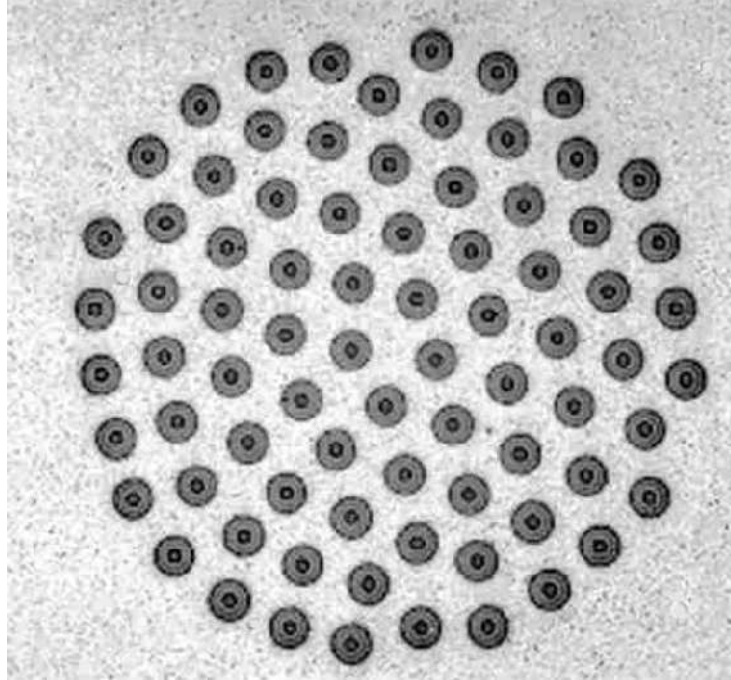
Concernant le contrôle de qualité, une évaluation quantitative par analyse d'images permet de comparer un échantillon avec des normes. Les applications au contrôle de qualité sont nombreuses. On va pouvoir contrôler la qualité du lait cru par numération bactérienne, l'aptitude à la mise en forme d'alliages d'aluminium. De même, on peut évaluer les inclusions non métalliques dans un acier ou la composition de prélèvements de houille.

III.4.4.e. Exemple d'application de l'algorithme pour l'identification des particules d'un composite à fibres de carbure de silicium

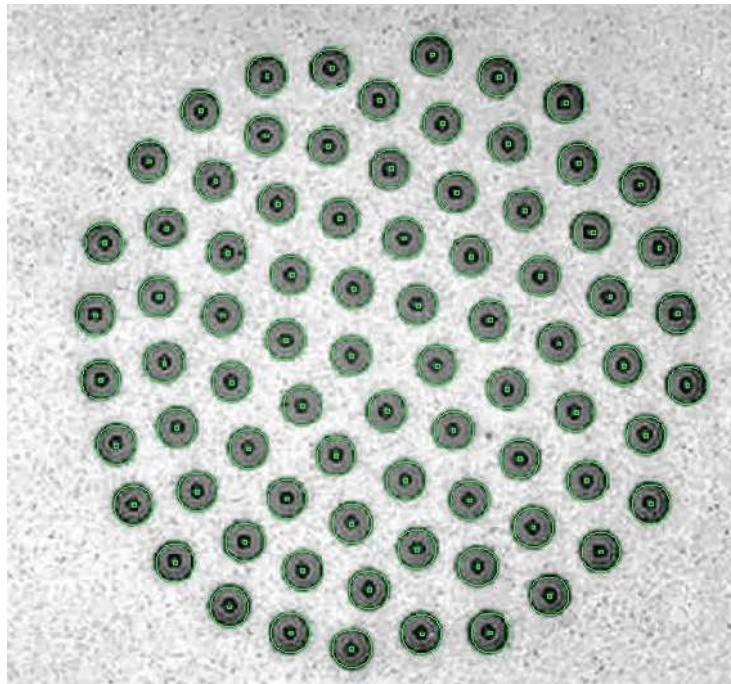
Un disque de turbine d'un moteur d'avion a été remplacé par des anneaux en composites. Il s'agit de composites à fibres de carbure de silicium dans une matrice métallique en alliage de titane.

Dans le but d'étudier les propriétés mécaniques de ce composite, l'algorithme permet de décrire l'arrangement des grains dans l'espace afin de déterminer:

- * la fraction surfacique.
- * Le nombre des cercles, qui correspond au nombre des particules dans le composite à fibres de carbure de silicium.
- * la taille des cercles.
- * les coordonne des cercles dans le plan qui correspond au centre des particules.



(a)



(b)

Fig. III.26: Composite à matrice métallique SiC-titane pour application aéronautique: a) la microstructure; b) identification des particules.

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on présente la modélisation de la microstructure d'un composite à fibres longues en décrivant une méthode de mise en œuvre pour réaliser des échantillons numériques de la microstructure, c'est-à-dire comment générer aléatoirement des nuages de points représentant les centres des fibres, puis mailler les échantillons.

Nous présentons dans un premier lieu, la méthode développée pour générer les échantillons numériques en fonction des différentes fractions volumiques des constituants du composite. Par la suite, nous présentons la méthode développée pour calculer la fraction volumique des constituants et la caractérisation de leur morphologie.

Dans le cadre d'une approche exclusivement numérique, la démarche adoptée s'est naturellement divisé en deux étapes :

- Générer des échantillons numériques du matériau ;
- Caractériser la morphologie des constituants.

La modélisation de la microstructure consiste à générer des disques de rayons constants répartis aléatoirement dans un cadre élémentaire de manière à se rapprocher au plus près de la fraction volumique de 52 %.

Un algorithme a été développé sous environnement FORTRAN pour réaliser la microstructure des échantillons numériques. La microstructure a été caractérisée grâce à un outil que nous avons développé sous MATLAB qui permet en outre de :

- comparer un échantillon avec des normes
- déterminer le nombre des cercles, qui correspond au nombre des particules dans un composites.
- * la taille des particules.
- * les coordonnées des cercles dans le plan qui correspond au centre des particules.

Nous proposons alors une méthode qui consiste à analyser les échantillons d'une microstructure telle que la dispersion des fibres dans la matrice, et la localisation des fibres (coordonnée, rayon, nombre).

Chapitre : IV

**Calcul du comportement effectif non linéaire
d'un composite transversalement isotrope par
technique d'homogénéisation**

IV.1. Introduction et bibliographie

Un matériau composite comprend une matrice qui peut être polymère, métallique ou céramique, et des renforts (particules ou fibres). Les matériaux composites peuvent être définis comme des matériaux hétérogènes avec des différents composants qui occupent différentes régions avec des interfaces distinctes entre elles. (Kalamkarov et Savi, 2012).

La détermination des propriétés mécaniques de ces matériaux hétérogènes, par des méthodes analytiques, semi-analytiques ou numériques, représente un déficit permanent et parfois complexe pour les chercheurs.

Les simulations numériques effectuées directement sur la microstructure peuvent être d'une grande aide pour résoudre les problèmes d'homogénéisation complexes tels que la plasticité dans les matériaux composites aléatoires. Le volume de matériau utilisé pour représenter la microstructure, à savoir le VER, qui est donc d'une importance primordiale.

Peu de travaux ont été publiés sur l'homogénéisation des composites présentant de fortes fractions volumiques d'inclusions (de l'ordre de 50 %). En effet, Segurado et Llorca (2002) ont étudié le comportement des microstructures présentant des fractions volumiques d'inclusions comprises entre 10 et 50 %. Les éléments de volume réalisés sont soumis à des conditions aux limites périodiques. Trois configurations de matériaux sont testés : une matrice élastique renforcée d'inclusions rigides, une matrice élastique contenant des vides sphériques et une matrice élastique (type époxy) renforcée de sphères élastiques (type verre). La faible dispersion des résultats sur plusieurs réalisations de microstructures permet de considérer la moyenne de ces résultats comme une bonne approximation de la solution exacte pour le comportement effectif du matériau. Les propriétés effectives calculées : module de Young, coefficient de Poisson, modules de compressibilité et de cisaillement, sont comparés à ceux obtenus analytiquement par les schémas d'homogénéisation linéaires.

Kari et al. (2007) ont étudié le comportement de composites à inclusions de tailles variables (pour une matrice métallique de type aluminium et des inclusions de type céramique, SiC). Les fractions volumiques d'inclusions visées sont élevées (jusqu'à 60 %). Ces auteurs ont comparé les résultats de leurs simulations aux estimations fournies par des modèles analytiques : auto-cohérent, auto-cohérent 3-phases, estimation de Mori et Tanaka, approximation du troisième ordre de Torquato. La meilleure approximation du comportement effectif est à nouveau fournie par le modèle du troisième ordre de Torquato.

Concernant l'effet de la répartition des inclusions sur le comportement des composites à matrice métallique ductile (de type aluminium), renforcée d'inclusions rigides et fragiles (de

type céramique, SiC), Segurado et al. (2003); Segurado et Llorca (2005, 2006) ont modélisé l'effet de la présence ou non d'amas d'inclusions pour une fraction volumique globale d'inclusions de 15 % et différentes valeurs de fractions volumiques locales d'amas (de 20 à 40 %). Les résultats de ces travaux montrent que la présence d'amas semble ne pas influencer le comportement élasto-plastique global. En revanche, l'effet des amas est visible sur la valeur moyenne de la contrainte principale maximale dans les inclusions : cette contrainte est plus élevée en présence d'amas que dans le cas homogène.

La statistique de Weibull est ensuite utilisée pour estimer le nombre d'inclusions rompues à partir des valeurs locales de la contrainte principale maximale. Le résultat est que la présence d'amas dans la microstructure augmente très fortement la proportion d'inclusions rompues.

Segurado et Llorca (2004, 2005, 2006) ont poursuivi leurs travaux en prenant en compte la décohésion des inclusions avec la matrice à l'aide d'éléments finis d'interface. Cette nouvelle modélisation confirme que la présence d'amas ne modifie pas le comportement moyen du composite. En revanche, la modélisation de la décohésion des inclusions influence grandement la tenue mécanique et, notamment :

- la limite d'élasticité du composite, qui diminue fortement avec la résistance de l'interface mais pas avec la présence d'amas ;
- la résistance en traction (contrainte ultime), qui augmente globalement avec la résistance de l'interface ;
- l'allongement à rupture, qui diminue fortement avec la résistance de l'interface pour de petites valeurs, puis augmente pour une plage de valeurs supérieures.

Dans tous les cas, la présence d'amas conduit à des valeurs systématiquement inférieures de résistance en traction et d'allongement à la rupture par rapport à une structure aléatoire homogène (Segurado et Llorca, 2005). La probabilité de rupture des inclusions est 3 à 6 fois plus élevée pour une distribution en amas que pour une distribution homogène (Segurado et Llorca, 2006).

Mishnaevsky (2004) a également étudié le comportement micromécanique de ce type de milieu en comparant plusieurs distributions d'inclusions : réseau périodique cubique centré, distribution aléatoire homogène, distribution aléatoire avec amas, distribution aléatoire en imposant un gradient de concentration d'inclusions dans une direction. Les réalisations sont soumises à des sollicitations de traction uniaxiale. Mishnaevsky observe le même phénomène, à savoir, pour une fraction volumique moyenne d'inclusions donnée, les différentes

distributions n'influencent quasiment pas le comportement élastique du composite. L'effet de la distribution des inclusions apparaît en plasticité sur le module d'écroutissage, l'amorçage et la progression de l'endommagement.

De manière générale, les concentrations de contrainte et de déformation, à l'origine des phénomènes de rupture et d'endommagement, sont plus élevées dans les zones où les inclusions sont rapprochées et, donc, dans les amas. Ce résultat souligne l'influence de la morphologie des échantillons numériques (notamment l'évolution des fractions volumiques locales d'inclusions) sur l'hétérogénéité des champs mécaniques locaux. Ces résultats sont obtenus avec des fractions volumiques d'inclusions relativement faibles (de 2.5 à 15 %). Les concentrations de contraintes, notamment dans la matrice, ne sont sans doute pas comparables à celles présentes dans un composite présentant une fraction volumique de 45 % d'inclusions.

Le sujet traité dans le cadre de cette thèse est très spécifique et rarement étudié dans la littérature. La raison est qu'en général, les fibres sont souvent considérées élastiques, et l'originalité de ce travail réside dans la considération d'une plasticité parfaite des fibres enrobées dans une matrice parfaitement élastique.

Dans ce travail, la technique d'homogénéisation basée sur la notion de volume élémentaire représentative VER est utilisée pour prédire les propriétés effectives des microstructures et arriver à développer un modèle de comportement mécanique macroscopique liée au comportement des deux phases. En régime élastoplastique, on a pu atteindre, par cette technique, la solution exacte, à quelques centièmes d'erreurs, de l'essai de traction.

Dans cette étude qui a été réalisée sur la base de calculs de microstructures, la difficulté majeure réside dans la réalisation d'images où on considère une forte fraction volumique des particules réparties aléatoirement dans la matrice.

IV.2. Modélisation de la microstructure du composite à fibres

A titre d'exemple, une observation au microscope a permis de distinguer des géométries particulières. La figure (IV-1) montre une représentation de la dimension micrométrique d'un matériau composite utilisé dans un disque de turbine des moteurs aéronautiques. Le matériau est un composite à fibres longues élastiques figées dans une matrice métallique, dont la section droite apparaît sous forme d'inclusions particulières.

La microstructure considérée pour simuler le comportement mécanique se présente sur la figure (IV-2) sous forme d'une coupe d'un parallélépipède transversale isotrope dans le

plan (xy), qui contient une dispersion aléatoire de fibres cylindriques parallèles identiques sans percolation, répartis dans la phase matrice.



Fig. IV.1: Disque composite à matrice métallique SiC-titane pour application aéronautique.

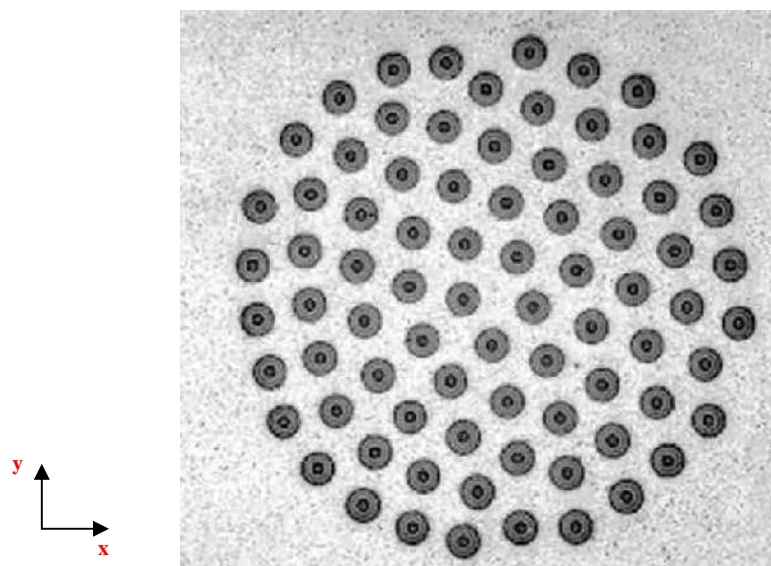


Fig. IV.2: section droite du composite SiC-titane contenant des inclusions particulières.

IV.2.1. Technique d'homogénéisation numérique

IV.2.1.a. Maillage de la microstructure

La technique « multiphase element » est utilisée pour superposer un maillage d'éléments finis sur les images des microstructures, Barbe et al. (2001), Zohdi (2001) et (Kanit et al., 2003) . La raison est la capacité d'attribuer des comportements différents à différents points d'intégration dans le même élément, en fonction de son emplacement dans le composite. Pour chaque point d'intégration d'un maillage d'éléments finis régulier, ayant la

taille de l'échantillon considéré, le pixel le plus proche dans l'image est déterminé et la propriété du matériau correspondant est attribuée.

Les références précédentes montrent que cette stratégie de maillage simple, conduit à corriger des évaluations de contraintes et des déformations moyennes à l'intérieur des phases par rapport au maillage des interfaces par des nœuds. L'avantage majeur de cette méthode réside dans la simplicité et la rapidité avec laquelle est créé le milieu hétérogène.

IV.2.1.b. Propriétés des constituants

La microstructure du matériau considéré est supposée être constituée d'une matrice isotrope élastique linéaire contenant des fibres élastiques parfaitement plastiques (figure IV-3-a) qui expriment le fait que le matériau est incapable de supporter une contrainte plus importante que celle qui correspond à l'écoulement plastique noté R_0^f . D'après Eshelby (1957), on suppose que l'ensemble est homogène en termes de rigidité :

$$E_m = E_f \quad (IV.1)$$

IV.2.2. Simulation du comportement en traction uniaxiale

Dans un premier temps nous nous intéressons uniquement à la réponse dans le plan transversal du composite sous un chargement uniaxial, Kanit et al. (2003). La réponse du composite est calculée par la méthode des éléments finis à l'aide du code de calcul de structures Zébulon, développé par l'Ecole des Mines de Paris en partenariat avec l'Onera et qui est adapté aux problèmes de mécanique non linéaire.

La Figure (IV-4) représente la contrainte axiale globale tracée en fonction de la déformation axiale.

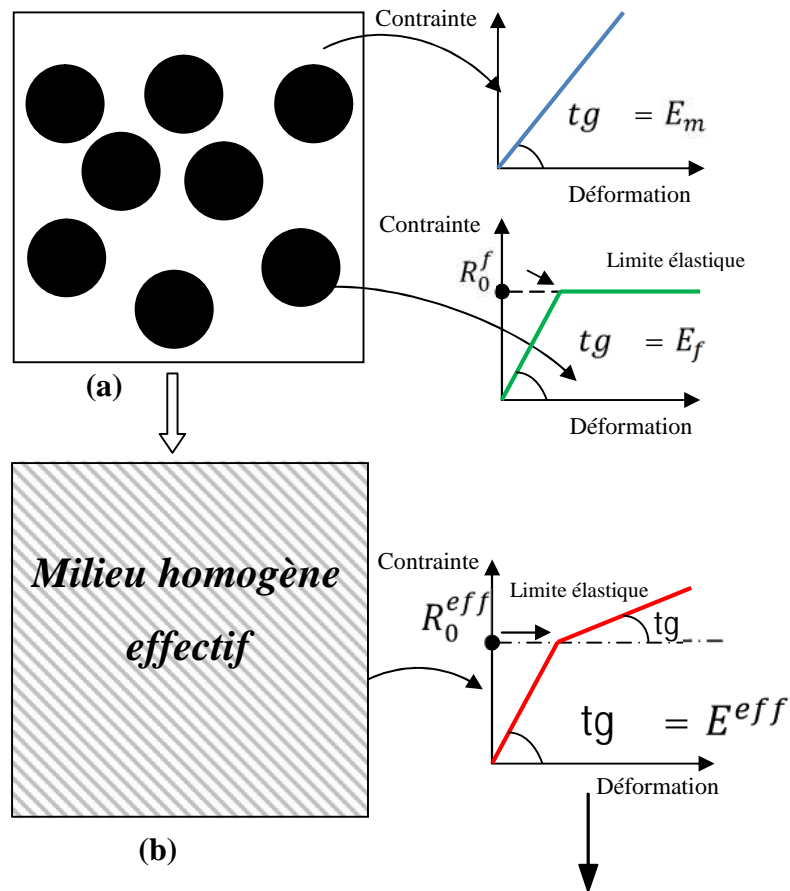


Fig. IV.3 : Représentation schématique du composite étudié dans le plan transversal, (a) Microstructure hétérogène avec les lois de comportement de la matrice et des fibres, (b) Milieu homogène effectif avec sa loi de comportement globale.

