

N° d'ordre :



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Hadj Lakhdar Batna

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE MECANIQUE

THESE

Présentée Pour l'Obtention Du Diplôme de

Doctorat en Sciences

En mécanique

Option : construction mécanique

Par

ABDELHAMID Mourad

Contribution à l'étude de la fatigue et du vieillissement des alliages à mémoire de forme

Soutenue publiquement le :08/02/2016 devant le jury composé de :

Pr : BENBOUTA Rachid	-Université Hadj Lakhdar-Batna	président du jury
Pr : ZIDANI Kamel	-Université Hadj Lakhdar-Batna	Rapporteur
Pr : TALBI Kamel	-Université de Constantine	Examineur
Pr : DJEBAILI Hamid	-Université Abbès Laghrour-Khenchela	Examineur
MCA:CHERFIA Abdelhakim	-Université de Constantine	Examineur
MCA:MANSOURI.Salah	- Université Hadj Lakhdar-Batna	Examineur

Année Universitaire 2014/2015

Résumé

Les alliages à mémoire de forme présentent une grande non linéarité et un comportement hystérétique à fort couplage thermomécanique. Le modèle proposé par le Dr. Stefan Seelecke, a été développé, avec le concours de Müller et Achenbach, pour le cas monodimensionnel. Ce modèle, basé sur la thermodynamique statistique, est régi par un système linéaire d'équations différentielles du premier ordre faisant intervenir les probabilités de transition de phase et la chaleur latente. La résolution numérique du système permet d'établir les expressions analytiques des fractions d'austénite et de martensite, la température du système et la contrainte appliquée pour une déformation donnée en fonction du temps.

Dans cette contribution, nous développons, grâce aux transformations de Laplace une résolution algébrique du système. Les expressions analytiques des fractions d'austénite, de martensite et de la température permettent alors d'établir une formulation mathématique du comportement des AMF. Ce qui permet une meilleure maîtrise des comportements pseudo élastique ou quasi plastique et d'éviter le recours au formalisme informatique très lourd tel que le sous programme, jusque là incontournable, Umat faisant lui-même appel au sous programme radau5 développé par les mathématiciens Hairer et Wanner.

Mots clés : alliages à mémoire de forme, hystérésis, quasi plasticité, pseudo élasticité, transition de phase, chaleur latente.

Abstract

Shape memory alloys present a big nonlinearity and a hysteretic behavior of a high thermo-mechanical coupling. We introduce in this paper the Müller and Achenbach model in the version proposed by Dr Stefan Seelecke, for the mono dimensional case [1]. This model, based on the statistical thermodynamics, is governed by a linear of first order differential equations system bringing-in the probability of phase transition and the latent heat. The numerical resolution of the system allows to calculate the values of the austenite and martensitic fractions, of the temperature of the system and the applied constraint for a given deformation (distortion) as function of time.

In this contribution, using Laplace transform we develop an algebraic resolution of the system. The analytical expressions of austenite, martensitic fractions and the temperature allow then to establish a mathematical formulation of the behavior of the SMA. Which allows a better behaviors control of the elastic or quasi-plastic and avoid the appeal to a very heavy computer science formalism such as subprogram, which up today is inescapable, Umat uses a developed subprogram radau5 made by the mathematicians Hairer and Wanner.

Keywords: Shape memory alloys, hysteresis, quasi-plasticity, pseudo-elasticity, phase transition, latent heat.

Remerciements

A Monsieur Zidani Kamel

Il m'a proposé cette thèse et m'a toujours soutenu dans sa mise en œuvre tout au long de ces années. Il a toujours su me donner des orientations de recherche, tout en me laissant une grande autonomie au quotidien.

A Monsieur Brioua Mourad

Il a activement participé à l'encadrement de ce travail. Ses conseils et ses encouragements m'ont été très précieux.

Qu'ils veuillent bien croire à ma sincère gratitude.

A Monsieur Derraji Salah

Je garderai éternellement un excellent souvenir des discussions, très amicales, sur le développement mathématique de ce travail. Pour sa disponibilité, sa sollicitude et ses conseils qu'il trouve ici toute la reconnaissance que je lui porte.

A Monsieur Benbouta Rachid

Je ne remercierai jamais assez monsieur R Benbouta qui a bien voulu présider le jury et lire et corriger tous les chapitres de mon travail chaque fois que je le sollicite. Pour sa disponibilité, ses conseils et sa patience je le remercie.

A Messieurs les membres du jury

Ils ont accepté la tâche de rapporteur et activement participé au jury de soutenance.

Sommaire

Résumé	I
Abstract	I
Remerciements	II
Introduction générale	1

Chapitre I

Etude bibliographique

I-1 Introduction	3
I-2 Généralités et propriétés des AMF	9
I-2.1 La transformation martensitique	9
I-2.2 Thermodynamique de la transformation	12
I-2.3 Diagramme contrainte température	14
I-2.4 Propriétés thermomécaniques des AMF	16
I-2.4.1 Effet mémoire simple sens	16
I-2.4.2 Effet mémoire double sens	17
I-2.4.3 Effet caoutchoutique	18
I-2.4.4 Effet super élastique	20
I-2.4.5 Effet amortissement	21
I.3 Equations de base	22

Chapitre II

Etat de l'art

II-1 Introduction	25
II-2 Etude des fonctions de probabilité de transition de phase	27
II-3 Notion de raideur des équations différentielles	31
II-4 Rappels mathématiques	32
II-4.1 Définition 1	32
II-4.2 Définition 2	33
II-4.3 Définition 3	34
II-5 Méthode Runge Kutta de type radau	34
II-6 Méthode Runge Kutta d'ordre 4	38
II-7 Stabilité et contrôle de l'erreur des variantes RK	38
II-8 Implémentation	42
II-9 Autres Modèles de loi de comportement des AMF	43

Chapitre III

Nouvelle approche de résolution

III-1 position du problème	46
III-2 résolution par les transformées de Laplace	47
III-3 Etude des cas indéterminés	52
III-3.1 cas $v_3=v_4=0$ et $v_1=v_2$	52
III-3.2 cas $v_4=0$ $v_2=v_1+v_3$	53
III-3.3 cas $v_3=0$ $v_1=v_2+v_4$	54
III-3.4 cas $v_1=v_2$	55
III-3.5 cas $v_1=v_3=v_4=0$	56
III-3.6 cas $v_1=v_3=0$	58
III-3.7 Récapitulation	59
III-4-1 Domaine pseudo élastique	63
III-4-2 Influence du coefficient de transfert de chaleur	69
III-4-3 Influence de la température	71
III-4-4 Influence de la vitesse de sollicitation	74
III-4-5 Domaine super élastique	77
III-4-6 Domaine quasi plastique 1	83
III-4-7 Domaine quasi plastique 2	88

Chapitre IV

Application à l'étude de la fatigue

IV.1 Loi de comportement	94
IV.2 Fonctions critères et lois complémentaires	96
Conclusion générale	100
Références	101

Liste des figures

Figure I-1	Variantes de martensite jumelles ou Twin	3
Figure I-2	Cycle complet thermomécanique d'alliage à mémoire de forme	4
Figure I-3	Fonction définie par morceaux $\psi(\varepsilon, T)$ de l'énergie libre de Helmholtz	5
Figure I-4	Energie libre de Gibbs sous chargement thermomécanique	6
	(a) sous contrainte nulle : transformation induite par la température	3
	(b) à basse température : transformation induite par la contrainte	3
	(c) à haute température : transformation induite par la contrainte	4
Figure I-5	Formation d'une variante de martensite	11
Figure I-6	Energie libre des phases martensite et austénite en fonction de la température	12
Figure I-7	Fraction volumique de la martensite en fonction de la température	14
Figure I-8	Loi de Clausius Clapeyron	15
	(1) à température constante et à contrainte croissante	
	(2) à contrainte constante et à température décroissante	
Figure I-9	Diagramme d'état pour la transformation Austénite \Rightarrow Martensite	15
Figure I-10	Cycle thermomécanique effet mémoire de forme simple sens	16
Figure I-11	Chargement thermomécanique séquentiel permettant l'obtention de l'effet mémoire simple sens	16
Figure I-12	Effet mémoire de forme double sens assisté	17
Figure I-13	Chargement thermique permettent l'obtention de L'effet mémoire double Sens	17
Figure I-14	Effet mémoire double sens sans contrainte appliquée. Une déformation ϵ de transformation lors d'un simple refroidissement est observée.	18
Figure I-15	Effet caoutchoutique	19
Figure I-16	Représentation de l'effet caoutchoutique chargement mécanique	19
Figure I-17	Représentation de l'effet caoutchoutique resulta	19
Figure I-18	Effet super élastique	20
Figure I-19	Déformation d'un polycristal et d'un monocristal	20
Figure I-20	Courbe de traction d'un monocristal Transformation sous contrainte à température constante.	21
Figure I-21	Variation du frottement interne en fonction de l'état du matériau	21
Figure II-1	Représentations graphiques de la fonction probabilité V_1	27
Figure II-2	Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_1	28
Figure II-3	Représentations graphiques de la fonction probabilité V_2	28
Figure II-4	Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_2	29
Figure II-5	Représentations graphiques de la fonction probabilité V_3	29
Figure II-6	Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_3	30
Figure II-7	Représentations graphiques de la fonction probabilité V_4	30
Figure II-8	Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_4	31
Figure II-9	Schéma d'implémentation dans Ansys ou Abaqus	43
Figure III-1	Courbe contrainte-déformation Hystérésis en contrainte	64
Figure III-2	Evolution de la température fonction du temps	65

Figure III-3	Evolution de la fraction de martensite (M+) en fonction du temps	65
Figure III-4	Evolution de la fraction de martensite (M-) en fonction du temps	66
Figure III-5	Hystérésis en température	66
Figure III-6	Evolution de la déformation en fonction de la Température	67
Figure III-7	Courbe d'évolution de la déformation	67
Figure III-8	Courbe d'évolution du module de Young	68
Figure III-9	Module tangent $\partial\sigma / \partial\varepsilon$ en fonction de la déformation	68
Figure III-10	Courbe d'évolution du module tangent	69
Figure III-11	Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis T=353K	70
Figure III-12	Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis T=363K	70
Figure III-13	Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis T=373K	70
Figure III-14	Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis T=383K	71
Figure III-15	Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis T=393K	71
Figure III-16	Influence de la température sur le cycle d'hystérésis a=20	72
Figure III-17	Influence de la température sur le cycle d'hystérésis a=35	72
Figure III-18	Influence de la température sur le cycle d'hystérésis a=50	73
Figure III-19	Influence de la température sur le cycle d'hystérésis a=70	73
Figure III-20	Influence de la température sur le cycle d'hystérésis a=90	74
Figure III-21	Influence de la vitesse de sollicitation a=20	74
Figure III-22	Influence de la vitesse de sollicitation a=35	75
Figure III-23	Influence de la vitesse de sollicitation a=50	76
Figure III-24	Influence de la vitesse de sollicitation a=70	76
Figure III-25	Influence de la vitesse de sollicitation a=90	77
Figure III-26	Courbe contrainte déformation	77
Figure III-27	Evolution de la température en fonction du temps	78
Figure III-28	Evolution de la fraction de martensite M+	79
Figure III-29	Evolution de la fraction de martensite M-	79
Figure III-30	Hystérésis en température	80
Figure III-31	Evolution de la déformation en fonction de la température	80
Figure III-32	Evolution de la déformation	81
Figure III-33	Evolution du module de Young	81
Figure III-34	Courbe du module tangent en fonction de la déformation	82
Figure III-35	Evolution du module Tangent	82
Figure III-36	Hystérésis en contrainte domaine plastique	83
Figure III-37	Evolution de la température	84
Figure III-38	Evolution de la fraction de martensite M+	84
Figure III-39	Evolution de la fraction de martensite M-	85
Figure III-40	Courbe de la température en fonction de la déformation	85
Figure III-41	Courbe de la déformation en fonction de la température	86
Figure III-42	Evolution de la déformation	86
Figure III-43	Evolution du module de Young (MPa)	87
Figure III-44	Courbe du module de Young en fonction de la déformation	87
Figure III-45	Evolution du module de Young.	88
Figure III-46	Hystérésis en contrainte	88
Figure III-47	Evolution de la température	89
Figure III-48	Evolution de la fraction de martensite (M+)	89

Figure III-49	Evolution de la fraction de martensite (M-)	90
Figure III-50	Courbe de la température en fonction de la déformation	90
Figure III-51	Courbe de la déformation en fonction de la température	91
Figure III-52	Evolution de la déformation	91
Figure III-53	Evolution du module de Young	92
Figure III-54	Courbe du module de Young en fonction de la déformation	92
Figure III-55	Evolution du module Tangent	93
Figure IV-1	Représentation du déclenchement des fonctions critères lors du cycle pseudo élastique	98
Figure IV-2	Evolution du taux de martensite	99

Introduction générale

Découverts dans les années trente, les alliages à mémoire de forme ont aiguisé la curiosité des scientifiques qui n'ont cessé, depuis, d'étudier les propriétés inhabituelles de ce type de matériau. Citons, par exemple, leur capacité à subir une déformation grande, mais recouvrable, de l'ordre de dix pourcents.

Ce comportement des AMF est la conséquence directe de leur capacité à supporter une transformation martensitique entièrement réversible et induite soit par une action mécanique, thermique ou thermomécanique.

Quelques années plus tard, la découverte de l'alliage NiTi équiatomique (Nickel-Titane) a permis de révéler les effets mémoire de forme et de là, les domaines pseudoélastique et quasiplastique, selon que le matériau garde ou non une déformation résiduelle après avoir subi un cycle de chargement-déchargement complet. En pseudoélasticité, le comportement du matériau est différent en traction et en compression, une hystérésis s'impose alors comme loi de comportement. Les AMF, eu égard à cette propriété, sont utilisés comme actionneurs dans différents domaines industriels tels que le domaine biomédical, l'aéronautique et même le génie civil.

Nombreuses et variées sont les difficultés auxquelles se sont confrontées les scientifiques durant leurs recherches. Leur but est la compréhension de la transformation martensitique qui fait basculer le matériau d'une phase austénitique stable à haute température et ayant une structure cristallographique régulière et symétrique (CC,CFC) vers une phase martensitique, moins régulière et moins stable à basse température et qui plus est composée de variantes d'orientations différentes et dont le nombre peut atteindre vingt-quatre variantes.

Un autre but, non moins important, est la modélisation mathématique du comportement hystérétique des AMF dans le domaine pseudoélastique. Müller Achenbach et Seelecke ont réussi, moyennant certaines simplifications et en se basant sur la thermodynamique statistique, à mettre en place les équations de base et le système d'équations différentielles à résoudre pour modéliser la loi de comportement. La résolution de ce système, qualifié de raide, se heurte à des

difficultés mathématiques non négligeables. La raideur mathématique est due à la coexistence de deux phénomènes physiques ayant des échelles de temps très différentes, Le transfert de chaleur qui s'effectue à la vitesse de quelques watts par seconde et la transformation martensitique qui se passe à une vitesse qui avoisine celle du son dans le matériau. Hairer et Wanner, deux mathématiciens de l'université de Genève, ont montré que pour venir à bout de la raideur du système différentiel il est impératif de choisir un schéma intégrateur numérique implicite et un pas de temps compatible avec l'échelle de temps la plus petite.

Une fois le système d'équations différentielles résolu, le taux global de martensite orientée devient connu à tout instant impliquant ainsi la connaissance de l'hystérésis et donc la loi de comportement de l'AMF. La conséquence première de cette maîtrise de la loi de comportement est l'utilisation du matériau comme actionneur dans des applications industrielles variées. Se pose alors la question de la durée de vie de cet actionneur dont il fallait savoir estimer le nombre de cycles à rupture c'est-à-dire comprendre sa fatigue. Il n'existe que peu de scientifiques qui se sont intéressés à la fatigue des AMF et à la recherche d'un critère unifié de fatigue. nous avons pris le dernier model en date, proposé par les auteurs Zaki et Moumni en 2007 basé sur le modèle rhéologique de Reuss, afin de proposer une petite simplification relative au calcul du taux global de martensite orientée, en évitant un formalisme mathématique et informatique très lourd.

C'est dans cette optique que s'inscrit cette modeste contribution.

Chapitre I

Étude bibliographique

I-1 Introduction

La transformation martensitique entraîne le développement de 24 variantes de martensite possibles, définies par leurs orientations par rapport à un plan limite. Ces variantes sont décrites par les 12 matrices de Bain au déterminant égal à 0.99660, proche de l'unité. Ce qui prouve que la transformation est quasi isochore.[1]

Lors d'un chargement mécanique, transformation s-induite, les variantes ont tendance à se développer par groupes compatibles, en l'occurrence dans le cas de l'alliage NiTi quasi équiatomique, par paires appelées « twins » ou variantes jumelles à orientations compatibles et croisées désignées par M_+ et M_- pour pouvoir les distinguer.[1]

En traction, par exemple, les variantes dont la maille cristalline est orientée de telle façon que la plus grande dimension est alignée avec la direction de la sollicitation sont plus favorables. La formation de ces variantes engendre une importante déformation dans la direction de la traction tout en minimisant la déformation dans les autres directions et donc en minimisant l'énergie élastique d'accommodation mise en jeu.[2,3]. Les figures 1 et 2 illustrent bien ce phénomène.

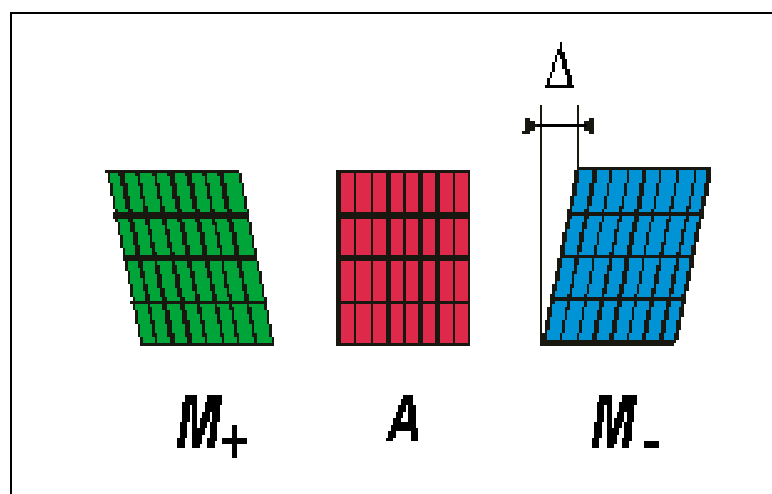


Figure I-1 Variantes de martensite jumelles ou Twin [3]

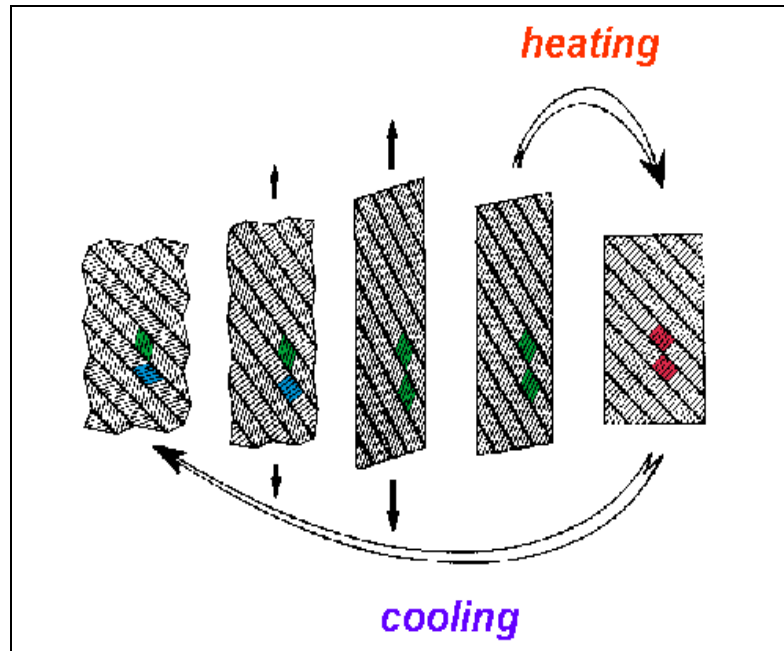


Figure I-2 Cycle complet thermomécanique d'alliage à mémoire de forme [3]

La modélisation du comportement de ces alliages est basée sur le fait que la transition de phase des variantes de martensite est un processus régi par la température.

Müller, Achenbach et Seelecke ont montré que l'énergie potentielle des variantes de martensite est donnée par l'énergie libre de Gibbs ou, en l'absence de sollicitation, par l'énergie libre de Helmholtz.

La fonction définie par morceaux $\psi(\varepsilon, T)$ de l'énergie libre de Helmholtz s'écrit :[3]

$$\psi(\varepsilon, T) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_M}{2}(\varepsilon + \varepsilon_T)^2 & \varepsilon \leq -\varepsilon_M(T) \\ a.\varepsilon^2 + b.\varepsilon + c & -\varepsilon_M(T) < \varepsilon < -\varepsilon_A(T) \\ \frac{\varepsilon_A}{2}\varepsilon^2 + \Delta\beta(T) & |\varepsilon| \leq \varepsilon_A(T) \\ a.\varepsilon^2 - b.\varepsilon + c & \varepsilon_A(T) < \varepsilon < \varepsilon_M(T) \\ \frac{\varepsilon_M}{2}(\varepsilon - \varepsilon_T)^2 & \varepsilon \geq \varepsilon_M(T) \end{cases}$$

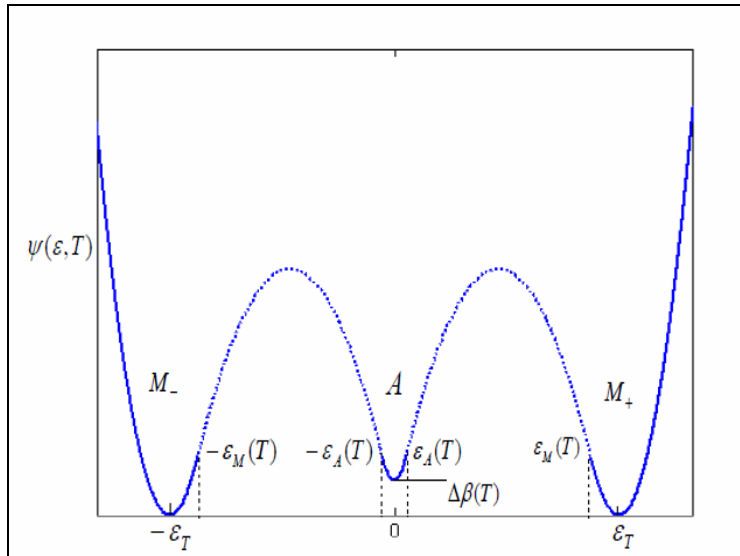
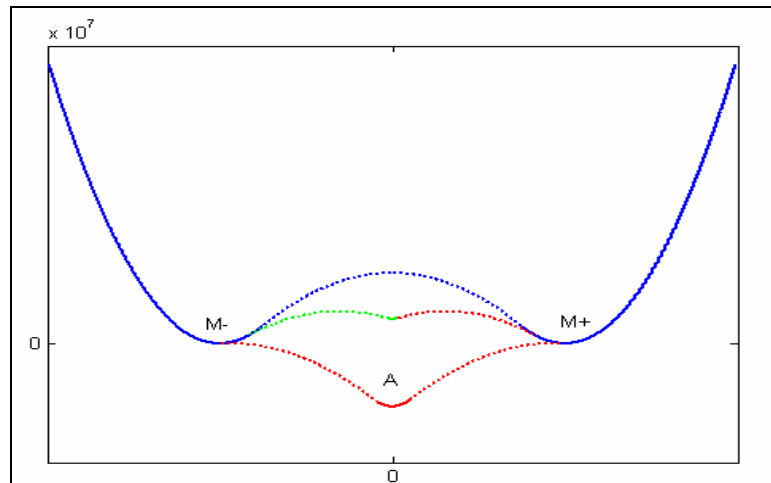
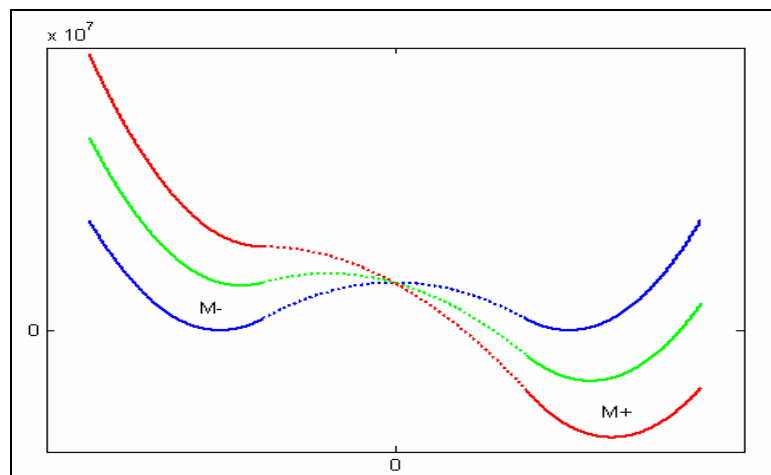


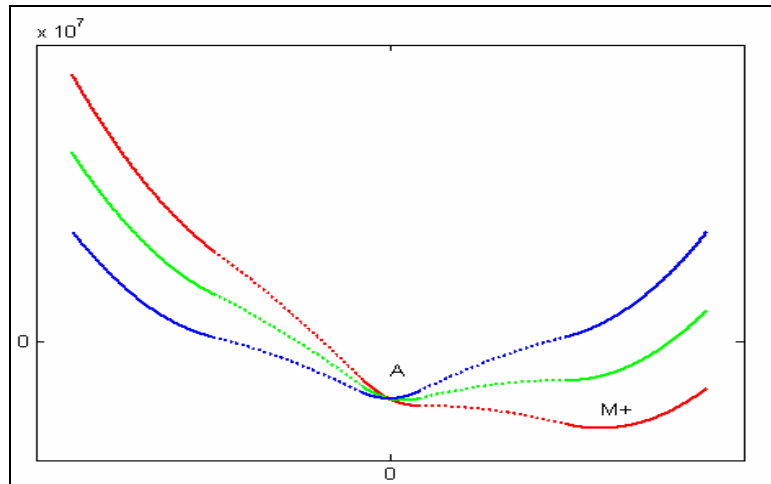
Figure I-3 Fonction définie par morceaux $\psi(\varepsilon, T)$ de l'énergie libre de Helmholtz [3]



(a)



(b)



(c).

*Figure I-4 Energie libre de Gibbs sous chargement thermomécanique [3]
 (a) sous contrainte nulle : transformation induite par la température
 (b) à basse température : transformation induite par la contrainte
 (c) à haute température : transformation induite par la contrainte*

La courbe contrainte déformation des alliages à mémoire de forme présente un fort couplage thermomécanique.

A basse température la courbe fait ressortir une déformation résiduelle après déchargement. Ce comportement est appelé quasi plastique.

A haute température, il n'y a pas de déformation résiduelle. La courbe passe par l'origine au déchargement. Cependant, ce comportement dit pseudo élastique, est différent en traction et en compression.[1]

Afin de pouvoir tracer cette courbe, relation entre contrainte et déformation, un modèle mathématique, à l'échelle mésoscopique, basé sur l'énergie libre a été développé par Müller-Achenbach-Seelecke. Un programme fortran définissant le comportement du matériau est implémenté dans ABAQUS ou ANSYS.

Ce programme, appelé UMAT ou USERMAT, doit soit, être en mesure de résoudre un système d'équations différentielles, soit faire appel à un autre programme nommé RADAU5. la transmission aux logiciels de commerce de la contrainte et du module

tangent $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ à tout instant permet, grâce aux différentes méthodes numériques telles

que les éléments finis, le calcul de plusieurs variables pilotant le phénomène physique comme la température, la fraction de martensite réorientée et la déformation.

La résolution du système d'équations différentielles peut se faire aussi à l'aide du logiciel comsol ou toute autre méthode numérique pour peu que cette dernière soit une méthode implicite et d'ordre assez élevé.

Les alliages à mémoire de forme (AMF) sont des alliages métalliques qui exhibent des propriétés spécifiques inhabituelles telles que les effets de mémoire simple et double, l'effet superélastique, l'effet d'amortissement et l'effet caoutchoutique. Industriellement, on s'intéresse et on utilise surtout leur capacité à recouvrer des déformations et leur densité d'énergie mécanique élevée. Ces propriétés exceptionnelles sont associées à une transformation de phase au cours de laquelle, une phase mère dite austénite (à structure cubique ordonnée) donne naissance, de façon réversible, à une phase martensitique à plusieurs variantes (à structure moins ordonnée). La transformation martensitique est un changement de phase à l'état solide dû à une déformation du réseau cristallin (mouvement coopératif sans diffusion d'atomes). Les variables thermodynamiques externes qui influent sur la transformation martensitique sont la température et la contrainte. La transformation martensitique peut être activée par un cycle (chargement / déchargement) thermique, mécanique ou thermomécanique.[4-6]

Durant les 20 dernières années, les AMF sont de plus en plus utilisés dans les industries de pointe comme capteurs ou actionneurs. Pour qu'ils soient fiables et fonctionnels, les différents comportements spécifiques des AMF doivent être bien établis mathématiquement et interprétables physiquement. Il est admis que les AMF présentent un comportement non linéaire hystérétique à fort couplage thermomécanique. Les chaleurs latentes des transformations de phases des AMF sont accompagnées de variations de température, ce qui explique le couplage thermomécanique inhérent aux AMF. La modélisation mathématique du comportement thermomécanique est très complexe et reste d'actualité. Un modèle de comportement constitutif idéal doit impérativement prendre en compte le couplage thermomécanique et doit être polyvalent, c'est-à-dire, capable de rendre compte des différents comportements spécifiques observés dans le comportement des AMF en particuliers la pseudo élasticité et la pseudo plasticité. Dans la littérature, différentes recherches ont été menées et sont toujours menées avec pour objectif la proposition de modèles mathématiques permettant de prédire le comportement thermomécanique des AMF[7]. On distingue les modèles micromécaniques basés sur une description de la transformation martensitique à l'échelle du réseau cristallin.

Ils sont régis par des équations permettant de prédire la transformation d'un cristal d'austénite en différentes variantes de martensite sous un chargement thermomécanique [8-13]. Ces modèles sont peu fiables et peu utilisés car leur description se fait à l'échelle du monocristal et rend leur intégration dans les codes de calcul difficile à cause de la nécessité de définir un volume élémentaire représentatif (un calcul de structure nécessite la définition d'un VER) [14]

Les modèles phénoménologiques [15-17] utilisant des variables internes définies à l'échelle macroscopique sont quant à eux plus adaptés à l'intégration dans les codes de calcul.

D'une manière générale, les modèles basés sur la thermodynamique macroscopique sont adaptés à la capture d'effets macroscopiques et permettent l'explication des phénomènes physiques sous-jacents. Les modèles micromécaniques sont utilisés pour l'identification des mécanismes sous-jacents et permettent de faciliter le contrôle des processus d'élaboration et de la métallurgie des AMF. Un des modèles les plus performants et réellement apte à prendre en compte la non linéarité hystérétique ainsi que le fort couplage thermomécanique est le modèle attribué aux auteurs (Müller - Achenbach et Seelecke) est connu sous la dénomination anglaise "MAS model" [18,19].