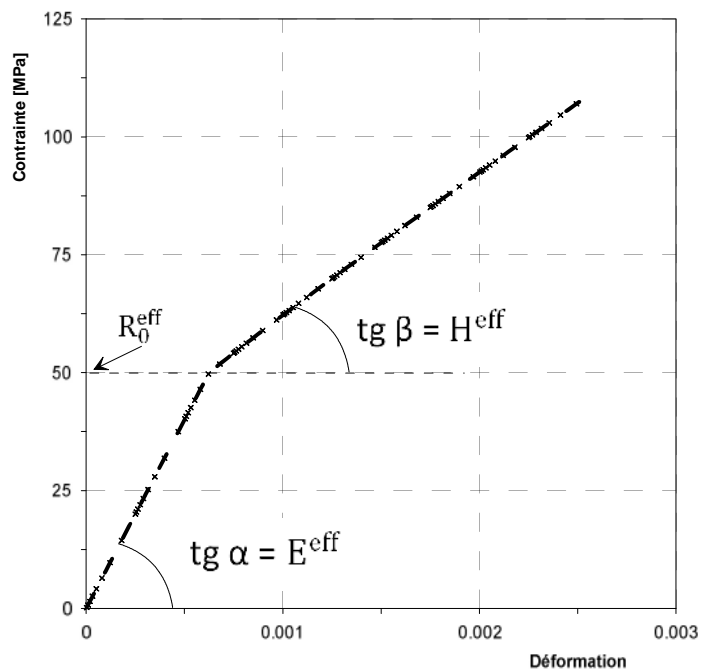


Fig. IV.4. Loi de comportement globale donnant la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale.

La courbe de la Figure IV.4 peut être schématiquement décomposée en deux régimes différents. La première partie de la courbe correspond à la réponse initiale du composite qui est purement élastique. Dans ce régime, le seul potentiel qui existe est l'énergie libre, la réponse effectif du composite peut être obtenu par l'homogénéisation d'une seule phase élastique. Dans ce premier régime le module d'Young effectif du composite est similaire au module d'élasticité dans les deux phases et peut être écrit comme suit:

$$E^{eff} = E_m = E_f \quad (IV.2)$$

Dans la deuxième partie de la courbe, correspondant à des grandes déformations, La branche, supposée parcourue de façon monotone, correspond à un état de charge plastique.

La limite élastique effective obtenue est égale à la limite élastique des fibres :

$$R^{eff} = R_0^f \quad (IV.3)$$

Les simulations numériques effectuées montrent que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{xx} = E^{eff} \epsilon_{xx} & \text{Pour } \sigma_{xx} < R_0^f \\ \sigma_{xx} = R_0^f + H^{eff} \epsilon_{xx}^p & \text{Pour } \sigma_{xx} > R_0^f \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

Avec ϵ_{xx}^p : la déformation plastique moyenne dans le composite.

La réponse du matériau composite présente un comportement élasto-plastique linéaire, qui est, capable de se durcir (notion d'écrouissage) avec la déformation plastique; contrairement au comportement des fibres élastiques-parfaitement plastiques. La pente de la courbe déformation-contrainte pour des contraintes élevées s'appelle le module élasto-plastique ou écrouissage linéaire : H^{eff} .

Nous essayons à présent de déterminer la relation entre les paramètres du comportement effectif du composite, en fonction du module de Young de la matrice E_m , de la limite élastique R_0^f et de la fraction volumique P des fibres. Les paramètres du comportement effectif seront alors exprimés. Ces paramètres sont :

- le module d'élasticité effectif $E^{eff} = tg(\alpha)$,
- le module élasto-plastique : $H^{eff} = tg(\beta)$,
- la limite d'élasticité effective : R^{eff} ,

Une formule analytique sera proposée sur la base des simulations numériques pour décrire le comportement effectif globale et généralisé.

Afin d'atteindre cet objectif, une étude de l'influence des différents paramètres sur le comportement élasto-plastique a été réalisée. Nous avons identifié les paramètres de la modélisation comme suit: la fraction volumique des fibres, la limite d'élasticité du comportement parfaitement plastique des fibres, et la répartition aléatoire des fibres avec plusieurs réalisations, le module d'Young et le coefficient de Poisson des deux phases du composite.

Pour cela, on a utilisé les algorithmes de génération des distributions aléatoires des particules dans les échantillons. Différentes réalisations d'échantillons numériques avec des fractions volumiques variées ont été réalisées.

La microstructure est supposée constituée de fibres cylindriques de même diamètre D , réparties aléatoirement dans l'espace sans contact entre elles. La matrice recouvre tout l'espace non occupé par les fibres, c'est-à-dire qu'on ne représente pas d'éventuelles décohésions de fibres avec la matrice ou la présence de porosité. La fraction volumique des fibres P varie de 0.1 à 0.6.

IV.3. Effet du coefficient de Poisson sur le comportement élasto-plastique uniaxial.

Trois cas d'étude sont considérés :

1) même valeur du coefficient de Poisson pour les deux phases du matériau composite :

$$* \nu_m = \nu_f = 0.2 ; \nu_m = \nu_f = 0.3$$

2) une valeur du coefficient de Poisson plus grande dans la matrice que dans les fibres.

$$* \nu_m = 0.3; \nu_f = 0.2$$

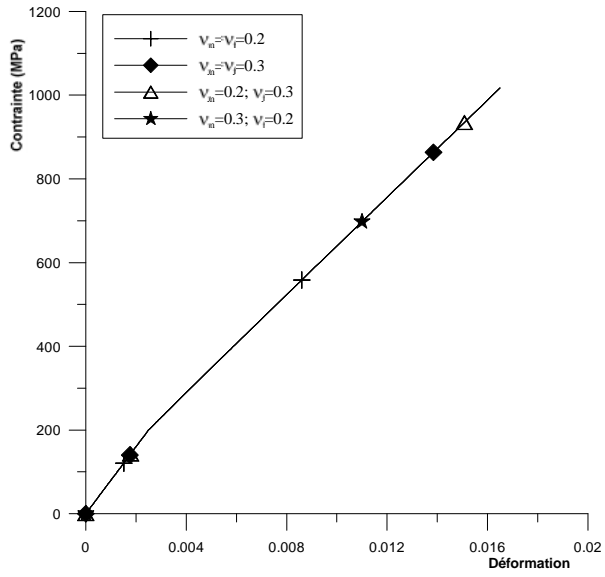
3) une valeur du coefficient de Poisson plus grande dans l'inclusion.

$$* \nu_m = 0.2; \nu_f = 0.3$$

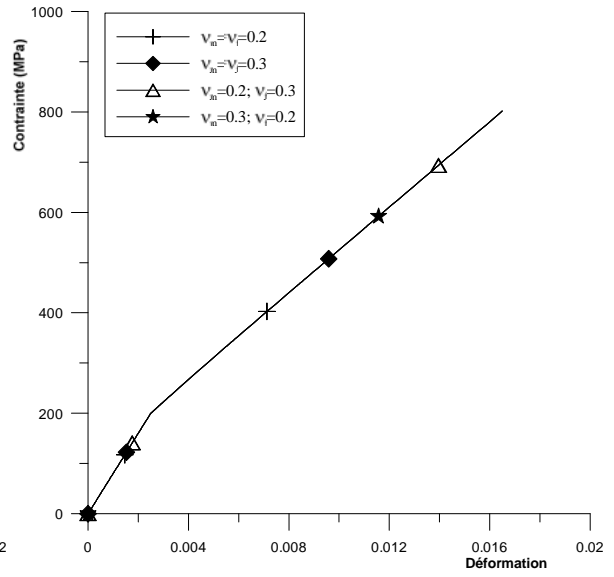
Le module d'Young et la limite élastique de l'inclusion, sont fixés pour chaque fraction volumique ($P \in [0.1 - 0.6]$) dans la géométrie des échantillons réalisés.

Les figures (IV-5.a-f) représentent les lois de comportement (contraintes-déformations) obtenues pour chaque fraction volumique et pour différents coefficients de poisson.

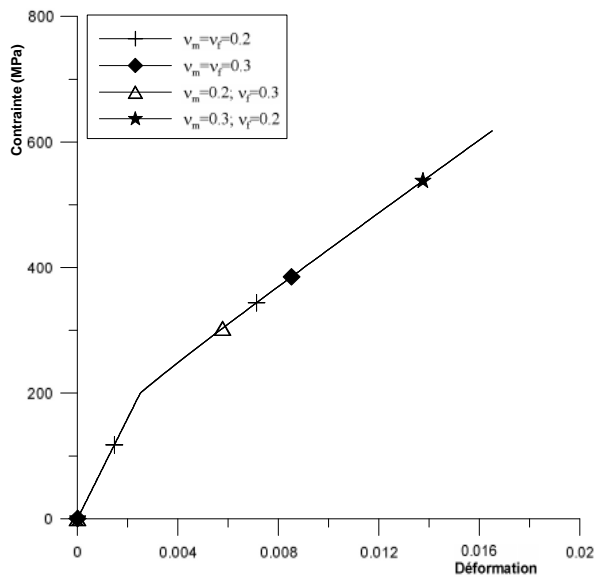
Chapitre IV : Calcul du comportement effectif non linéaire d'un composite transversalement isotrope par technique d'homogénéisation



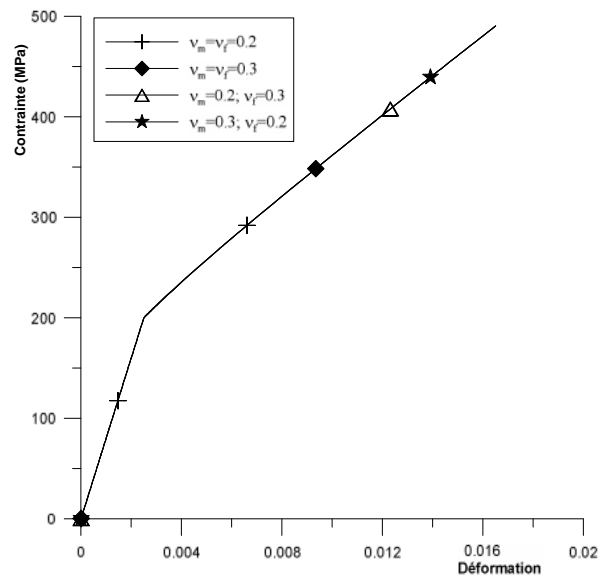
(a) $P = 0.1$



(b) $P = 0.2$



(c) $P = 0.3$



(d) $P = 0.4$

Chapitre IV : Calcul du comportement effectif non linéaire d'un composite transversalement isotrope par technique d'homogénéisation

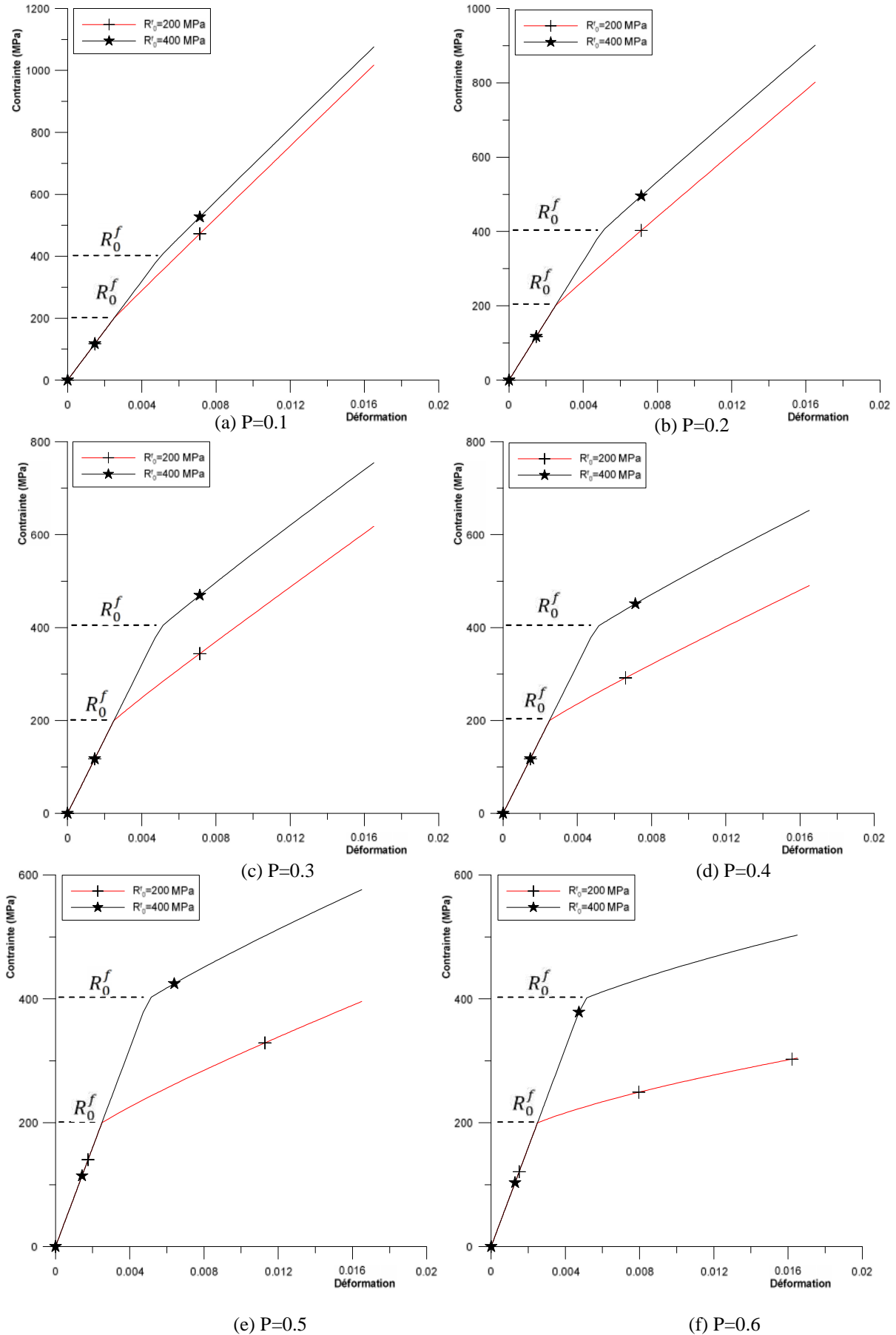


Fig. IV.6: Effet de la limite élastique des fibres parfaitement plastique sur le comportement élasto-plastique uniaxial.

Dans la partie élastique de la courbe contrainte déformation les résultats donnés par deux limites élastiques différentes sont quasiment identiques.

L'évolution des contraintes dans la partie plastique, donnent des résultats sensiblement équivalents et le module élasto-plastique effectif est de même valeur dans les deux cas étudiés.

On constate que les résultats obtenus pour la limite élastique effective, restent identiques à la limite d'élasticité considérée pour les fibres.

IV.5. Effet de la dispersion aléatoire des fibres

L'objectif de cette partie est de caractériser le comportement du composite à l'aide de plusieurs échantillons numériques représentant la microstructure. Pour cela, nous analysons la réponse de ces échantillons pour différentes répartitions des fibres afin de déterminer leurs effets sur le comportement élasto-plastique.

Nous avons généré aléatoirement les centres des fibres dans chaque échantillon pour une fraction volumique P de 0.1 à 0.6 en utilisant l'algorithme développé pour la génération des échantillons numériques aléatoires et qui a été présenté dans le chapitre précédent.

Afin d'observer l'influence de la dispersion aléatoire des fibres sur nos simulations, des sollicitations en traction uniaxial sont appliquées aux quatre échantillons numériques réalisées pour chaque fraction volumique.

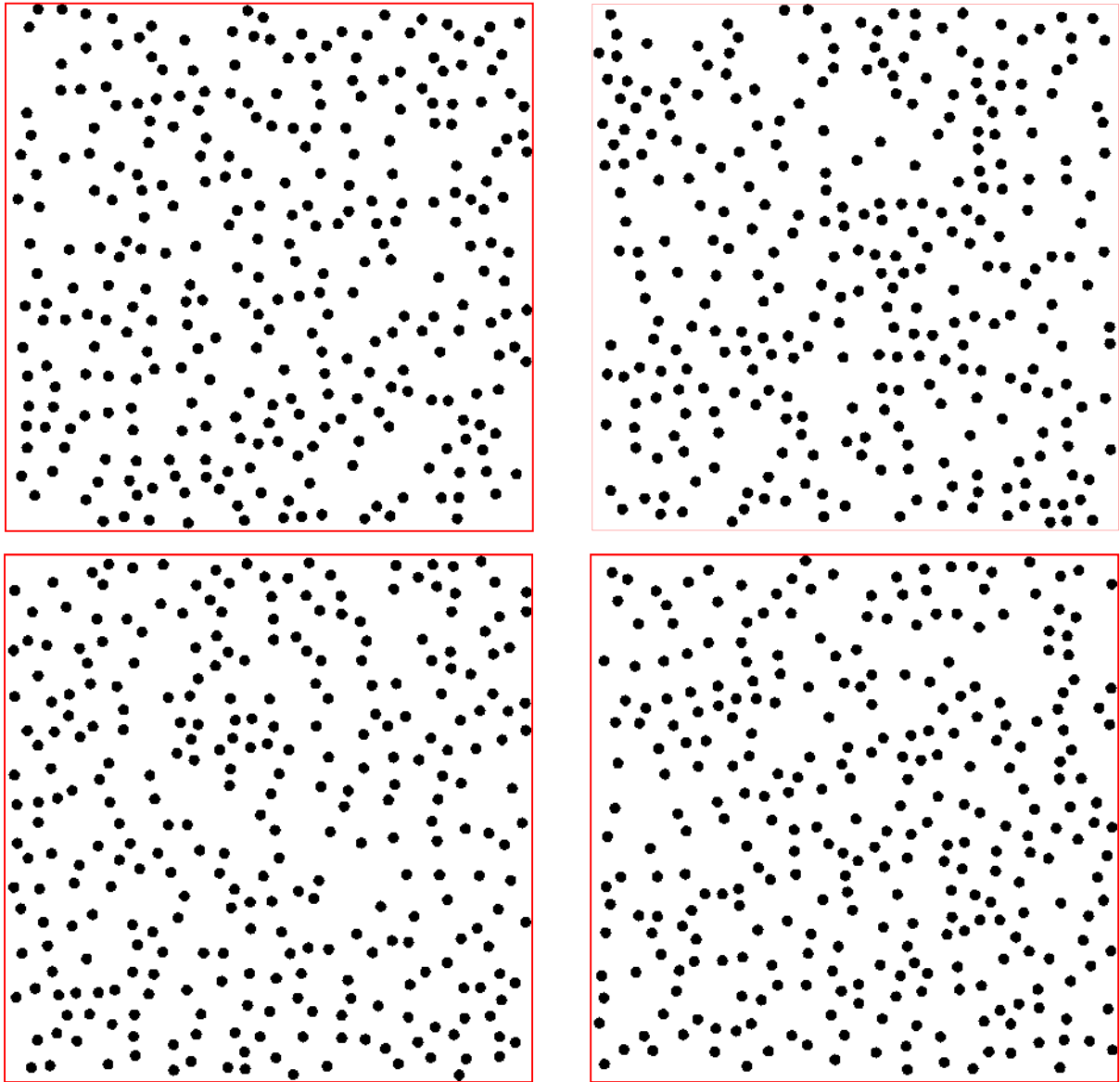


Fig. IV.7 : Echantillons numériques générés par l'algorithme proposé, fraction volumique : $P=0.1$.

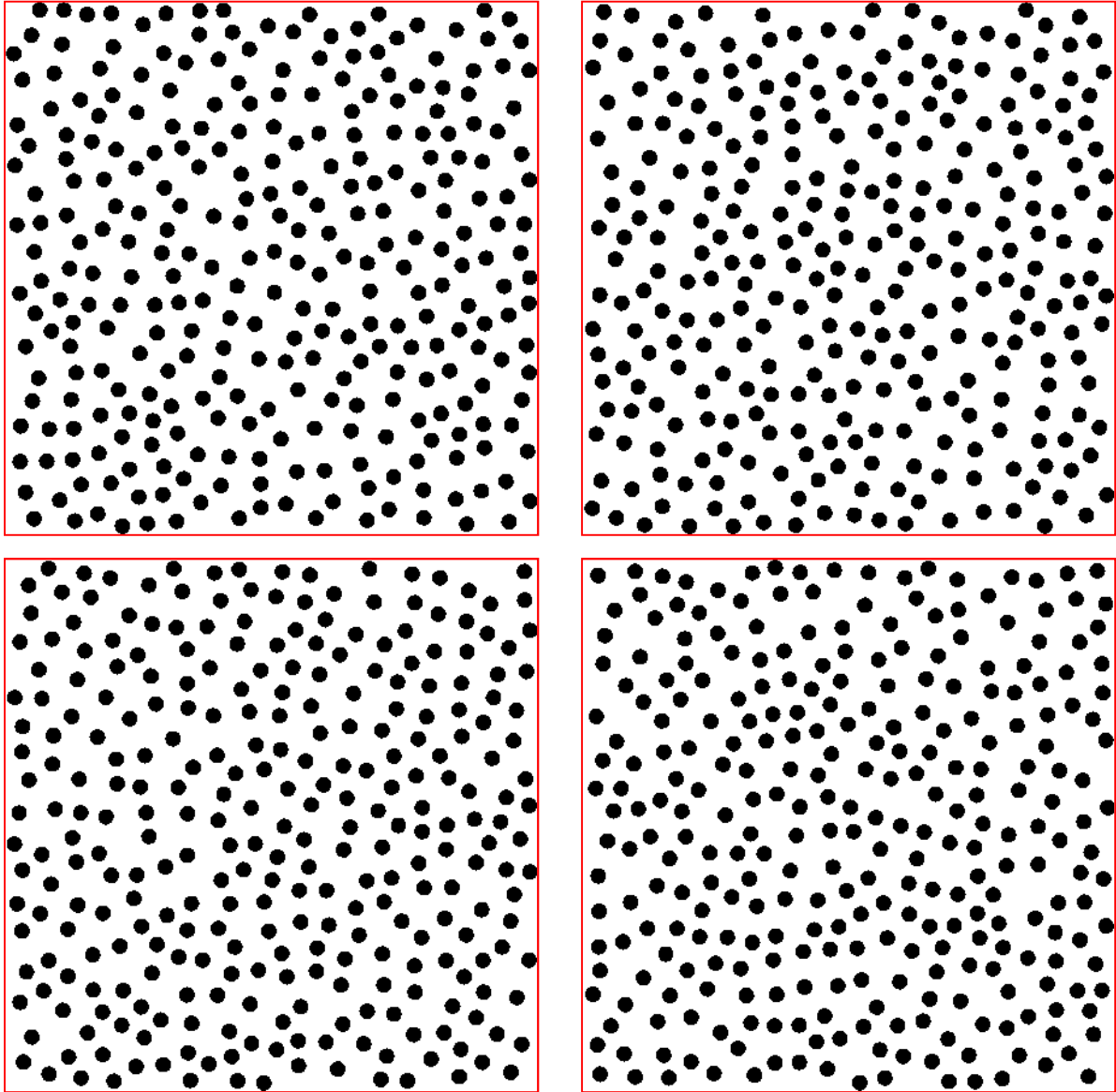


Fig. IV.8 : Echantillons numériques générés par l'algorithme proposé, fraction volumique : $P=0.2$.

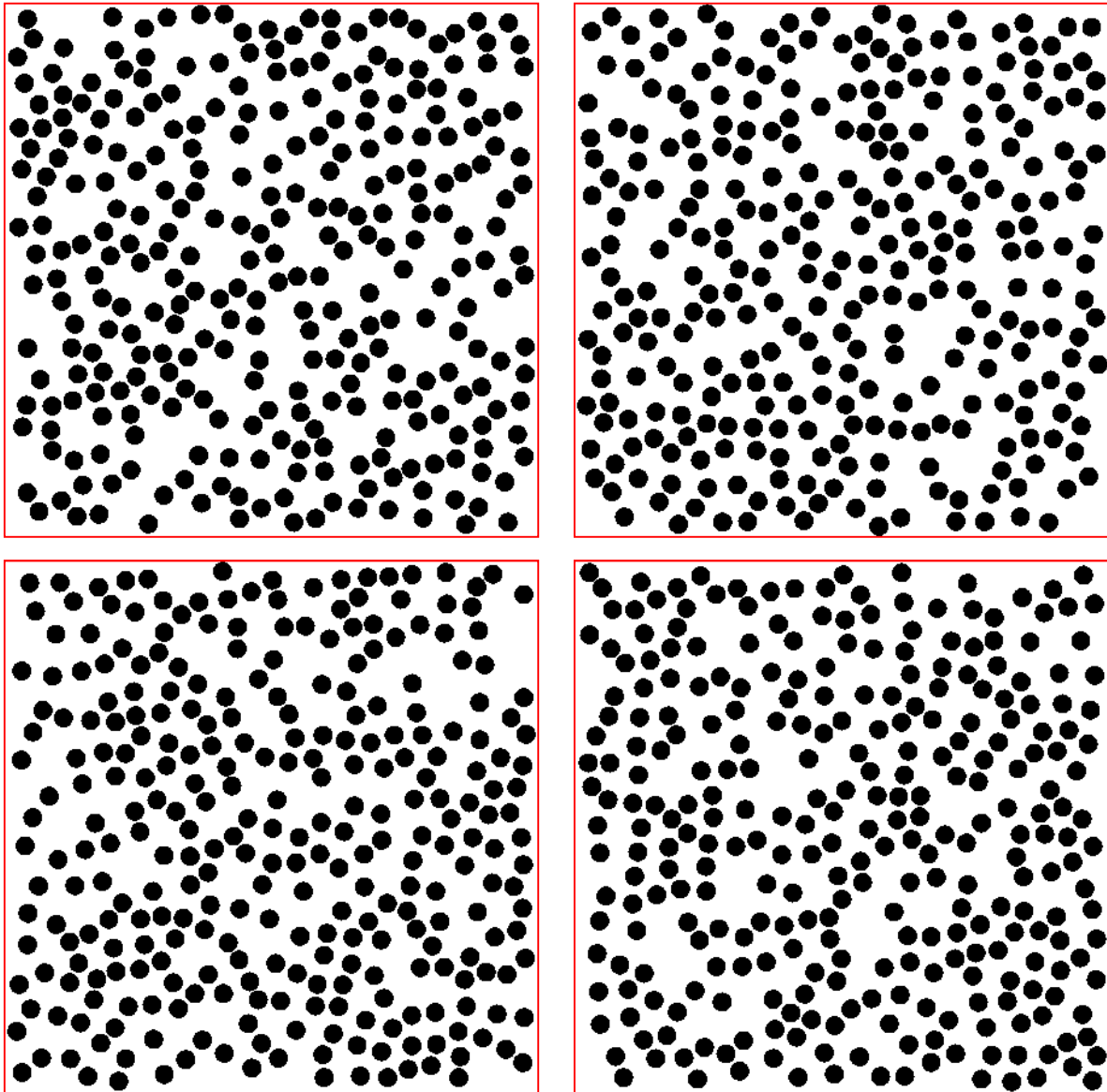


Fig. IV.9 : Echantillons numériques générés par l'algorithme proposé, fraction volumique : $P=0.3$.

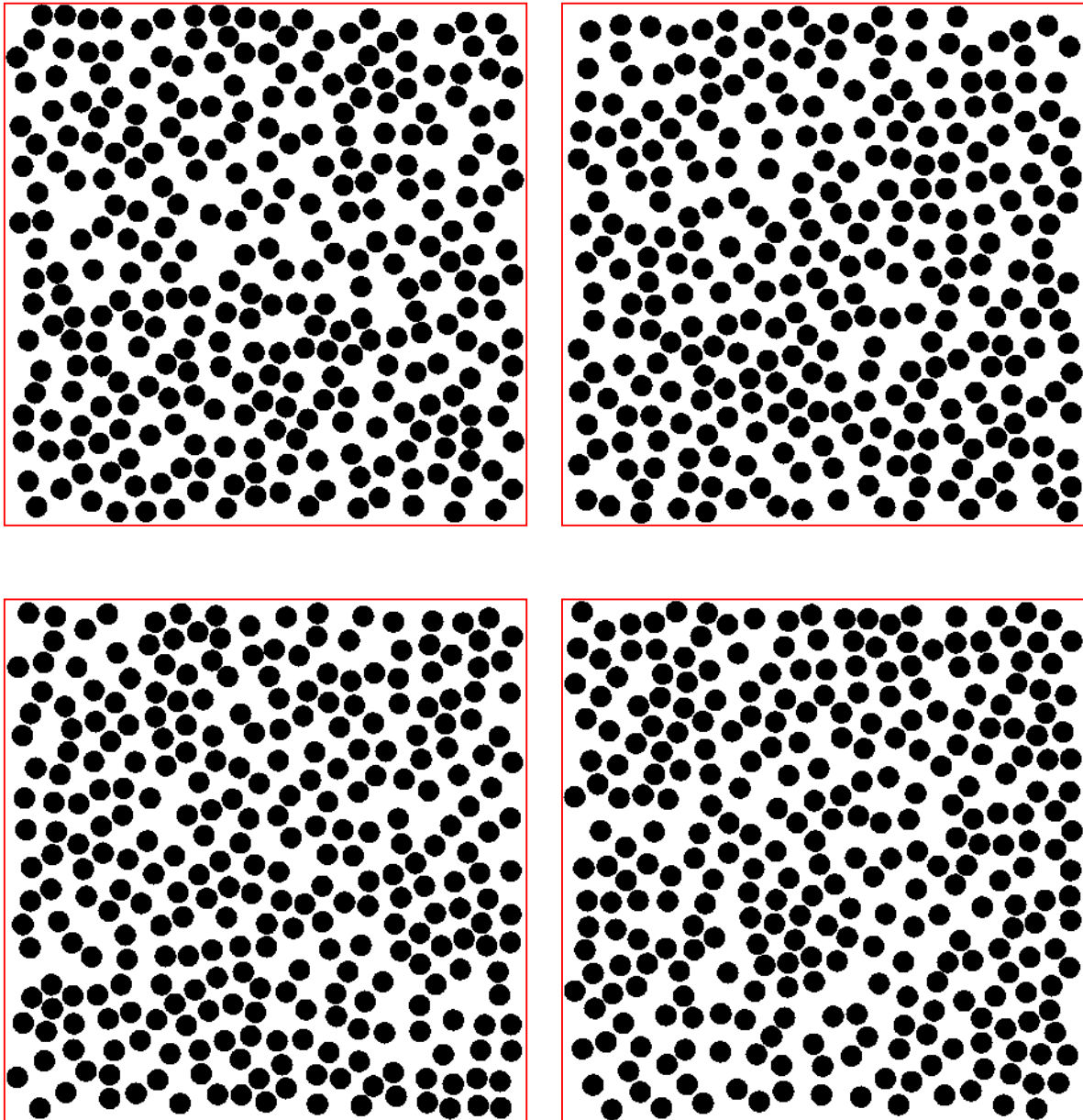


Fig. IV.10 : Echantillons numériques générés par l'algorithme proposé, la fraction volumique : $P=0.4$.

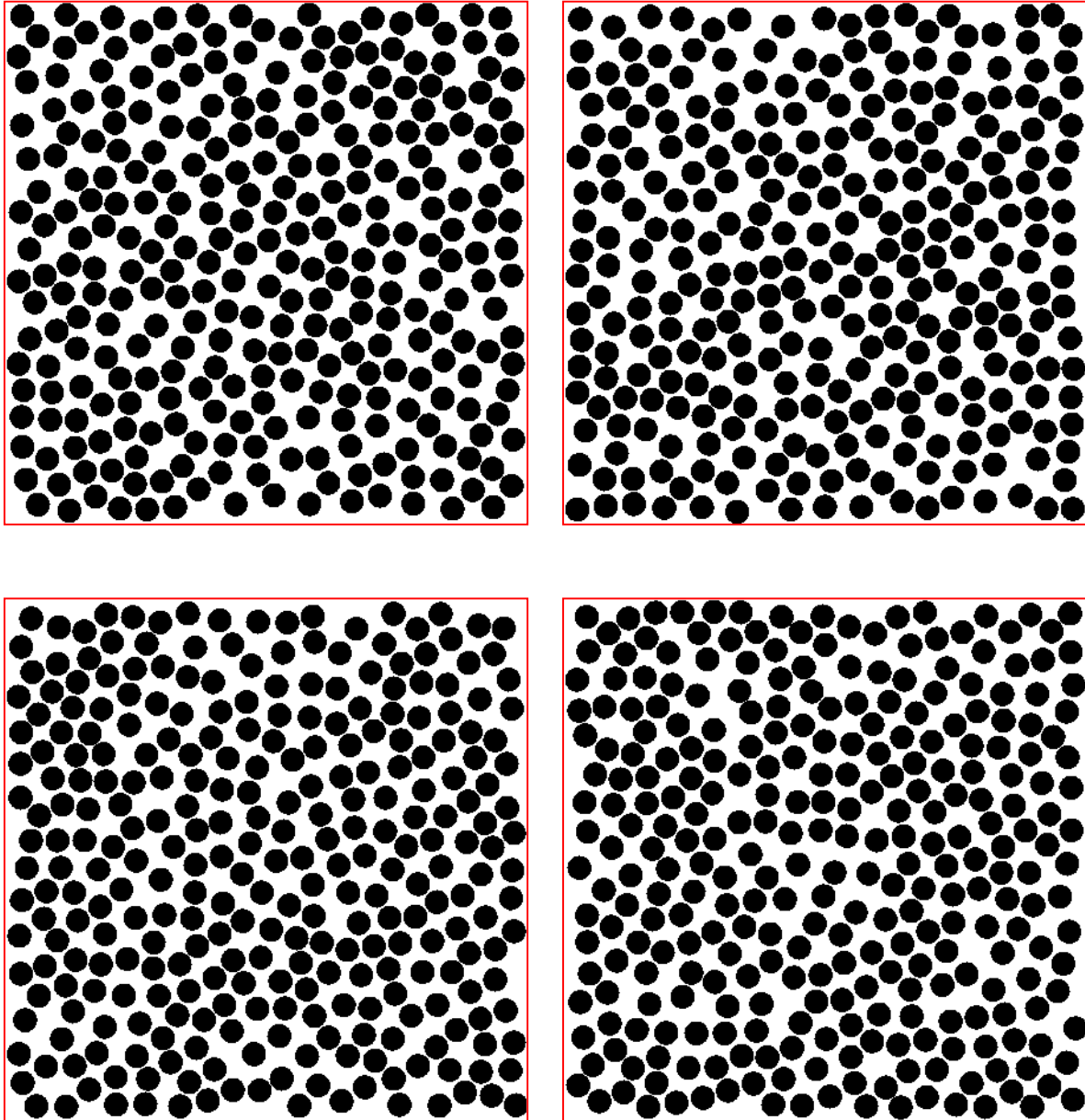


Fig. IV.11 : Echantillons numériques générés par l'algorithme proposé, la fraction volumique : $P=0.5$.

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus. Nous regroupons dans le même graphe, pour chaque fraction, les courbes contrainte-déformation des quatre réalisations proposées dans les fractions volumiques étudiées (figure IV.12).