Des observations microscopiques ont révélé qu'un échantillon en AMF sous sollicitation uniaxiale se transforme en une structure en plaquettes (lamellaire). Chacune des plaquettes est soit en phase austénitique ou en une variante de la phase martensitique. Dans la modélisation, en plus du traitement du problème de la non linéarité géométrique observée, une fonction d'énergie libre est introduite. Des énergies sont alors associées aux différentes phases : austénitique notée « A » et à deux variantes martensitiques jumelles notées « M⁺ » et « M⁻ », avec des minimas indiquant les domaines de stabilité [20]. L'évolution de la température dans l'échantillon AMF sollicité dépend de l'émission de chaleur latente, des absorptions par les changements de phases et du transfert de chaleur par convection sur les surfaces externes. L'augmentation de température par effet Joule dans le cas d'une application du composant AMF comme actionneur est à considérer. Le formalisme mathématique est basé sur la thermodynamique statistique, les probabilités de transition de phase et sur la chaleur latente. Des considérations thermodynamiques de transition de phase permettent d'établir un système couplé d'équations qui décrit les évolutions temporelles des différentes phases en présence [21,22].

Les AMF sont commercialisés souvent sous forme de fils, le modèle MAS a été développé pour modéliser le comportement unidimensionnel des AMF. L'utilisation effective du modèle MAS se heurte à des difficultés en relation avec les techniques numériques de résolution des équations couplées du modèle mathématique, d'implémentation numérique du modèle dans les codes de calcul commerciaux tels CAST3M, ANSYS et ABAQUS ainsi qu'aux temps machines souvent importants [23-24].

Dans le présent travail, nous développons, grâce à une formulation mathématique intégrant les transformations de Laplace, une nouvelle méthodologie de résolution plus efficace du système d'équations couplées. Cette nouvelle approche de résolution permet un gain en temps machine ainsi qu'une meilleure maîtrise des comportements saillants observés dans les AMF tels la pseudo élasticité. Aussi, cette nouvelle méthodologie de résolution permet d'éviter le formalisme informatique très lourd lié à l'implémentation du modèle dans les codes de calculs. Par la suite, en plus d'introduire le modèle mathématique MAS, nous présentons les développements de la nouvelle méthodologie de résolution.

I-2 GENERALITES ET PROPRIETES DES AMF

I-2.1 La transformation martensitique:

Les matériaux solides présentent, en règle générale, un comportement qualifié d'élastique ou plastique. Les alliages à mémoire de forme, échappent à cette règle générale, car ils subissent une transformation martensitique, leur permettant de récupérer en partie ou totalement leur forme initiale par le simple fait de chauffer l'échantillon.

Nous présentons dans cette partie la transformation martensitique ainsi que les propriétés thermomécaniques liées à cette transformation.

Les alliages à mémoire de forme présentent deux états ou phases d'équilibre stables, l'un à haute température, appelé austénite, l'autre à basse température appelé martensite du nom de son inventeur, le physicien Martens.

La transformation martensitique est un changement de phase qui s'opère à l'état solide. Cette transformation est qualifiée de displacive, parce que les déplacements atomiques restent faibles par rapport aux dimensions de la maille. Par

opposition aux déformations par diffusion, qui procèdent par des mouvements atomiques arbitraires, la transformation martensitique est dû à un mouvement atomique corrélé ou mouvement d'ensemble.

La transformation martensitique peut s'opérer, sans toutefois qu'il y ait de modification de la composition chimique, à différentes températures et à différentes vitesses de chauffage ou de refroidissement. Il faut, cependant, préciser que la vitesse de déplacement est limitée par la vitesse du son dans le matériau.[26]

La martensite conserve l'ordre atomique et la composition chimique de la phase mère, l'austénite. Tout ce passe donc comme s'il y avait un réarrangement des atomes pour former une structure plus stable.

La transformation martensitique est dite du premier ordre, c'est à dire qu'il y a coexistence des deux phases, haute et basse température, séparées par un plan appelé plan d'habitat.

Précisons, pour parfaire la définition, que la déformation à l'échelle macroscopique est une déformation homogène du réseau qui s'opère par glissement et qui conserve un plan invariant.

Le plan d'habitat, qui est une interface commune aux deux phases, s'appelle également plan d'accolement. Le cisaillement s'opère parallèlement à ce plan.

Lorsque la température augmente, la martensite croît dans l'austénite, il y a alors apparition de plaquettes appelées variantes. Ces variantes peuvent avoir des orientations différentes, et pour un monocristal, on dénombre un maximum de 24 orientations possibles.

Le mécanisme cristallographique de la transformation martensitique peut donner plusieurs orientations différentes de plaquettes de martensite par rapport à l'austénite. Ces orientations, appelées variantes de martensite, sont en nombre fini. Elles correspondent aux différentes façons, cristallographiquement équivalentes et donc thermodynamiquement équivalentes, de réaliser la transformation. [1,25,27].

L'application d'une force extérieure peut favoriser l'apparition de seulement quelques variantes.

La théorie de l'action de groupe permet de prévoir le nombre de variantes engendrées lors d'une transformation martensitique, c'est à dire lors du passage d'

une phase mère de groupe de symétrie G_0 à une phase fille de groupe de symétrie G_1 . L'application des opérations de symétrie du groupe ponctuel G_0 d'ordre g qui n'appartiennent pas au groupe ponctuel G_1 mène à un nombre fini de variantes. La forme d'équilibre de la phase fille est régie par le groupe ponctuel H d'ordre h , des symétries communes aux groupes G_0 et G_1 . Le nombre de variantes est donné par la relation $N = \frac{g}{h}$. [25].

A la lumière de ce qui précède, certains AMF n'ayant que deux variantes désignées par M^+ et M^- , ont été étudiés par Muller et font l'objet de cette modeste contribution.

Au cours du refroidissement, les variantes se forment afin de compenser les déformations dues aux autres variantes, on parle alors d'auto accommodation.

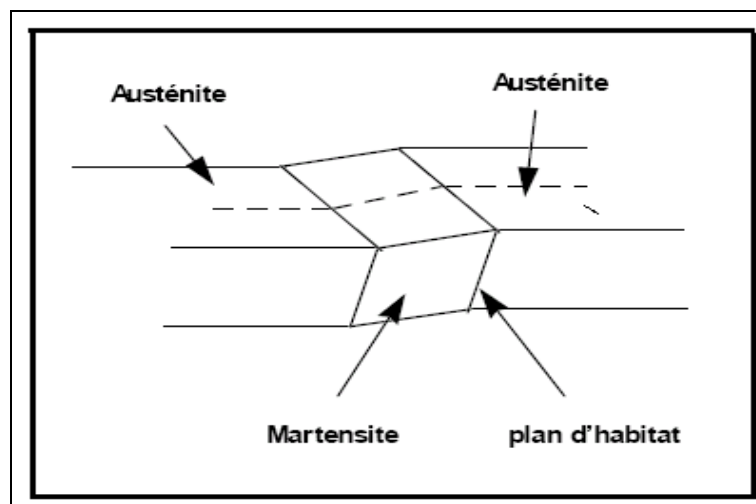


Figure I-5 Formation d'une variante de martensite [26]

La description de la déformation observée, à l'échelle macroscopique, peut se faire à l'aide de trois opérations successives:[26]

- ✓ **une déformation homogène du réseau:** à l'échelle microscopique, la déformation se traduit par un mouvement atomique d'ensemble. elle préserve la différence entre les mailles cristallographiques de la phase austénite et de la phase martensite. Pour passer d'une phase à l'autre, seule une déformation homogène est requise.[26]

- ✓ **Une déformation hétérogène à réseau invariant.** cette déformation est le résultat. Elle a pour effet de minimiser l'énergie de déformation et d'assurer la compatibilité du plan invariant.
- ✓ **Une rotation rigide:** l'échantillon semble avoir subi une rotation d'ensemble sans déformation.

I-2.2 Thermodynamique de la transformation:

Examinons, pour le cas d'un monocristal, la thermodynamique de la transformation martensitique. Il est démontré qu'il existe des relations linéaires entre les énergies libres de la phase austénitique et la phase martensitique.

$$G\{A\}=H\{A\} -T*S\{A\} \quad (\text{dans le cas de la phase austénitique}).$$

$$G\{M\}=H\{M\} -T*S\{M\} \quad (\text{dans le cas de la phase martensitique}).$$

Où **G** est l'énergie libre de la phase, H l'enthalpie et S l'entropie.

L'énergie libre de transformation s'écrit alors:

$$\Delta G \{A \rightarrow M\} = G\{A\} - G\{M\}$$

L'intersection des deux courbes représente alors la température d'équilibre T_0 .

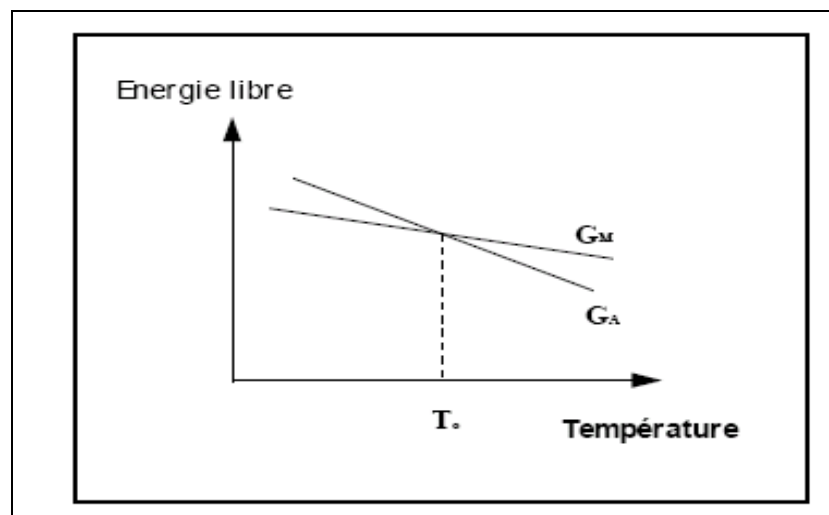


Figure I-6 Energie libre des phases martensite et austénite en fonction de la température [26]

$\Delta G\{A \rightarrow M\}$ est négatif pour des températures supérieures à T_0 , comme indiqué sur la figure, et c'est la phase austénitique qui est stable. A l'inverse, lorsque la température est inférieure à T_0 la phase martensitique devient stable.

Cette écriture, ou si l'on préfère cette équation, s'annule lorsque la température est égale à T_0 . Cela correspond en fait au cas théorique parfait. En réalité, les deux phases sont séparées par un plan d'habitat ou interface qui nécessite une certaine énergie pour son déplacement.[26]

Cette énergie constitue une barrière énergétique à la transformation et n'est pas mise en évidence dans l'équation ci-dessus.

Il serait plus logique de voir l'énergie libre comme la somme deux énergies, l'une chimique et motrice, l'autre non chimique mais élastique et dissipative et qui tend à s'opposer à la transformation martensitique.[26]

$$\Delta G\{\text{tot}\} = \Delta G\{\text{chim}\} + \Delta G\{\text{elast}\} + \Delta G\{\text{dissip}\}$$

Comme il n'y a pas de diffusion atomique, et en vertu du principe de l'énergie minimum, la morphologie, l'orientation et la position des nouveaux domaines de la phase martensitique sont gouvernées par la nécessité de diminuer l'énergie élastique à chaque étape de la transformation. Et après transformation, l'énergie non chimique stockée sous forme élastique, plastique ou interfaciale contribue à la réversion de la martensite en austénite.[26]

Les températures de transformation sont prises par convention à 10 et à 90 pourcents de la transformation et sont définies de la manière suivante:

$M\{s\}$: température de début de transformation martensitique

$M\{f\}$: température de fin de transformation martensitique

$A\{s\}$: température de début de transformation austénitique

$A\{f\}$: température de fin de transformation austénitique

L'énergie de dissipation durant les deux transformations est proportionnelle à la surface du cycle d'hystérésis

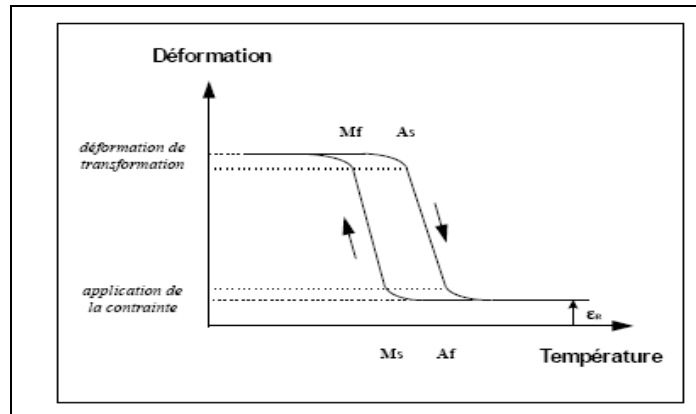


Figure I-7 Fraction volumique de la martensite en fonction de la température [26]

On distingue deux types de transformation: **la transformation par "Burst"** et **la transformation thermoélastique**.

Le premier type se caractérise par une croissance de la martensite par un processus en avalanche. la martensite croît de façon rapide et brusque jusqu'à ce qu'un joint de grain stoppe cette évolution. Elle implique l'existence d'une force motrice importante, supérieure à la force non chimique ce qui est la cause d'une forte hystérésis.

Le deuxième type se caractérise, quant à lui, par une succession des positions d'équilibre des interfaces lors d'une variation de la température. Il s'agit, en fait, à chaque température, d'un compromis énergétique entre énergie motrice et énergie résistive. Ce qui est la cause d'une faible hystérésis due à la faiblesse de la force motrice.[26]

I-2.3 Diagramme contrainte température:

Un effet thermique induit la martensite. Il en est de même par application d'une contrainte, mais dans ce cas, la contrainte doit être supérieur à un certain seuil $\sigma\{c\}$.

Cette contrainte critique doit avoir une évolution linéaire en respect de la loi de Clausius-clapeyron:

$$\frac{d\sigma}{dT} = \rho \frac{\Delta H}{\varepsilon_0 T_0}$$

Où

T_0 est la température d'équilibre de la transformation.

σ la contrainte appliquée

ε_0 la déformation de la transformation.

ρ la masse volumique.

ΔH l'enthalpie de la transformation.

La martensite est initiée, sous une contrainte σ , à la température $M\{\sigma\}$.

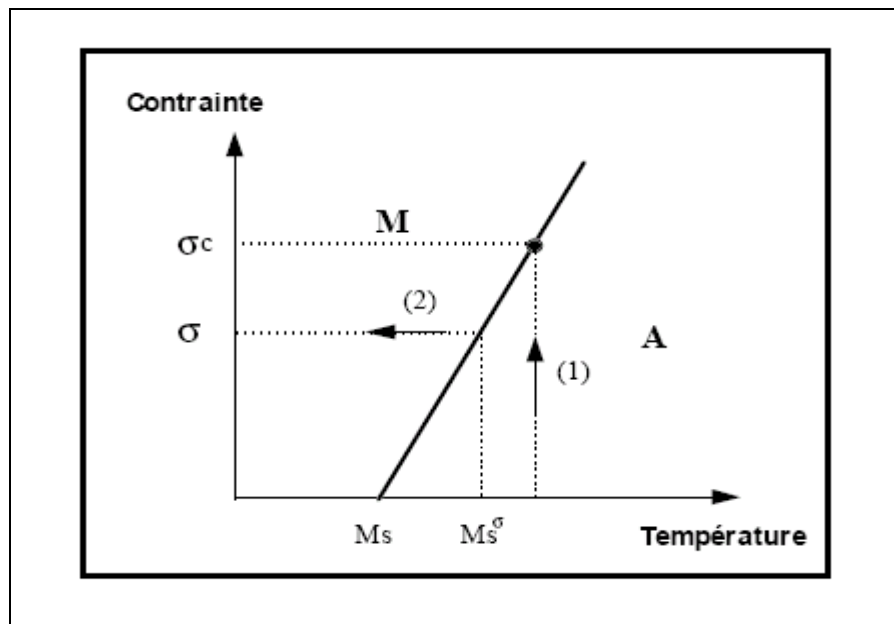


Figure I-8 loi de Clausius Clapeyron [26]

(1) à température constante et à contrainte croissante

(2) à contrainte constante et à température décroissante

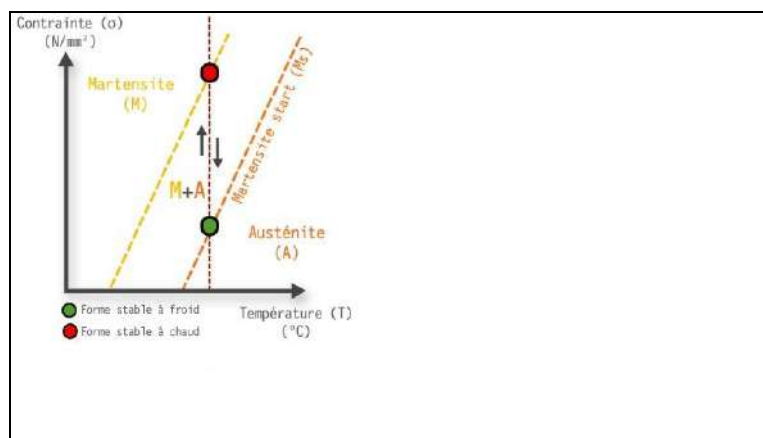


Figure I-9 Diagramme d'état pour la transformation Austénite \Rightarrow Martensite [24]

I-2.4 Propriétés thermomécaniques des alliages à mémoire de forme.

I-2.4.1 Effet mémoire simple sens:

Lorsqu'on déforme un échantillon d'alliage à mémoire de forme, à une température inférieure à la température de fin de transformation de la martensite $M\{f\}$, l'auto accommodation est telle que l'échantillon garde sa forme haute température. Il y a alors déplacement des interfaces entre variantes, et la contrainte finit par favoriser une variante dont le cisaillement est orienté dans le sens de la contrainte. Au retrait de la contrainte, une déformation permanente demeure. C'est alors qu'un simple réchauffement à une température supérieure à $A\{s\}$ permet à l'échantillon de retrouver progressivement sa forme haute température.[24]

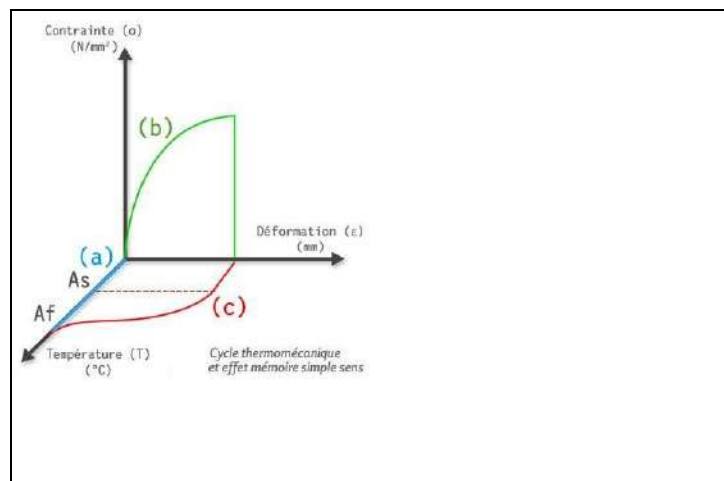


Figure I-10 Cycle thermomécanique effet mémoire de forme simple sens [24]

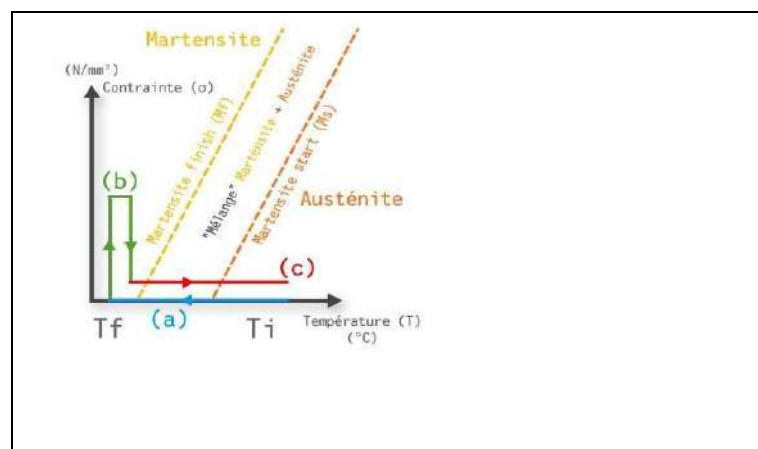


Figure I-11 Chargement thermomécanique séquentiel permettant l'obtention de l'effet mémoire simple sens [24].

I-2.4.2 Effet mémoire double sens assisté:

L'effet mémoire double sens assisté est le passage réversible d'une forme stable à haute température à une autre forme stable à basse température sous une contrainte constante.

Lorsqu'on applique, à haute température, une contrainte constante, puis, en maintenant la contrainte, on refroidit le matériau à T_{Mf} . [24]

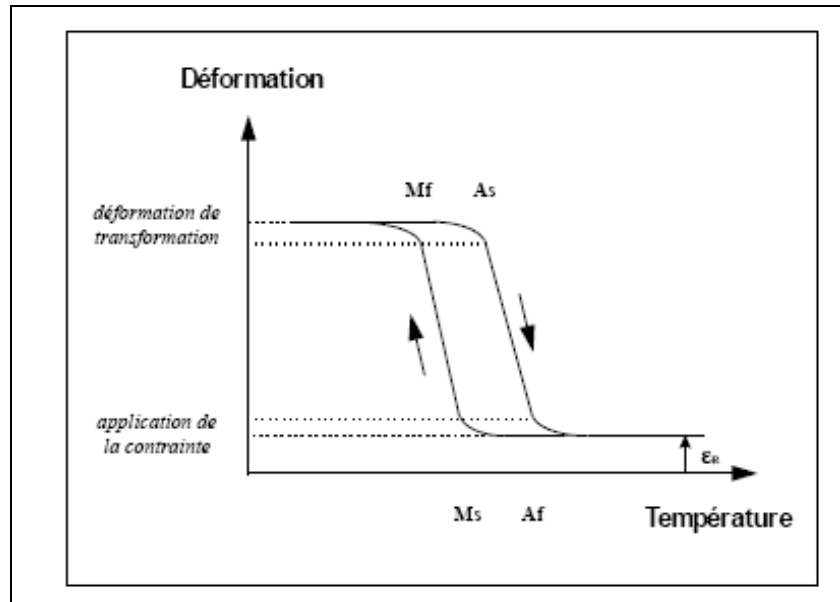


Figure I-12 Effet mémoire de forme double sens assisté [26]

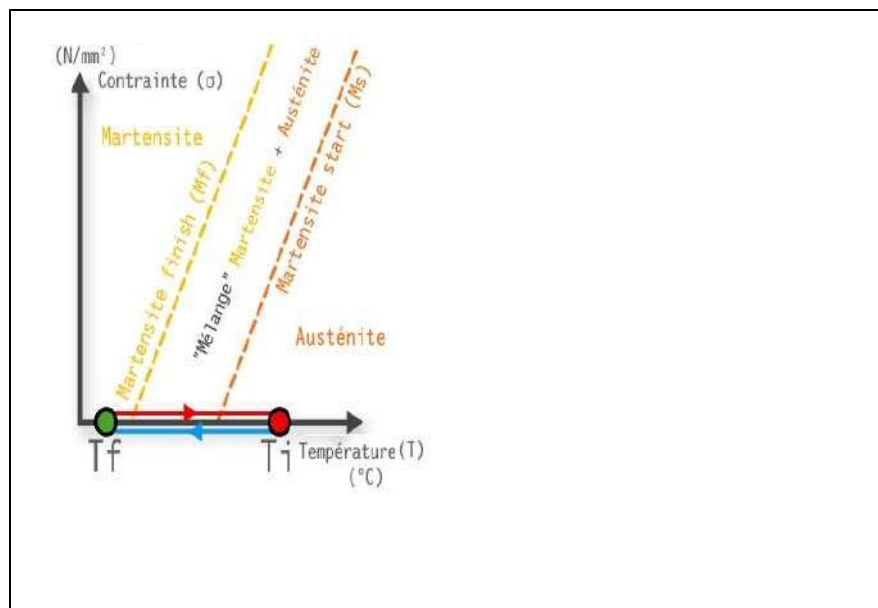


Figure I-13 chargement thermique permettent l'obtention de L'effet mémoire double sens. [24]

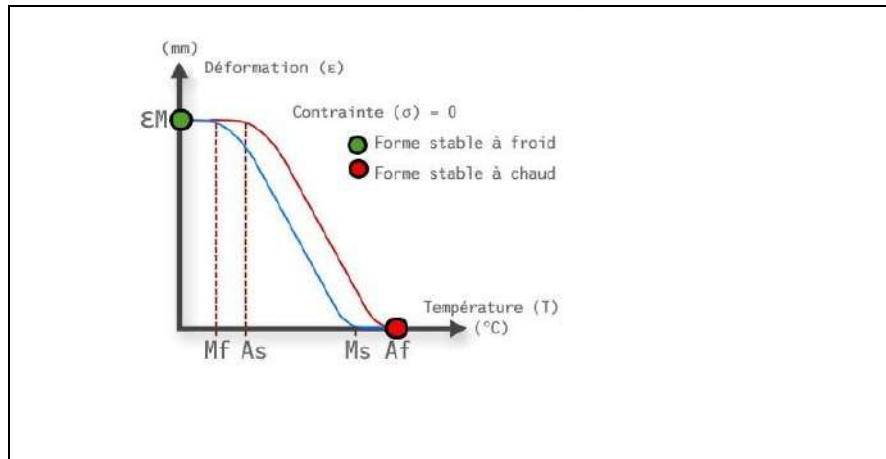


Figure I-14 Effet mémoire double sens sans contrainte appliquée. Une déformation ϵ de transformation lors d'un simple refroidissement est observée.[24]

Après un cycle, la déformation ne disparaît pas complètement. Subsiste alors une déformation résiduelle $\epsilon\{r\}$ attestant d'un changement de l'état interne du matériau. Ce qui s'explique par la présence d'un pourcentage résiduel de martensite ou par l'apparition de dislocations. A chaque cycle, la déformation résiduelle augmente jusqu'à saturation. Les cycles qui suivent restent alors sensiblement identiques tant que le taux de dislocation ou d'endommagement n'augmente pas. On dit que le matériau est éduqué, car il a "appris" à retrouver les deux formes stables à haute et basse température. Il y a donc mémorisation des formes et on parle alors d'effet mémoire double sens.[26]

I-2.4.3 Effet caoutchoutique:

Lorsque l'échantillon se trouve à l'état martensitique, l'application d'une contrainte a pour conséquence la déformation de l'échantillon. Au retrait de cette contrainte, la déformation se scinde en deux parties, l'une réversible et l'autre résiduelle. C'est l'effet caoutchoutique.[24]

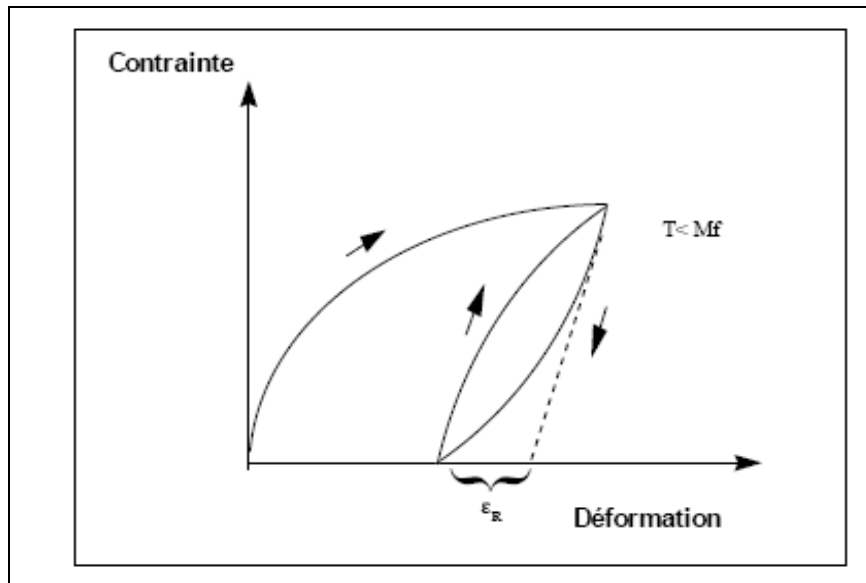


Figure I-15 Effet caoutchoutique [26]

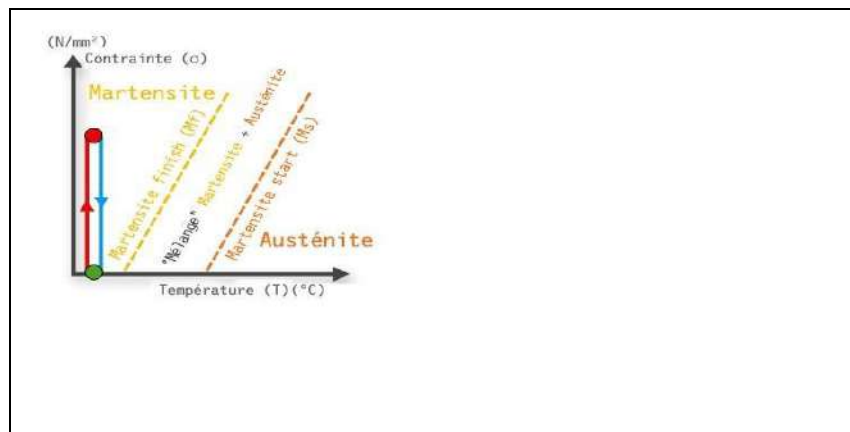


Figure I-16 Représentation de l'effet caoutchoutique chargement mécanique [24]

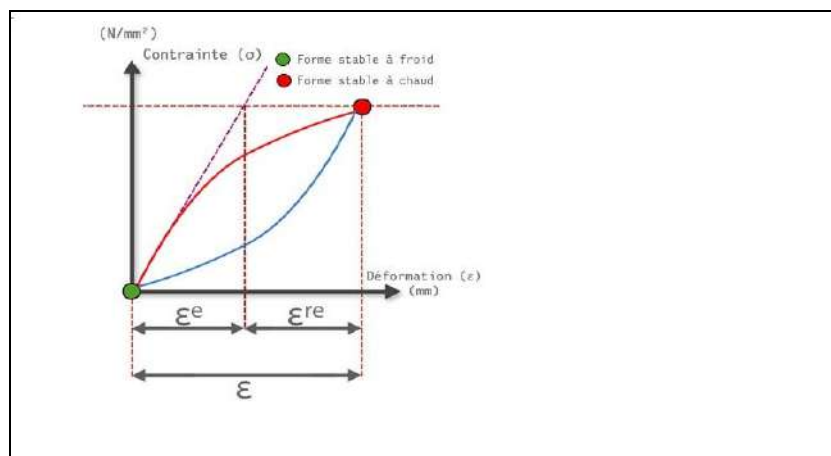


Figure I-17 Représentation de l'effet caoutchoutique résultat [24]

I-2.4.4 Effet superélastique:

A une température $T > A_f$, l'application d'une certaine contrainte critique provoque l'apparition de martensite, dite induite. Cette martensite continue de croître de façon linéaire avec la température selon la loi de Clausius Clapeyron. L'application de cette contrainte favorise la croissance de certaines variantes ce qui donne à l'échantillon un pouvoir de déformation plus grand pouvant aller jusqu'à 10% pour les monocristaux. La martensite, ainsi induite, se transforme en austénite au retrait de cette contrainte, ce qui permet à l'échantillon de retrouver sa forme initiale.[24]

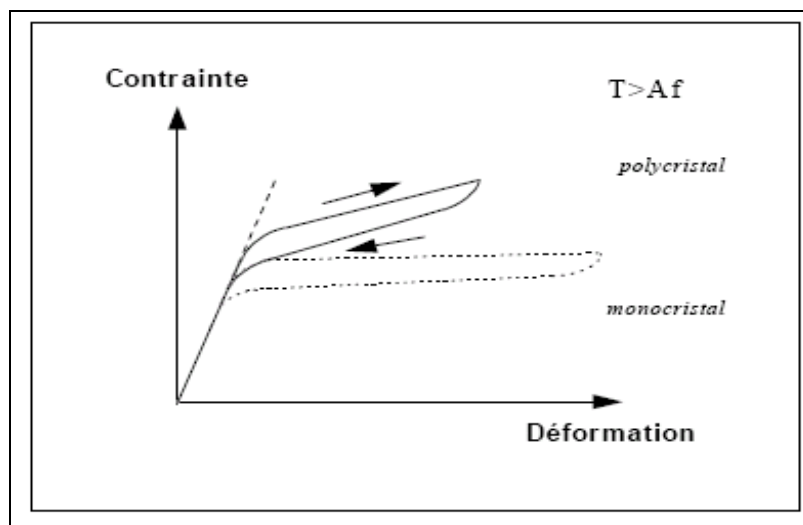


Figure I-18 Effet super élastique [26]

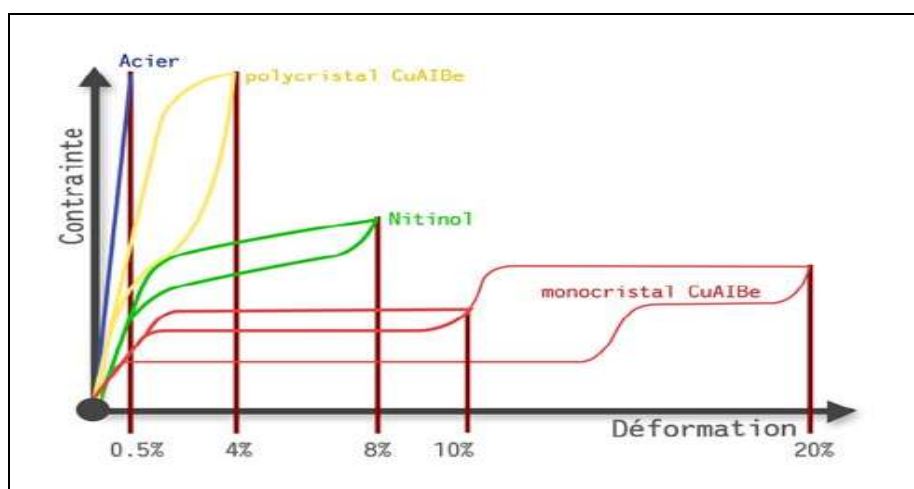


Figure I-19 Déformation d'un polycristal et d'un monocristal [24]

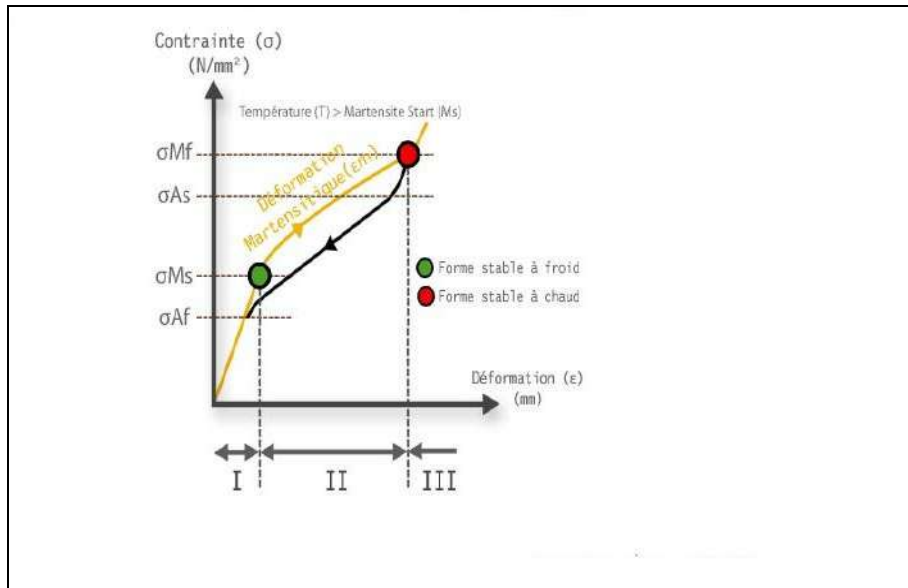


Figure I-20 Courbe de traction d'un monocristal Transformation sous contrainte à température constante [24]

I-2.4.5 Effet amortissement:

L'effet amortissement ou encore frottement interne est la conséquence d'une dissipation d'énergie thermique. Cette énergie dissipée est le résultat de la transformation irréversible d'une énergie mécanique. Ce frottement interne est fonction de la température, de la fréquence, du degré de déformation et des caractéristiques des matériaux lui-même.[24]

Pour les alliages à mémoire de forme, on remarque que le frottement interne est très variable dans trois domaines de température différents. Le frottement interne croît selon que le matériau se trouve en phase austénitique, martensitique ou phase intermédiaire durant laquelle les deux phases coexistent.[24]

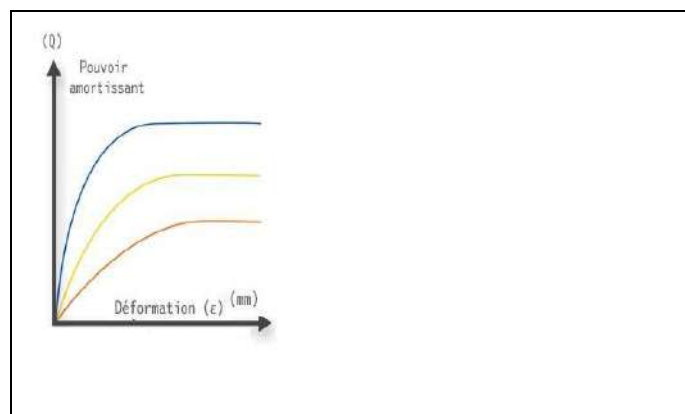


Figure I-21 Variation du frottement interne en fonction de l'état du matériau [24]

I-3 Equations de base

L'équation de base gouvernant le comportement des AMF s'écrit [3,18,19]:

$$[M] \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = F \quad (1.1)$$

ou U est le vecteur déplacement $U^T = [u, x_+, x_-, T]$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (h_{M+} - h_A) & (h_{M-} - h_A) & \rho.c \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A(x) * \sigma(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_+ P^{+A}(\sigma, T) + (1 - x_+ - x_-) P^{A+}(\sigma, T) \\ -x_+ P^{-A}(\sigma, T) + (1 - x_+ - x_-) P^{A-}(\sigma, T) \\ -\alpha \frac{l(x)}{A(x)} (T - T_0) + j(t) \end{bmatrix}$$

$$P^{\pm A}(\sigma, T) = \frac{1}{\tau} \frac{e^{-\frac{Vd}{2 * E_M * K} (\sigma_M \mp \sigma)^2}}{\sqrt{\frac{Vd}{2 * E_M * K * T} (\sigma_M \mp \sigma)}} \quad (1.2)$$

$$P^{A\pm}(\sigma, T) = \frac{1}{\tau} \frac{e^{-\frac{Vd}{2 * E_A * K} (\sigma_A \mp \sigma)^2}}{\text{erf} \left[\sqrt{\frac{Vd}{2 * E_A * K * T} (\sigma_A + \sigma)} \right] + \text{erf} \left[\sqrt{\frac{Vd}{2 * E_A * K * T} (\sigma_A - \sigma)} \right]} \quad (1.3)$$

P^{+A} représente la probabilité de transition de phase de la martensite + vers l'austénite et P^{A+} la transition de phase inverse.

– P^{-A} représente la probabilité de transition de phase de la martensite - vers l'austénite et P^{A-} la transition de phase inverse.

– $(h_{M\pm} - h_A)$ est la chaleur latente de la transformation.

$j(t)$ est l'apport de chaleur par effet joule.

– $-\alpha \frac{l(x)}{A(x)}(T - T_0)$ est le gain ou la perte de chaleur par convection.

– x_{\pm} désigne la fraction de martensite (+) ou (-) présente à l'instant t.

$$\Delta u = \frac{1}{2} \left[\sigma_A(T_U)^2 \cdot \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_M} \right) - \sigma_A(T_U) \cdot (2 \cdot \varepsilon_T + \Delta \sigma \cdot \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_M} \right)) + \Delta \sigma \cdot \varepsilon_T \right] + \Delta \eta \cdot T_U$$

$$\Delta \eta = \frac{-1}{2 \cdot (T_U - T_L)} \left[\sigma_A(T_U)^2 - \sigma_A(T_L)^2 \right] \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_M} \right) - \left[\sigma_A(T_U) - \sigma_A(T_L) \right] \cdot (2 \cdot \varepsilon_T + \Delta \sigma \cdot \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_M} \right))$$

$$\Delta \sigma = \sigma_A(T) - \sigma_M(T)$$

$$h_p = h_{M+} - h_A = -\frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{E_M - E_A}{E_M E_A} \right] - \sigma \cdot \varepsilon_T - \Delta u$$

$$h_m = h_{M-} - h_A = -\frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{E_M - E_A}{E_M E_A} \right] + \sigma \cdot \varepsilon_T - \Delta u$$

– ρ est la densité de l'AMF et c est la chaleur spécifique.

$$s_v = \frac{l(x)}{A(x)}$$

– α est le coefficient de transfert de chaleur AMF/milieu extérieur.

– T_0 est la température initiale de l'alliage à mémoire de forme.

$$\gamma = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$$

La relation contrainte déformation est définie par :

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{E_M \left[\varepsilon - (x_+ - x_-) \varepsilon_T \right]}{x_+ + x_- + \frac{E_M}{E_A} x_A} \quad (1.4)$$

E_M, E_A sont les modules de Young de la martensite et de l'austénite respectivement.

ε_T est un paramètre matériau identifiable par deux essais de traction à différentes températures et représente la contrainte résiduelle maximum recouvrable.

Le système d'équations différentielles (1-1) s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (h_{M+} - h_A) & (h_{M-} - h_A) & \rho.c \end{bmatrix} * \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U \\ x_+ \\ x_- \\ T \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A(x)\sigma(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_+ P^{+A} + x_A P^{A+} \\ -x_- P^{-A} + x_A P^{A-} \\ -\alpha \frac{l(x)}{A(x)} (T - T_0) + j(t) \end{bmatrix}$$

Chapitre II

Etat de l'art

II-1 Introduction

Les alliages à mémoire de forme ont un comportement non linéaire et hystérétique avec un fort couplage thermomécanique tel que le montre le modèle mathématique proposé par les auteurs Müller – Achenbach revisité par Seelecke.

La relation contrainte-déformation a pour expression :

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{E_M(\varepsilon - (x_+ - x_-)\varepsilon_T)}{x_+ + x_- + \frac{E_M}{E_A}x_A} \quad (\text{II.1})$$

Ou inversement

$$\varepsilon(\sigma) = \left[\frac{1}{E_A} - c_E \cdot (x_+ + x_-) \right] \cdot \sigma + \varepsilon_T \cdot (x_+ - x_-) \quad (\text{II.2})$$

Avec
$$c_E = \frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_M}$$

ε_T est un paramètre matériau identifiable par deux essais de traction à différentes températures et représente la contrainte résiduelle maximum recouvrable.

Pour un cas de chargement connu, c'est-à-dire une contrainte σ mesurable à tout instant t , la déformation ε peut être calculée pour peu que les fractions de martensite, x_+ et x_- , à l'instant considéré soient connues.

Ce qui serait le cas une fois résolu le système d'équations différentielles suivant.

$$\begin{cases} \dot{x}_+ = -x_+ p^{+A} + x_A \cdot p^{A+} & (1) \\ \dot{x}_- = -x_- p^{-A} + x_A \cdot p^{A-} & (2) \\ \rho \cdot c \cdot \dot{T} = -\alpha \cdot s_v \cdot (T - T_0) + j(t) - (h_{M+} - h_A) \cdot \dot{x}_+ - (h_{M-} - h_A) \cdot \dot{x}_- & (3) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Posons

$$v_1 = p^{+A} \quad v_2 = p^{-A} \quad v_3 = p^{A+} \quad v_4 = p^{A-}$$

Dans ce système d'équations différentielles, les paramètres ont la signification suivante :

- V_1 représente la probabilité de transition de la phase martensite + vers la phase austénite et v_3 la probabilité de transition de phase inverse.
- V_2 représente la probabilité de transition de la phase martensite - vers la phase austénite et v_4 la probabilité de transition de phase inverse.
- p, m sont les fractions de martensite +, - et $x_A = 1 - p - m$ la fraction d'austénite.
- ρ est la densité du matériau.
- c la chaleur spécifique du matériau.
- T est la température du matériau à l'instant t .
- h_p et h_m sont les chaleurs latentes de la transformation.

$$s_v = \frac{I(x)}{A(x)}$$

$$h_p = h_{M+} - h_A = -\frac{E_M - E_A}{E_M E_A} \cdot \frac{\sigma^2}{2} - \sigma \cdot \varepsilon_T - \Delta u$$

$$h_m = h_{M-} - h_A = -\frac{E_M - E_A}{E_M E_A} \cdot \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \cdot \varepsilon_T - \Delta u$$

$$\Delta \eta = -\frac{1}{2(T_u - T_l)} \left[\sigma_A^2(T_u) - \sigma_A^2(T_l) \right] c_E - [\sigma_A(T_u) - \sigma_A(T_l)] [2 \cdot \varepsilon_T + \Delta \sigma \cdot c_E]$$

$$\Delta u = \frac{1}{2} \left[\sigma_A^2(T_u) \cdot c_E - \sigma_A(T_u) \cdot (2 \varepsilon_T + \Delta \sigma \cdot c_E) + \Delta \sigma \cdot \varepsilon_T \right] + \Delta \eta \cdot T_u$$

Les variables v_i ($i = 1..4$) sont, en fait, des fonctions de la contrainte σ et de la température T . les expressions analytiques de ces fonctions et la représentation graphique de leur surface sont détaillées ci-après.

σ_m, σ_a sont des paramètres propres au matériau.

$$a = \frac{v_d}{2 \cdot E_M \cdot K}, b = \frac{v_d}{2 \cdot E_A \cdot K}$$

v_d représente le volume élémentaire représentatif

E_A, E_M sont les modules de Young des phases austénitique et martensitique du matériau.

$K = 1.38065 \cdot 10^{-23}$ est la constante de Boltzmann.

Le système d'équations différentielles décrit en amont est qualifié de raide, eu égard à certaines difficultés liées à sa sensibilité aux petites perturbations. En l'absence de solution analytique, on démontre que seules les méthodes numériques implicites peuvent venir à bout de ces difficultés et approcher plus ou moins convenablement la solution exacte.

II-2 Etude des fonctions de probabilité de transition de phase

Fonction probabilité de transition de phase de la martensite (+) vers l'austénite

$$v_1(x, y) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{e^{-\left((\sigma_m - x)\sqrt{\frac{a}{y}}\right)^2}}{\operatorname{erfc}\left((\sigma_m - x)\sqrt{\frac{a}{y}}\right)} \quad (\text{II.4})$$

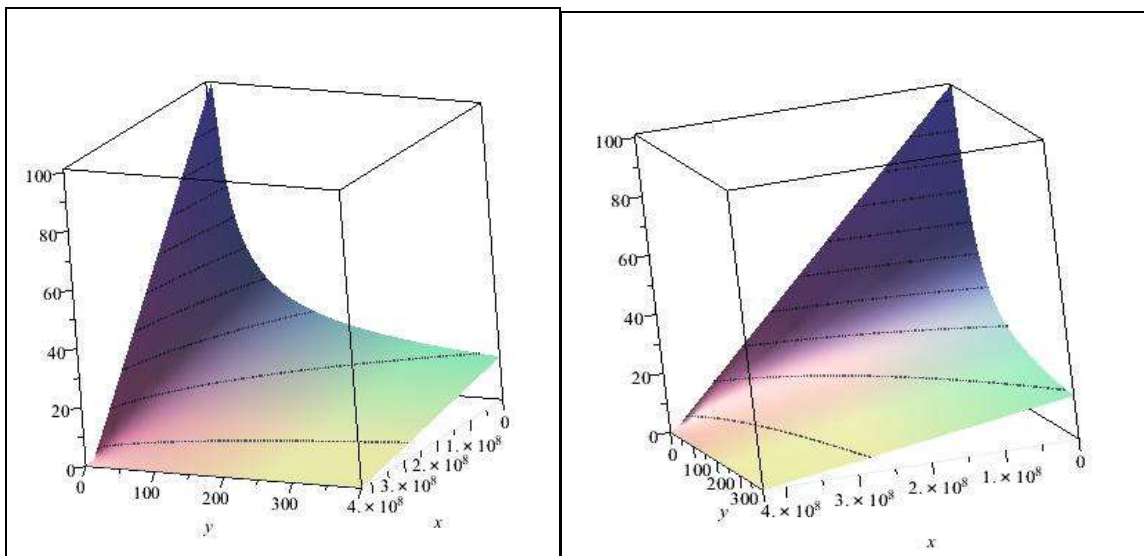


Figure II-1 Représentations graphiques de la fonction probabilité V_1 .

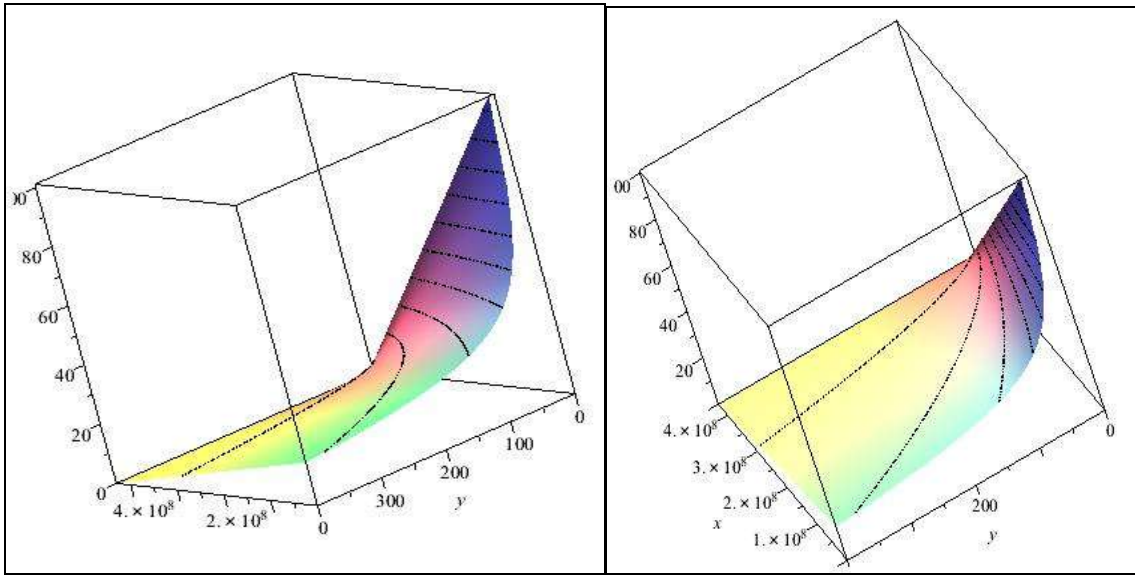


Figure II-2 Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_1 .

Fonction probabilité de transition de phase de la martensite (-) vers l'austénite

$$v_2(x, y) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{e^{-\left(\sigma_m + x\right) \sqrt{\frac{a}{y}}^2}}{\operatorname{erfc}\left(\left(\sigma_m + x\right) \sqrt{\frac{a}{y}}\right)} \quad (\text{II.5})$$

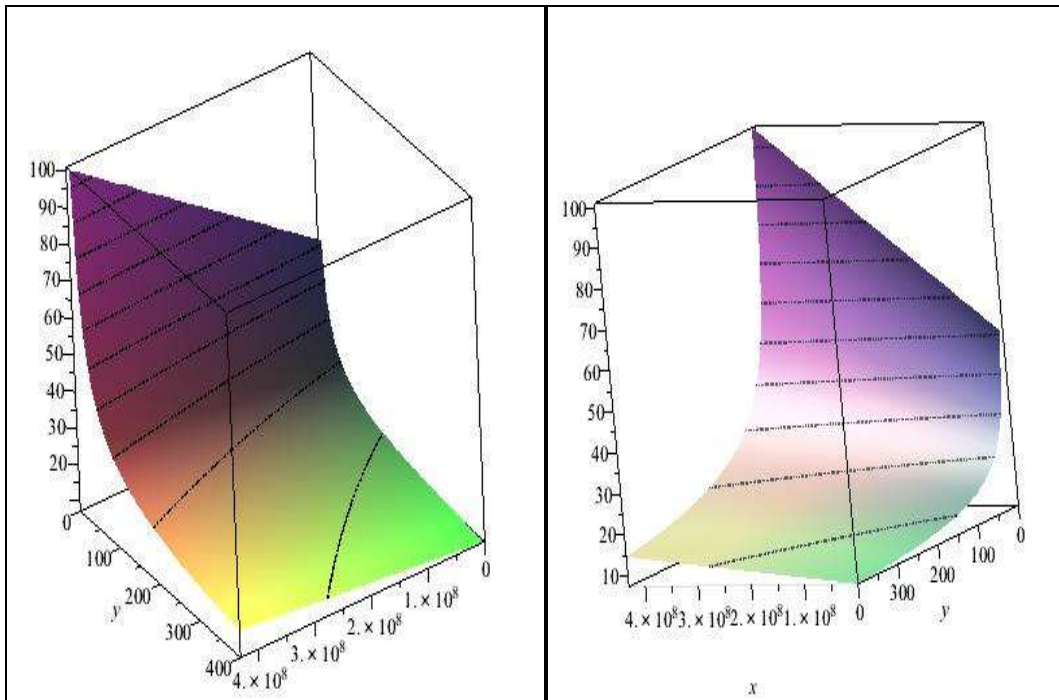


Figure II-3 Représentations graphiques de la fonction probabilité V_2 .

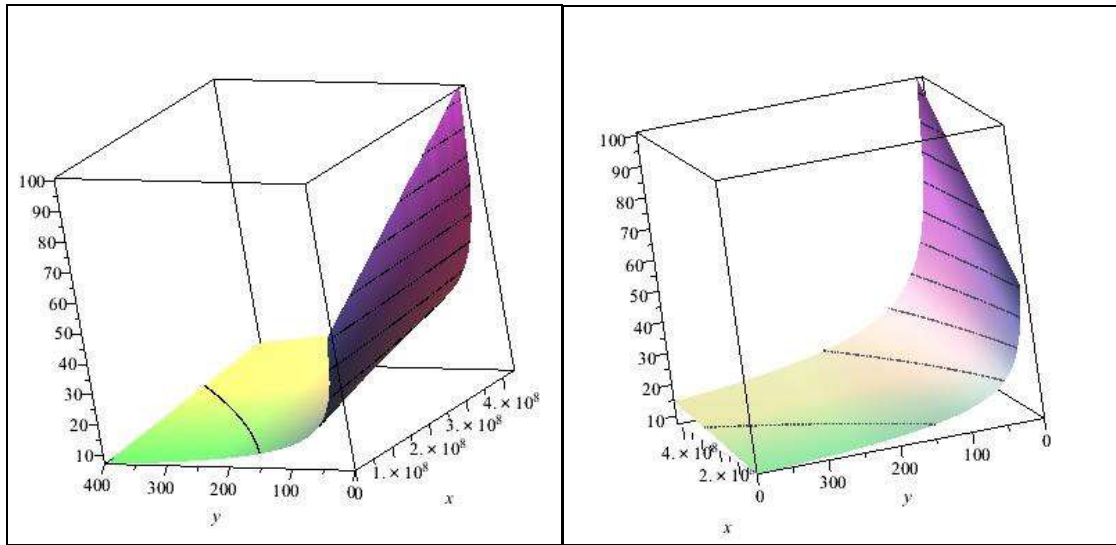


Figure II-4 Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_2 .

Fonction probabilité de transition de phase de l'austénite vers la martensite (+)

$$v_3(x, y) = 100. \frac{e^{-\left((\sigma_a - x) \cdot \sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2}}{\operatorname{erf}\left((\sigma_a - x) \cdot \sqrt{\frac{b}{y}}\right) + \operatorname{erf}\left((\sigma_a + x) \cdot \sqrt{\frac{b}{y}}\right)}$$

(II.6)

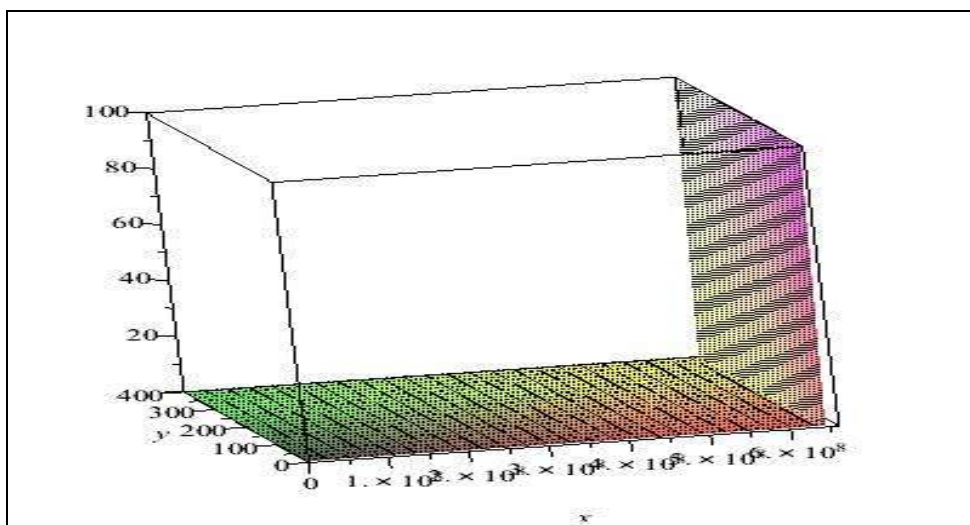


Figure II-5 Représentations graphiques de la fonction probabilité V_3 .

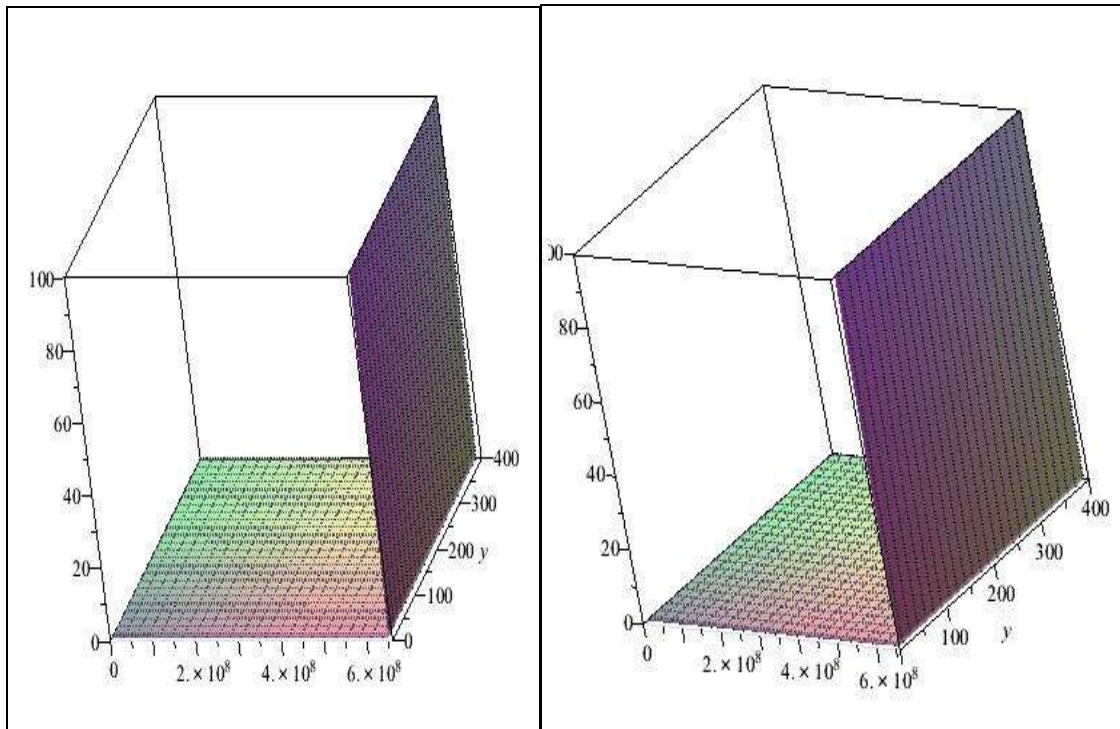


Figure II-6 Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_3 .

Fonction probabilité de transition de phase de l'austénite vers la martensite (-)

$$v_4(x, y) = 100 \cdot \frac{e^{-\left(\sigma_a + x\right) \cdot \sqrt{\frac{b}{y}}}}{\operatorname{erf}\left(\left(\sigma_a - x\right) \cdot \sqrt{\frac{b}{y}}\right) + \operatorname{erf}\left(\left(\sigma_a + x\right) \cdot \sqrt{\frac{b}{y}}\right)} \quad (\text{II.7})$$

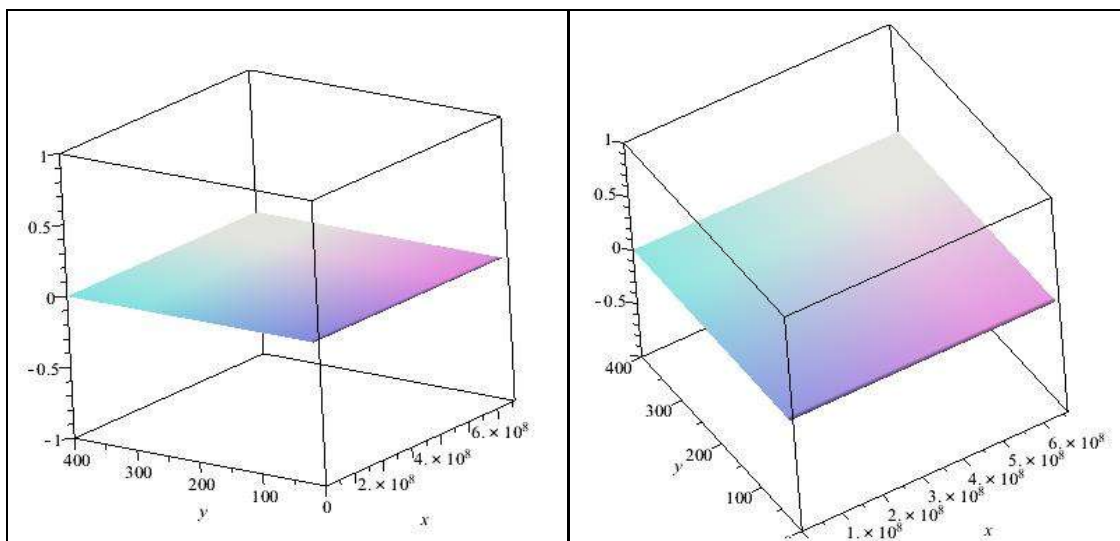


Figure II-7 Représentations graphiques de la fonction probabilité V_4 .