Chapitre IV : Calcul du comportement effectif non linéaire d'un composite transversalement isotrope par une technique d'homogénéisation

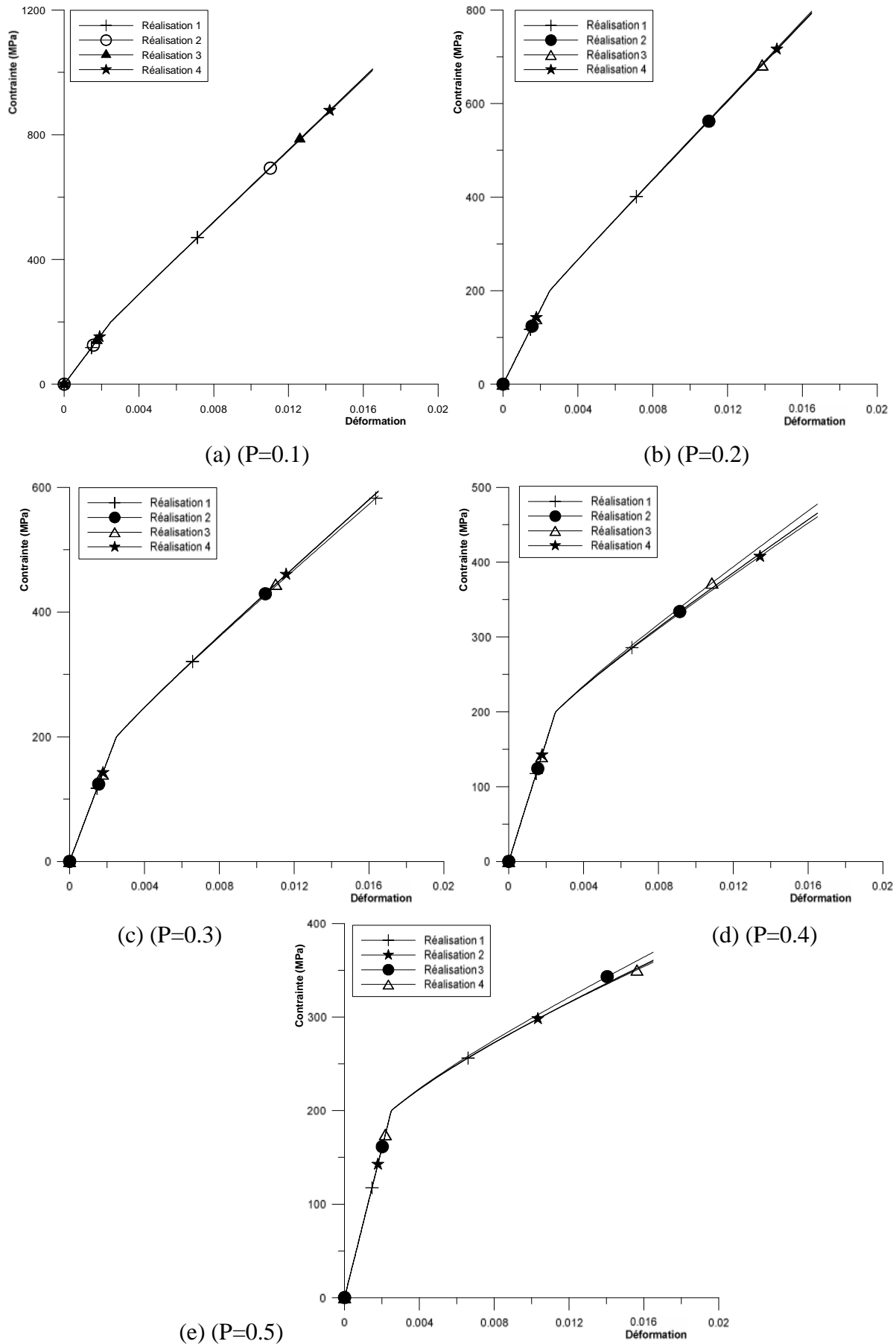


Fig. IV.12: Effet de la dispersion aléatoire des fibres, fraction volumique : P (0.1 – 0.6)

Le module plastique H^{eff} obtenu pour les différentes réalisations est présenté dans la figure (IV.13).

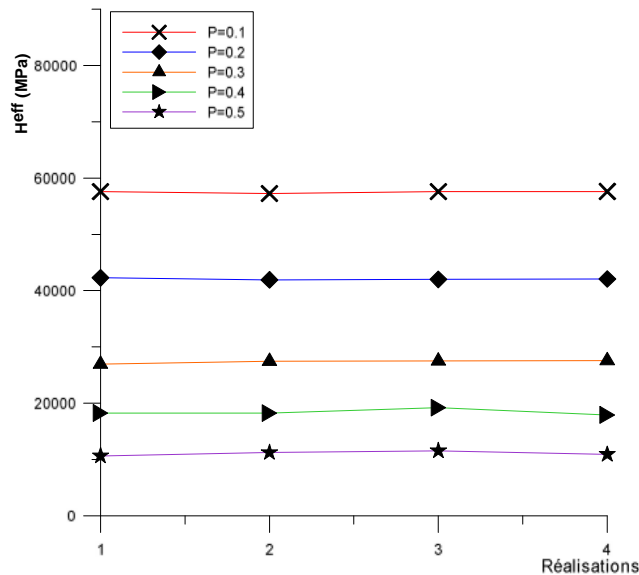


Fig. IV.13: le module plastique H^{eff} obtenu pour les différentes réalisations, fraction volumique : P (0.1 – 0.6).

La constatation la plus importante que l'on peut tirer de ces calculs, c'est bien l'influence quasi-nulle de la distribution aléatoire des fibres, sur la loi de comportement.

IV.6. Simulation du comportement de la microstructure en compression.

Soumis à des sollicitations mécaniques ou physiques, les corps solides, initialement en équilibre, sont très généralement susceptibles d'avoir des modifications de forme. Par cette accommodation géométrique, la structure oppose, à la sollicitation externe, une réaction qui permet une stabilisation vers un nouvel état d'équilibre contraint.

La courbe contrainte - déformation pour un acier par exemple (pas pour tous les métaux - ex : fonte grise) a une allure symétrique par rapport à 0. Il n'en est pas de même pour le bois. En effet celle-ci diffère fortement de l'acier car :

- la contrainte de rupture en traction est nettement plus élevée que celle en compression.
- les domaines élastiques n'apparaissent pas avec précision.

Sur ces bases, nous avons jugé utile de considérer la microstructure précédente soumise à une compression uniaxiale selon la direction X, pour étudier la nature de son comportement.

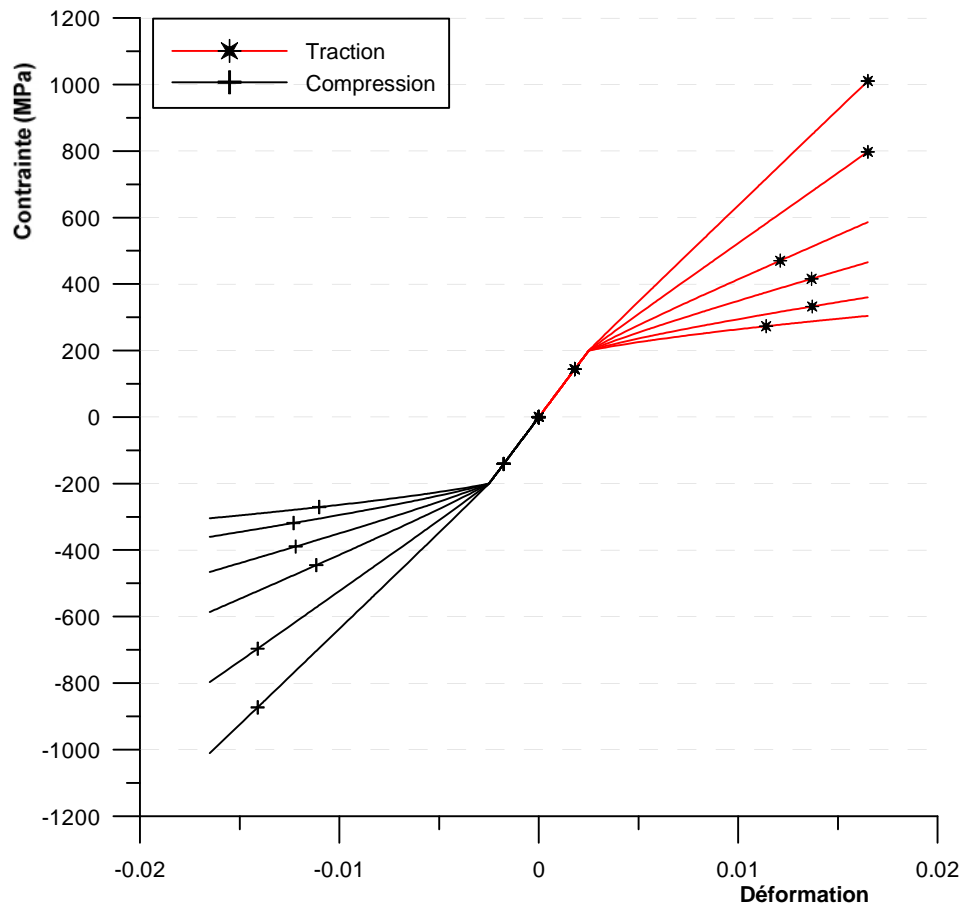


Fig. IV.14 : Comportement en compression, la microstructure est soumise à une compression uniaxiale selon la direction X, fraction volumique : P (0.1 – 0.6).

A titre illustratif, nous avons également tracé, sur le même graphe, la courbe contrainte-déformation dans le cas de la traction uniaxial.

L'analyse des courbes de la figure IV.14 montre que le comportement en compression est complètement symétrique par rapport au comportement en traction, ce qui nous conduit à maintenir les mêmes conclusions que pour le cas de l'essai de traction.

IV.7. Isotropie du comportement élasto-plastique

Afin d'évaluer plus précisément les déformations plastiques et de vérifier leur homogénéité spatiale, une seconde série d'essais de traction dans l'intervalle de la fraction volumique P (0.1 – 0.6) a été réalisée en changeant cette fois la direction de sollicitation, on choisit l'axe Y comme un axe de chargement.

Les courbes de traction de chaque fraction volumique, dans les deux directions X et Y, sont représentées sur les Figures (IV.15. a-f)

Chapitre IV : Calcul du comportement effectif non linéaire d'un composite transversalement isotrope par une technique d'homogénéisation

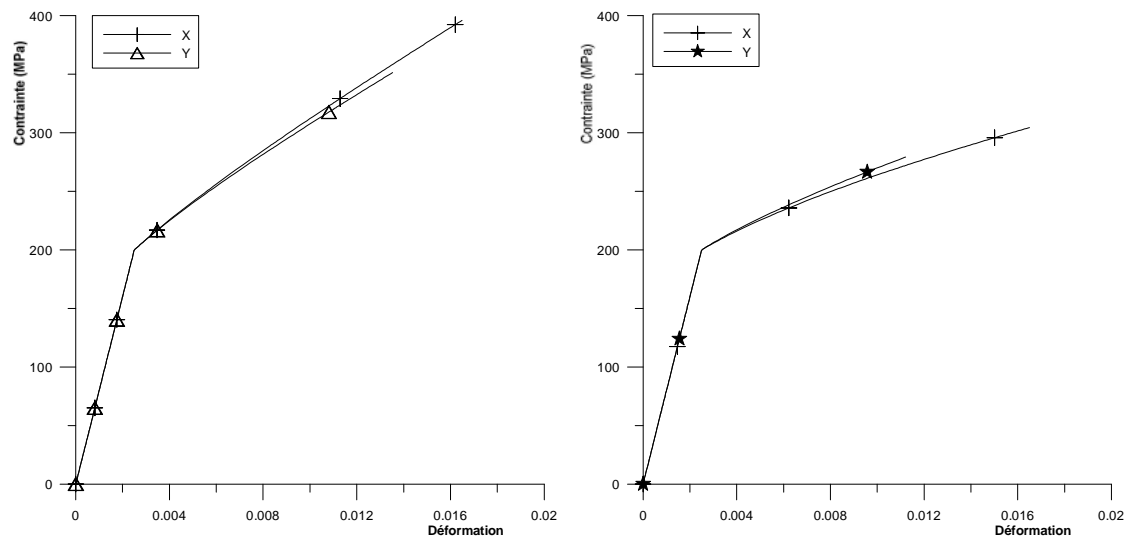
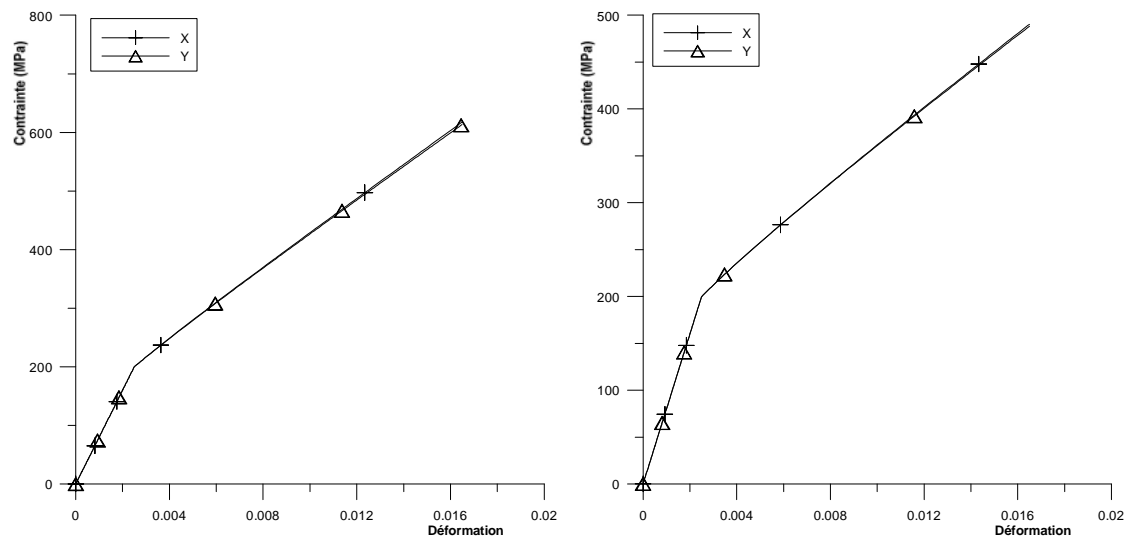
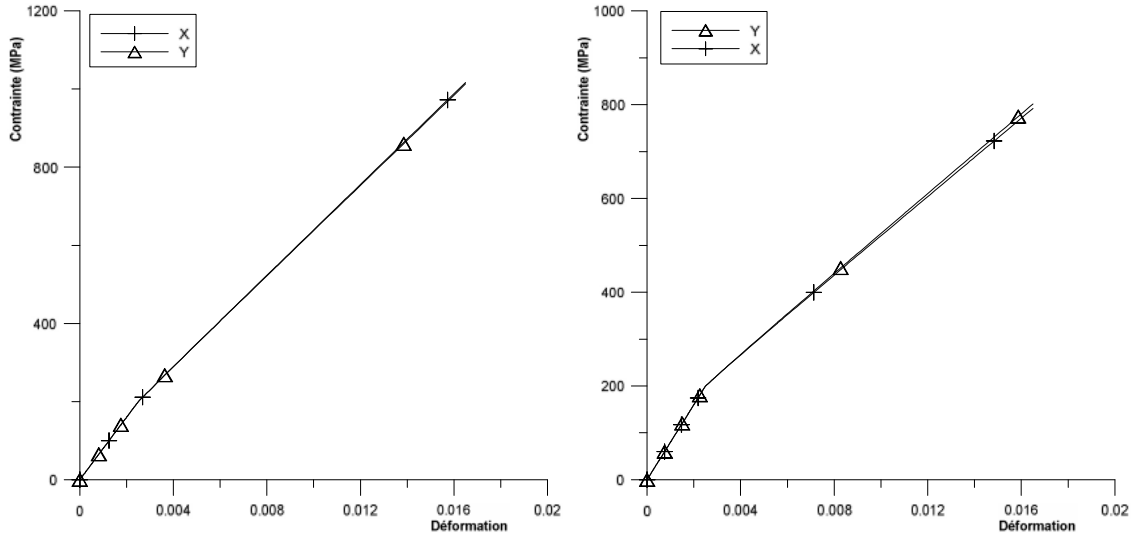


Fig. IV.15: Nature du comportement apparent dans la direction de sollicitation Y, courbes de traction, fraction volumique: P (0.1 – 0.6).

L'exactitude des résultats obtenus dans les deux cas de chargement, est clairement illustrée à travers la superposition des deux courbes à chaque fois. Néanmoins, une très légère divergence commence à apparaître dans le cas de fractions volumiques dépassant les 50%, sans pour autant influencer sur le comportement élasto-plastique global.

IV.8. Effet de la fraction volumique des fibres sur le paramètre d'écroutissage H^{eff}

Les résultats obtenus dans les simulations montrent que, lorsque la fraction volumique des fibres augmente le module tangent plastique effective H^{eff} diminue pour tendre vers un état parfaitement plastique, figure IV.16.

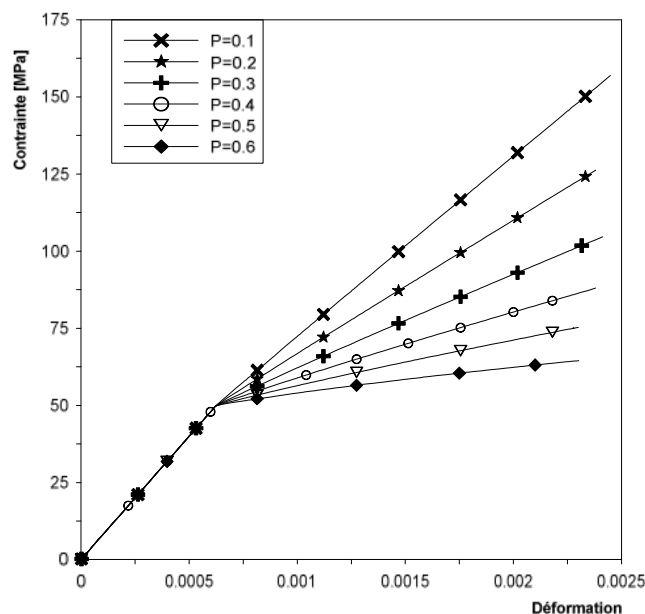


Fig. IV.16: Influence de la fraction volumique des fibres: P (0.1 – 0.6)

IV-9- Etablissement d'une expression semi-analytique pour prédire le taux d'écroutissage en fonction de la fraction volumique

Pour donner, en plus de l'interpolation mathématique, un sens physique au comportement élasto-plastique de la microstructure, le module effectif H^{eff} a été exprimé en fonction de la fraction volumique (sans unité physique), plutôt qu'en fonction du module d'Young de la matrice.

Dans la figure IV-17 sont représentés les résultats du module élasto-plastique effectif H^{eff} obtenus, d'après les courbes de contraintes-déformations (fig.IV-12), pour chaque

valeur de la fraction volumique, ceci pour les deux cas de chargement, suivant l'axe X et suivant l'axe Y.

Il faut noter que le module élastoplastique effectif pour chaque fraction est obtenu par interpolation linéaire des courbes de la figure IV.13.

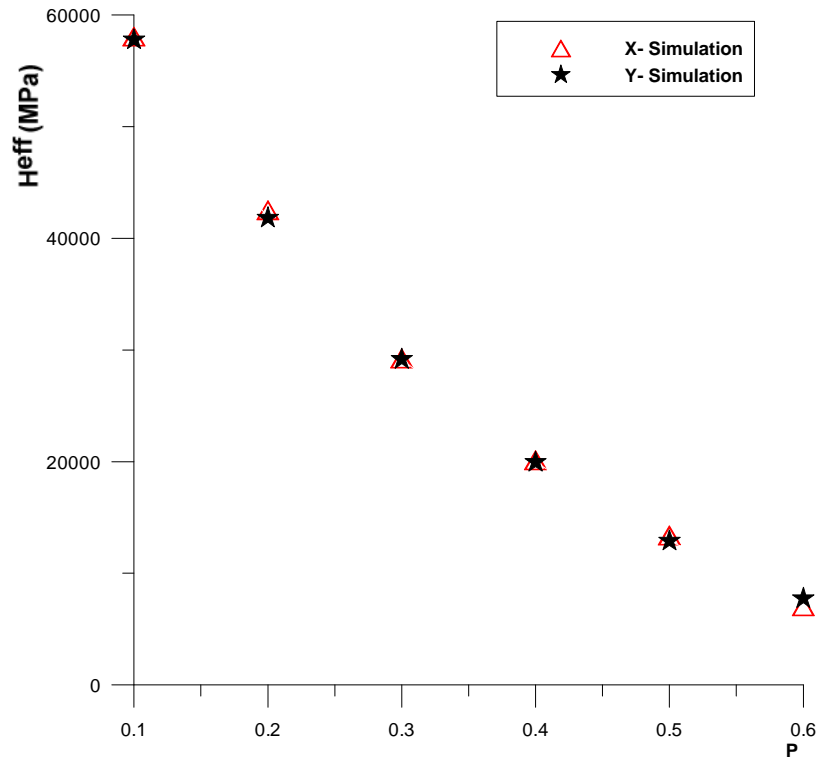


Fig. IV.17: l'évolution du module élasto-plastique effectif H^{eff} en fonction de la fraction volumique P (0.1 – 0.6).

Pour calculer H^{eff} , une formule analytique résumant la relation entre les deux variables: module d'Young de la matrice E_m et la fraction volumique P des fibres est proposée. D'après la forme de la courbure, un polynôme du second ordre simple peut être choisi pour interpoler la courbe représentant le module élasto-plastique effectif H^{eff} en fonction de la fraction volumique des fibres P et le module d'Young de la matrice E_m . La formule proposée s'écrit alors:

$$H^{eff} = E_m(A_1P^2 + A_2P + A_3) \quad (IV.5)$$

où A_1, A_2 et A_3 : sont trois constantes obtenues par l'interpolation de la figure IV-16. Ils prennent pour valeurs :

$$A_1 : 2,2; A_2 : -2,74 \text{ et } A_3 = 1.$$

Donc on aura :

$$H^{eff} = E_m(2.2P^2 - 2.74P + 1) \quad (IV.6)$$

Il convient de noter que l'hors d'utilisation de la formule (IV.6), on peut facilement récupérer le cas théorique pour un matériau homogène élastique linéaire, il suffit de remplacer P par zéro dans l'équation (IV.6) nous obtenons ainsi :

$$E_x^{eff} = E_y^{eff} = E_m \quad (IV.7)$$

Par contre, pour le cas $= 1$, c'est-à-dire absence totale de matrice, l'expression (IV.6) n'aura plus de sens physique, car l'intervalle de la variation de P est de 0 à 0.6, ce qui représente le seuil de percolation. Il convient de noter également, que dans la formule (IV.6), la valeur $A_3 = 1$ est tout à fait remarquable.

Les valeurs de H^{eff} simulées dans la section précédente et ceux calculés à partir de la formule analytique obtenue (IV.6) pour différentes fractions volumiques, sont rapportées et comparées dans la Figure. IV.18. la superposition est quasi-totale.

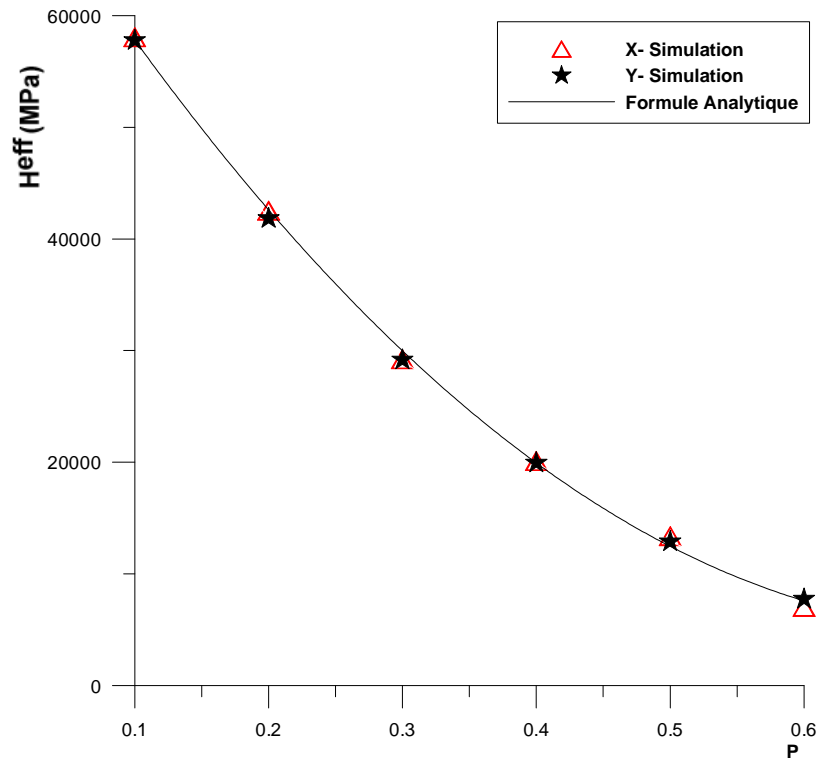


Fig. IV.18: Module élastoplastique effectif H^{eff} en fonction de la fraction volumique provenant de la simulation numérique et à partir de la formule analytique.

L'erreur relative en % entre H^{eff} , numériquement simulé et calculé à partir de l'équation (IV.6) est présenté dans le tableau 1, pour plusieurs fractions volumiques P (0.1 à 0.6).

Chapitre IV : Calcul du comportement effectif non linéaire d'un composite transversalement isotrope par une technique d'homogénéisation

P	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
Erreur %	5	5	2	1	1	1

Tableau. IV.1: L'erreur relative en % entre H^{eff} , numériquement simulé et calculé à partir de l'équation (IV.6).

A titre vérificatif, la figure IV.19 illustre les courbes de contrainte-déformation en traction représentant les paramètres de comportement effectif provenant de la simulation numérique et à partir de la formule analytique. La réponse est vérifiée pour trois fractions volumiques $P = 0,1; 0,2$ et $0,4$. Pour ces trois cas, les deux courbes présentent une très bonne concordance.

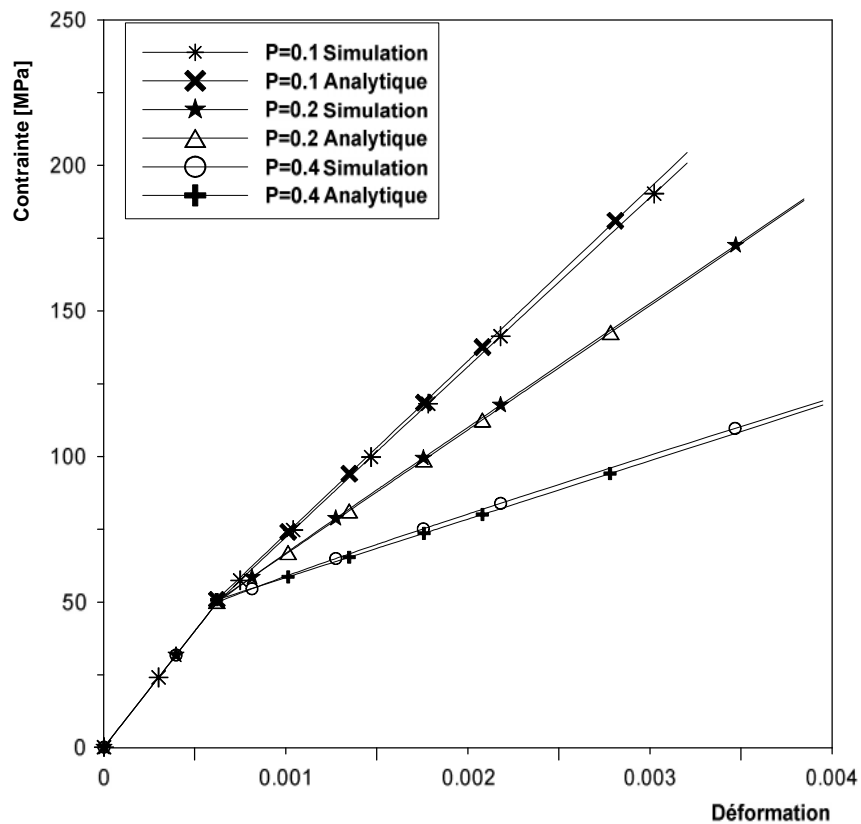


Fig. IV.19: les courbes de contrainte-déformation en traction ; représentations des paramètres de comportement effectif provenant de la simulation numérique et à partir de la formule analytique.

$P = 0,1; 0,2$ et $0,4$

IV.10. lois de comportement pour les microstructures tridimensionnelles. Effet de l'épaisseur

IV.10.1. Génération de modèles éléments finis de la microstructure 3D

Un maillage d'éléments finis avec des éléments multiphases, est utilisé pour générer la géométrie 3D. Les microstructures ont été construites en 3D à partir des coupes présentant les images 2D. Ces images ont été assemblées pour générer le VER 3D recherché (figure IV.20).

La microstructure obtenue contient des fibres de formes cylindriques identiques distribuées d'une manière aléatoire dans la matrice. Le maillage utilisé est assez fin pour représenter avec précision la géométrie des constituants et assurer la convergence de la réponse de la microstructure. Une grille d'éléments finis est ensuite superposée sur l'image en 3D en utilisant des éléments quadratiques. Différents types de microstructures sont obtenues en fonction de la fraction volumique, voir figure (IV-22).

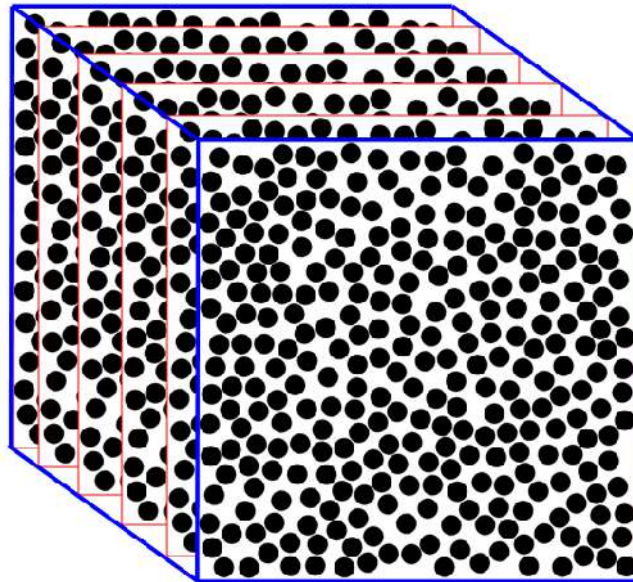


Fig. IV. 20 : Microstructure en 3D construite à partir des coupes présentant les images 2D.

IV.10.2. Influence de l'épaisseur sur le comportement mécanique

Pour étudier l'effet de l'épaisseur du composite sur le comportement transversal dans le plan (XY), une analyse par éléments finis d'un VER en trois dimensions à l'aide du code de calcul ZEBULON a été réalisée, pour évaluer la réponse d'une microstructure d'épaisseur $z = 10$, pour différentes fractions volumiques des fibres variant de 0,1 à 0,3 avec deux essais de traction, l'un suivant X , l'autre suivant Y . L'approche est validée en comparant la courbe de contrainte-déformation avec les résultats en 2D.

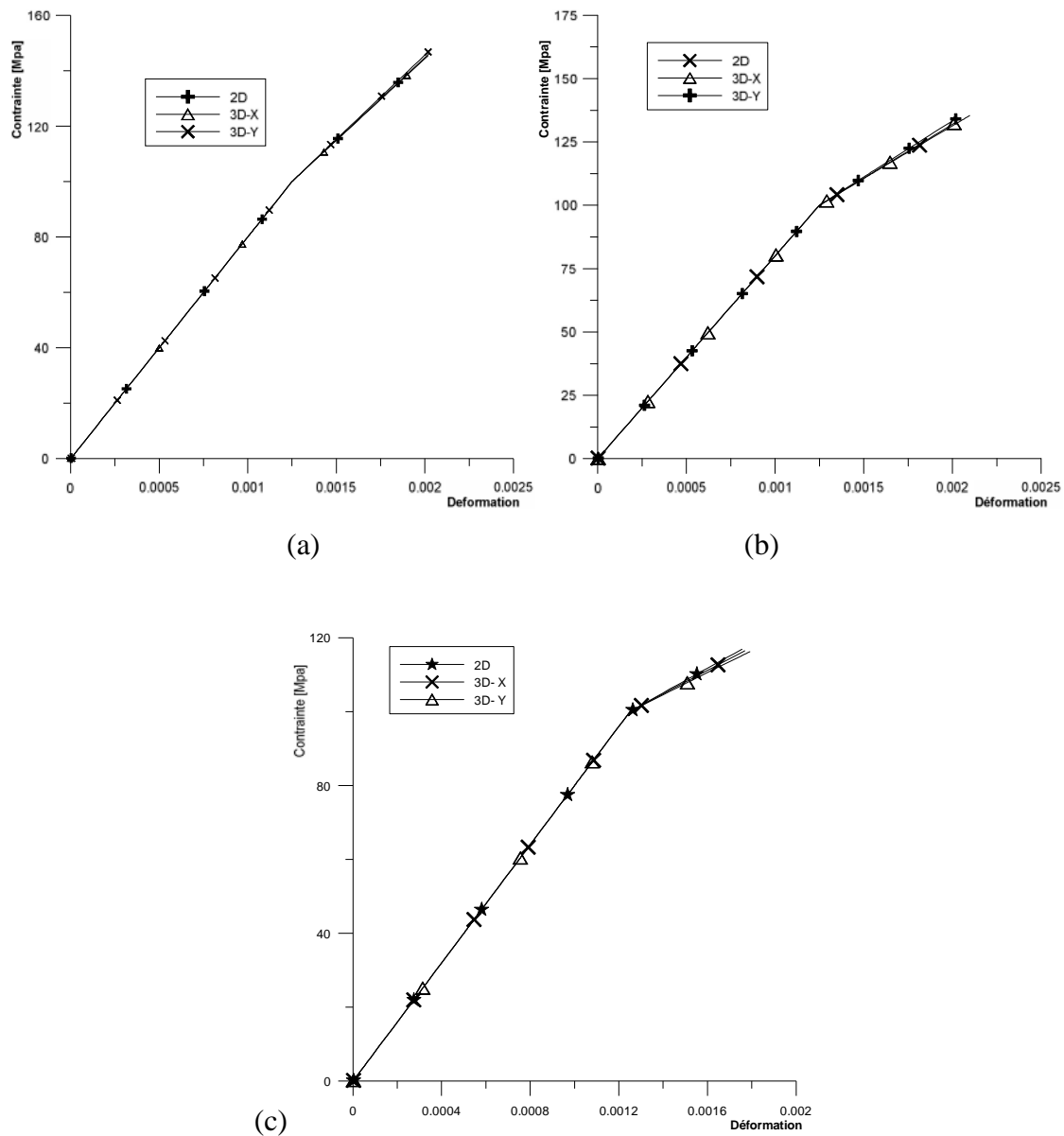


Fig. IV.21: Courbe de contrainte-déformation en traction dans les directions X , Y en 3D, 2D, différentes fractions volumiques des fibres. (a): $P = 0.1$; (b): $P = 0.2$; (c): $P = 0.3$., pour $z = 10$.

Les résultats montrent une superposition quasi parfaite entre les courbes 2D et 3D, ce qui réduit considérablement l'effet de l'épaisseur choisie.

Afin de vérifier l'influence de l'épaisseur sur le comportement mécanique obtenu, trois microstructures différentes sont successivement considérées avec trois différentes épaisseurs $z = 10, 40$ et 70 (figure IV.22), le composite a été étudiée lors d'essais de traction dans les trois directions X, Y et Z (figure IV.23).

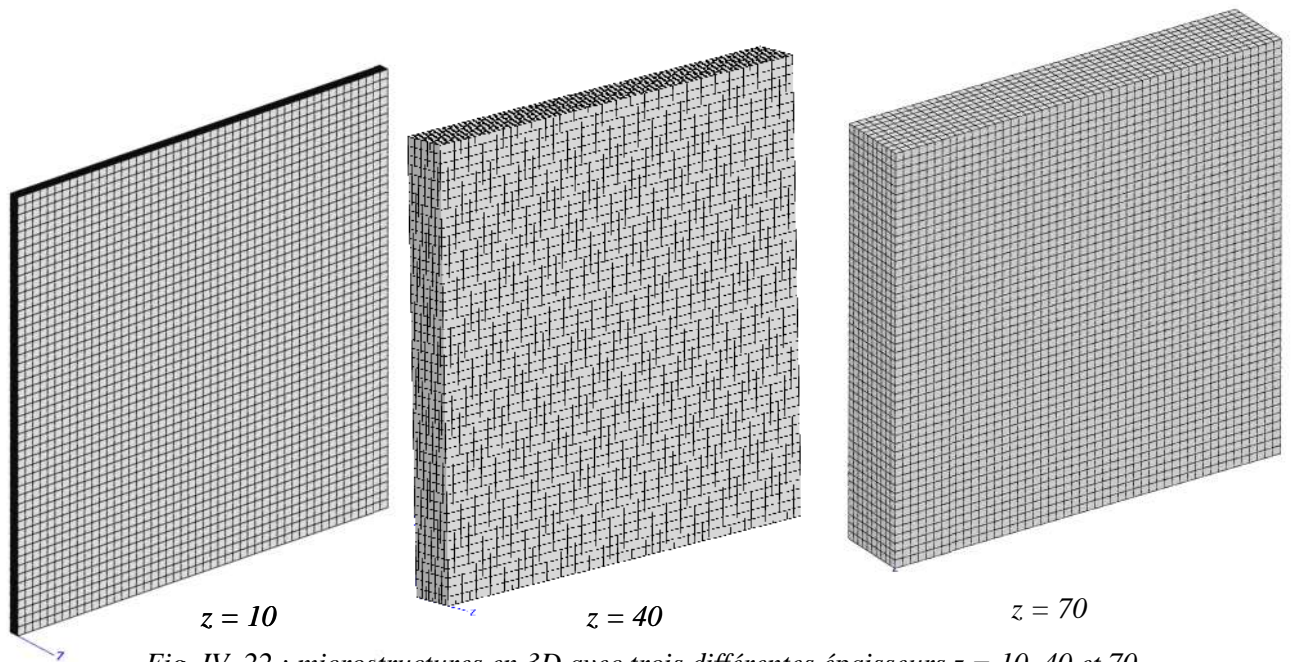


Fig. IV. 22 : microstructures en 3D avec trois différentes épaisseurs $z = 10, 40$ et 70 .