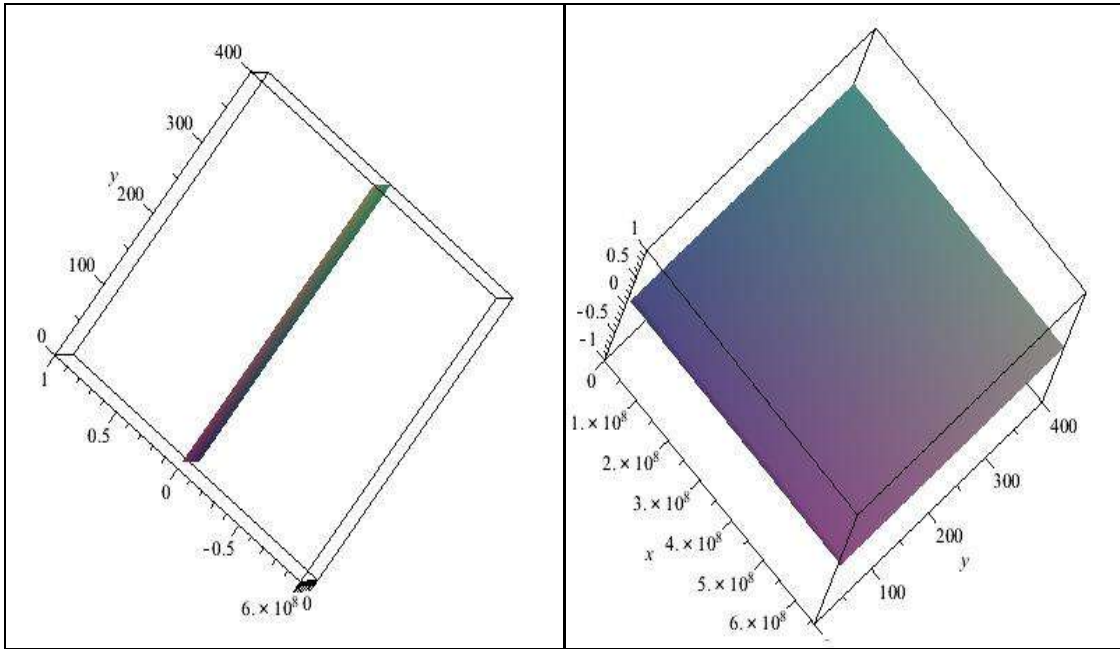


Figure II-8 Autres représentations graphiques de la fonction probabilité V_4 .

II-3 Notion de raideur des équations différentielles

La notion de raideur des équations différentielles est difficile à définir de façon simple, c'est pourquoi on trouve dans la littérature plusieurs formulations.

Au sens physique, la notion de raideur est tributaire de l'existence de deux échelles de temps très différentes mises en jeu par les phénomènes physiques intervenant dans le problème. Dans notre cas, le changement de phase des alliages à mémoire de forme, premier phénomène physique, se fait à une vitesse comparable à la vitesse du son dans le matériau, tandis que l'évolution de la température, deuxième phénomène physique lié à l'absorption ou à la diffusion de chaleur, est sur une échelle de temps beaucoup plus grande.

Au sens mathématique, le problème à résoudre est de la forme :

$$\frac{du}{dt} = F(u) \quad (\text{II.8})$$

On note $DF(u)$ dans $\mathfrak{R}^* \times \mathfrak{R}$ le Jacobien de $F(u)$, alors l'équation différentielle est raide si : [28]

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in Sp(DF(u)) \mid |\lambda_1| \ll |\lambda_2| \quad (\text{II.9})$$

Seules les méthodes numériques implicites donnent des résultats acceptables. Nous donnerons quelques définitions nécessaires à la bonne compréhension de ce qui va suivre et nous détaillerons les méthodes de Runge-Kutta implicites qui sont à la base de la méthode Radau outil représentatif de la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles raides et méthode idoine.

II-4 Rappels mathématiques [23]

Soit une équation différentielle écrite sous la forme de Picard :

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx \quad (\text{II.10})$$

En introduisant la valeur moyenne dans l'intégrale nous obtenons :

$$y(x_1) = y(x_0) + h.f(x_0 + \theta.h, y_0 + \Theta.(y_1 - y_0)) \quad (\text{II.11})$$

Avec $\theta \geq 0, \Theta < 1$ c'est ce que l'on appelle la θ -méthode.

Suivant les valeurs attribuées à θ et à Θ , on retrouve les méthodes numériques classiques

II-4.1 Définition 1

Un schéma est dit explicite si, pour toute fonction f , le calcul de x_{n+1} à partir de la donnée x_n est de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ avec g une application dont on connaît l'expression analytique en fonction de f . Au contraire, un schéma est dit implicite si le calcul de x_{n+1} à partir de la donnée x_n nécessite de résoudre un problème de la forme $h(x_{n+1}, x_n) = 0$.

- $\theta = \Theta = 0 \Rightarrow$ la méthode est la méthode d'Euler explicite.

$$y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$$

- $\theta = \Theta = 1 \Rightarrow$ la méthode est la méthode d'Euler implicite.

$$y_1 = y_0 + h.f(x_1, y_1)$$

- $\theta = \Theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$ la méthode est la méthode du point milieu.

$$\text{En posant } k_1 = \frac{y_1 - y_0}{2} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} k_1 = f(x_0 + \frac{h_0}{2}, y_0 + \frac{h_0}{2}) \\ y_1 = y_0 + h.k_1 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

On peut également utiliser la formule du trapèze pour approximer l'équation (II-8)

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1))$$

Le schéma de Radau est également utilisé pour l'approximation de l'équation (II-8).

$$\begin{aligned} y(x_1) - y(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x)) dx \\ &\approx \frac{h}{4} \left[f(x_0, y_0) + 3 \cdot f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y\left(x_0 + \frac{2}{3}h\right)\right) \right] \end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à approximer y en $(x_0 + \frac{2}{3}h)$ en utilisant, par exemple une interpolation quadratique.

$$y\left(x_0 + \frac{2}{3}h\right) = \frac{5}{9}y_0 + \frac{4}{9}y(x_1) + \frac{2}{9}h \cdot f(x_0, y_0)$$

En posant $y_1 = y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2)$ et en substituant y_1 dans l'équation précédente, on obtient la méthode de Hammer – Hollingsworth qui se présente comme suit :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_0, y_0) \\ k_2 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{h}{3}(k_1 + k_2)\right) \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Le schéma (II-12) comporte une étape intermédiaire, le calcul de k_1 , tandis que le schéma (II-13) en compte deux. On pourrait ainsi augmenter le nombre d'étapes intermédiaires et obtenir des schémas à s étapes et d'ordre $2s-1$.

II-4.2 Définition 2

Soient b_i et a_{ij} des réels ($i = 1, \dots, s$) et c_i défini par

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad (\text{II.14})$$

La méthode

$$\begin{cases} k_i = f\left(x_0 + c_i \cdot h, y_0 + \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot k_j\right), & i = 1, \dots, s \\ y_1 = y_0 + h \cdot \sum_{i=1}^s b_i \cdot k_i \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Est appelée méthode implicite de Runge-Kutta à s étapes.

II-4.3 Définition 3

Une méthode de RK (II-15) est d'ordre p , si pour un problème suffisamment régulier on a :

$$\|y(t_0 + h) - y_1\| \leq k.h^{p+1} \quad (II.16)$$

Autrement dit la série de Taylor de la solution exacte $y(t_0 + h)$ et y_1 coïncident jusqu'au terme h^p inclus.

La méthode s'appuie sur $s+1$ formules de quadrature, les s premières sont dites internes et la dernière externe. Elle est généralement représentée par un triplet (A,b,c) ou A est la matrice carrée $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,s}$ de dimension $s \times s$, b et c sont des

vecteurs de dimension s $b^T = (b_1, \dots, b_s)$ $c = (c_1, \dots, c_s)^T$.

Ces méthodes sont généralement présentées sous forme de tableau appelé tableau de Butcher.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

En posant $g_i = y_0 + \sum_{j=1}^s a_{ij}.k_j$, les méthodes RK sont habituellement écrites sous la

forme :

$$\begin{cases} g_i = y_0 + h. \sum_{j=1}^s a_{ij}.f(x_0 + c_j h, g_j), & i = 1, \dots, s \\ y_1 = y_0 + h. \sum_{j=1}^s b_j.f(x_0 + c_j h, g_j) \end{cases} \quad (II.17)$$

II-5 Méthodes Runge Kutta de type Radau

Les méthodes de Runge-Kutta d'ordre $2s-1$ basées sur les formules de quadrature de Radau et de Lobatto sont des méthodes de type I, II ou III respectivement si les coefficients c_i sont les zéros des polynômes de degré s

$$\begin{aligned}
I : & \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}} \left(x^s (x-1)^{s-1} \right) \\
II : & \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}} \left(x^{s-1} (x-1)^s \right) \\
III : & \frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}} \left(x^{s-1} (x-1)^{s-1} \right)
\end{aligned} \tag{II.18}$$

A titre d'exemple, nous présentons le tableau de Bucher de la méthode RK nommée RadaulIA d'ordre 5

$c_1 = \frac{4 - \sqrt{6}}{10}$	$a_{11} = \frac{88 - 7\sqrt{6}}{360}$	$a_{12} = \frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800}$	$a_{13} = \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225}$
$c_2 = \frac{4 + \sqrt{6}}{10}$	$a_{21} = \frac{269 + 169\sqrt{6}}{1800}$	$a_{22} = \frac{88 + 7\sqrt{6}}{360}$	$a_{23} = \frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225}$
$c_3 = 1$	$a_{31} = \frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$a_{32} = \frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$a_{33} = \frac{1}{9}$
	$b_1 = \frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$b_2 = \frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$b_3 = \frac{1}{9}$

En comparaison, les coefficients de la méthode RK5 sont consignés dans le tableau ci-dessous :

$c_1 = 0$	0					
$c_2 = \frac{1}{5}$	$a_{11} = \frac{1}{5}$	0				
$c_3 = \frac{3}{10}$	$a_{21} = \frac{3}{40}$	$a_{22} = \frac{9}{40}$	0			
$c_4 = \frac{3}{5}$	$a_{31} = \frac{3}{10}$	$a_{32} = -\frac{9}{10}$	$a_{33} = \frac{6}{5}$	0		
$c_5 = 1$	$a_{41} = \frac{11}{54}$	$a_{42} = \frac{5}{2}$	$a_{43} = -\frac{70}{27}$	$a_{44} = \frac{35}{27}$	0	
$c_6 = \frac{7}{8}$	$a_{51} = \frac{1631}{55296}$	$a_{52} = \frac{175}{512}$	$a_{53} = \frac{575}{13824}$	$a_{54} = \frac{44275}{110592}$	$a_{55} = \frac{253}{4096}$	0
	$b_1 = \frac{37}{378}$	$b_2 = 0$	$b_3 = \frac{250}{621}$	$b_4 = 0$	$b_5 = 0$	$b_6 = \frac{512}{1771}$

En fait, la méthode de Runge Kutta, se base sur la méthode de Taylor qui se présente comme suit pour l'équation à résoudre [22].

$$y'(x) = f(x, y)$$

On cherche, pour un $y(x_n)$ donné, une approximation de $y(x_{n+1})$

Le développement de Taylor du second ordre s'écrit :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n).h + y''(x_n).\frac{h^2}{2} + O(h^3) \quad (\text{II.19})$$

En se servant de l'équation différentielle, les dérivées $y'(x_n)$ et $y''(x_n)$ sont remplacées respectivement par $f(x_n, y(x_n))$ et $f'(x_n, y(x_n))$. L'équation s'écrit alors :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f(x_n, y(x_n)).h + f'(x_n, y(x_n)).\frac{h^2}{2} + O(h^3) \quad (\text{II.20})$$

La règle de dérivation en chaîne assure que :

$$f'(x, y(x)) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} y'(x) \quad (\text{II.21})$$

C'est-à-dire
$$f'(x, y(x)) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} f(x, y(x)) \quad (\text{II.22})$$

On obtient ainsi :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f(x_n, y(x_n)).h + \left(\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} f(x, y(x)) \right) \cdot \frac{h^2}{2} + O(h^3) \quad (\text{II.23})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 3, on arrive à l'approximation suivante :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h.f(x_n, y(x_n)) + \left(\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} f(x, y(x)) \right) \cdot \frac{h^2}{2} \quad (\text{II.24})$$

L'inconvénient de cette formule est qu'elle nécessite l'évaluation des dérivées partielles de la fonction $f(x, y(x))$. L'idée est de remplacer cette dernière relation par une expression équivalente ayant le même ordre de précision $O(h^3)$.

Cette expression est toute trouvée si l'on s'inspire des méthodes RK :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + a_1.f(x_n, y(x_n)) + a_2.h.f(x_n + a_3.h, y(x_n) + a_4.h) \quad (\text{II.25})$$

Où l'on doit déterminer les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4 de telle sorte que les deux dernières expressions aient une erreur en $O(h^3)$. Un moyen d'y parvenir est d'avoir recours au développement de Taylor d'une fonction à deux variables autour du point $(x_n, y(x_n))$.

$$f(x_n + a_3.h, y(x_n) + a_4.h) = f(x_n, y(x_n)) + a_3.h \frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial x} + a_4.h \frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y} + O(h^2) \quad (\text{II.26})$$

En remplaçant dans (II-25) on obtient :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (a_1 + a_2).h.f(x_n, y(x_n)) + a_2 a_3.h \frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial x} + a_2 a_4.h^2 \frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y} + O(h^3) \quad (\text{II.27})$$

On remarque que les expressions (II-23) et (II-27) sont du même ordre, et qu'il suffit de les comparer terme à terme pour déterminer les coefficients a_i .

Le système est sous déterminé car il y a plus d'inconnues que d'équations. La solution n'est alors pas unique. Cela offre la possibilité de mettre au point plusieurs variantes de la méthode de Runge Kutta d'ordre 2.

En effet le système d'équations à résoudre pour la détermination des paramètres a_i se présente de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 a_3 = \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 = \frac{f(x_n, y(x_n))}{2} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

On établit, sans difficulté aucune, qu'en fixant les paramètres a_i

$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1 \quad a_4 = f(x_n, y(x_n))$ on obtient la méthode d'Euler modifiée.

$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{f(x_n, y(x_n))}{2}$ on obtient la méthode du point milieu.

Les méthodes d'Euler modifiée et du point milieu sont des variantes des méthodes de Runge Kutta d'ordre 2.

II-6 Méthode de Runge Kutta d'ordre 4 [22]

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f , mais cette fois jusqu'à l'ordre 5, un raisonnement similaire à celui qui a mené aux méthodes Runge Kutta d'ordre 2 aboutit à un système de 8 équations non linéaires comprenant 10 inconnues. Cette méthode représente un outil plus précis et d'une grande utilité. Son algorithme se présente comme suit :

1. pour un pas donné h de la variable x , une condition initial (x_0, y_0) et un nombre maximum d'itérations N .
2. pour $0 \leq n \leq N$:

$$k_1 = h.f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h.f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

3. Stop.

La méthode RK4, très appréciée pour sa grande précision, souffre de deux inconvénients non sans importance :

- le pas h est choisi un peu au hasard ;
- il n'y a aucun contrôle sur la précision des résultats.

Pour y remédier, on se sert du pas h pour contrôler la précision et du coup pour disposer d'un moyen d'estimer, au besoin, le pas h .

II-7 Stabilité et contrôle de la précision des variantes RK

Il existe une variante particulièrement utile due à Fehlberg [22] qui utilise les mêmes constantes k_i pour la construction de deux variantes de la méthode de Runge Kutta, l'une d'ordre 4 et l'autre d'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
k_1 &= h.f(x_n, y_n) \\
k_2 &= h.f\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right) \\
k_3 &= h.f\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
k_4 &= h.f\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\
k_5 &= h.f\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\
k_6 &= h.f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)
\end{aligned}$$

La variante d'ordre 4 s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \right) = y_n - h.\varphi(x_n, y_n) \quad (\text{II.29})$$

Alors que la variante d'ordre 5 s'exprime par :

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right) = y_n - h.\bar{\varphi}(x_n, y_n) \quad (\text{II.30})$$

Nous disposons de deux approximations différentes de la même quantité. Pour contrôler le pas h et par le fait l'erreur même et s'assurer de la stabilité de la méthode, faisons une hypothèse importante et supposons que l'algorithme débute à partir d'une valeur y_n exacte c'est-à-dire $y_n = y(x_n)$. l'erreur exprimée tantôt grâce à la relation (II-29), tantôt grâce à la relation (II-30) vaut :

$$\begin{aligned}
y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_n - h.\varphi(x_n, y_n) \\
&= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h.\varphi(x_n, y_n) \\
&= h.e_{n+1} = O(h^5)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = h.\bar{e}_{n+1} = O(h^6)$$

Si l'on remarque que :

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = (y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}) + (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})$$

Et donc que

$$h.e_{n+1} = h.\bar{e}_{n+1} + (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})$$

En regardant de chaque côté de l'égalité, on constate que :

$$O(h^5) = O(h^6) + (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})$$

Pour que l'égalité puisse avoir lieu, il faut que :

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \cong (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}) = O(h^5)$$

Et l'on conclut que la partie la plus importante de l'erreur commise fait tout simplement intervenir la différence entre les approximations d'ordre 4 et 5.

On en conclut également que la quantité E définie par :

$$E = (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}) = \left(\frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right) \quad (\text{II.31})$$

est déterminante pour contrôler l'erreur. Pour une précision ε spécifiée à l'avance, on calcule l'approximation E et l'on ajuste le pas h pour être satisfait le critère de précision. Rappelons que :

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = C.h^5 \cong E$$

Remplaçons h par $\beta.h$ de sorte que :

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = C.(\beta.h)^5 = \varepsilon$$

En divisant les deux dernières relations membre à membre, nous obtenons alors :

$$\beta^5 = \frac{\varepsilon}{E} \text{ ou encore } \beta = \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^{\frac{1}{5}}$$

On obtient ainsi un facteur d'amplification ou de réduction du pas h. Pour ne pas augmenter ou diminuer trop rapidement le pas h, ce qui peut être néfaste pour les systèmes qualifiés de raides, un facteur supplémentaire de 2 est introduit dans le calcul du facteur β de sorte que :

$$\boxed{\beta = \left(\frac{\varepsilon}{2.E} \right)^{\frac{1}{5}}} \quad (\text{II.32})$$

En pratique, on évitera d'augmenter ou de diminuer trop fortement la valeur du pas h en lui fixant une valeur maximale, qui semble donner pratiquement de bons résultats.

$$h_{\max} = \frac{(x_f - x_0)}{16}$$

Où x_f est la borne supérieure de l'intervalle de la variable x

De même qu'on peut prendre pour valeur initiale de h

$$h = \frac{h_{\max}}{8}$$

Nous arrivons ainsi à une méthode, variante des méthodes Runge Kutta, d'ordre 5 et qui plus est à pas variable et à erreur estimée et contrôlée.

Pour un système d'équations différentielles raide, utilisant la méthode de Fehlberg, l'algorithme se présente comme suit :

- 1- étant données m équations différentielles
- 2- un pas h , un nombre maximal d'itération N et une précision ε
- 3- des conditions initiales $(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})$
- 4- pour $0 \leq n \leq N$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$k_{i,1} = h.f(x_n, y_n)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$k_{i,2} = h.f\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$k_{i,3} = h.f\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$k_{i,4} = h.f\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$k_{i,5} = h.f\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$k_{i,6} = h.f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$y_{i,n+1} = y_n + \left(\frac{25}{216}k_{i,1} + \frac{1408}{2565}k_{i,3} + \frac{2197}{4104}k_{i,4} - \frac{1}{5}k_{i,5} \right)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{16}{135}k_{i,1} + \frac{6656}{12825}k_{i,3} + \frac{28561}{56430}k_{i,4} - \frac{9}{50}k_{i,5} + \frac{2}{55}k_{i,6} \right)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$E_i = (\bar{y}_{i,n+1} - y_{i,n+1})$$

$$5- \beta_i = \left(\frac{\varepsilon}{2.E_i} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$6- h = \min(\beta_i) * h \text{ aller 4}$$

$$7- y_{i,n+1}$$

$$8- x_{n+1} = x_n + h$$

9- écrire x_{n+1} et $y_{i,n+1}$ pour $i=1, 2, 3, \dots, m$

10 arrêt

II-8 Implémentation

Tout ce qui vient d'être expliqué dans ce chapitre doit être écrit dans un code informatique en tant que sous programme appelé 'USERMAT' et incorporé dans les logiciels tels ANSYS ou ABAQUS pour être définitivement résolu. Signalons que ce

sous programme doit faire appel à un autre sous programme de résolution du système d'équations différentielles (II-3), par exemple RADAU5 écrit en fortran par les mathématiciens Hairer et Wanner ou COMSOL.

Après avoir défini la géométrie du matériau et le maillage choisi, le logiciel ABAQUS ou ANSYS transmet au sous programme USERMAT la valeur du pas de temps et la contrainte appliquée, lequel fait appel au sous programme radau5 pour la résolution du système d'équations différentielles et retourne les valeurs de la fraction de martensite + , de martensite - , de la température T et de la déformation ϵ . Une fois ces valeurs calculées pour tous les pas, le logiciel procède à l'assemblage et à la résolution, par éléments finis, du système global et affiche les résultats.

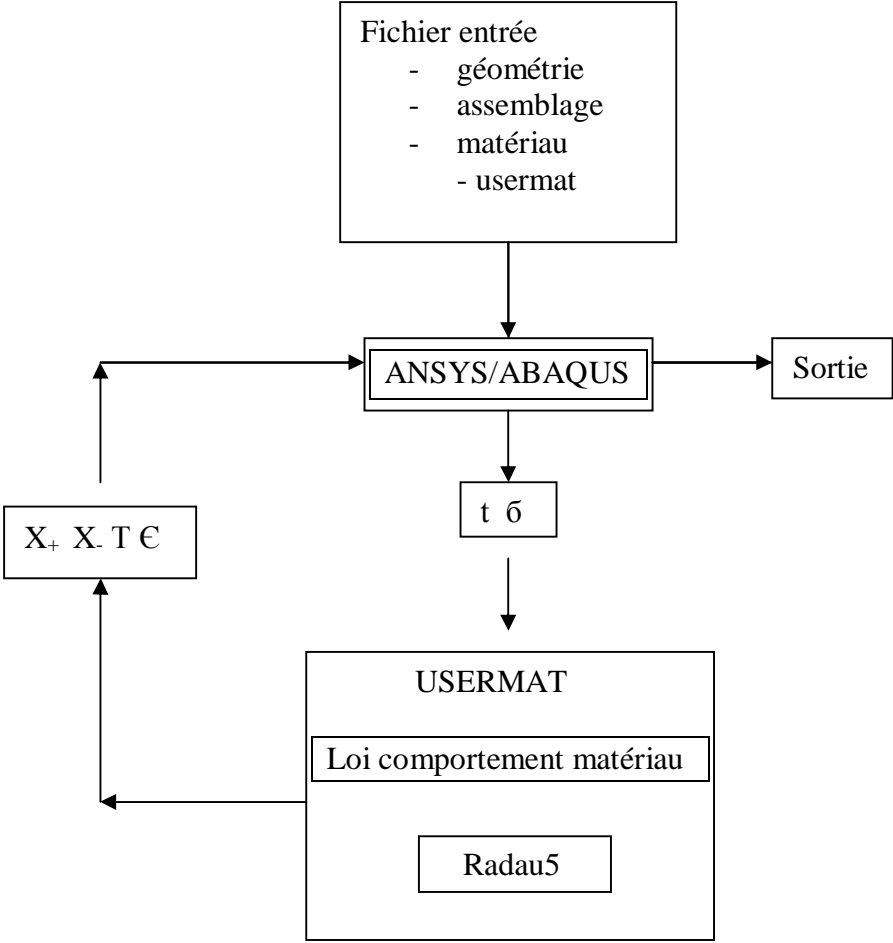


Figure II-9 Schéma d'implémentation dans Ansys ou Abaqus

II-9 Modèles de loi de comportement des AMF

Durant les 30 dernières années, la modélisation thermomécanique des AMF a beaucoup intéressé certains scientifiques. Parmi les différentes contributions, nous citons :

- Falk[1980] développe un modèle de transformation de phase martensitique en utilisant la théorie de Ginsburg-Landau et décrit la nucléation et la propagation de la martensite.
- Achenbach et Müller[1982] ont proposé un modèle microscopique de même que Sittner et Novak[2000] et Gall et Al [2001].
- Patoor et Al ont étudié le comportement des AMF au niveau du grain et ont déduit un modèle à l'échelle micro-macroscopique , de même que Fischer et Tanaka [1992], Sun et Hwang [1993] puis Patoor et al à nouveau [2006]. Le principal inconvénient de ces modèles est le nombre élevé de degrés de liberté et l'introduction de paramètres matériaux difficilement identifiables. Les modèles macroscopiques sont plus faciles à utiliser, mais pour les chargements multiaxiaux, la prédiction de ces modèles n'est pas très fiable.

Parmi les modèles monodimensionnels, nous citons :

- Tanaka [1986] qui introduit trois variables pour la description du comportement des AMF à savoir la déformation, la température et la fraction volumique de martensite. Liang et Rogers [1990] proposent un modèle similaire sauf que la loi de la fraction volumique de martensite est sinusoidale. Brinson et Huang [1996] ont divisé la fraction volumique de martensite en fraction induite par la contrainte et la fraction induite par la température.
- Tanaka et Al [1995] ont étendu le modèle Tanaka au comportement cyclique.
- Ivshin et Pence[1994] proposent un modèle monodimensionnel basé sur le modèle Reuss.
- Abeyaratne et Al [1994] proposent un modèle monodimensionnel qui introduit en tant que variable interne l'orientation de la déformation.
- Citons enfin le modèle basé sur la thermodynamique statistique proposé par Müller et Seelecke [2001] que nous utilisons dans cette contribution et que nous avons détaillé plus haut.

Quant aux modèles 3D, développés dans le cadre de la thermodynamique et généralisés aux modèles standards, nous citons :

- Raniecki et LExcellent [1998] ont proposé un modèle 3D qui a été amélioré par un bon nombre de publications ultérieures. Les auteurs utilisent la fraction volumique de martensite comme variable interne et une interaction d'énergie entre les phases et déduisent une loi de comportement.
- Bo el Lagoudas [1999] ont développé un modèle basé sur les propriétés qui caractérisent les AMF. Une généralisation de ce modèle proposée par Lagoudas et Entchev [2004] tient compte de la déformation plastique.
- Auricchio et Petrini [2002], Auricchio et Al [2009] ont développé plusieurs modèles 1D et 3D et ont étendu leur travail au chargement cyclique.
- Bekker et Brinson [1997] ont proposé un modèle 1D qu'ils ont, par la suite étendu au modèle 3D.

Chapitre III

Nouvelle approche de résolution

III-1 Position du problème

Soit à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{p} = -p.v_1 + a.v_3 \\ \dot{m} = -m.v_2 + a.v_4 \\ \rho.c.\dot{T} = -\alpha.s_v.(T - T_0) + j(t) - hp.\dot{p} - hm.\dot{m} \end{cases}$$

Dans ce système d'équations différentielles, les paramètres ont la signification suivante :

- v_1 représente la probabilité de transition de la phase martensite + vers la phase austénite et v_3 la probabilité de transition de phase inverse.

- v_2 représente la probabilité de transition de la phase martensite - vers la phase austénite et v_4 la probabilité de transition de phase inverse.

- p, m sont les fractions de martensite +, - et $a=1-p-m$ la fraction d'austénite.

- ρ est la densité du matériau.

- c est la chaleur spécifique du matériau.

- T est la température du matériau à l'instant t .

- hp et hm sont les chaleurs latentes de la transformation.

Réécrivons le système :

$$\begin{cases} \dot{p} = -p.v_1 + (1-p-m).v_3 = -p.(v_1 + v_3) - m.v_3 + v_3 & (1) \\ \dot{m} = -m.v_2 + (1-p-m).v_4 = -m.(v_2 + v_4) - p.v_4 + v_4 & (2) \\ \rho.c.T = -\alpha.s_v.(T - T_0) + j(t) - hp.p - hm.m & (3) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Remarquons que le système d'équations différentielles régit l'évolution, à tout instant, de la fraction de martensite et de la température au sein du matériau considéré.

Mais la vitesse d'évolution de la température a une échelle de temps beaucoup plus grande que celle de l'évolution de la fraction de martensite qui est de l'ordre de la vitesse du son dans le même matériau. Ceci nous amène à dire, vu que l'écart entre les deux échelles de temps est important, que nous sommes en présence d'un système d'équations différentielles dit raide (stiff system en anglais).

En l'absence de solution analytique exacte, le recours aux méthodes numériques est, jusque-là, nécessaire pour la résolution de ce genre de système.