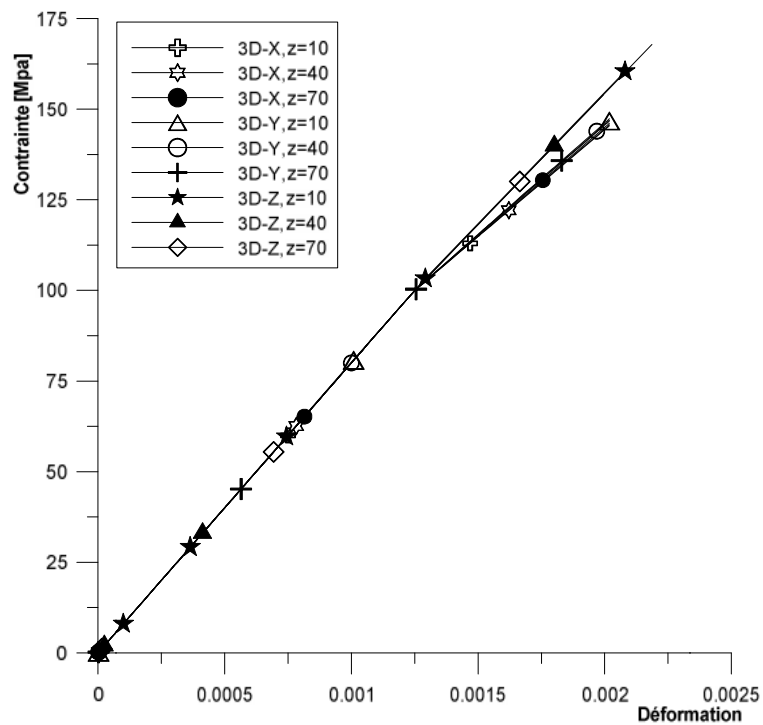


Fig. IV.23: Courbe contrainte-déformation en traction dans les directions X, Y et Z , trois géométries d'épaisseur différentes : $z = 10, 40$ et 70

La figure IV.23 montre que les courbes de contraintes déformations en traction dans les directions X et Y sont parfaitement superposées, par contre suivant la direction Z , la partie élasto-plastique présente une légère différence, tout à fait logique au vu de la nature isotrope transverse du matériau considéré.

Des exemples de l'évolution de la contrainte et la déformation au cours de l'essai de traction uniaxial indépendamment dans la direction X sont représentés sur les figures IV.24 ; IV.25 et IV.26 pour les trois épaisseurs étudiées.

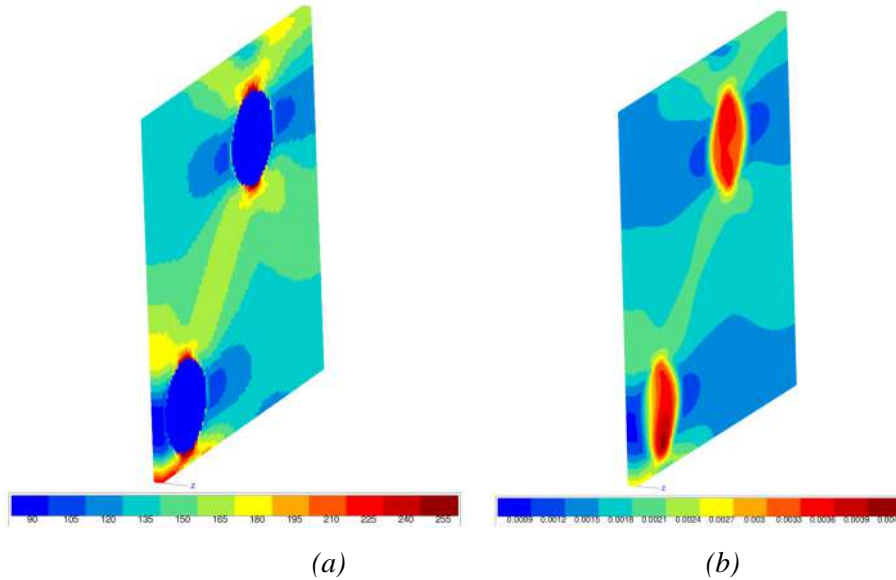


Fig.IV.24 : Evolution de la contrainte [MPa] et la déformation au cours de l'essai de traction uniaxial avec un épaisseur : $Z = 10$; (a) : Champs de contrainte; (b) : Champs de déformation.

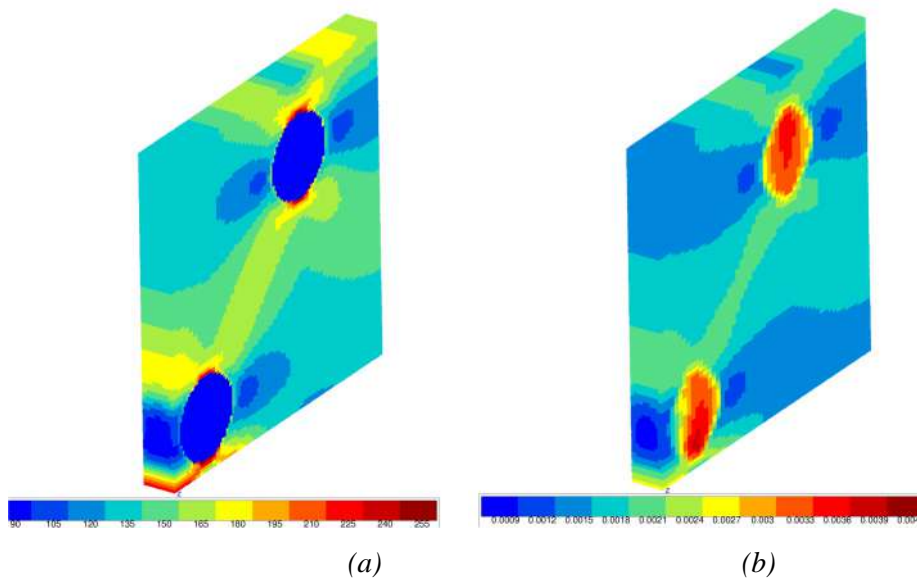


Fig. IV.25 : Evolution de la contrainte [MPa] et la déformation au cours de l'essai de traction uniaxial avec un épaisseur $z = 40$; (a) : Champs de contrainte; (b) : Champs de déformation.

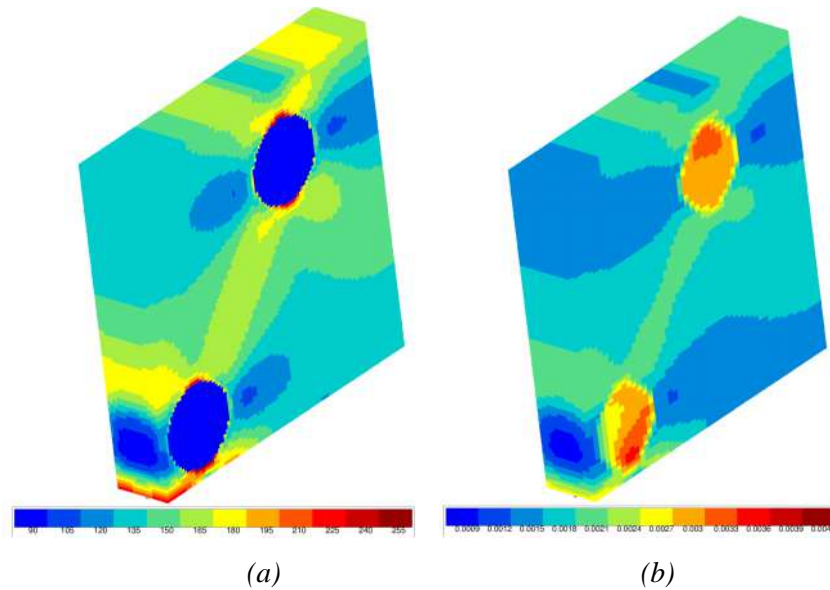


Fig. IV.26 : Evolution de la contrainte et la déformation au cours de l'essai de traction uniaxial avec une épaisseur $Z = 70$; (a) : Champs de contrainte; (b) : Champs de déformation.

IV.11. Conclusion

Le comportement macroscopique d'un composite élastoplastique à deux phases : matrice élastique renforcée avec une distribution aléatoire de fibres cylindriques parallèles parfaitement plastique a été étudié par la technique d'homogénéisation.

Dans cette partie, la technique d'homogénéisation basée sur la notion de volume élémentaire représentatif VER est utilisée pour prédire les propriétés effectives des microstructures et arriver à développer un modèle semi analytique de comportement mécanique macroscopique liée au comportement des deux phases.

Dans un premier temps nous nous sommes intéressé uniquement à la réponse transverse du composite sous un chargement uniaxial. La réponse du matériau composite est obtenue numériquement (Fig. IV-4) où la contrainte axiale globale a été représentée en fonction de la déformation axiale. On a remarqué que le matériau composite présente un comportement élasto-plastique linéaire, qui est, capable de se durcir (notion d'écrouissage) avec la déformation plastique; contrairement au comportement des fibres élastiques-parfaitement plastiques.

Par la suite, nous avons essayé de déterminer la relation entre les paramètres du comportement élasto-plastique effectif du composite et le module de Young de la matrice E_m , la limite élastique des fibres R_0^f et la fraction volumique P des fibres, afin de

pouvoir proposer une formule analytique pour décrire le comportement effectif globale et généralisé.

Une étude de l'influence des différents paramètres sur le comportement élasto-plastique a été réalisée, à savoir : le coefficient de Poisson des deux phases du composite, la limite d'élasticité du comportement parfaitement plastique des fibres, la répartition aléatoire des fibres avec plusieurs réalisations, la fraction volumique des fibres et le module d'Young.

Concernant l'influence du coefficient de Poisson, les résultats montrent que pour tous les cas, la variation des coefficients de Poisson ne perturbe en rien le comportement élasto-plastique du matériau homogénéisé.

Concernant l'influence de la limite d'élasticité, on constate que les résultats obtenus pour la limite élastique effective, restent identiques à la limite d'élasticité considérée pour les fibres.

Concernant l'influence de la répartition aléatoire des fibres avec plusieurs réalisations, la constatation la plus importante que l'on peut tirer des résultats obtenus, c'est bien l'influence quasi-nulle de la distribution aléatoire des fibres, sur la loi de comportement.

Les résultats du comportement en compression montrent que ce dernier est complètement symétrique par rapport au comportement en traction, ce qui nous conduit à maintenir les mêmes conclusions que pour le cas de l'essai de traction.

Concernant l'effet de la fraction volumique des fibres sur le paramètre d'écrouissage H^{eff} , les résultats obtenus dans les simulations montrent que, lorsque la fraction volumique des fibres augmente le module tangent plastique effectif H^{eff} diminue pour tendre vers un état parfaitement plastique.

Pour conclure tout cela, une expression semi-analytique pour prédire le taux d'écrouissage en fonction de la fraction volumique a été établie et a donné grande satisfaction sur tous les plans, pour les microstructures en 2D ou en 3D.

Conclusion générale

En général, le comportement mécanique d'un milieu hétérogène dépend de sa microstructure hétérogène. Pour ce qui est du comportement élastique, le nombre de travaux disponibles dans la littérature est important par contre peu de travaux traitent le comportement élasto-plastique de matériaux hétérogènes. Dans le cadre de cette thèse, qui vient se rajouter aux travaux sur le comportement élasto-plastique des matériaux hétérogènes, nous avons pu prédire la réponse mécanique effective de ce type de matériaux dans l'hypothèse d'une plasticité parfaite. En effet, nous déterminons la réponse mécanique de fibres parfaitement plastiques enrobées dans une matrice parfaitement élastique. Ce travail s'articule en quatre chapitres :

Le premier chapitre est un aperçu général sur le comportement élasto-plastique des matériaux, et leurs modélisations en précisant les aspects fondamentaux sur lesquels ils s'appuient. Aussi, différents critères et modèles du comportement mécanique élasto-plastique sont présentés.

Le deuxième chapitre décrit brièvement les bases de l'homogénéisation microscopique des milieux hétérogènes en élasticité linéaire et non linéaire.

Par la suite, la modélisation de la microstructure d'un composite à fibres longues, est détaillée dans le troisième chapitre. Dans celui-ci, la méthode utilisée pour élaborer des échantillons numériques de la microstructure aléatoire présentant une forte fraction volumique est explicitée. En effet, cette méthode permet de générer aléatoirement des nuages de points lesquels définissent les centres des fibres. En conséquence, un nombre important d'échantillons sont produits afin de caractériser leur comportement mécanique. Dans ce chapitre, nous présentons également une méthode développée pour calculer la fraction volumique des constituants et la caractérisation de leur morphologie. Dans le cadre d'une approche exclusivement numérique, la démarche adoptée passe par deux étapes ; dont la première consiste en une génération de disques de rayons constants répartis aléatoirement dans un cadre élémentaire de manière à se rapprocher de la fraction volumique de 52 %, et la seconde constitue une caractérisation de la morphologie des constituants du matériau ainsi obtenu. Dans ce contexte, un algorithme est développé sous environnement FORTRAN pour visualiser la microstructure des échantillons numériques. La microstructure est alors caractérisée à l'aide d'un outil que nous avons développé sous MATLAB et qui permet de faire une étude comparative des échantillons, de déterminer le nombre de cercles

correspondant au nombre de particules dans un composite, les coordonnées des cercles dans le plan qui correspondent au centre des particules et enfin la taille des particules.

Dans le quatrième chapitre, la technique d'homogénéisation basée sur la notion de volume élémentaire représentatif VER est utilisée pour prédire les propriétés effectives des microstructures et arriver à développer un modèle semi analytique du comportement mécanique macroscopique liée au comportement des deux phases. Nous avons noté au cours d'une première investigation que le matériau composite sous un chargement axial a un comportement élasto-plastique linéaire ce qui peut provoquer un durcissement équivalent à celui causé par un écrouissage accompagné d'une déformation plastique. Ainsi et dans le but d'établir une formule analytique pour décrire le comportement effectif globale et généralisé, nous avons essayé de corréler les paramètres effectifs du composite, d'une part, et le module de Young de la matrice E_m , la limite élastique des fibres R_0^f et la fraction volumique P des fibres d'une autre part. Une analyse de l'influence des différents paramètres sur le comportement élasto-plastique nous a permis de constater que la variation des coefficients de Poisson ne perturbe en rien le comportement élasto-plastique du matériau homogénéisé, que les résultats obtenus pour la limite élastique effective, restent identiques à la limite d'élasticité considérée pour les fibres. Par ailleurs, il est important de confirmer que la répartition aléatoire des fibres n'a aucune influence significative sur la loi de comportement. Aussi, les résultats du comportement en compression montrent que ce dernier est complètement symétrique par rapport au comportement en traction, ce qui nous pousse à maintenir les mêmes conclusions que pour le cas de l'essai de traction. Les résultats numériques montrent également que la fraction volumique des fibres est inversement proportionnelle au module tangent plastique effective H^{eff} , lequel diminue pour tendre vers un état parfaitement plastique.

Une lecture des résultats obtenus nous a permis d'établir une expression semi-analytique qui prédit le taux d'écrouissage en fonction de la fraction volumique. Cette expression a été testée et a donné grande satisfaction pour les microstructures en 2D ou en 3D. Elle peut estimer, pour un composite à fraction volumique connue, le taux d'écrouissage dans le cas d'un comportement élasto-plastique.

A terme de ce travail et en perspective, il est souhaitable de proposer un modèle de changement d'échelles permettant de déterminer les variances et covariances pour tout chargement macroscopique imposé et pas uniquement les valeurs moyennes des variables mécaniques dans chaque phase. En effet, ce type de modélisation va simplifier la représentation d'un milieu hétérogène en lui substituant un milieu homogène équivalent. D'un

autre côté, ce type de milieux hétérogènes peut être étudié avec différentes formes géométriques d'inclusions et même sans condition de percolation, C'est le cas, par exemple, des milieux poreux tridimensionnels ou bien les mousses métalliques.

Références Bibliographiques

Badiche, X., Forest, S., Guibert, T., Bienvenu, Y., Bartout, J. D., Ienny, P., Croset, M., Bernet, H., 2000. Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous materials, *Materials Science and Engineering A* A289 276–288.

Bellet, M., Deville, M., Rappaz, M., 1998. Modélisation numérique en science et génie des matériaux (TM volume 10).

Benveniste, Y., 1987. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, Vol. 6, pp. 147-157.

Berveiller, M., Zaoui, A., 1979. An extension of the self-consistent scheme to plastically owing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* 26, 325–344.

Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L., Forest, S., 2001. *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès Science.

Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P., 2001. *Homogénéisation en mécanique des matériaux. Tome I : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermes, Paris,.

Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P., 2001. *Homogénéisation en mécanique des matériaux. Tome II : Comportements non linéaires et problèmes ouverts*. Hermes, Paris.

Camacho, C.W., Tucker, C.L., Yalvac, S., McGee, R.L., 1990. Stiffness and thermal expansion predictions for hybrid short fiber composites. *Polym. Compos.* 11 (4), 229–239.

Chaboche, J. L., Kanoute, P., 2003. Sur les approximations "isotrope" et "anisotrope" de l'opérateur tangent pour les méthodes tangentes incrémentale et affine. *C. R. Mécanique*, 331 :857–864.

Chaboche, J. L., Kanoute, P., Roos, A., 2005. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *Inter. Jour. of Plast.*, 21 :1409–1434,

Charmet, J.C., 1980. *Mécanique du solide et des matériaux Elasticite-Plasticite-Rupture*" ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique.

Christensen, R.M., 1979. *Mechanics of Composite Materials*. Wiley, New York, pp.84–89.

Dasgupta, A., Bhandarkar, S.M., 1992. A generalized self consistent Mori-Tanaka scheme for fiber composites with multiple interphases. *Mech. Mater.* 14, 67–82.

Decker, L., Jeulin, D., 1999. 3D spatial time structure simulations by reaction diffusion models, *Acta Stereologica* 18 247–254.

Decker, L., 1999. *Modèles de structures aléatoires de type réaction-diffusion*, PhD thèse, École des Mines de Paris.

Do, D.P., 2008. Influence de la microstructure sur les propriétés mécaniques, thermique et hydrique des roches poreuses partiellement saturées : approche micromécanique et modélisation macroscopique. PhD thesis, I.N.P.L - Nancy.

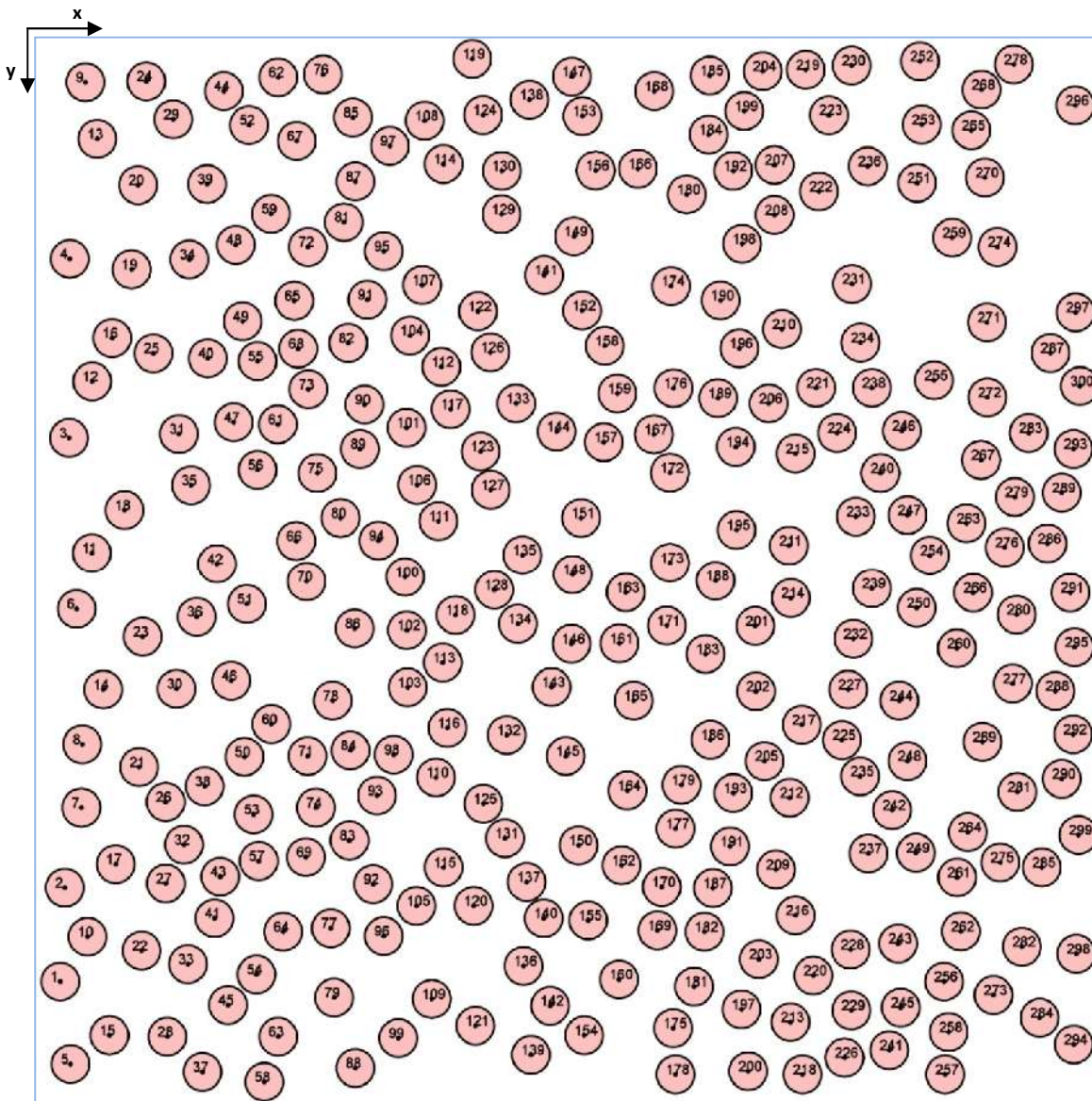
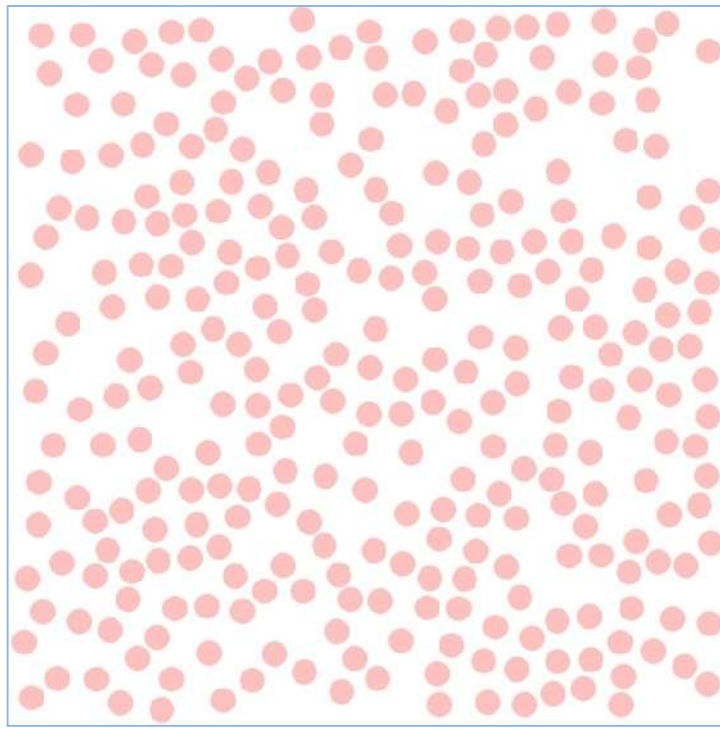
- Doghri, I., Ouair, A., 2003. Homogenization of two-phase composite materials and study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *Internat. Journal of Solids and Structures*, 40 :1681–1712.
- Dvorak, G. J., Benveniste, Y., 1992. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proc. R. Soc. Lond.*, A437 :291–310.
- El Ouarzazi, Y., 2000. Mechanical properties of a highly-contrasted two phase material, Technical report, École des Mines de Paris/Unilever.
- Eshelby, 1961. Elastic inclusion and inhomogeneities. Sneddon IN, Hill R. Editors, *Progress in solid Mechanics*, Vol. 2, pp. 89-140.
- Fitoussi, J., 1995. Etude micromécanique de l'influence de l'endommagement à l'interface fibre/matrice sur le comportement des composites organiques à renforts discontinus. Thèse de l'ENSAM, Paris.
- François, D., Pineau, A., Zaoui, A., 1990, *Comportement mécanique des matériaux*. Edition Hermes, Vol.1.
- François, D., Pineau, A., Zaoui, A., 1992. *Comportement mécanique des matériaux : élasticité et plasticité*.
- Gibson, L.J., Ashby, M.F., 1998. *Cellular solids*, Cambridge University Press.
- Gilormini, P., 1995. Insuffisance de l'extension classique du modèle auto-cohérent au comportement non linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. Iib* 320, 115–122.
- Gonzalez, C., Llorca, J., 2000. A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :675–692.
- Grillon, F., 2001. Communication personnelle.
- Guery, A., 2007. Contribution à la modélisation micromécanique du comportement non linéaire de l'argilite du Callovo-Oxfordien. PhD thesis, Université de Lille I.
- Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., 2001. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents I. Elastic and hexagonal sym-metry. *J. Mech. Phys. Solids* 49, 1445–1462.
- Guinovart-Díaz, R., López-Realpozo, J.C., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Ramírez, M., Camacho-Montes, H., 2011. Influence of parallelogram cells in the axial behavior of fibrous composite. *Int. J. Eng. Sci.* 49, 75–84.
- Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., López-Realpozo, J.C., Sabina, F.J., Sevostianov, I., 2013. Effective elastic properties of a periodic fiber reinforced composite with parallelogram-like arrangement of fibers and imperfect contact between matrix and fibers. *Int. J. Eng. Sci.* 58, 2–10.
- Haramburu, E., 2003. Approche intégrée du dimensionnement mécanique de structures en composite injecté avec fibres courtes : une interface entre injection et calcul de structure. Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse.

- Hashin, Z., 1979. Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. *J. Appl. Mech.* 46, 543–550.
- Hershey, A.V., 1954. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21 :226–240.
- Hill, R., 1963. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 357-372.
- Hill, R., 1965. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys.Solids* 13 (4), 213–222.
- Hui-Zu, S., Tsu-Wei, C., 1995. Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composites with fiber/matrix interfacial debonding. *Combust. Sci. Technol.* 53,383–391.
- Hutchinson, J.W., 1970. Elastic–plastic behavior of polycrystalline metals and composites. *Proc. Roy. Soc. London A* 355, 101–127.
- Hutchinson, J.W., 1976. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 348 :101–127.
- Jeulin, D., Ostoja-Starzewski, M., 2001. *Mechanics of Random and Multiscale Microstructures CISM Lecture Notes*. 430. Springer-Verlag.
- Jiang, T., Shao, J.F., 2009. On the incremental approach for nonlinear homogenization of composite and influence of isotropization. *Comp. Mat. Sci.*, 46 :447–451.
- Ju, J.W., Sun, L.Z., 2001. Effective elastoplastic behavior of metal-matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities Part I: micromechanics-based formulation. *Int. J. Solids Struct.* 38, 183–201.
- Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., Jeulin, D., 2003. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *Int. J. Solids Struct.* 40, 3647–3679.
- Khalfallah, A., 2004. Identification des lois de comportement élastoplastiques par essais inhomogenes et simulations numériques. Thèse de l'Université EL MANAR, TUNIS.
- Lielens, G., (PhD thesis) 1999. Micro–macro modeling of structured materials. Université Catholique de Louvain, Belgium.
- Lachaud, F., Jetteur, P., 2003. Modélisation du comportement des composites à fibres courtes: application à l'impact basse vitesse. 14^{ème} Journées Nationales sur les Composites, JNC-14.
- Maire, E., Watted, F., Buffiere, J.Y., Peix, G., 1999. Deformation of a metallic foam studied by X-ray computed tomography and finite element calculations, in : T.W. Clyne, A.B. Simancik (Eds.), *Proceedings of the 'Euromat 99' Conference in München*, Vol. 5, Wiley, , pp. 68–73.
- Molkov, B.A., Pobedria, B.E., 1985. Effective characteristic of fibrous unidirectional composite with periodic structure. *Mech. Solids* 2, 119–129.
- Moravec, F., Roman, S., 2009. Numerical computing of elastic homogenized coefficients for periodic fibrous tissue. *Appl. Comput. Mech.* 3, 141–152.

- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* 21, 571–574.
- Michel, J. C., Suquet, P., 2003. Non uniform transformation field analysis. *Int. Jour. Sol. Struc.*, 40 :6937–6955.
- Michel, J. C., Suquet, P., 2004. Computational analysis of nonlinear composite structures using the non uniform transformation field analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :5477–5502.
- Nemat-Nasser, S., Hori, M., 1993. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland, London.
- Nemat-Nasser, S., Hori, M., 1999. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, second ed. Elsevier, Amsterdam.
- Patrick de Buhan , 2007. *Plasticité et calcul à la rupture*.
- Petelet, M., 2007. *Analyse de sensibilité globale de modèles thermomécaniques de simulation numérique du soudage*. Thèse de l'Université DE BOURGOGNE, France.
- Pettermann, H., Plankesteiner, A.F., Bohm, H.B., Rammerstorfer, F.G., 1999. A thermoelastoplastic constitutive law for inhomogeneous materials based on an incremental Mori–Tanaka approach. *Compos. Struct.* 71, 197–214.
- Pierard, O., 2004. *Micro/macro study of reinforced polymers and polymeric composites. Mathematical modeling and numerical simulation of elastoviscoplastic behavior and thermal coupling*. DEA graduation report. Université Catholique de Louvain, Belgium.
- Pierard, O., Doghri, I., 2006. A study of various estimates of the macroscopic tangent operator in the incremental homogenization of elasto-plastic composites. *Int. J. Mult. Comp. Eng.* 4 :521–543.
- Proix, J.M., 2013. *Choix du comportement élasto-visco-plastique*. Manuel d'utilisation, Code Aster.
- Ponte-Castaneda, P., Suquet, P., 1987. Nonlinear composites. *Adv. Appl. Mech.* 34.
- Ponte-Castaneda, P., Suquet, P., 1998. Nonlinear composites. *Adv. Appl. Mech.* 34,171–302.
- Ponte Castaneda, P., 1991. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :45–71.
- Raimondo, L., Iannucci, L., Robinson, P., Curtis, P.T., 2012. Modeling of strain rate effects on matrix dominated elastic and failure properties of unidirectional fiber-reinforced polymer–matrix composites. *Comput. Sci. Technol.* 72,819–827.
- Rekik, A., Auslender, F., Bornert, M., Zaoui, A., 2007. Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization : A methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes. *Int. Jour. Sol. Struc.*, 44 :3468–3496.
- Rekik, A., Bornert, M., Auslender, F., Zaoui, A., 2005. A methodology for an accurate evaluation of the linearization procedures in nonlinear mean field homogenization. *C. R. Mecanique*, 333 :789–795.

- Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., 2001. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents I. Elastic and square symmetry. *Mech. Mater.* 33, 223–235.
- Rodríguez-Ramos, R., Berger, H., Guinovart-Díaz, R., López-Realpozo, J.C., Würkner, M., Gabbert, U., Bravo-Castillero, J., 2012. Two approaches for the evaluation of the effective properties of elastic composite with parallelogram periodic cells. *Int. J. Eng. Sci.* 58, 2–10.
- Sanchez-Palencia, E., Zaoui, A., 1987. *Homogenization Techniques for Composite Media. Lecture Notes in Physics.* 272. Springer-Verlag, Berlin.
- P. Suquet, 1995. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castaneda nonlinear variational procedure. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 320 :563571.
- P. Suquet, 1997. Effective behavior of nonlinear composites. In : *Continuum micromechanics*, Suquet ed., Springer Verlag Wien, 197-264.
- Suquet, P., 1997. *Continuum Micromechanics. CISM Courses and Lectures No. 377.* Springer-Verlag, Berlin.
- Swan, C.C., Kosaka, I., 1997. Voigt-Reuss topology optimization for structures with linear elastic material behaviors. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 40, 3033–3057.
- Tandon, G.P., Weng, G.J., 1988. A theory of particle-reinforced plasticity. *J. Appl. Mech.* 55, 126–135.
- Taylor, G.I., Quinney, M.A., 1931. The Plastic Distortion of Metals. *Phil. Trans. Royal Society, A*, 230 :323–362.
- Tucker, Liang, 1999. stiffness predictions for unidirectional short fiber composites. *Composites Science and Technology*.
- Tuncer, E., 2005. Numerical calculations of effective elastic properties of two cellular structures. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 38, 497–503.
- Voigt, W., 1990. *Lehrbuch der kristallphysik*, Teubner, Berlin.
- Willis, J., 1981. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv. Appl. Mech.* 21, 1–78.
- Zaoui A., 1998. *Matériaux hétérogènes et composites.* Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

Annexe



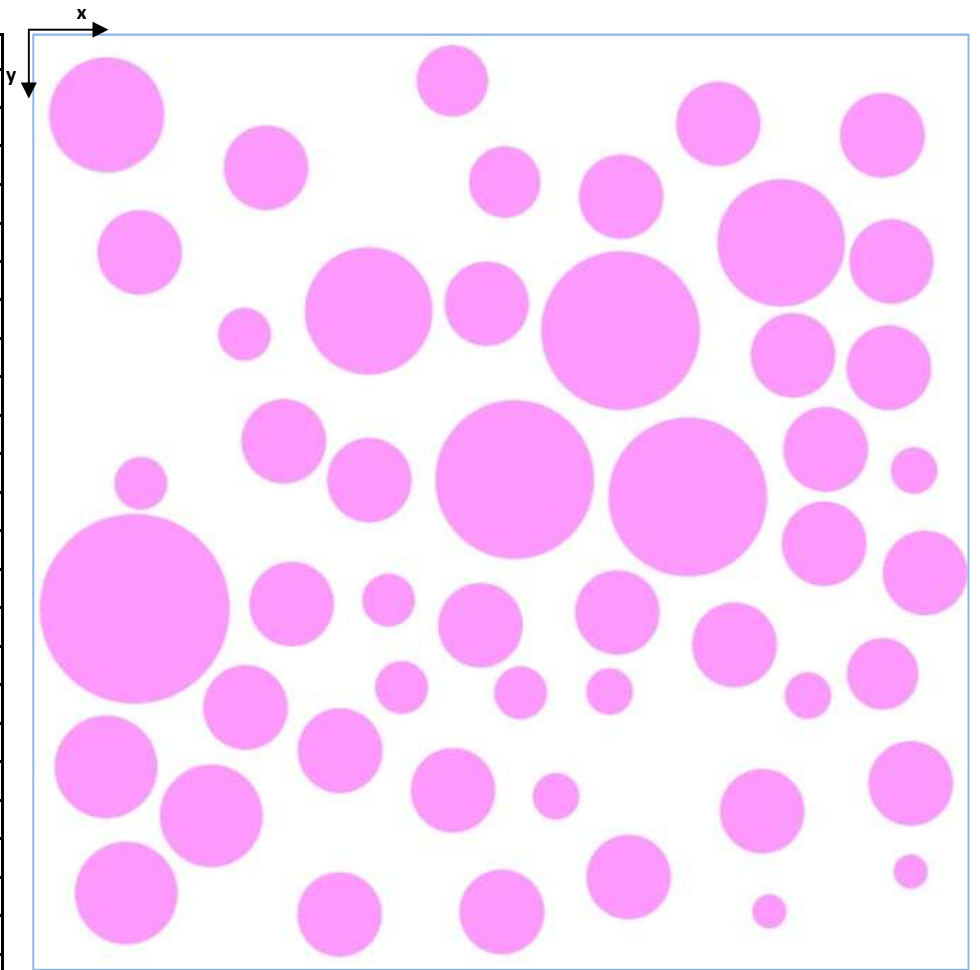
(b)

Fig.III.22: Identification des particules dans un milieu aléatoire biphasé (3000x3000 pixels)- Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles : $R=50$; $P = 0.30494$; $N = 300$, la taille, et les centres des cercles sont clairement illustrés sur la figure (b).