III-2 Résolution par les transformées de Laplace

Pour contourner toutes les difficultés mathématiques de stabilité numérique, de convergence et de précision des méthodes numériques, traitons le système linéaire par les transformations de Laplace. Un des avantages de cette procédure est l'élimination des équations différentielles et leur remplacement par des équations algébriques linéaires.

$$\begin{cases} s.\varphi p - p_0 = -\varphi p.(v_1 + v_3) - \varphi m.v_3 + \frac{v_3}{s} & (1) \\ s.\varphi m - m_0 = -\varphi m.(v_2 + v_4) - \varphi p.v_4 + \frac{v_4}{s} & (2) \\ \rho.c.(s.\varphi T - T_0) = -\alpha.s_v.(\varphi T - \frac{T_0}{s}) + \frac{U^2}{R} \cdot \frac{1}{s^2} - hp.(s.\varphi p - p_0) - hm.(s.\varphi m - m_0) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s + v_1 + v_3) \cdot \varphi p = -\varphi m \cdot v_3 + p_0 + \frac{v_3}{s} & (1) \\ (s + v_2 + v_4) \cdot \varphi m = -\varphi p \cdot v_4 + m_0 + \frac{v_4}{s} & (2) \\ (\rho \cdot c \cdot s + \alpha \cdot s_v) \cdot \varphi_T = T_0 \cdot (\rho \cdot c + \frac{\alpha \cdot s_v}{s}) + \frac{U^2}{R} \cdot \frac{1}{s^2} - (h_p \cdot \varphi p + h_m \cdot \varphi m) \cdot s + h_p \cdot p_0 + h_m \cdot m_0 & (3) \end{cases}$$

Réduisons la dimension du système, en tirant de l'équation (2) l'expression de φm et en la remplaçant dans les équations (1) et (3).

$$\text{En posant } c_1 = \frac{(h_p \cdot p_0 + h_m \cdot m_0)}{\rho \cdot c}$$

$$\begin{aligned} \varphi m &= -\frac{v_4}{s + v_2 + v_4} \varphi p + \frac{m_0 s + v_4}{s(s + v_2 + v_4)} \\ \begin{cases} (s + v_1 + v_3) \cdot \varphi p = \frac{v_3 \cdot v_4}{s + v_2 + v_4} \varphi p - \frac{v_3 \cdot (m_0 s + v_4)}{s(s + v_2 + v_4)} + \left(\frac{p_0 s + v_3}{s}\right) \\ (\rho \cdot c \cdot s + \alpha \cdot s_v) \cdot \varphi_T = \frac{T_0}{s} \cdot (\rho \cdot c \cdot s + \alpha \cdot s_v) + \frac{U^2}{R \cdot s^2} - \left(h_p \varphi p + h_m \cdot \left(-\frac{v_4}{s + v_2 + v_4} \varphi p + \frac{m_0 s + v_4}{s(s + v_2 + v_4)}\right)\right) \cdot s + c_1 \cdot \rho \cdot c \end{cases} \end{aligned}$$

Afin d'alléger les écritures, posons :

$$c_2 = v_1 + v_3$$

$$c_3 = v_2 + v_4$$

$$c_4 = \rho \cdot c$$

$$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$$

$$c_6 = \frac{h_p v_2 + (h_p - h_m) \cdot v_4}{\rho \cdot c}$$

$$c_7 = \frac{h_m m_0}{\rho \cdot c}$$

$$c_8 = v_2 v_3$$

$$c_9 = \frac{U^2}{\rho \cdot c \cdot R}$$

$$c_{10} = \frac{h_p}{\rho \cdot c}$$

$$c_{11} = p_0 \cdot c_3 + (1 - m_0) \cdot v_3$$

$$c_{12} = \frac{h_m \cdot v_4}{c_4}$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} (s+c_2).\varphi p = \frac{v_3.v_4}{s+c_3} \varphi p - \frac{v_3.(m_0.s+v_4)}{s(s+v_2+v_4)} + \left(\frac{p_0.s+v_3}{s}\right) \\ c_4.(s+c_5).\varphi_T = c_4.(s+c_5) \frac{T_0}{s} + \frac{U^2}{R} \cdot \frac{1}{s^2} - \left(hp - \frac{hm.v_4}{s+c_3}\right).s.\varphi p - \frac{hm.(m_0.s+v_4).s}{s+c_3} + c_1.c_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_4.(s+c_5).\varphi_T + \left(hp - \frac{hm.v_4}{s+c_3}\right).s.\varphi p = c_4.(s+c_5) \frac{T_0}{s} + \frac{U^2}{R} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{hm.(m_0.s+v_4).s}{s+c_3} + c_1.c_4 \\ (s+c_2).\varphi p - \frac{v_3.v_4}{s+c_3} \varphi p = -\frac{v_3.(m_0.s+v_4)}{s(s+c_3)} + \left(\frac{p_0.s+v_3}{s}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+c_5).\varphi_T + \frac{1}{c_4} \left(hp - \frac{hm.v_4}{s+c_3}\right).s.\varphi p = (s+c_5) \frac{T_0}{s} + \frac{U^2}{c_4.R} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{hm.(m_0.s+v_4).s}{c_4.(s+c_3)} + c_1 \\ \left((s+c_2) - \frac{v_3.v_4}{s+c_3} \right) \cdot \varphi p = -\frac{v_3.(m_0.s+v_4)}{s.(s+c_3)} + \frac{(p_0.s+v_3).(s+c_3)}{s.(s+c_3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_T + \frac{(c_{10}.s+c_6).s}{(s+c_3).(s+c_5)} \varphi p = \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{(s+c_5)} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{c_7.s}{(s+c_3).(s+c_5)} - \frac{c_{12}}{(s+c_3).(s+c_5)} + \frac{c_1}{(s+c_5)} \\ \left((s+c_2).(s+c_3) - v_3.v_4 \right) \varphi p = p_0.s + c_{11} + \frac{c_8}{s} \end{cases}$$

Le système s'écrit alors sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10}.s^2+c_6.s}{(s+c_3).(s+c_5)} \\ 0 & \left((s+c_2).(s+c_3) - v_3.v_4 \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2.(s+c_5)} - \frac{c_7.s}{(s+c_3).(s+c_5)} - \frac{c_{12}}{(s+c_3).(s+c_5)} + \frac{c_1}{(s+c_5)} \\ p_0.s + c_{11} + \frac{c_8}{s} \end{pmatrix} \quad (III.2)$$

La matrice se présente sous forme triangulaire supérieure, il n'est alors nul besoin de recourir aux méthodes numériques de triangularisation, telle que l'élimination de Gauss, pour résoudre le système. De plus, le système étant issu d'un système différentiel raide, on pouvait, en toute logique, s'attendre à un système algébrique mal posé. Auquel cas, la mise à l'échelle, consistant à diviser chaque ligne de la matrice par le plus grand terme de la ligne de la matrice non augmentée, aurait été nécessaire. Mais cette procédure s'avère inutile puisque la deuxième ligne donne directement l'image par la transformée de Laplace de la fraction de martensite réorientée. L'inversion de cette expression aboutit à l'expression recherchée de la fraction de martensiteréorientée en fonction du temps.

Pour obtenir l'expression de l'image de la fraction de martensite, explicitons le premier membre de la deuxième équation du système algébrique.

$$\begin{aligned}
(s + c_2) - \frac{v_3 \cdot v_4}{s + c_3} &= (s + v_1 + v_3) - \frac{v_3 v_4}{s + c_3} = \frac{(s + v_1 + v_3) \cdot (s + v_2 + v_4) - v_3 v_4}{s + c_3} \\
s^2 + (v_1 + v_3 + v_2 + v_4) \cdot s + (v_1 + v_3) \cdot (v_1 + v_4) - v_3 v_4 &= \\
s^2 + 2 \cdot \frac{(v_1 + v_3 + v_2 + v_4)}{2} \cdot s + \frac{(v_1 + v_3 + v_2 + v_4)^2}{4} - \frac{(v_1 + v_3 + v_2 + v_4)^2}{4} &+ (v_1 + v_3) \cdot (v_1 + v_4) - v_3 v_4 \\
= \left(s + \frac{(v_1 + v_3 + v_2 + v_4)}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_1 + v_3}{2} + \frac{v_2 + v_4}{2} \right)^2 &+ 4 \frac{(v_1 + v_3) \cdot (v_1 + v_4)}{4} - v_3 v_4 \\
= \left(s + \frac{(v_1 + v_3 + v_2 + v_4)}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_1 + v_3}{2} - \frac{v_2 + v_4}{2} \right)^2 &- v_3 v_4 \\
= \left(s + \frac{(v_1 + v_3 + v_2 + v_4)}{2} \right)^2 - \left(\left(\frac{v_1 + v_3}{2} - \frac{v_2 + v_4}{2} \right)^2 + v_3 v_4 \right) &
\end{aligned}$$

$$\text{Posons } \alpha = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2} \quad \beta^2 = \left(\left(\frac{v_1 + v_3}{2} - \frac{v_2 + v_4}{2} \right)^2 + v_3 v_4 \right)$$

La deuxième équation du système devient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{(s + \alpha + \beta) \cdot (s + \alpha - \beta)}{s + c_3} \cdot \varphi p &= \frac{p_0 \cdot s^2 + c_{11} \cdot s + c_8}{s \cdot (s + c_3)} \\
(s + \alpha + \beta) \cdot (s + \alpha - \beta) \cdot \varphi p &= \frac{p_0 \cdot s^2 + c_{11} \cdot s + c_8}{s}
\end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad (s + \alpha + \beta) \cdot (s + \alpha - \beta) \cdot \varphi p = p_0 \cdot s + c_{11} + \frac{c_8}{s}$$

Le système s'écrit finalement :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} \\ 0 & ((s + \alpha + \beta) \cdot (s + \alpha - \beta)) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} - \frac{c_{12}}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} + \frac{c_8}{s} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Après décomposition en fractions simples, l'image de la fraction de martensite réorientée s'écrit :

$$\varphi p = \frac{d_1}{s + \alpha + \beta} + \frac{d_2}{s + \alpha - \beta} + \frac{d_3}{s + c_3}$$

En remplaçant, dans l'équation (1) du système, φp par son expression on obtient :

$$\varphi_T = \frac{d_4}{s} + \frac{c_9}{c_5} \cdot \frac{d_5}{s^2} + \frac{d_6}{s + \alpha - \beta} + \frac{d_7}{s + \alpha + \beta} + \frac{d_8 + d_9}{s + c_3} + \frac{d_{10}}{(s + c_3)^2} + \frac{d_{11}}{s + c_5}$$

Avec :

$$d_1 = \frac{c_8}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$d_2 = \frac{p_0 \cdot (\alpha + \beta)^2 - c_{11} \cdot (\alpha + \beta) + c_8}{2\beta(\alpha + \beta)}$$

$$d_3 = -\frac{p_0 \cdot (\alpha - \beta)^2 - c_{11} \cdot (\alpha - \beta) + c_8}{2\beta(\alpha - \beta)}$$

$$d_4 = T_0 - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$d_5 = \frac{c_9}{c_5}$$

$$d_6 = \frac{c_{12} - c_3 \cdot c_7}{c_3 - c_5} - \frac{(c_3^2 \cdot p_0 - c_3 c_{11} + c_8) \cdot (c_3 c_{10} - c_6)}{(c_3 - c_5) \cdot (\alpha + \beta - c_3) \cdot (\alpha - \beta - c_3)}$$

$$d_7 = c_1 + \frac{c_9}{c_5^2} - \frac{c_{12} - c_5 \cdot c_7}{c_3 - c_5} + \frac{(c_5^2 \cdot p_0 - c_5 c_{11} + c_8) \cdot (c_3 c_{10} - c_6)}{(c_3 - c_5) \cdot (\alpha + \beta - c_5) \cdot (\alpha - \beta - c_5)}$$

$$d_8 = -\frac{((\alpha + \beta) \cdot c_{10} - c_6) \cdot ((\alpha + \beta)^2 \cdot p_0 - (\alpha + \beta) \cdot c_{11} + c_8)}{2\beta(\alpha + \beta - c_3) \cdot (\alpha + \beta - c_5)}$$

$$d_9 = \frac{((\alpha - \beta) \cdot c_{10} - c_6) \cdot ((\alpha - \beta)^2 \cdot p_0 - (\alpha - \beta) \cdot c_{11} + c_8)}{2\beta(\alpha + \beta - c_3) \cdot (\alpha + \beta - c_5)}$$

après inversion des images, nous obtenons finalement les fonctions fraction de martensite réorientée et température :

$$x_+(t) = d_1 + d_2 \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} + d_3 \cdot e^{-(\alpha - \beta)t}$$

$$T(t) = d_4 + d_5 \cdot t + d_6 t \cdot e^{-c_3 t} + d_7 \cdot e^{-c_5 t} + d_8 \cdot e^{-(\alpha + \beta)t} + d_9 \cdot e^{-(\alpha - \beta)t}$$

Que nous pouvons écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 + e^{-\alpha t} (d_2 \cdot e^{-\beta t} + d_3 \cdot e^{\beta t}) \\ T(t) &= T(t) = d_4 + d_5 t + d_6 t \cdot e^{-c_3 t} + d_7 \cdot e^{-c_5 t} + e^{-\alpha t} \cdot (d_8 \cdot e^{-\beta t} + d_9 \cdot e^{\beta t}) \end{aligned}}$$

(III.4)

III-3 Etude des cas indéterminés

Les différents coefficients d_i sont, pour la plupart, des nombres fractionnaires et peuvent, par conséquent, engendrer des indéterminations dès lors que leur dénominateur est nul. Dans ce qui suit, les éventuelles divisions par un nombre nul sont énumérées et le problème contourné grâce au retour au système d'équations initial et à la prise en compte des valeurs des coefficients qui en sont la cause.

Mais, intéressons-nous d'abord à l'étude des cas particuliers des valeurs des probabilités de transition de phase qui sont à la base du système d'équations différentielles, c'est-à-dire les coefficients v_1, v_2, v_3 et v_4 .

$c_1 = \frac{hp \cdot p_0 + hm \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_2 = v_1 + v_3$	$c_3 = v_2 + v_4$	$c_4 = \rho \cdot c$
$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$	$c_6 = \frac{h_p \cdot v_2 + (h_p - h_m) \cdot v_4}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_8 = v_2 \cdot v_3$
$c_9 = \frac{U^2}{R \cdot c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0 \cdot c_3 + (1 - m_0) \cdot v_3$	$c_{12} = \frac{h_m \cdot v_4}{c_4}$
α	β		

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s+c_3) \cdot (s+c_5)} \\ 0 & ((s+\alpha+\beta) \cdot (s+\alpha-\beta)) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s+c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s+c_3) \cdot (s+c_5)} - \frac{c_{12}}{(s+c_3) \cdot (s+c_5)} + \frac{c_1}{(s+c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} + \frac{c_8}{s} \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

III-3.1 Cas $v_3 = v_4 = 0$ et $v_1 = v_2$

Les différents coefficients c_i en fonction des probabilités v_i deviennent :

$c_1 = hp \cdot p_0 + hm \cdot m_0$	$c_2 = v_1$	$c_3 = v_1$	$c_4 = \rho \cdot c$
$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$	$c_6 = \frac{h_p \cdot v_1}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m \cdot m_0}{c_4}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R \cdot c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0 \cdot v_1$	$c_{12} = \frac{h_m \cdot v_4}{c_4}$
$\alpha = v_1$	$\beta = 0$		

Et le système d'équations linéaires donnant les images par les transformées de Laplace de la température et de la fraction de martensite réorientée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10}.s^2 + c_6.s}{(s + v_1).(s + c_5)} \\ 0 & \frac{c_9}{(s + v_1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2.(s + c_5)} - \frac{c_7.s}{(s + v_1).(s + c_5)} - \frac{c_{12}}{(s + v_1).(s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0.(s + v_1) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_P = \frac{P_0}{(s + v_1)}$$

$$\varphi_T = \left(T_0 + \frac{c_1}{c_5} - \frac{c_9}{c_5^2} \right) \cdot \frac{1}{s} + c_9 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{c_1}{v_1 - c_5} \cdot \frac{1}{s + v_1} + \left(\frac{c_9}{c_5^2} - \frac{c_1.v_1}{c_5.(v_1 - c_5)} \right) \cdot \frac{1}{s + c_5}$$

$$d_1 = p_0$$

$$d_4 = T_0 + \frac{c_1}{c_5} - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$d_5 = c_9$$

$$d_6 = \frac{c_1}{v_1 - c_5}$$

$$d_7 = \frac{c_9}{c_5^2} - \frac{c_1.v_1}{c_5.(v_1 - c_5)}$$

$$\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 \cdot e^{-v_1.t} \\ T(t) &= d_4 + t.d_5 + d_6 \cdot e^{-v_1.t} + d_7 \cdot e^{-c_5.t} \end{aligned}$$

(III.6)

III-3.2 Cas $v_4=0$ $v_2=v_1+v_3$

Les différents coefficients c_i en fonction des probabilités v_i deviennent :

$c_1 = hp.p_0 + hm.m_0$	$c_2 = v_2$	$c_3 = v_2$	$c_4 = \rho.c$
$c_5 = \frac{\alpha.s_v}{\rho.c}$	$c_6 = \frac{h_p.v_2}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m.m_0}{c_4}$	$c_8 = v_2.v_3$
$c_9 = \frac{U^2}{R.c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0.v_2 + (1 - m_0).v_3$	$c_{12} = 0$
$\alpha = v_2$	$\beta = \alpha$		

Et le système d'équations linéaires donnant les images par les transformées de Laplace de la température et de la fraction de martensite réorientée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s + v_2) \cdot (s + c_5)} \\ 0 & \frac{1}{(s + v_2) \cdot s} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s + v_2) \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} + \frac{c_8}{s} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_P = \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{1}{s} + (p_0 - \frac{v_3}{v_2}) \cdot \frac{1}{s + v_2} - \frac{m_0 v_3}{(s + v_2)^2}$$

$$\varphi_T = (T_0 - \frac{c_9}{c_5^2} + \frac{c_1}{c_5}) \cdot \frac{1}{s} + \frac{c_9}{c_5} \cdot \frac{1}{s} + \frac{c_1}{v_2 - c_5} \cdot \frac{1}{s + v_2} + \left(\frac{c_9}{c_5^2} - \frac{c_1 \cdot v_2}{c_5 \cdot (v_2 - c_5)} \right) \cdot \frac{1}{s + c_5}$$

$$d_1 = \frac{v_3}{v_2}$$

$$d_2 = p_0 - d_1$$

$$d_3 = -m_0 v_3$$

$$d_4 = T_0 - \frac{c_9}{c_5^2} + \frac{c_1}{c_5}$$

$$d_5 = \frac{c_9}{c_5}$$

$$d_6 = \frac{c_1}{v_2 - c_5}$$

$$d_7 = \frac{c_9}{c_5^2} - \frac{c_1 \cdot v_2}{c_5 (v_2 - c_5)}$$

Soit

$$\begin{cases} x_+(t) = d_1 + t \cdot d_2 + d_3 \cdot e^{-v_4 \cdot t} \\ T(t) = d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot t} + d_7 \cdot e^{-v_4 \cdot t} + t \cdot d_8 \cdot e^{-v_4 \cdot t} + d_9 \cdot e^{-c_5 \cdot t} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

III-3.3 Cas $v_3=0$ et $v_1 = v_2+v_4$

Les différents coefficients c_i en fonction des probabilités v_i deviennent :

$c_1 = \frac{h_p \cdot p_0 + h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_2 = v_1$	$c_3 = v_1$	$c_4 = \rho \cdot c$
$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$	$c_6 = \frac{h_p \cdot v_2 + (h_p - h_m) \cdot v_4}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R \cdot c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0 \cdot v_1$	$c_{12} = \frac{h_m \cdot v_4}{c_4}$
$\alpha = v_1$	$\beta = 0$		

Et le système d'équations linéaires donnant les images par les transformées de Laplace de la température et de la fraction de martensite réorientée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s + v_1) \cdot (s + c_5)} \\ 0 & \frac{1}{(s + v_1) \cdot (s + v_1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s + v_1) \cdot (s + c_5)} - \frac{c_{12}}{(s + v_1) \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi p &= \frac{p_0}{(s + v_1)} \\ \varphi_T &= \left(T_0 - \frac{c_9}{c_5^2} \right) \frac{1}{s} + \frac{c_9}{c_5} \frac{1}{s^2} + \left(\frac{c_9}{c_5^2} - \frac{v_1 c_1 - c_{12}}{v_1 - c_5} - \frac{p_0 c_{12}}{(c_5 - v_1)^2} \right) \frac{1}{s + c_5} + \left(\frac{p_0 c_{12}}{(c_5 - v_1)^2} - \frac{v_1 c_1 - c_{12}}{v_1 - c_5} \right) \frac{1}{s + v_1} \\ &\quad + \frac{p_0 c_{12}}{(c_5 - v_1)} \frac{1}{(s + v_1)^2} \end{aligned}$$

$$d_1 = p_0$$

$$d_4 = T_0 - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$d_5 = \frac{c_9}{c_5}$$

$$d_6 = \frac{c_9}{c_5^2} + \frac{v_1 c_1 - c_{12}}{v_1 - c_5} - \frac{p_0 c_{12}}{(v_1 - c_5)^2}$$

$$d_7 = \frac{p_0 c_{12}}{(v_1 - c_5)^2} - \frac{v_1 c_1 - c_{12}}{v_1 - c_5}$$

$$d_8 = -\frac{p_0 c_{12}}{(v_1 - c_5)}$$

Soit

$$x_+(t) = d_1 \cdot e^{-v_1 \cdot t}$$

$$T(t) = d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-c_5 \cdot t} + d_7 \cdot e^{-v_1 \cdot t} + d_8 \cdot t \cdot e^{-v_1 \cdot t}$$

(III.8)

III-3-4 Cas $v_1 = v_2 = 0$

Les différents coefficients c_i en fonction des probabilités v_i deviennent :

$c_1 = \frac{hp.p_0 + hm.m_0}{\rho.c}$	$c_2 = v_3$	$c_3 = v_4$	$c_4 = \rho.c$
$c_5 = \frac{\alpha.s_v}{\rho.c}$	$c_6 = 0$	$c_7 = \frac{h_m.m_0}{\rho.c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R.c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0.v_4 + (1 - m_0).v_3$	$c_{12} = \frac{h_m.v_4}{c_4}$
$\alpha = \frac{v_3 + v_4}{2}$	$\beta = \alpha$		

Et le système d'équations linéaires donnant les images par les transformées de Laplace de la température et de la fraction de martensite réorientée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10}.s^2}{(s+v_4).(s+c_5)} \\ 0 & (s+v_3+v_4).s \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2.(s+c_5)} - \frac{c_7.s}{(s+v_4).(s+c_5)} - \frac{c_{12}}{(s+v_4).(s+c_5)} + \frac{c_1}{(s+c_5)} \\ p_0.s + c_{11} \end{pmatrix}$$

$$\varphi p = \frac{c_{11}}{v_3 + v_4} \cdot \frac{1}{s} + \left(p_0 - \frac{c_{11}}{v_3 + v_4} \right) \cdot \frac{1}{s + v_3 + v_4}$$

$$\varphi_T = \left(T_0 - \frac{c_9}{c_5^2} \right) \frac{1}{s} + \frac{c_9}{c_5} \frac{1}{s^2} + \left(\frac{c_9}{c_5^2} + \frac{(h_p v_3 + h_m v_4)(p_0 + m_0 - 1)}{c_4.(v_3 + v_4 - c_5)} \right) \frac{1}{s + c_5} - \frac{(h_p v_3 + h_m v_4)(p_0 + m_0 - 1)}{c_4.(v_3 + v_4 - c_5)} \frac{1}{s + v_3 + v_4}$$

$$d_1 = \frac{p_0 v_4 (1 - m_0) v_3}{s.(s + v_3 + v_4)}$$

$$d_2 = p_0 - d_1$$

$$d_4 = T_0 - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$d_5 = \frac{c_9}{c_5}$$

$$d_6 = \frac{c_9}{c_5^2} + \frac{(h_p v_3 + h_m v_4)(p_0 + m_0 - 1)}{c_4.(v_3 + v_4 - c_5)}$$

$$d_7 = d_6 - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 + d_2.e^{-(v_3+v_4).t} \\ T(t) &= d_4 + t.d_5 + d_6.e^{-(c_5.t)} + d_7.e^{-(v_3+v_4).t} \end{aligned}} \quad (III.9)$$

III-3-5 Cas $v_1 = v_3 = v_4 = 0$

Les différents coefficients c_i en fonction des probabilités v_i deviennent :

$c_1 = \frac{hp \cdot p_0 + hm \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_2 = v_1 + v_3$	$c_3 = 0$	$c_4 = \rho \cdot c$
$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$	$c_6 = \frac{h_p \cdot v_2}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R \cdot c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = (1 - m_0) \cdot v_3$	$c_{12} = 0$
$\alpha = \frac{c_2}{2}$	$\beta = \alpha$		

Et le système d'équations linéaires donnant les images par les transformées de Laplace de la température et de la fraction de martensite réorientée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{s \cdot (s + c_5)} \\ 0 & (s + c_2) \cdot s \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{s \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_p = \frac{v_3 \cdot (1 - m_0)}{c_2} \cdot \frac{1}{s} + \left(p_0 - \frac{v_3 \cdot (1 - m_0)}{c_2} \right) \cdot \frac{1}{s + c_2}$$

$$\varphi_T = \left(T_0 - \frac{c_9}{c_5^2} \right) \cdot \frac{1}{s} + \frac{c_9}{c_5} \cdot \frac{1}{s^2} + \left(\frac{c_9}{c_5^2} + \frac{h_p \cdot p_0 \cdot c_2 + h_p \cdot v_3 \cdot (m_0 - 1)}{c_2} \right) \cdot \frac{1}{s + c_2}$$

$$d_1 = \frac{v_3 \cdot (1 - m_0)}{c_2}$$

$$d_2 = p_0 - \frac{v_3 \cdot (1 - m_0)}{c_2}$$

$$d_4 = T_0 - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$d_5 = \frac{c_9}{c_5}$$

$$d_6 = \frac{c_9}{c_5^2} + \frac{h_p \cdot p_0 \cdot c_2 + h_p \cdot v_3 \cdot (m_0 - 1)}{c_2}$$

$$d_7 = - \left(d_6 - \frac{c_9}{c_5^2} \right)$$

$$\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 + d_2 \cdot e^{-(c_2 \cdot t)} \\ T(t) &= d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-c_5 \cdot t} + d_7 \cdot e^{-c_2 \cdot t} \end{aligned}$$

(III.10)

III-3-6 Cas $v_1 = v_3 = 0$

Les différents coefficients c_i en fonction des probabilités v_i deviennent :

$c_1 = \frac{hp \cdot p_0 + hm \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_2 = 0$	$c_3 = v_2 + v_4$	$c_4 = \rho \cdot c$
$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$	$c_6 = \frac{h_p \cdot v_2 + (h_p - h_m) \cdot v_4}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R \cdot c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0 \cdot c_3$	$c_{12} = \frac{h_m \cdot v_4}{c_4}$
$\alpha = \frac{c_3}{2}$	$\beta = \alpha$		

Et le système d'équations linéaires donnant les images par les transformées de Laplace de la température et de la fraction de martensite réorientée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} \\ 0 & (s + c_3) \cdot s \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} - \frac{c_{12}}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot (s + c_3) \end{pmatrix}$$

$$\varphi p = \frac{p_0}{s}$$

$$\varphi_T = \left(T_0 - \frac{c_9}{c_5^2} \right) \cdot \frac{1}{s} + \frac{c_9}{c_5} \cdot \frac{1}{s^2} + \left(\frac{c_9}{c_5^2} + \frac{h_m \cdot m_0 \cdot c_3 + h_m \cdot v_4 \cdot (p_0 - 1)}{c_3 - c_5} \right) \cdot \frac{1}{s + c_5} + \frac{h_m \cdot m_0 \cdot c_3 + h_m \cdot v_4 \cdot (p_0 - 1)}{c_3 - c_5} \cdot \frac{1}{s + c_3}$$

$$d_1 = p_0$$

$$d_4 = T_0 - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$d_5 = \frac{c_9}{c_5}$$

$$d_6 = \frac{c_9}{c_5^2} + \frac{h_m \cdot m_0 \cdot c_3 + h_m \cdot v_4 \cdot (p_0 - 1)}{c_3 - c_5}$$

$$d_7 = d_6 - \frac{c_9}{c_5^2}$$

$$\begin{aligned} x_+(t) &= p_0 \\ T(t) &= d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-c_5 \cdot t} + d_7 \cdot e^{-c_3 \cdot t} \end{aligned}$$

(III.11)

III-3-7 Récapitulation.

III-3.1 Cas $v_3=v_4=0$ et $v_1=v_2$

Le Tableau des coefficients c_i se présente ainsi :

$c_1 = hp.p_0 + hm.m_0$	$c_2 = v_1$	$c_3 = v_1$	$c_4 = \rho.c$
$c_5 = \frac{\alpha.s_v}{\rho.c}$	$c_6 = \frac{h_p.v_1}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m.m_0}{c_4}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R.c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0.v_1$	$c_{12} = \frac{h_m.v_4}{c_4}$
$\alpha = v_1$	$\beta = 0$		

Le système d'équation donnant les images du pourcentage de martensite réorientée et de la température s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10}.s^2 + c_6.s}{(s+v_1).(s+c_5)} \\ 0 & (s+v_1)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2.(s+c_5)} - \frac{c_7.s}{(s+v_1).(s+c_5)} - \frac{c_{12}}{(s+v_1).(s+c_5)} + \frac{c_1}{(s+c_5)} \\ p_0.(s+v_1) \end{pmatrix}$$

Après inversion, les expressions analytiques sont :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= d_1.e^{-v_1.t} \\ T(t) &= d_4 + t.d_5 + d_6.e^{-v_1.t} + d_7.e^{-c_5.t} \end{aligned}$$

III-3.2 Cas $v_4=0$ $v_2=v_1+v_3$

Le Tableau des coefficients c_i se présente ainsi :

$c_1 = hp.p_0 + hm.m_0$	$c_2 = v_2$	$c_3 = v_2$	$c_4 = \rho.c$
$c_5 = \frac{\alpha.s_v}{\rho.c}$	$c_6 = \frac{h_p.v_2}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m.m_0}{c_4}$	$c_8 = v_2.v_3$
$c_9 = \frac{U^2}{R.c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0.v_2 + (1-m_0).v_3$	$c_{12} = 0$
$\alpha = v_2$	$\beta = \alpha$		

Le système d'équation donnant les images du pourcentage de martensite réorientée et de la température s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s + v_2) \cdot (s + c_5)} \\ 0 & \frac{c_7 \cdot s}{(s + v_2) \cdot (s + c_5)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s + v_2) \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} + \frac{c_8}{s} \end{pmatrix}$$

Après inversion, les expressions analytiques sont :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 + t \cdot d_2 + d_3 \cdot e^{-v_4 \cdot t} \\ T(t) &= d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot t} + d_7 \cdot e^{-v_4 \cdot t} + t \cdot d_8 \cdot e^{-v_4 \cdot t} + d_9 \cdot e^{-c_5 \cdot t} \end{aligned}$$

III-3.3 Cas $v_1 = v_2 + v_4$ $v_3 = 0$

Le Tableau des coefficients c_i se présente ainsi :

$c_1 = \frac{h_p \cdot p_0 + h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_2 = v_1$	$c_3 = v_1$	$c_4 = \rho \cdot c$
$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$	$c_6 = \frac{h_p \cdot v_2 + (h_p - h_m) \cdot v_4}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R \cdot c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0 \cdot v_1$	$c_{12} = \frac{h_m \cdot v_4}{c_4}$
$\alpha = v_1$	$\beta = 0$		

Le système d'équation donnant les images du pourcentage de martensite réorientée et de la température s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s + v_1) \cdot (s + c_5)} \\ 0 & \frac{c_7 \cdot s}{(s + v_1) \cdot (s + c_5)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s + v_1) \cdot (s + c_5)} - \frac{c_{12}}{(s + v_1) \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} \end{pmatrix}$$

Après inversion, les expressions analytiques sont :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 \cdot e^{-v_1 \cdot t} + d_2 \cdot e^{-(v_1 + 2v_3) \cdot t} + d_3 \cdot e^{-c_3 \cdot t} \\ T(t) &= d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-v_1 \cdot t} + d_7 \cdot e^{-v_2 \cdot t} + d_8 \cdot e^{-c_3 \cdot t} + t \cdot d_9 \cdot e^{-c_3 \cdot t} + d_{10} \cdot e^{-c_5 \cdot t} + d_{11} \cdot e^{-(v_1 + 2v_3) \cdot t} \end{aligned}$$

III-3-4 Cas $v_2 = v_1 = 0$

Le Tableau des coefficients c_i se présente ainsi :

$c_1 = \frac{hp.p_0 + hm.m_0}{\rho.c}$	$c_2 = v_3$	$c_3 = v_4$	$c_4 = \rho.c$
$c_5 = \frac{\alpha.s_v}{\rho.c}$	$c_6 = 0$	$c_7 = \frac{h_m.m_0}{\rho.c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R.c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0.v_4 + (1 - m_0).v_3$	$c_{12} = \frac{h_m.v_4}{c_4}$
$\alpha = \frac{v_3 + v_4}{2}$	$\beta = \alpha$		

Le système d'équation donnant les images du pourcentage de martensite réorientée et de la température s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10}.s^2}{(s+v_4).(s+c_5)} \\ 0 & \frac{(s+v_3+v_4).s}{(s+v_3+v_4).s} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2.(s+c_5)} - \frac{c_7.s}{(s+v_4).(s+c_5)} - \frac{c_{12}}{(s+v_4).(s+c_5)} + \frac{c_1}{(s+c_5)} \\ p_0.s + c_{11} \end{pmatrix}$$

Après inversion, les expressions analytiques sont :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 + d_2.e^{-(v_3+v_4).t} \\ T(t) &= d_4 + t.d_5 + d_6.e^{-(c_5.t)} + d_7.e^{-(v_3+v_4).t} \end{aligned}$$

III-3-5 Cas $v_1 = v_3 = v_4 = 0$

Le Tableau des coefficients c_i se présente ainsi :

$c_1 = \frac{hp.p_0 + hm.m_0}{\rho.c}$	$c_2 = v_1 + v_3$	$c_3 = 0$	$c_4 = \rho.c$
$c_5 = \frac{\alpha.s_v}{\rho.c}$	$c_6 = \frac{h_p.v_2}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m.m_0}{\rho.c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R.c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = (1 - m_0).v_3$	$c_{12} = 0$
$\alpha = \frac{c_2}{2}$	$\beta = \alpha$		

Le système d'équation donnant les images du pourcentage de martensite réorientée et de la température s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{s \cdot (s + c_5)} \\ 0 & (s + c_2) \cdot s \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{s \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot s + c_{11} \end{pmatrix}$$

Après inversion, les expressions analytiques sont :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= d_1 + d_2 \cdot e^{-(c_2 \cdot t)} \\ T(t) &= d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-c_5 \cdot t} + d_7 \cdot e^{-c_2 \cdot t} \end{aligned}$$

III-3-6 Cas $v_3 = v_1 = 0$

Le Tableau des coefficients c_i se présente ainsi :

$c_1 = \frac{hp \cdot p_0 + hm \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_2 = 0$	$c_3 = v_2 + v_4$	$c_4 = \rho \cdot c$
$c_5 = \frac{\alpha \cdot s_v}{\rho \cdot c}$	$c_6 = \frac{h_p \cdot v_2 + (h_p - h_m) \cdot v_4}{c_4}$	$c_7 = \frac{h_m \cdot m_0}{\rho \cdot c}$	$c_8 = 0$
$c_9 = \frac{U^2}{R \cdot c_4}$	$c_{10} = \frac{h_p}{c_4}$	$c_{11} = p_0 \cdot c_3$	$c_{12} = \frac{h_m \cdot v_4}{c_4}$
$\alpha = \frac{c_3}{2}$	$\beta = \alpha$		

Le système d'équation donnant les images du pourcentage de martensite réorientée et de la température s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{10} \cdot s^2 + c_6 \cdot s}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} \\ 0 & (s + c_3) \cdot s \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_T \\ \varphi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_0}{s} + \frac{c_9}{s^2 \cdot (s + c_5)} - \frac{c_7 \cdot s}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} - \frac{c_{12}}{(s + c_3) \cdot (s + c_5)} + \frac{c_1}{(s + c_5)} \\ p_0 \cdot (s + c_3) \end{pmatrix}$$

Après inversion, les expressions analytiques sont :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= p_0 \\ T(t) &= d_4 + t \cdot d_5 + d_6 \cdot e^{-c_5 \cdot t} + d_7 \cdot e^{-c_3 \cdot t} \end{aligned}$$

III-4-1 Domaine pseudo élastique

En application à toutes les expressions analytiques précédemment obtenues du taux de martensite réorientée et de la température, considérons une barre de 10cm de long et de section carrée de 10mm de côté d'un alliage à deux variantes jumelles et soumettons cet échantillon à un cycle de chargement-déchargement (traction-compression) d'intensité maximale σ_{max} égale à 650 MPa

$$\sigma = \begin{cases} \frac{2}{3} \sigma_{max} * t & t \leq 1.5 \\ 2 * \sigma_{max} * \left(1 - \frac{t}{3}\right) & t \geq 1.5 \end{cases}$$

Le matériau utilisé a un module de Young estimé à 71.1 MPa en phase austénitique et 30.9 MPa en phase martensitique. La température initiale, en phase austénitique est de 353°K et la martensite se forme à partir de 323°K

La masse volumique de l'échantillon est de 6500 Kg/M³ le coefficient de dilatation est de 20, la chaleur spécifique est égale à 0.5x10³ J/Kg.°K et le coefficient de transfert de chaleur vaut 100W/M².°K

Sous les hypothèses sus-indiquées, l'hystérésis en contrainte obtenue est représentée en figure III-1

La déformation maximale est de l'ordre de 0.066797 et le maximum de déformation recouvrable est de 0.044 conformément aux hypothèses

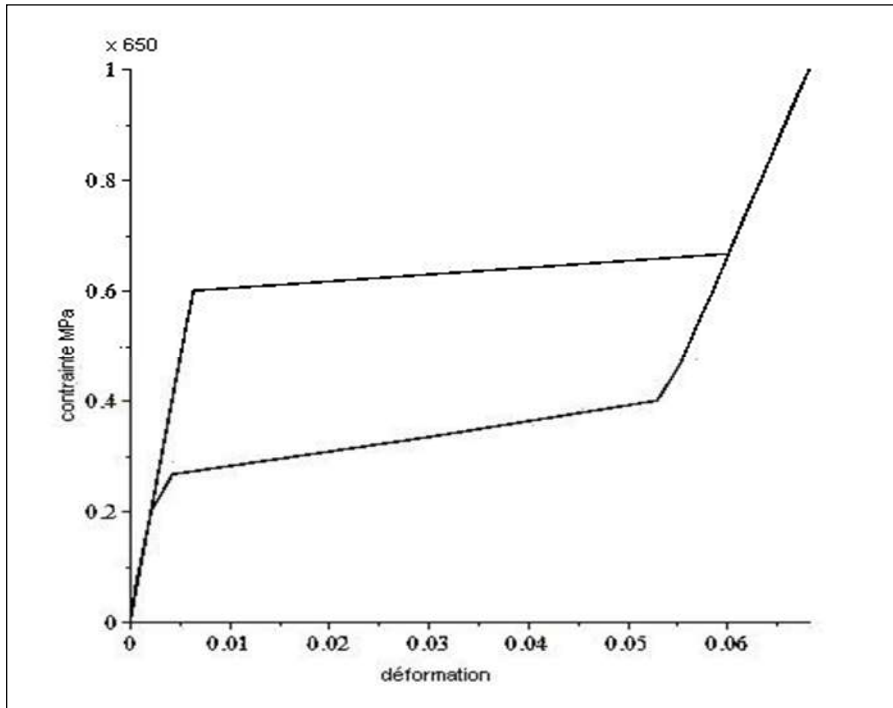


Figure III-1 Courbe contrainte-déformation Hystérésis en contrainte

La température, figure III-2, accuse quant à elle une très légère baisse de l'ordre de 0.025°K lors du chargement et revient à la valeur initiale de 353°K lors du déchargement, car le matériau est initialement en phase austénitique.

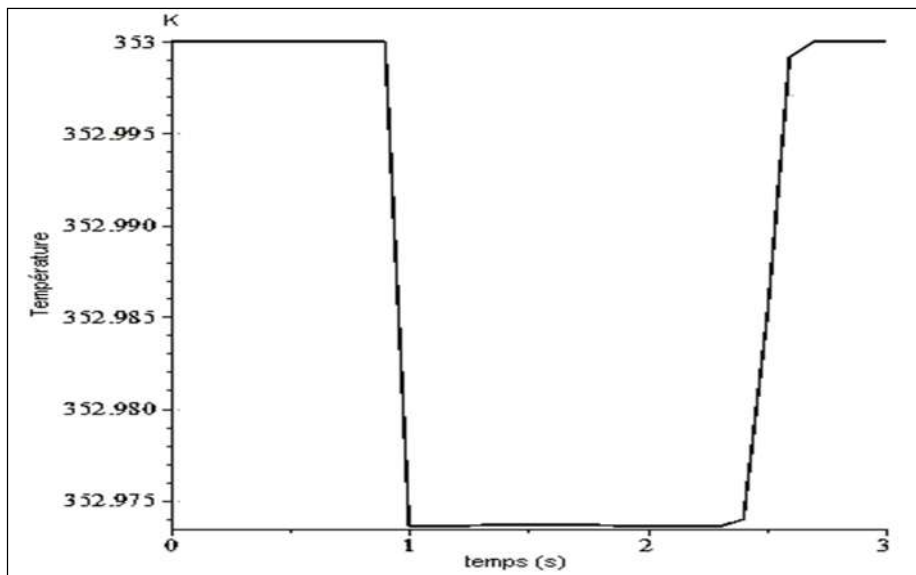


Figure III-2 évolution de la température fonction du temps

Les variantes jumelles, figure III-3 et III-4, disparaissent toutes deux pour laisser la martensite réorientée prendre place et évoluer entre 0 et 1 lors du chargement. Nous conservons abusivement l'appellation M^+ pour la martensite réorientée. Au cours du

déchargement, la fraction de martensite réorientée s'annule en même temps que la force de traction qui lui a donnée naissance et les variantes jumelles ne se réinstallent de nouveau que si la température baisse en deçà de 323°K ou qu'une force de traction est derechef appliquée

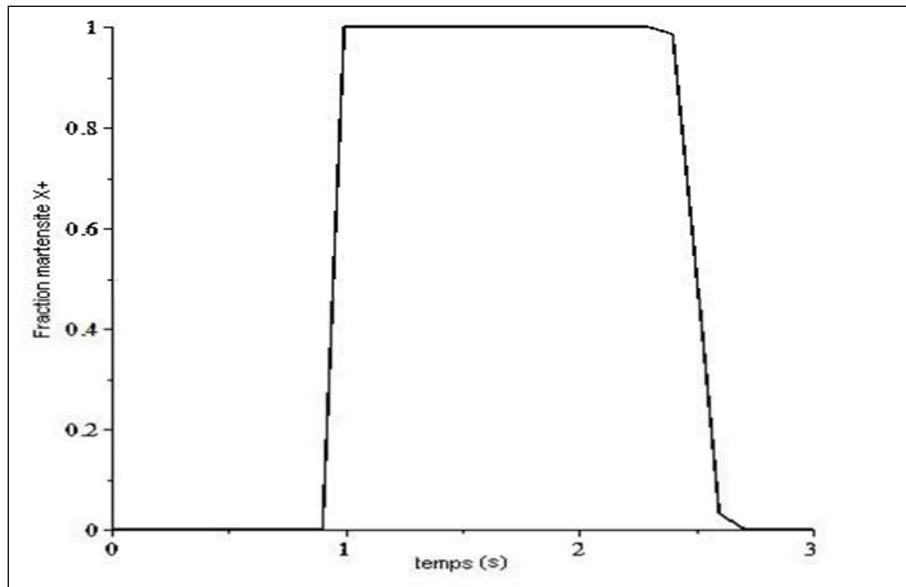


Figure III-3 Evolution de la fraction de martensite (M_+)
En fonction du temps

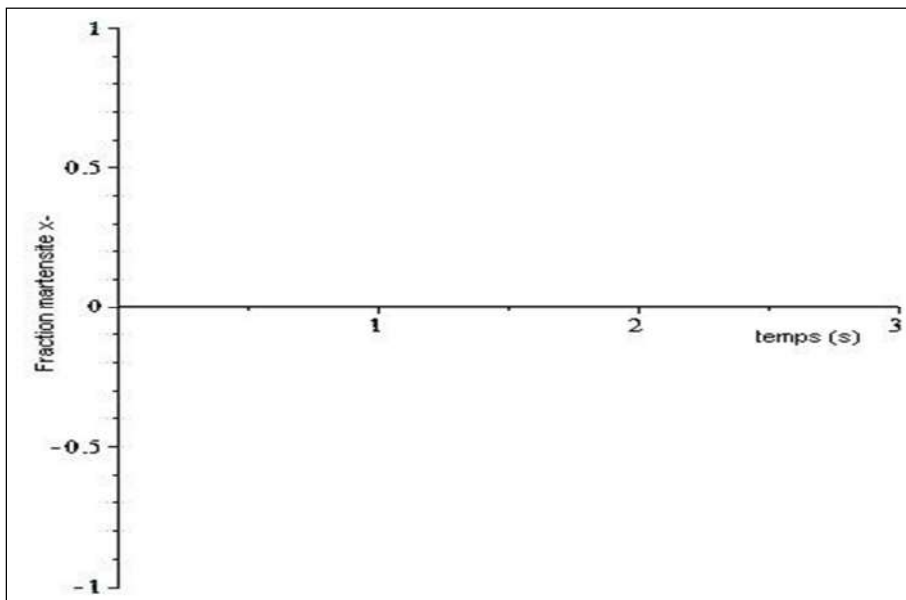


Figure III-4 Evolution de la fraction de martensite (M_-)
En fonction du temps

La représentation, figure III-5 et III-6, de la température en fonction de la déformation nous conduit à l'hystérésis en température.

Seules les actions thermomécaniques donnent naissance à une hystérésis, c'est-à-dire une hystérésis en contrainte si l'action est mécanique et une hystérésis en température si l'action est thermique.

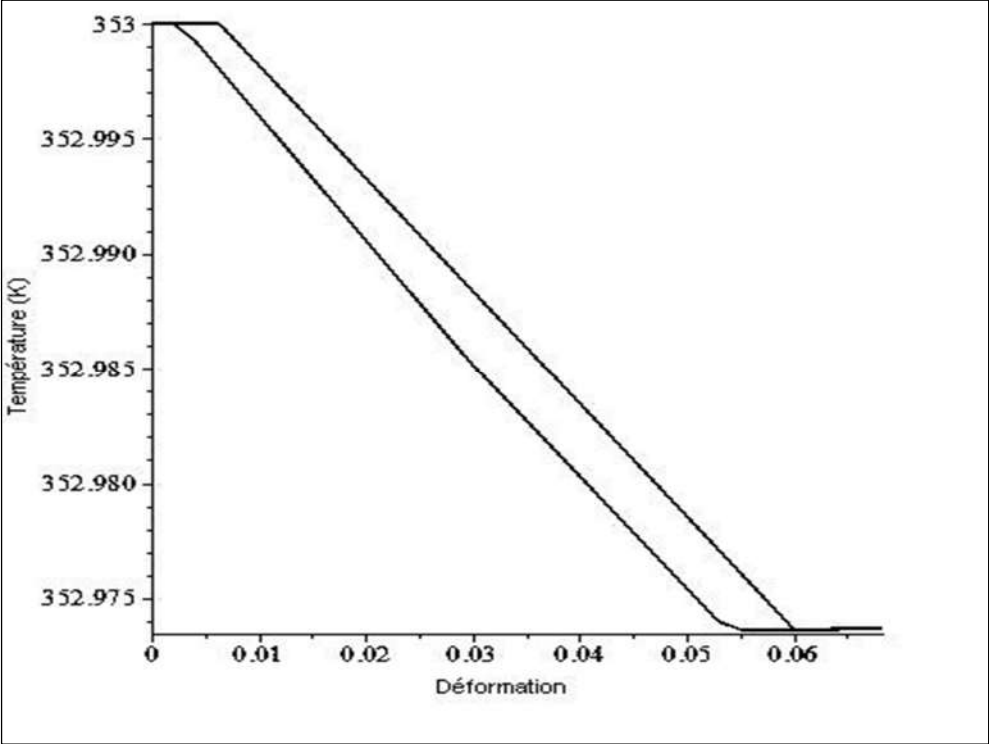


Figure III-5 Hystérésis en température

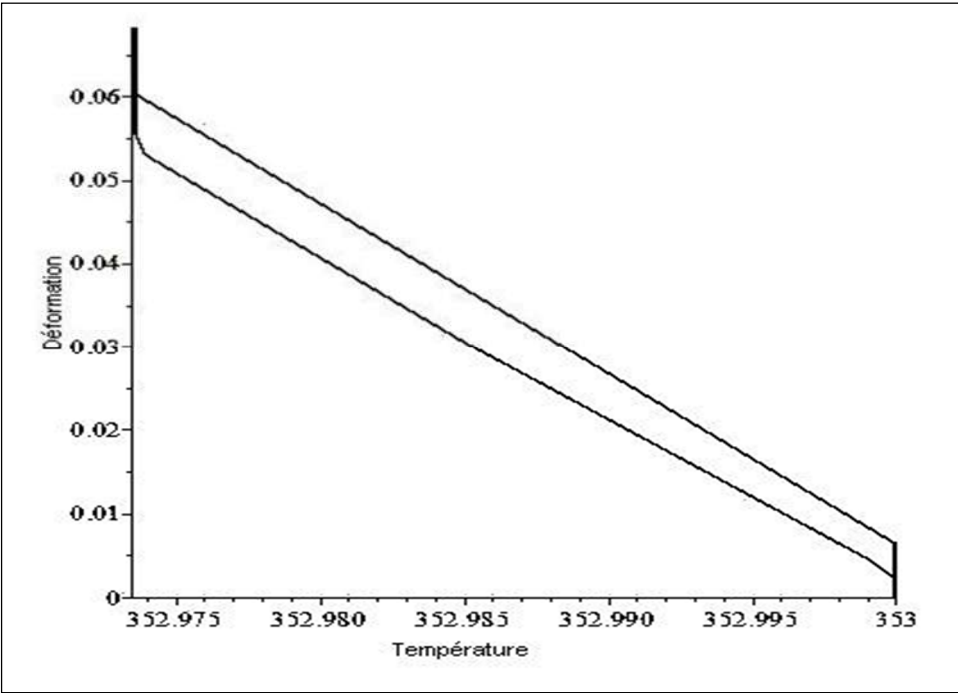


Figure III-6 Evolution de la déformation en fonction de la Température

L'évolution de la déformation, figure III-7, en fonction du temps montre que la déformation de l'alliage à mémoire de forme, après un cycle complet de sollicitation, revient à l'origine c'est-à-dire s'annule complètement. Ce qui nous autorise à dire que le matériau se comporte presque élastiquement. En effet, si le matériau ne garde aucune déformation résiduelle à la décharge, il a néanmoins un comportement différent en traction et en compression.

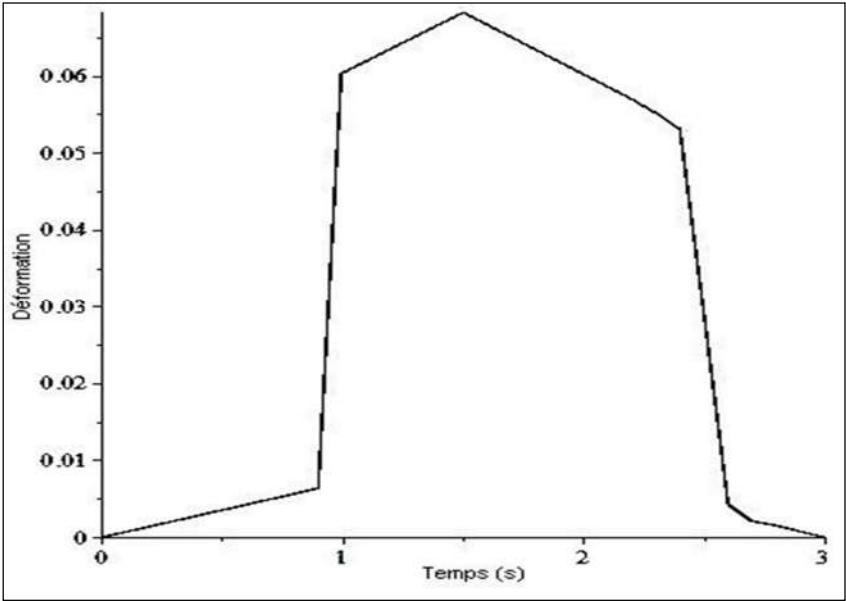


Figure III-7 Courbe d'évolution de la déformation

La variation du module de Young de l'ensemble en fonction du temps est représentée en figure III-8.

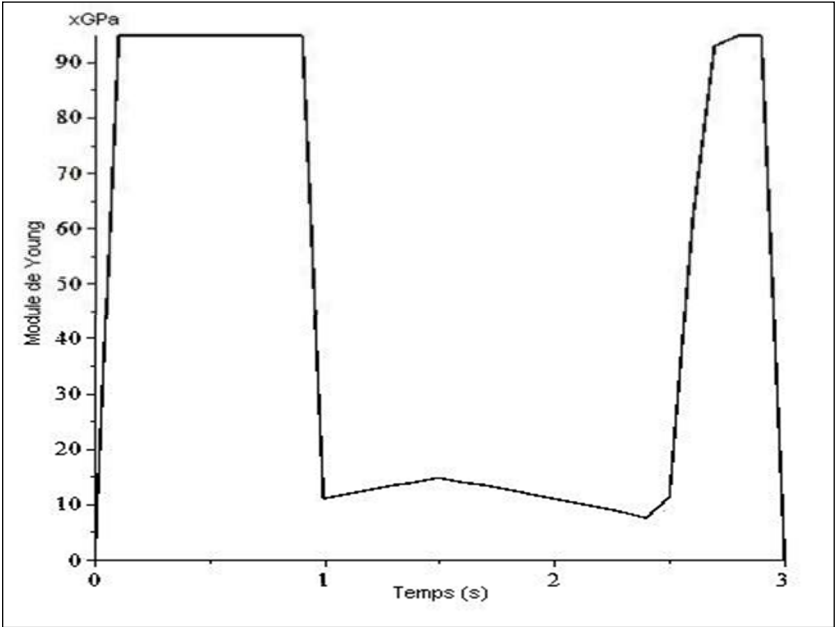


Figure III-8 Courbe d'évolution du module de Young.

La valeur du module de Young varie brusquement à chaque transition de phase, de l'austénite vers la martensite et inversement de la martensite vers l'austénite

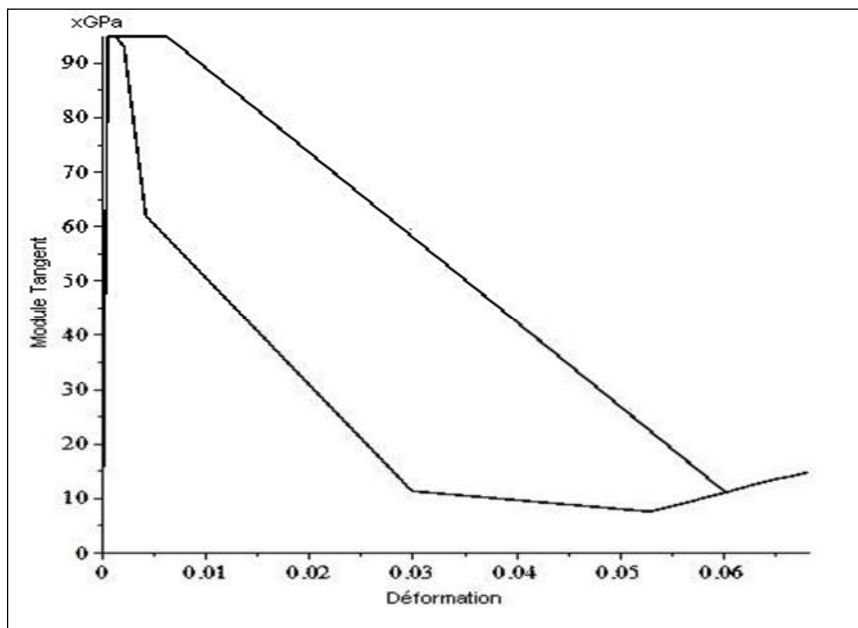


Figure III-9 Module tangent $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ en fonction de la déformation

Les figures III-9 et III-10 représentent la variation du module tangent en fonction de la déformation et son évolution en fonction du temps

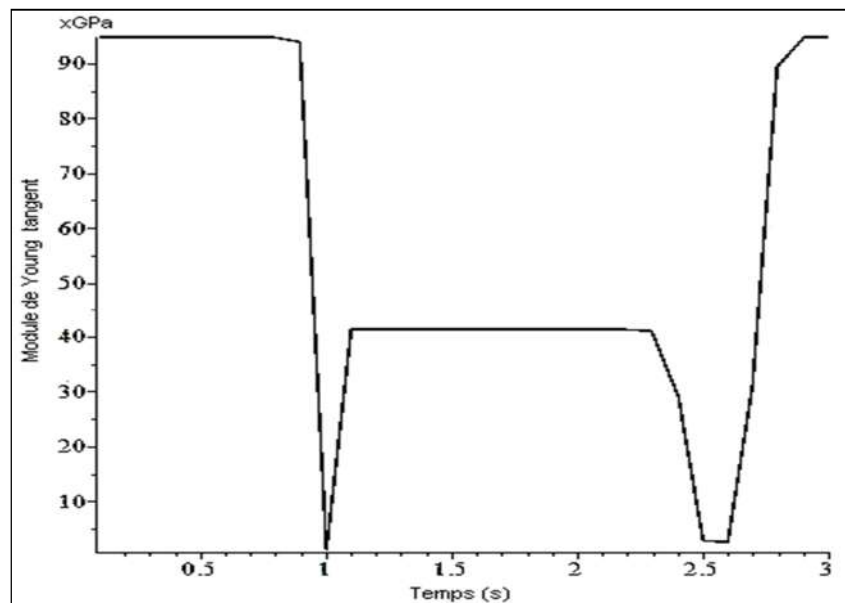


Figure III-10 Courbe d'évolution du module tangent.

Rappelons que le module tangent est obtenu par la dérivation en chaîne de l'expression (II-1)

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{E_M (\varepsilon - (x_+ - x_-)\varepsilon_T)}{x_+ + x_- + \frac{E_M}{E_A} x_A} = \frac{E_M (\varepsilon - (x_+ - x_-)\varepsilon_T)}{x_+ + x_- + \frac{E_M}{E_A} (1 - x_+ - x_-)}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_+} \cdot \frac{\partial x_+}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_-} \cdot \frac{\partial x_-}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_+} \cdot \frac{x_+}{\varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_-} \cdot \frac{x_-}{\varepsilon}$$

III-4.2 Influence du coefficient de transfert de chaleur

Parmi les paramètres qui influent sur l'hystérésis qu'elle soit en contrainte ou en température, citons le coefficient de transfert de chaleur. Pour bien comprendre cette influence, faisons varier ce coefficient de 20 à 90 en lui assignant successivement les valeurs 20W/M².°K, 35W/M².°K, 50W/M².°K, 70W/M².°K et 90W/M².°K pour chacune des températures suivantes 353°K, 363°K, 373°K, 383°K et 393°K

Les figures III-11, III-12 et III-13 montrent l'influence, pour les trois premières températures, du coefficient d'échange de chaleur avec l'environnement sur les cycles d'hystérésis. A contrainte égale, l'énergie produite est dissipée, en partie sous forme de chaleur transférée au milieu environnant ou stockée sous forme de chaleur latente responsable, une fois libérée, des transitions de phase austénite-martensite et inversement martensite-austénite.