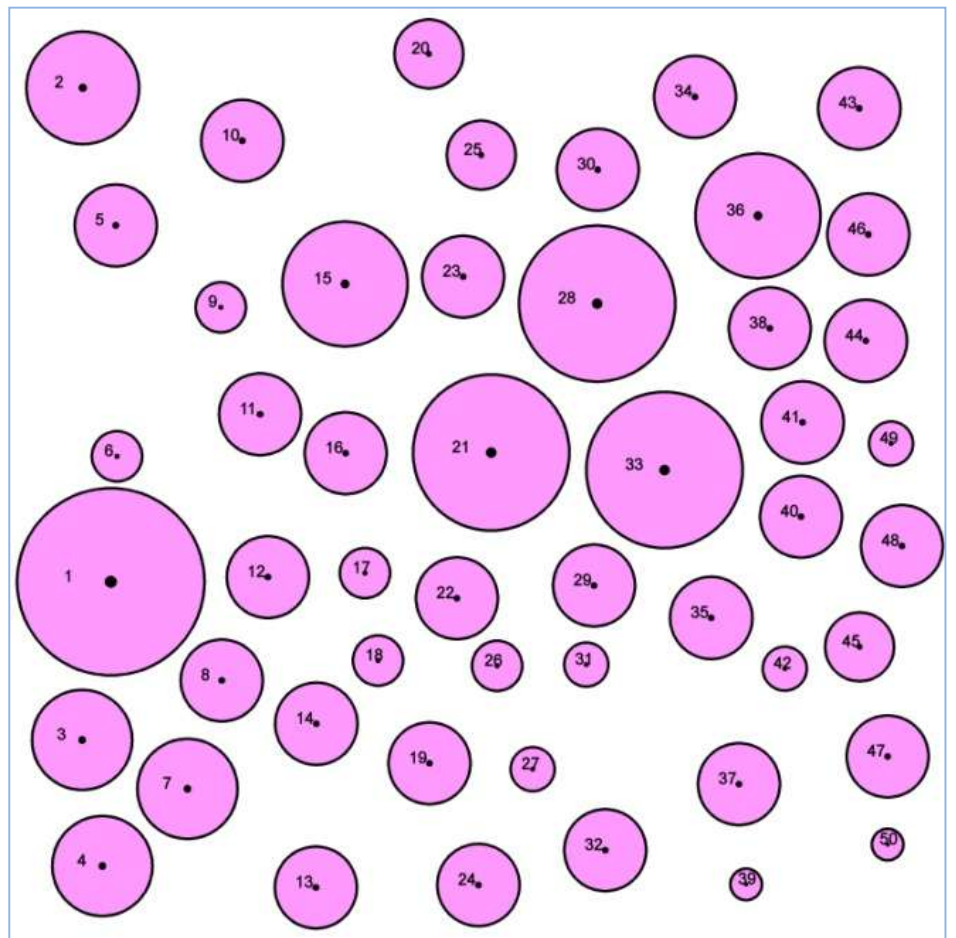
N	X	Y	N	X	Y	N	X	Y	N	X	Y	N	X	Y
1	67	2658	61	679	1089	121	1235	2782	181	1850	2672	241	2399	2851
2	80	2394	62	680	113	122	1242	771	182	1879	2518	242	2407	2176
3	92	1127	63	680	2813	123	1249	1165	183	1882	1737	243	2424	2551
4	94	623,5	64	694	2518	124	1256	219	184	1891	274	244	2427	1868
5	96	2890	65	725,5	741	125	1257	2158	185	1894	108	245	2431	2731
6	113	1610	66	730,5	1417	126	1277	886	186	1896	1978	246	2434	1107
7	126,5	2169	67	732	292	127	1278	1273	187	1903	2395	247	2450	1344
8	129	1991	68	736	876	128	1288	1556	188	1910	1530	248	2450	2038
9	138	127	69	758	2308	129	1308	498	189	1917	1015	249	2474	2296
10	144	2532	70	760	1532	130	1309	376	190	1924	740	250	2476	1607
11	156	1451	71	763	2024	131	1318	2255	191	1951	2278	251	2477	410
12	157	968	72	764	590	132	1323	1965	192	1960	376	252	2485	68
13	171	286	73	765	990	133	1349	1030	193	1960	2128	253	2490	246
14	188	1837	74	786	2169	134	1354	1652	194	1967	1152	254	2513	1458
15	205,5	2809	75	790	1226	135	1367	1457	195	1969	1386	255	2525	965
16	213	846	76	806	105	136	1370	2614	196	1977	875	256	2553	2658
17	223	2328	77	828	2508	137	1379	2378	197	1983	2736	257	2556	2919
18	248	1330	78	833	1868	138	1387	176	198	1985	581	258	2566	2800
19	267,5	653	79	837	2703	139	1391	2864	199	1991	208	259	2576	564
20	286	416	80	855,5	1352	140	1427	2480	200	2002	2910	260	2589	1721
21	289	2055	81	865	520,5	141	1428	669	201	2022	1658	261	2590	2365
22	296	2571	82	877	860	142	1445	2726	202	2024	1842	262	2600	2517
23	299	1688	83	880,5	2261	143	1449	1830	203	2032	2595	263	2616	1367
24	309	124,5	84	883	2008	144	1463	1109	204	2043	96	264	2620	2238
25	329	889	85	890	226	145	1489	2024	205	2048	2038	265	2630	262
26	363,5	2153	86	895	1665	146	1505	1708	206	2060	1030	266	2635	1564
27	364	2382	87	897	406	147	1506	111	207	2076	359,5	267	2657	1189
28	368	2813	88	897	2901	148	1508	1512	208	2076	500	268	2658	148
29	385	231	89	910	1158	149	1512	560,5	209	2080	2343	269	2661	1984
30	394	1835	90	923	1033	150	1525	2275	210	2097	821	270	2668	395
31	401	1116	91	931	738	151	1532	1352	211	2117	1430	271	2674	802
32	415	2273	92	947	2384	152	1535	769	212	2119	2141	272	2675	1013
33	426	2609	93	958	2135	153	1536	222	213	2121	2772	273	2692	2696
34	430	625	94	962	1416	154	1541	2809	214	2122	1579	274	2703	590
35	435	1260	95	977	602	155	1552	2486	215	2135	1171	275	2711	2323
36	451	1632	96	977	2530	156	1573	375	216	2135	2472	276	2724	1435
37	467	2912	97	994	306	157	1596	1139	217	2153	1936	277	2746	1820
38	473	2109	98	1005	2020	158	1599	868	218	2155	2919	278	2749	77
39	480	413	99	1018	2817	159	1634	1002	219	2164	92	279	2752	1293
40	482	903	100	1037	1519	160	1639	2652	220	2185	2641	280	2757	1626
41	501	2480	101	1041	1098	161	1640	1707	221	2193	986	281	2759	2125
42	508	1482	102	1042	1670	162	1646	2331	222	2201	434	282	2772	2560
43	517	2363	103	1044	1831	163	1658	1563	223	2229	219,5	283	2791	1113
44	527	152	104	1051	839	164	1662	2121	224	2252	1113	284	2822	2760
45	539	2724	105	1069	2445	165	1680	1868	225	2266	1979	285	2828	2337
46	548	1812	106	1071	1259	166	1692	370	226	2273	2872	286	2844	1424
47	555	1083	107	1085	697	167	1737	1117	227	2283	1837	287	2852	888
48	561	584	108	1092	235	168	1738	152	228	2290	2568	288	2866	1841
49	580	799	109	1112	2707	169	1747	2514	229	2292	2739	289	2884	1281
50	585	2026	110	1124	2084	170	1759	2392	230	2293	80	290	2884	2088
51	592	1596	111	1131	1361	171	1773	1657	231	2294	694	291	2908	1564
52	598	247,5	112	1139	927	172	1782	1225	232	2298	1694	292	2916	1963
53	611	2188	113	1143	1761	173	1782	1479	233	2305	1348	293	2917	1158
54	619	2638	114	1145	357	174	1785	700	234	2318	859	294	2918	2835
55	622	911	115	1145	2337	175	1791	2789	235	2317	2081	295	2920	1718
56	622	1217	116	1156	1945	176	1792	987	236	2338	363	296	2922	192
57	625,5	2319	117	1165	1046	177	1798	2228	237	2340	2298	297	2923	774
58	641	2940	118	1179	1627	178	1798	2919	238	2350	986	298	2925	2580
59	660	497	119	1226	61	179	1814	2105	239	2350	1552	299	2931	2246
60	661	1934	120	1230	2445	180	1829	442,5	240	2374	1226	300	2935	981

Tableau.1 : Identification des particules dans un milieu aléatoire biphasé- Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles : Coordonnées des cercles dans le plan qui correspond au centre des particules(en pixels).

N	X	Y	R
1	323.5	1843	300.5
2	233.5	256.5	180.5
3	231.5	2351	160.5
4	296.5	2756	160.5
5	339.5	698.5	131.5
6	343.5	1440	80.5
7	569.5	2508	160.5
8	679.5	2160	131.5
9	676.5	961.5	80.5
10	745.5	426.5	131.5
11	802.5	1305	131.5
12	827.5	1828	131.5
13	981.5	2825	131.5
14	983	2299	132
15	1075	886.5	200.5
16	1077	1430	131.5
17	1139	1815	80.5
18	1181	2096	80.5
19	1346	2426	131.5
20	1344	147.5	110.5
21	1544	1428	250.5
22	1434	1896	131.5
23	1454	863	131.5
24	1503	2817	132
25	1512	472.5	110.5
26	1563	2113	80.5
27	1677	2445	70.5
28	1884	949.5	250.5
29	1874	1855	131.5
30	1886	519.5	131.5
31	1849	2109	70.5
32	1910	2705	131.5
33	2100	1484	250.5
34	2198	285.5	131.5
35	2250	1959	132
36	2400	667.5	200.5
37	2339	2493	131.5
38	2438	1029	131.5
39	2362	2815	50.5
40	2538	1634	131.5
41	2543	1331	132
42	2486	2122	70.5
43	2725	322.5	132
44	2746	1069	132
45	2726	2052	110.5
46	2754	727.5	131.5
47	2816	2404	131.5
48	2862	1728	131.5
49	2827	1399	70.5
50	2816	2687	50.5



(a)



(b)

Fig. III.23: Identification des particules dans un milieu aléatoire biphase (3000x3000 pixels)- Cas d'une répartition de particules de tailles différentes : $N = 50$.

Tableau.2. : Résultats des coordonnées et tailles des particules (en pixels).

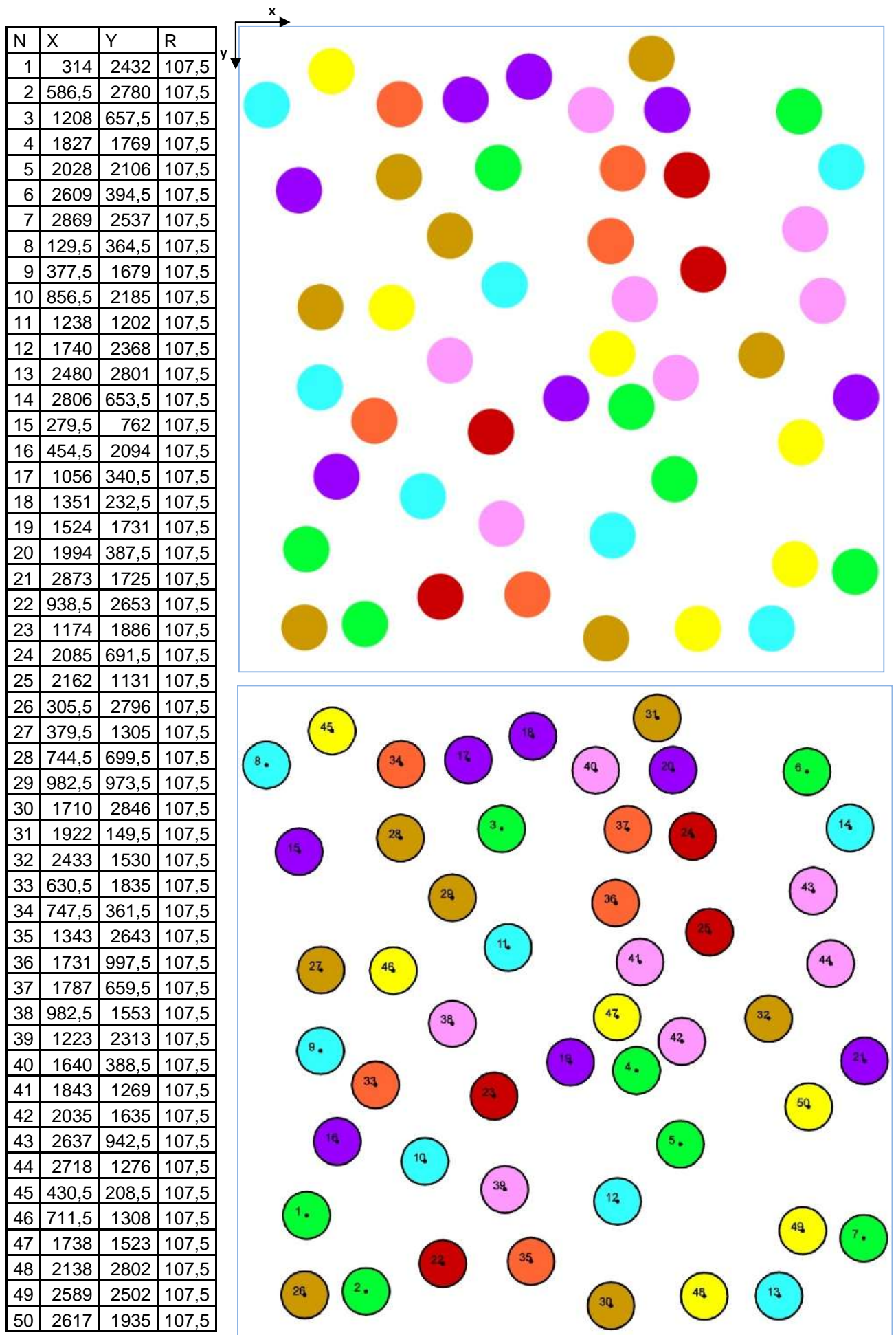


Fig. III.24 : Identification des particules dans un milieu aléatoire multiphasique (3000x3000 pixels)- Cas d'une répartition de particules de mêmes tailles.

Tableau.3. : Résultats des coordonnées et tailles des particules (en pixels).

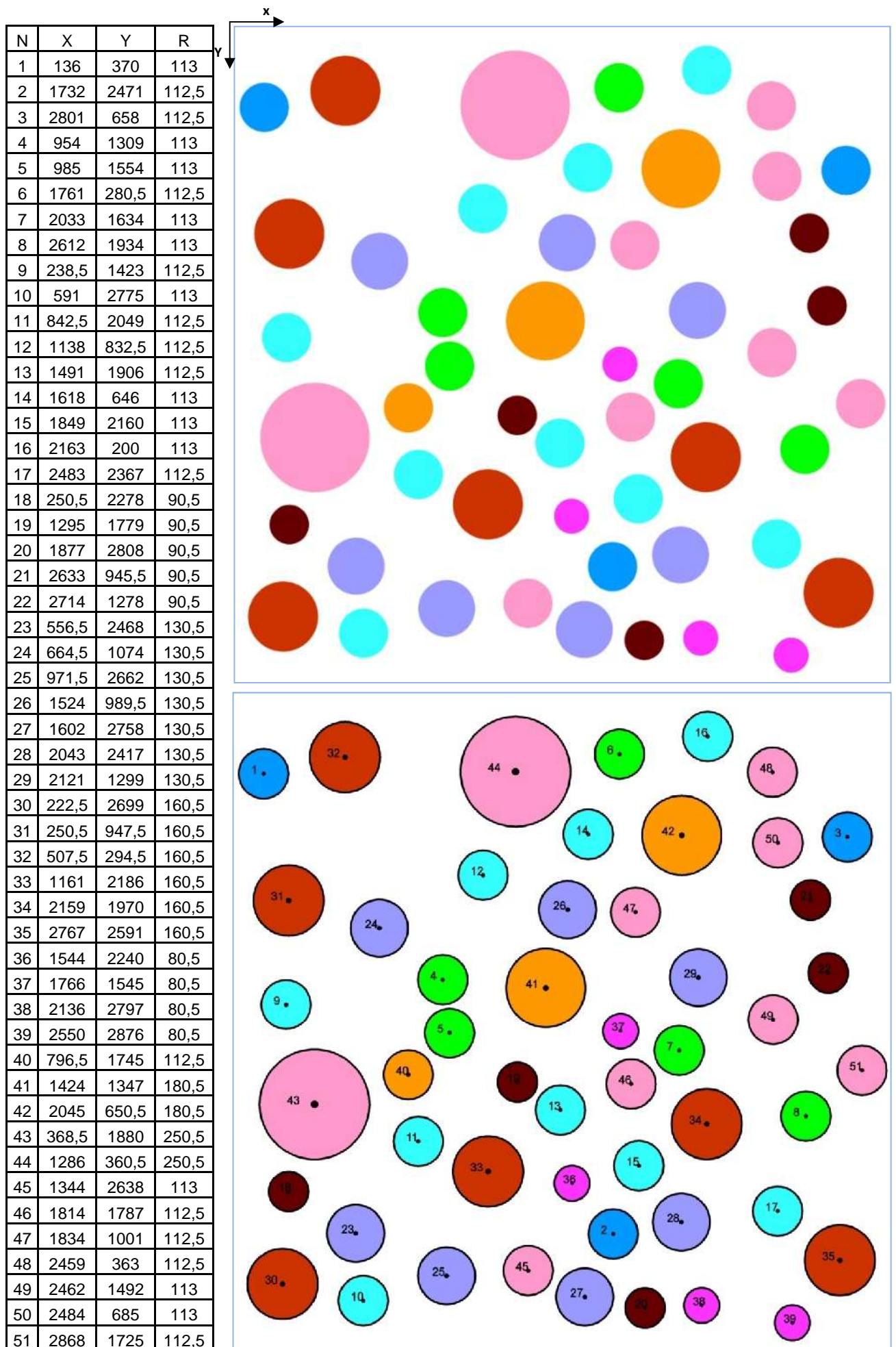


Fig.III.25: Identification des particules dans un milieu aléatoire multiphasique (3000x3000 pixels)- Cas d'une répartition de particules de tailles différentes.

Tableau.4. : Résultats des coordonnées et tailles des particules (en pixels).

Résumé

Dans le cadre de ce travail de thèse, le comportement macroscopique d'un composite élasto-plastique à deux phases, matrice élastique renforcée avec une distribution aléatoire de fibres cylindriques parallèles parfaitement plastique, a été étudié par la technique d'homogénéisation à l'aide du code de calcul de structures Zébulon.

La technique d'homogénéisation utilisée est basée sur la notion de volume élémentaire représentatif VER et permet de prédire les propriétés effectives du composite. Le résultat le plus probant de ce travail, c'est le développement d'un modèle semi analytique de comportement mécanique macroscopique liée au comportement des deux phases du composite. En régime élasto plastique, on a pu atteindre, par cette technique, la solution exacte, à quelques centièmes d'erreurs, de l'essai de traction.

Mots clés: Hétérogène; Fibres plastique; Homogénéisation; VER; Transversalement isotrope.

Abstract

In this work the macroscopic behavior of an elastic-plastic composite of two phases elastic matrix reinforced with a random distribution of perfectly plastic parallel cylindrical fibers, has been investigated by the homogenization technique using the Zebulon structures calculation code.

Based on the notion of representative volume element RVE the homogenization technique is used to predict the effective properties of the composite. The most convincing result of this work is the development of a semi analytical model of macroscopic mechanical behavior related to the behavior of the two phases of the composite. In elasto-plastic regime under tensile test the exact solution with relative errors of a few hundredth of a percent is obtained.

Key words: Heterogeneous; Plastic fibers; Homogenization; RVE; Isotropic transverse.

في هذه الأطروحة، تم التحقيق في سلوك مادة مركبة " Elasto-plastique " مشكلة من مصفوفة مرنة مدعمة بألياف بلاستيكية أسطوانية متوازية موزعة بشكل عشوائي بواسطة تقنية التجانس باستخدام Zébulon لحساب الهياكل. تستند تقنية التجانس الى مفهوم حجم الوحدة التمثيلي و تستخدم للتنبؤ و حساب خصائص المادة المركبة. النتيجة الأكثر إقناعا في هذا العمل هو تطوير نموذج شبه تحليلي مسند الى العناصر الموجودة لمعاينة السلوك الميكانيكي للمادة المركبة و قد تم التوصل من خلال هذه التقنية في اختبار الشد الى الحل الدقيق مع بضعة اجزاء من المئة في الخطأ النسبي.

مفتاحية: غير ; ألياف بلاستيكية; التجانس; حجم الوحدة التمثيلي; موحد الخواص عرضيا.