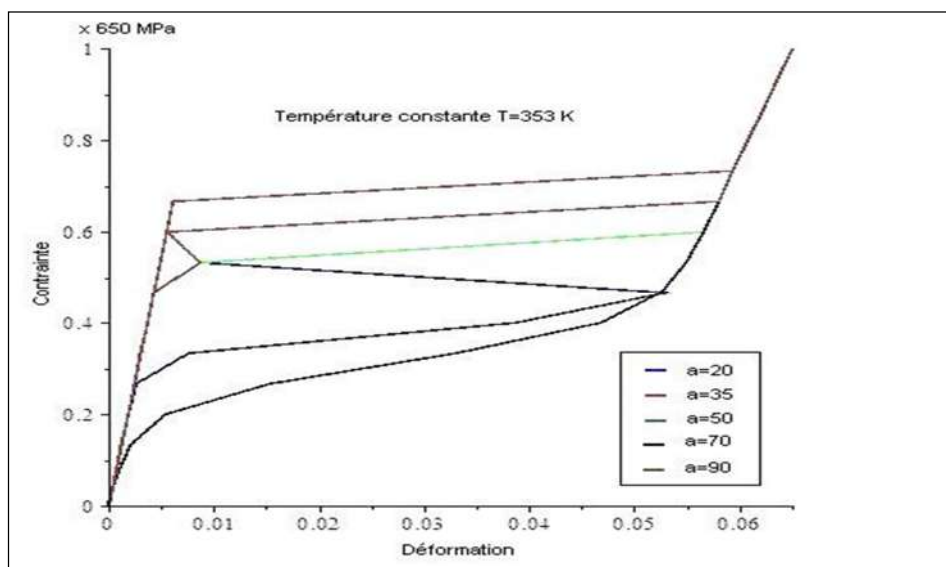


Figure III-11 Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis T=353K

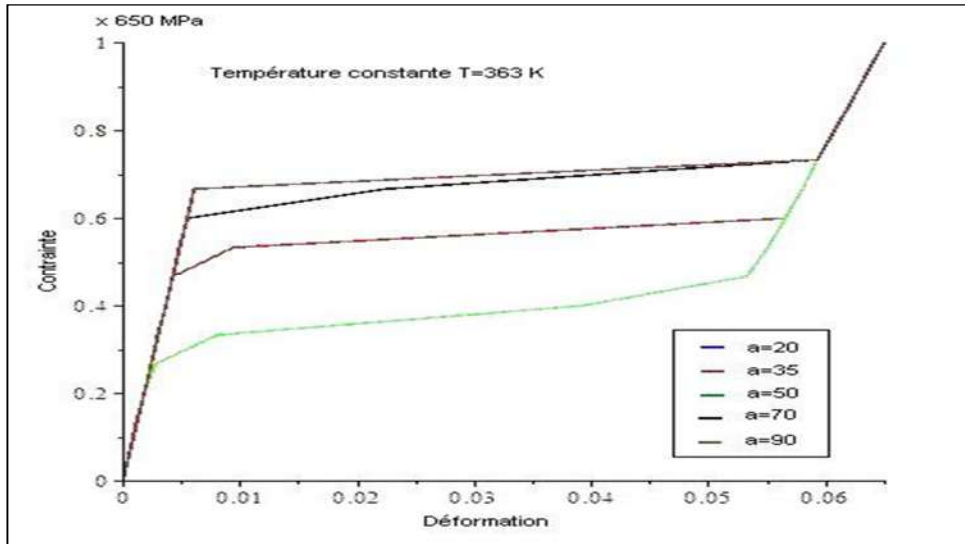


Figure III-12 Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis $T=363K$

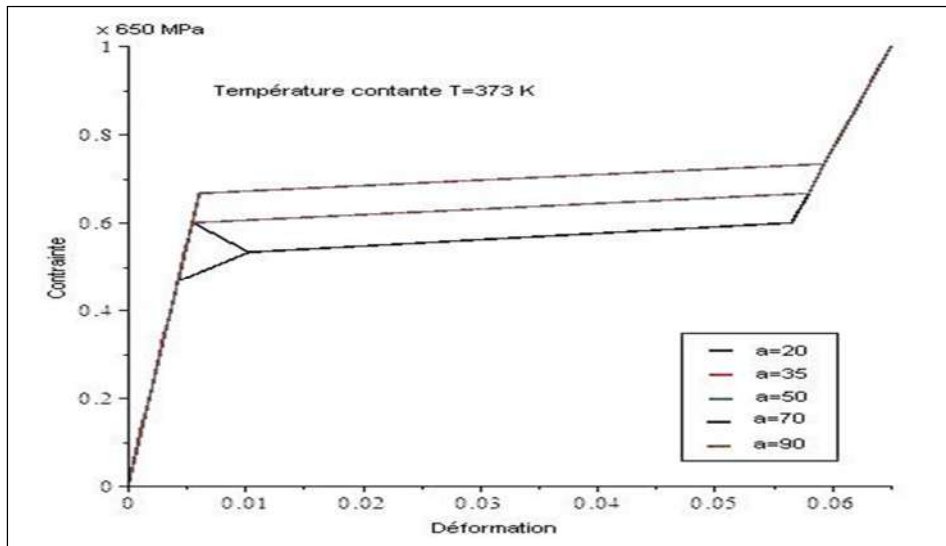


Figure III-13 Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis $T=373K$

Cette dissipation est la principale cause du rétrécissement de l'hystérésis. Pour bien marquer le phénomène, diminuons la contrainte appliquée à 100 MPa et recommençons la même expérience à la température extérieure de 383°K. et 393°K, figure III-14 et III-15, nous constatons que le rétrécissement de l'hystérésis persiste tant que la température de l'alliage est inférieure à la température extérieure, mais

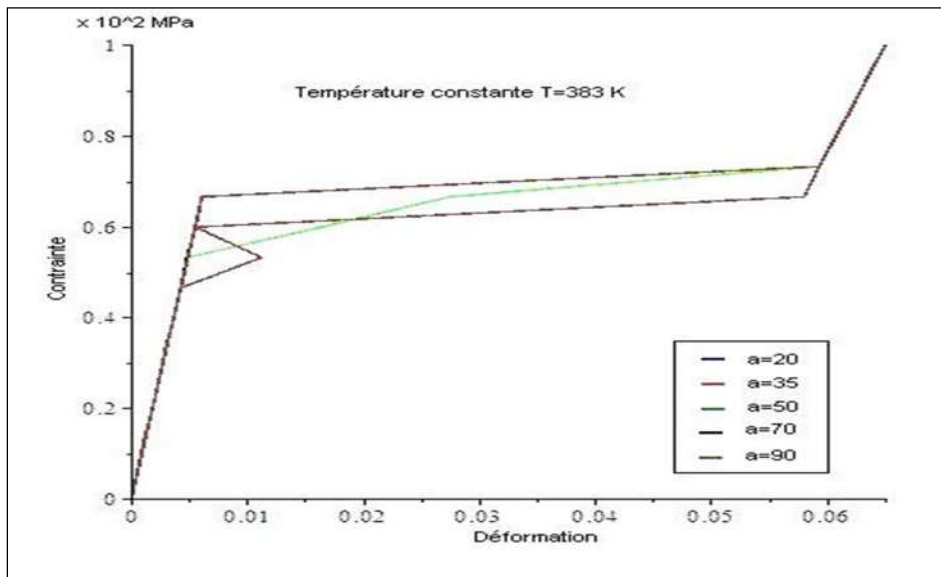


Figure III-14 Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis $T=383K$

que la largeur de l'hystérésis augmente dès lors que la température extérieure devient supérieure à celle de l'AMF, c'est-à-dire que l'échange de chaleur s'inverse et toute l'énergie est stockée sous forme de chaleur latente.

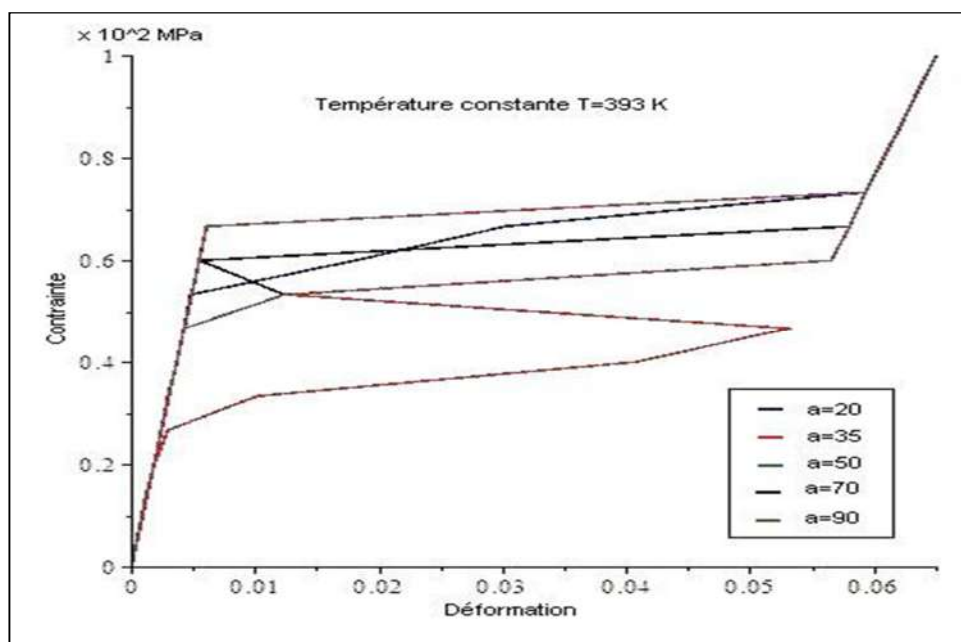


Figure III-15 Influence du facteur a sur le cycle d'hystérésis $T=393K$

III-4.3 Influence de la température

La même constatation peut être faite si nous fixons à chaque expérience le coefficient de transfert de chaleur et que nous faisons varier la température extérieure de $353^{\circ}K$ à $393^{\circ}K$.

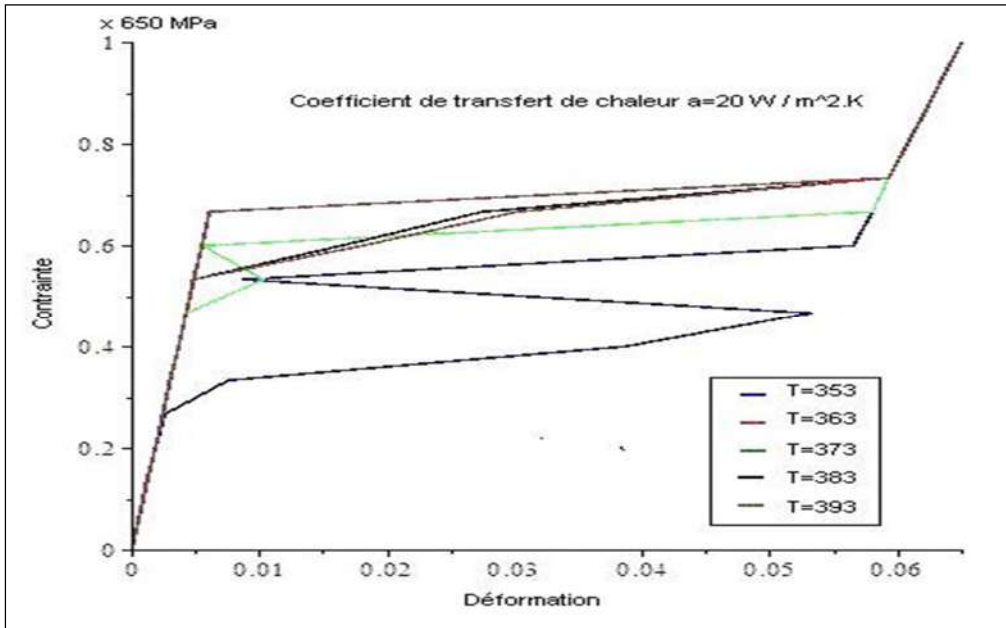


Figure III-16 Influence de la température sur le cycle d'hystérésis $a=20$

Pour chaque valeur du coefficient de transfert de chaleur de $20 \text{ W/m}^2\text{.K}$ à $90 \text{ W/m}^2\text{.K}$, le partage de l'énergie produite par la force de traction entre dissipation sous forme de chaleur et stockage sous forme de chaleur latente est constaté, voir figures III-17 à III-20.

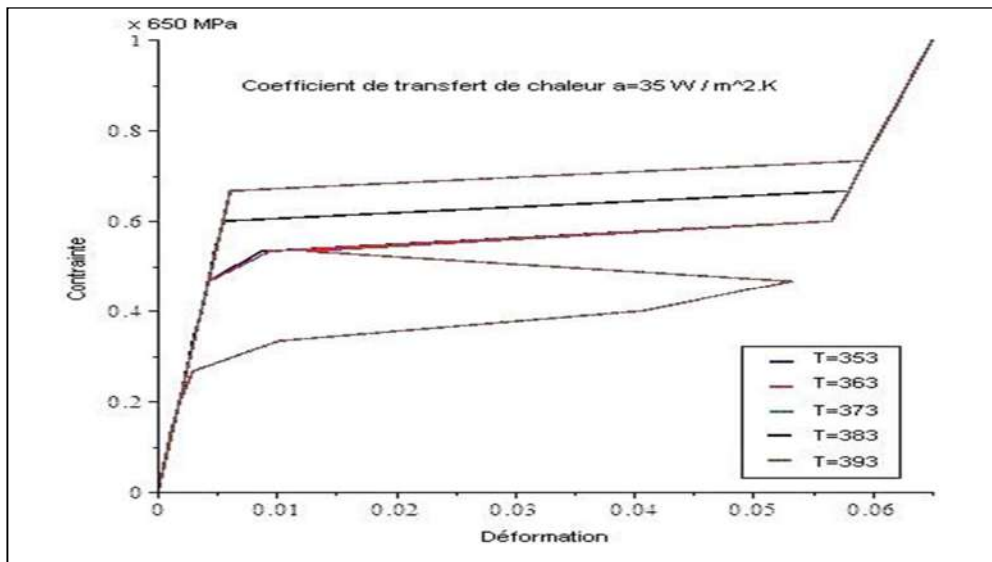


Figure III-17 Influence de la température sur le cycle d'hystérésis $a=35$

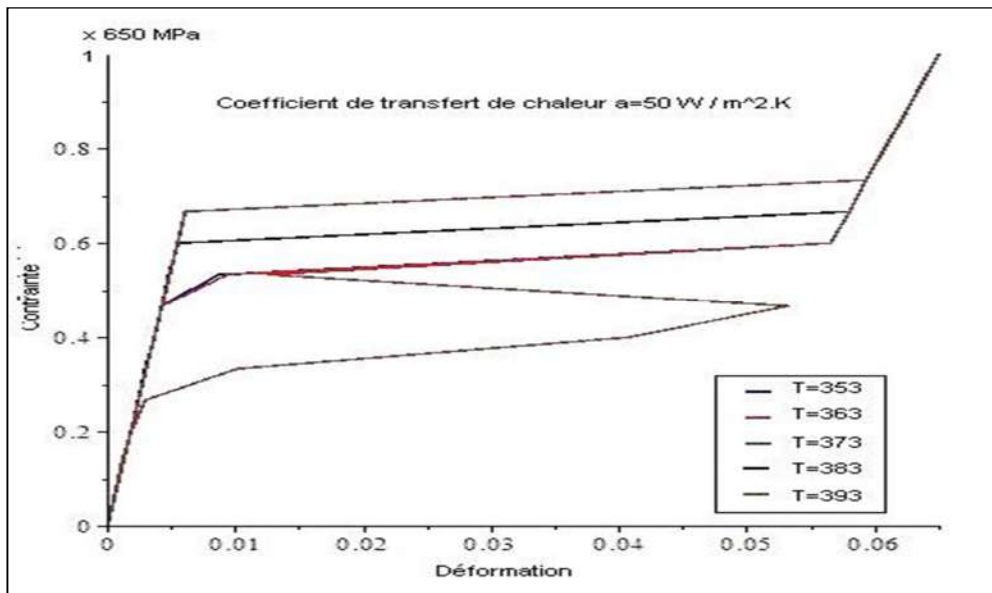


Figure III-18 Influence de la température sur le cycle d'hystérésis $a=50$

La valeur de la chaleur latente stockée ou déstockée est donnée par l'expression :

$$h_{M_{\mp}} - h_A = -\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{E_M - E_A}{E_M \cdot E_A} \cdot \pm \sigma \cdot \epsilon_T - \Delta u$$

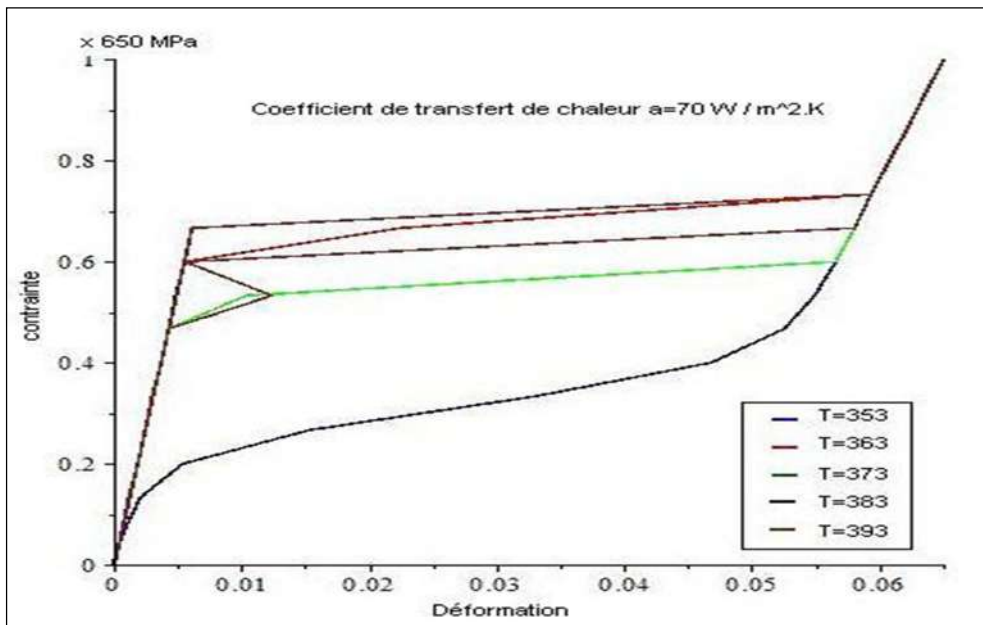


Figure III-19 Influence de la température sur le cycle d'hystérésis $a=70$

Formule dans laquelle Δu est donné par

$$\Delta u = \frac{1}{2} [\sigma_A(T_u)^2 \cdot C_E - \sigma_A(T_u) \cdot (2 \cdot \epsilon_T + \Delta \sigma \cdot C_E) + \Delta \sigma \cdot \epsilon_T] + \Delta n \cdot T_u$$

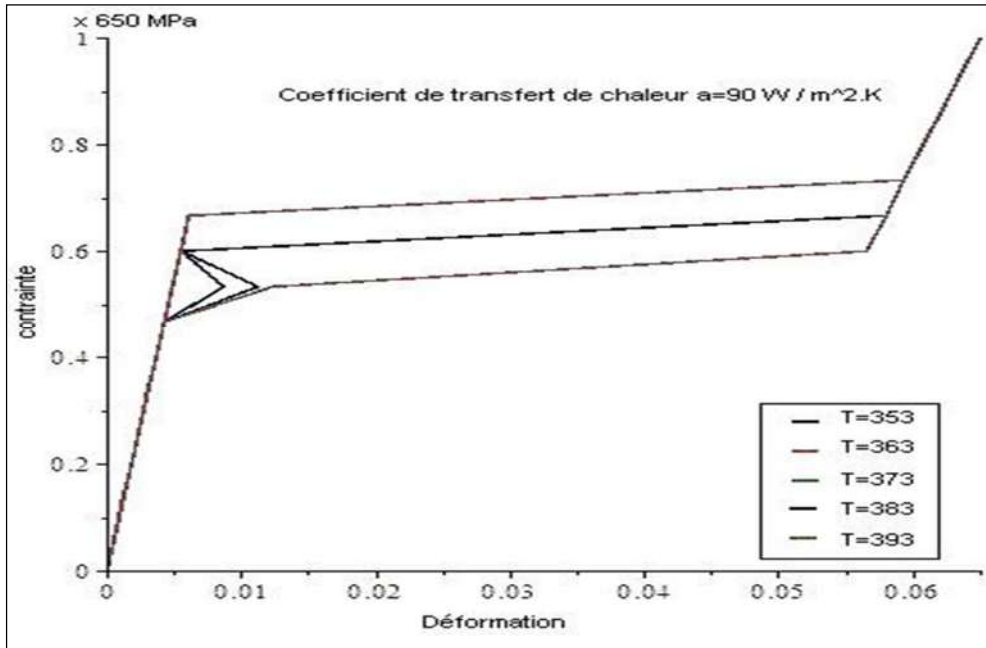


Figure III-20 Influence de la température sur le cycle d'hystérésis $a=90$

$$Et\Delta n = \frac{1}{2.(T_u - T_l)} \cdot [\sigma_A(T_u)^2 - \sigma_A(T_l)^2] \cdot C_E - [\sigma_A(T_u) - \sigma_A(T_l)] \cdot [2 \cdot \epsilon_T + \Delta\sigma \cdot C_E]$$

Avec $C_E = \frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_M}$

III-4.4 Influence de la vitesse de sollicitation

De la vitesse de sollicitation dépend la largeur et l'allongement de l'hystérésis, En effet, plus la vitesse de sollicitation augmente, plus l'écart entre les contraintes de transition de phase (austénite-martensite et martensite-austénite) diminue. Par contre l'hystérésis accuse un accroissement de déformation bien que faible.

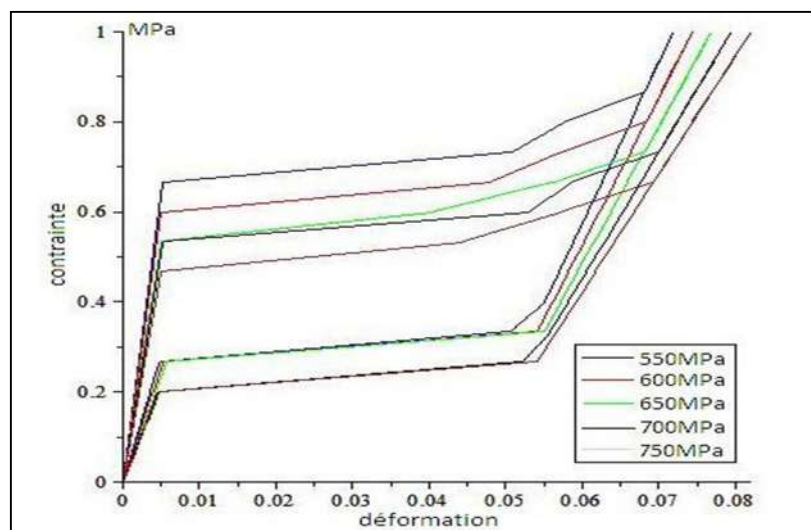


Figure III-21 Influence de la vitesse de sollicitation.

Dans le domaine pseudo-élastique, figure III-21, la contrainte de déclenchement de la transition de phase martensite austénite vaut 346.5MPa pour la plus faible vitesse de sollicitation soit 366.66MPa/s et diminue progressivement jusqu'à la valeur de 337.5MPa pour la plus grande vitesse de sollicitation qui est de l'ordre de 500MPa/s. la contrainte de transition de phase inverse, ne varie qu'à partir de la vitesse de sollicitation de $650 \cdot \frac{2}{3} = 433.33 \text{MPa/s}$.et passe de 162.5MPa à 140MPa. Ce qui se traduit par une surface délimitée par l'hystérésis plus faible et donc une énergie de dissipation plus faible.

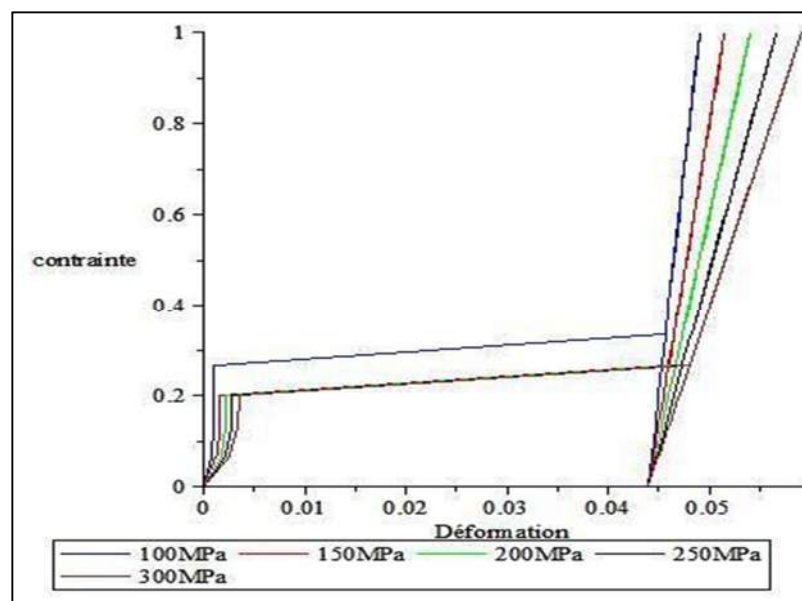


Figure III-22 Influence de la vitesse de sollicitation.

Dans le domaine quasi-plastique, figure III-22, pour des vitesses de sollicitation variant de $100 \cdot \frac{2}{3} = 66.67 \text{MPa/s}$ à $300 \cdot \frac{2}{3} = 100 \text{MPa/s}$, la transformation martensitique a lieu pour des contraintes ayant pour valeur 27MPa et 60MPa.

La même expérience pour des vitesses plus grandes, figure III-23, fait ressortir une déformation plus importante de l'ordre de 0.069 et une contrainte de début de transformation martensitique plus grande valant 60MPa, alors qu'elle valait 27MPa en début d'expérience.

Cela signifie que les contraintes engendrant la transformation martensitique ne restent pas fixes lorsque la vitesse de sollicitation varie.

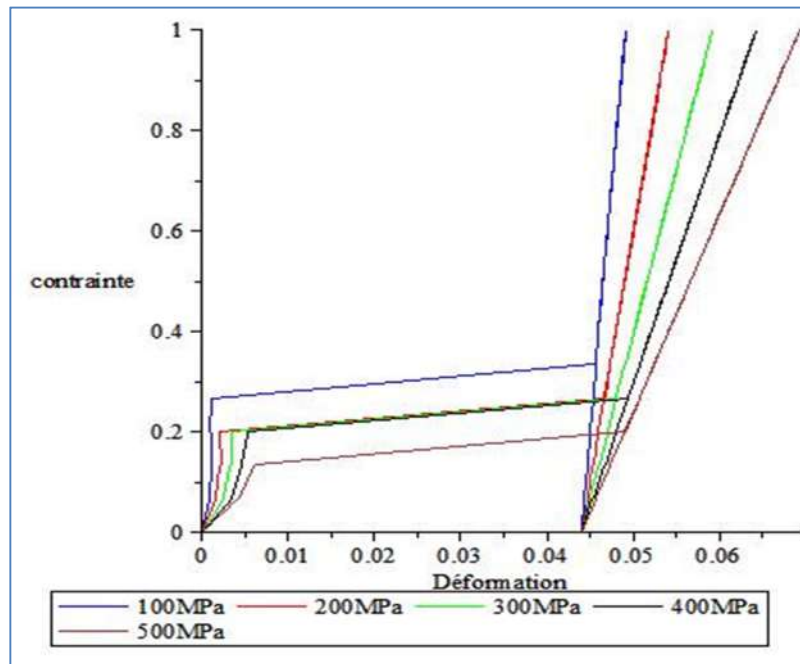


Figure III-23 Influence de la vitesse de sollicitation

Il est un autre domaine quasi-plastique, figure III-24, où une transformation martensitique est associée à une réorientation martensitique. Il est intéressant de noter que la première contrainte de transformation martensitique, rapportée à une échelle de contrainte égale à l'unité, reste fixe et qu'il en est de même pour la contrainte de réorientation.

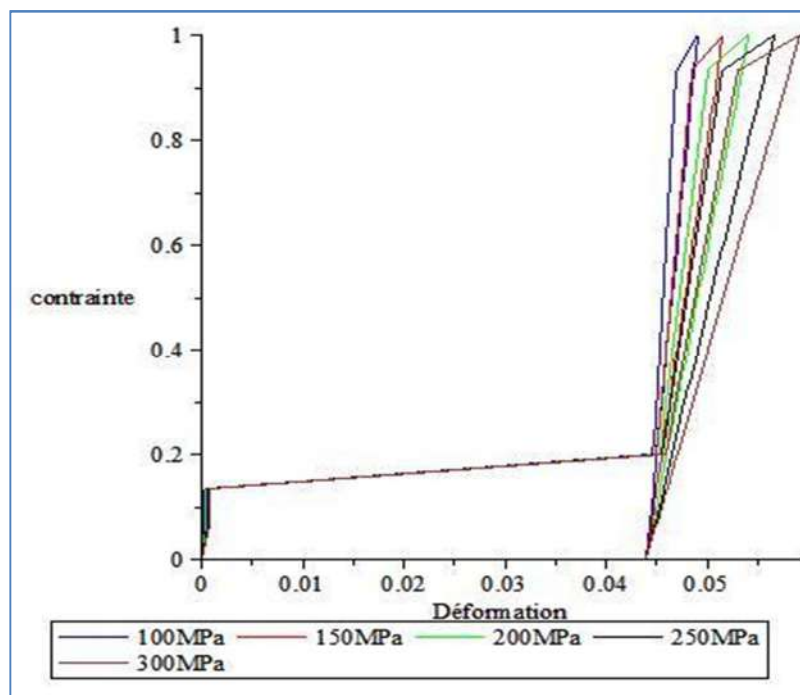


Figure III-24 Influence de la vitesse de sollicitation.

Pour des vitesses de sollicitation plus élevées, figure III-25, le même phénomène est observé. La contrainte de transformation martensitique ; rapportée à une échelle des contrainte égale à l'unité, est proportionnelle à la contrainte maximale appliquée. Et l'on constate l'augmentation de la déformation avec la vitesse de sollicitation.

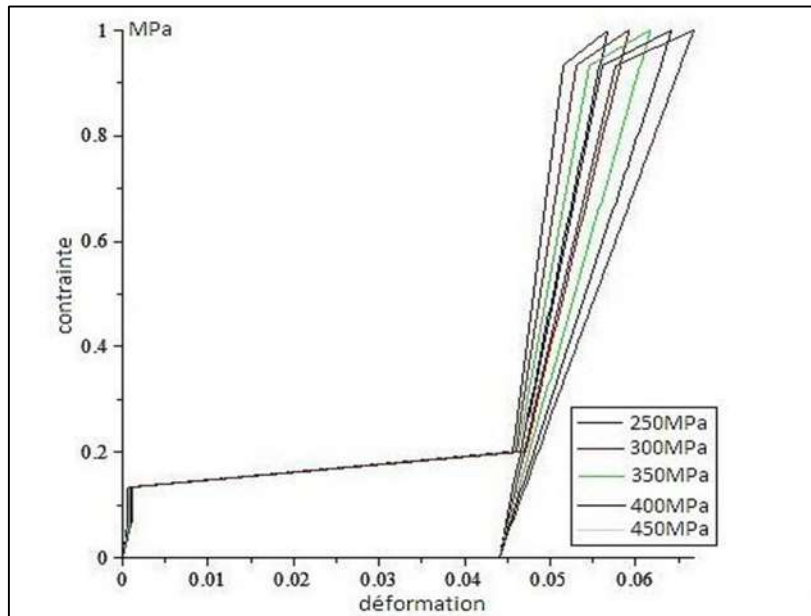


Figure III-25 Influence de la vitesse de sollicitation.

Cette constatation reste valable pour différentes valeurs du coefficient de transfert de chaleur de $20\text{W/m}^2.\text{K}$ à $90\text{W/m}^2.\text{K}$

III-4.5 Domaine superélastique

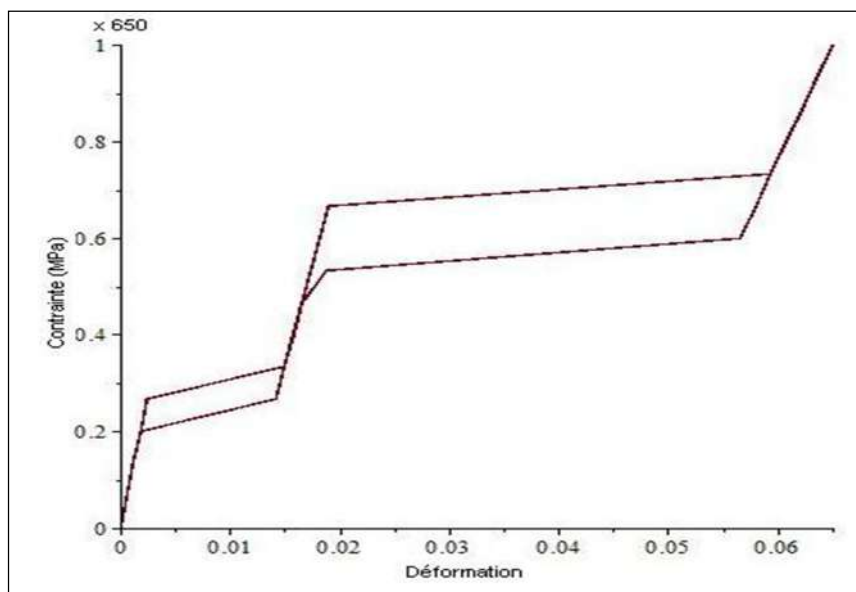


Figure III-26 Courbe contrainte déformation

Le domaine super élastique, présente deux courbes différentes selon que l'échantillon, est initialement en phase austénitique ou martensitique et que la contrainte appliquée est inférieure ou supérieure à la contrainte élastique limite.

La figure III-26 illustre le cas où l'échantillon, initialement en phase austénitique, est soumis a une contrainte inférieure à la contrainte élastique limite. Partant de l'origine et en mode chargement, une première ligne représente la déformation élastique de l'austénite, suivie d'une deuxième ligne indiquant la transformation martensitique ou l'austénite se transforme en martensite. Une troisième ligne montre la phase durant laquelle la martensite se déforme élastiquement suivie d'une quatrième ligne représentant la réorientation de la martensite et d'une cinquième ligne montrant la déformation élastique de la martensite réorientée. Toutes ces déformations sont réversibles en mode déchargement tant que la contrainte appliquée maximale reste inférieure à la contrainte élastique limite.

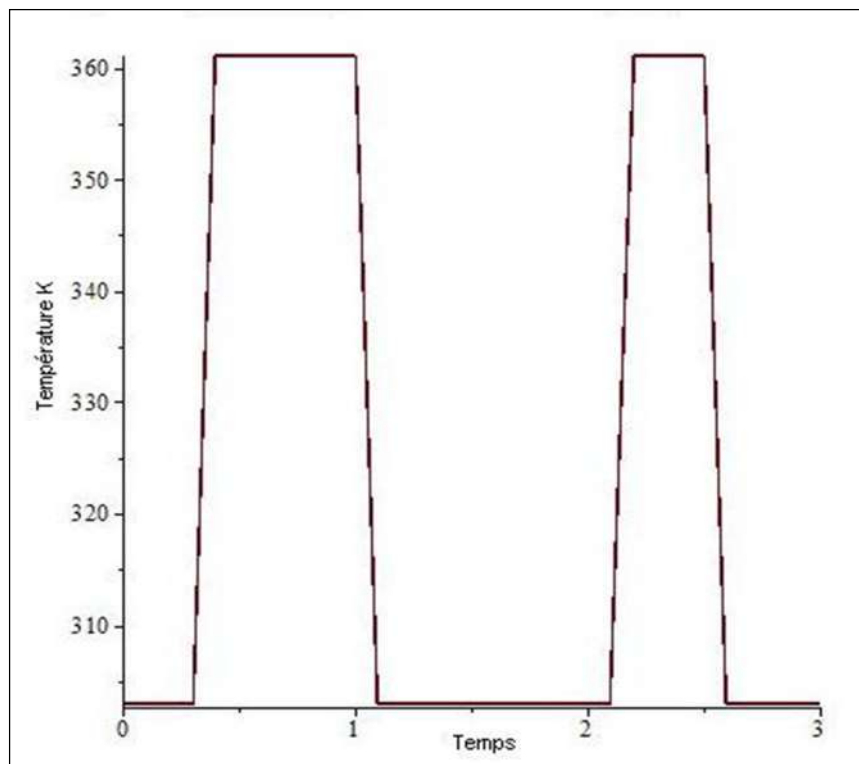


Figure III-27 Evolution de la température en fonction du temps

La figure III-27 montre l'évolution de la température en fonction du temps. Il est clair que la température augmente lors de la déformation élastique de l'austénite ou de la martensite et diminue au cours de la formation ou de la réorientation de la martensite.

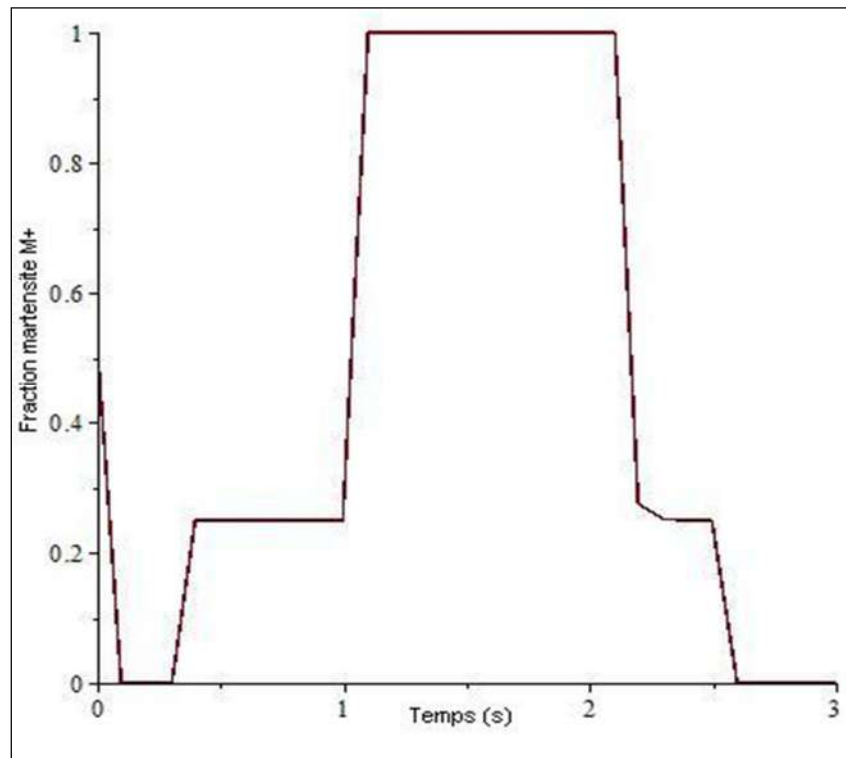


Figure III-28 Evolution de la fraction de martensite M+

Les figures III-28 et III-29 montrent la réorientation des variantes M^+ et M^- et la formation et l'évanouissement de la martensite réorientée au cours du cycle chargement déchargement.

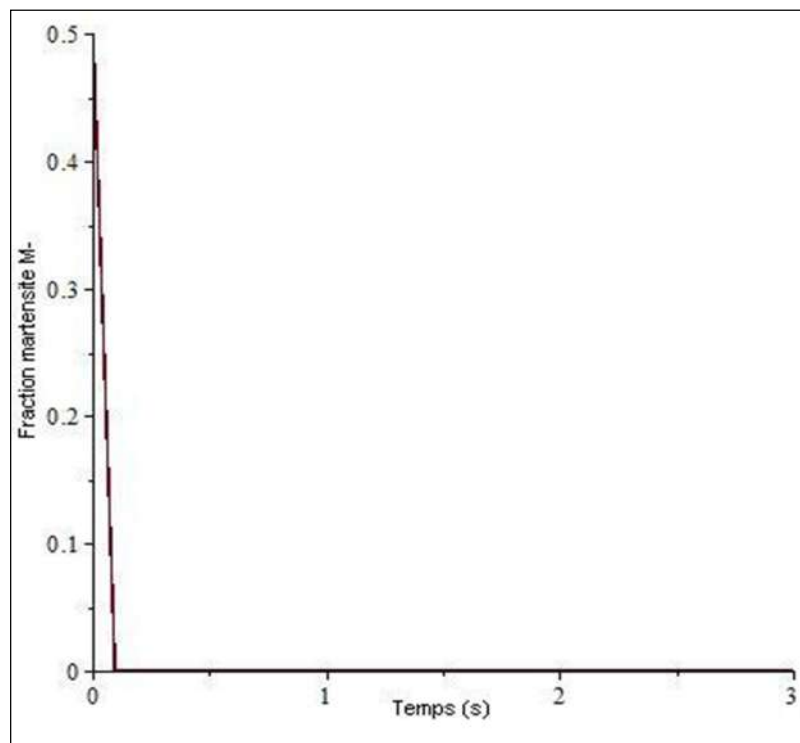


Figure III-29 Evolution de la fraction de martensite M-

Les figures III-30 et III-31 retracent les courbes d'évolution de la température en fonction de la déformation et inversement.

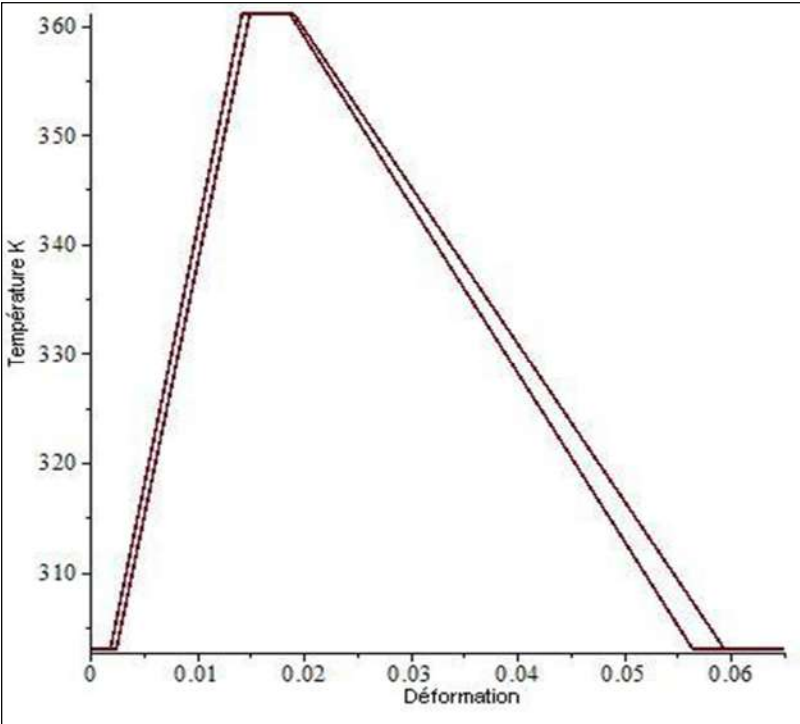


Figure III-30 Hystérésis en température

Il faut noter la faiblesse de la largeur de la double hystérésis

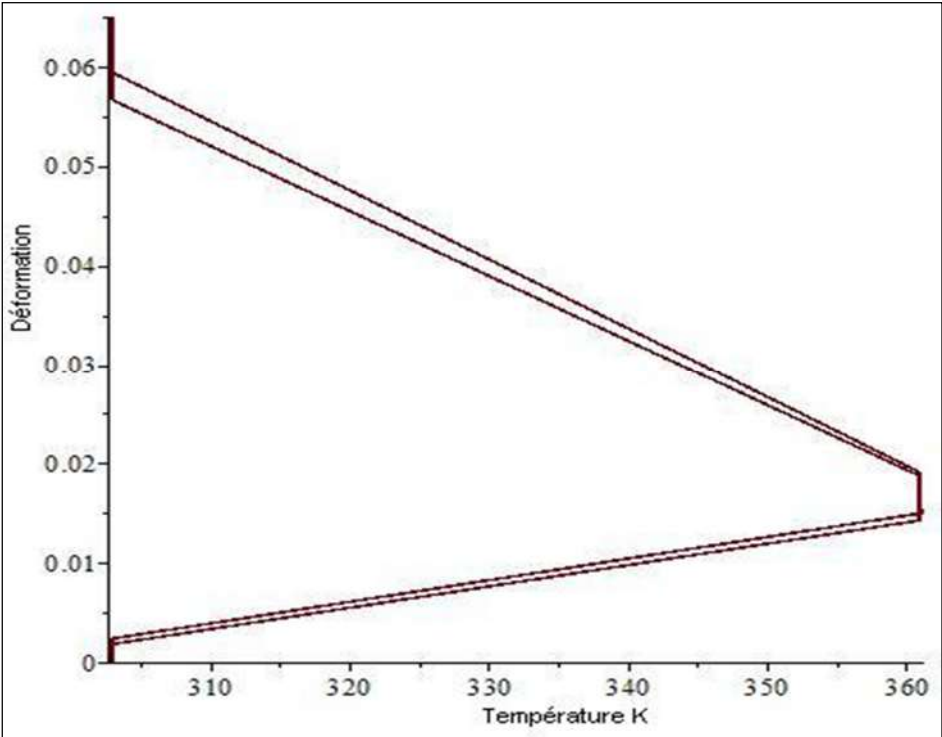


Figure III-31 Evolution de la déformation en fonction de la température

La réversibilité de la déformation est clairement établie en figure III-32. La déformation atteint un maximum en mode de chargement et retombe à zéro à la fin du mode de déchargement.

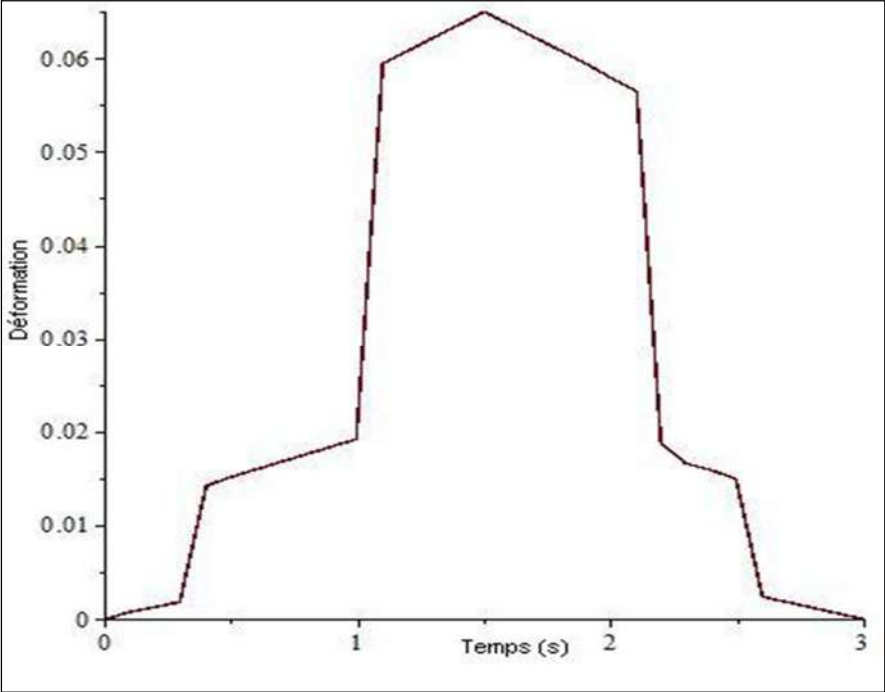


Figure III-32 Evolution de la déformation

Le module de Young, figure III-33, de l'ensemble austénite + martensite varie 0 à 110 MPa alors qu'il ne vaut que 71.1MPa pour l'austénite et 30.9MPa pour la martensite.

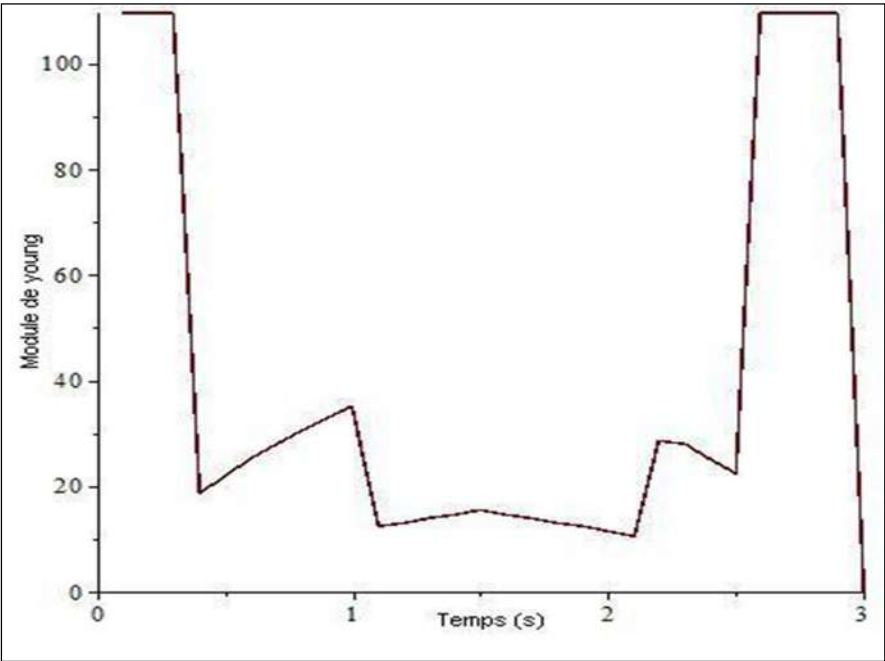


Figure III-33 Evolution du module de Young.

Le module tangent, figure III-34 et III-35 affiche la double hystérésis quand il est exprimé en fonction de la déformation

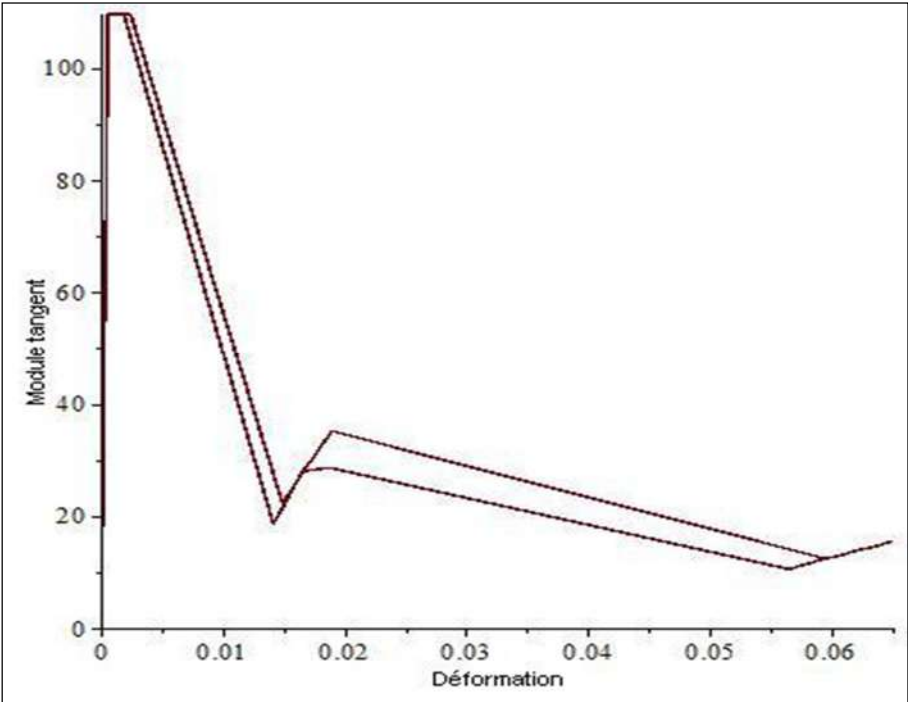


Figure III-34 Courbe du module tangent en fonction de la déformation

Et un ensemble complexe de lignes brisées, quand il est exprimé en fonction du temps.

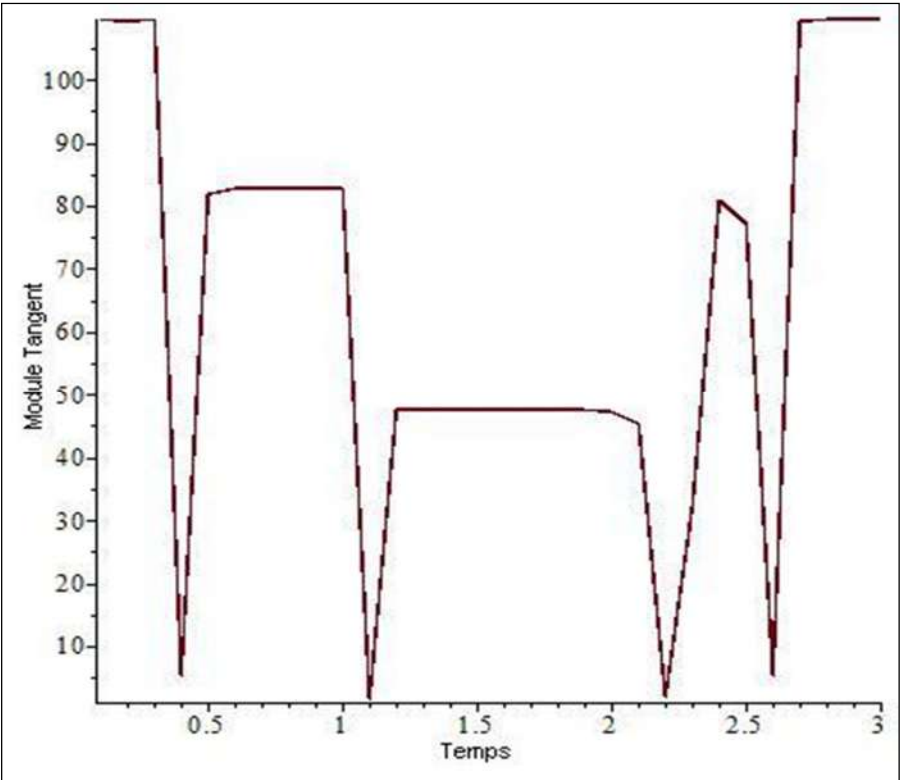


Figure III-35 Evolution du module Tangent

III-4.6 Domaine quasi plastique

La figure III-26 a illustré le domaine super élastique ou la déformation est entièrement réversible car la contrainte appliquée maximale reste inférieure à la contrainte élastique limite contrairement à la figure III-36 qui illustre le cas où l'échantillon, toujours initialement en phase austénitique, est soumis à une contrainte supérieure à la contrainte élastique limite. Ce qui entraîne une déformation plastique de la martensite réorientée et donc une déformation rémanente de 0.044 au déchargement

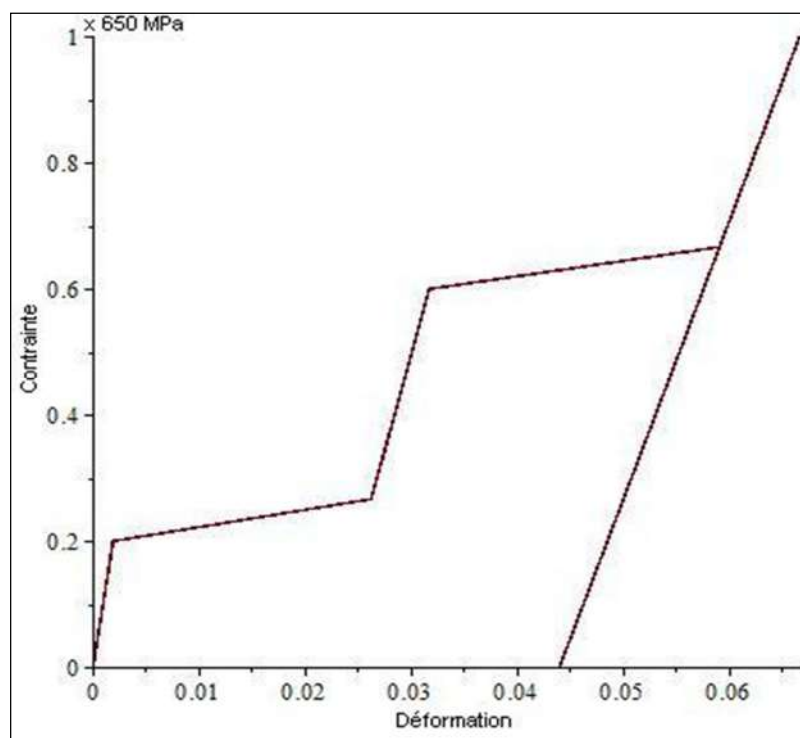


Figure III-36 Hystérésis en contrainte domaine plastique

L'échantillon ne revient à son état initial que moyennant un apport d'énergie. Cet apport d'énergie peut être une source de chaleur directement appliquée à l'échantillon (simple chauffage de l'échantillon par exemple) ou par effet joule si l'échantillon est soumis à un courant électrique d'intensité i .

$$j(t) = r * i^2 * t = (r * i) * \left(\frac{u}{r}\right) * t = \frac{u^2}{r} * t$$

Ou r est la résistance, en ohm, de l'échantillon et u la différence de potentiel placée à ses bornes.

L'évolution de la température, figure III-37, fait ressortir deux paliers correspondants à la transformation martensitique et à la réorientation de la martensite qui vient de se former.

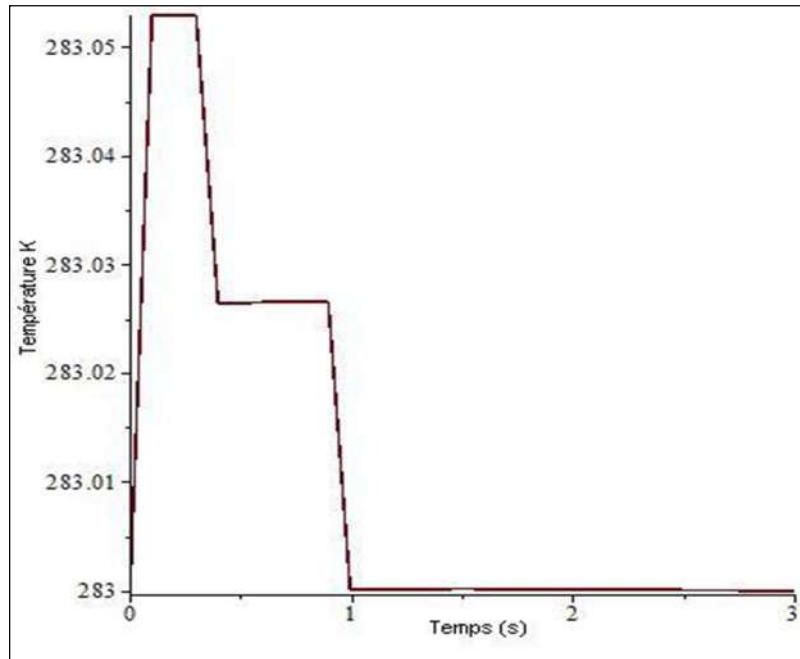


Figure III-37 Evolution de la température

Les figures III-38 et III-39 montrent la disparition des variantes M^+ et M^- et l'évolution de la martensite réorientée de 0 à l'unité

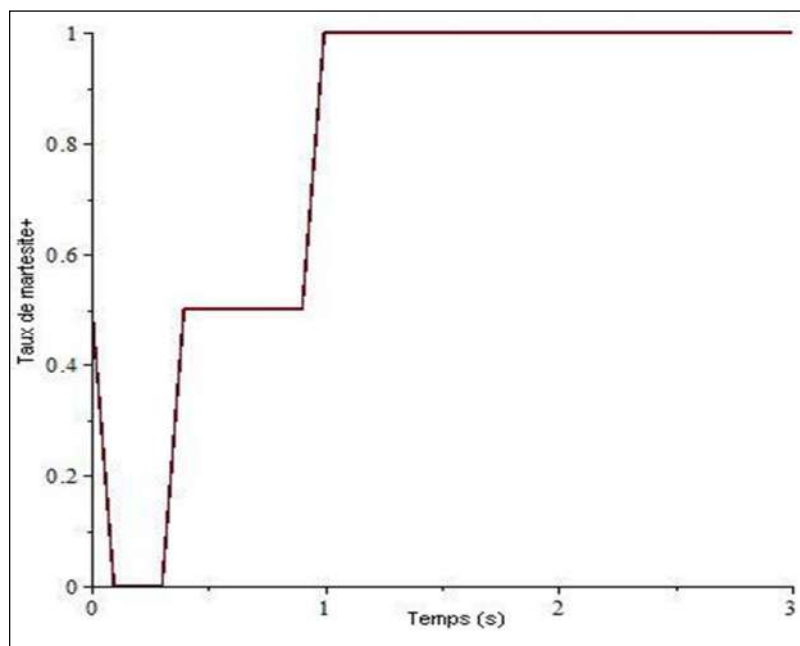


Figure III-38 Evolution de la fraction de martensite M^+ .

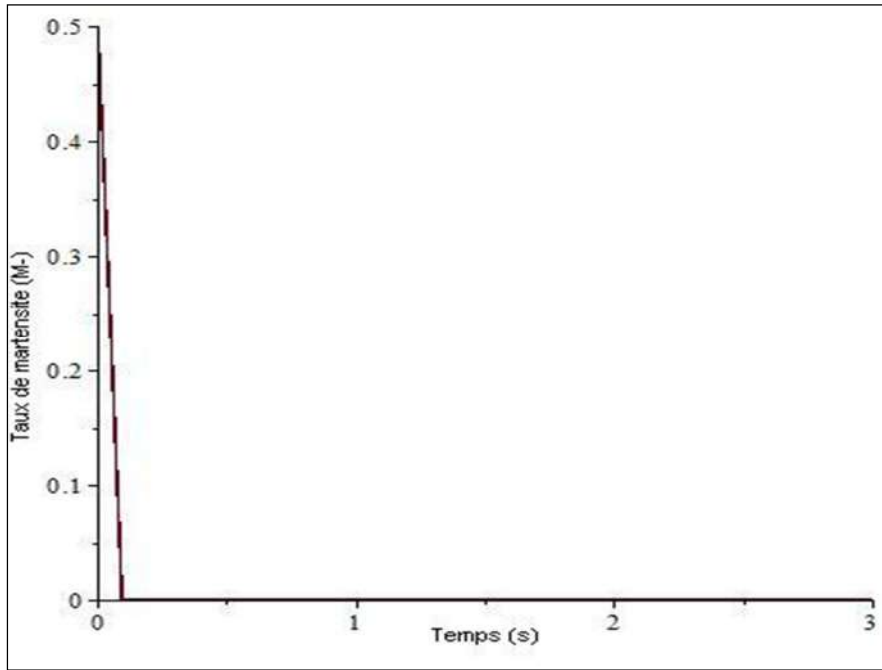


Figure III-39 Evolution de la fraction de martensite M-

Les figures III-40 et III-41 retracent l'évolution de la température en fonction de la déformation et inversement. Force est de constater la très faible variation de la température et l'existence de deux paliers ou la température reste constante.

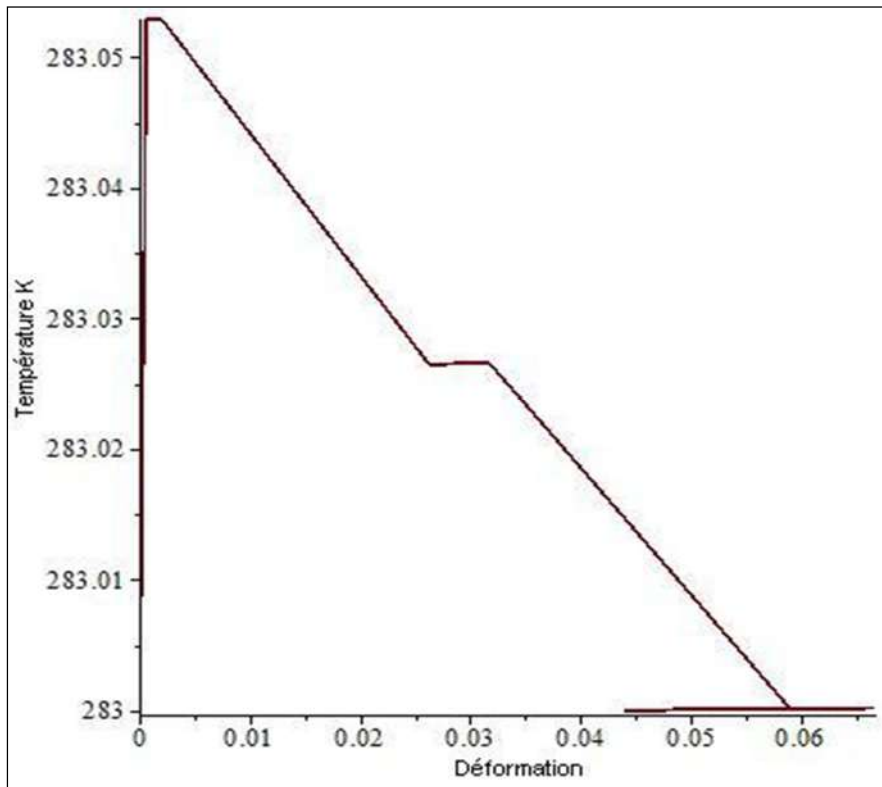


Figure III-40 Courbe de la température en fonction de la déformation

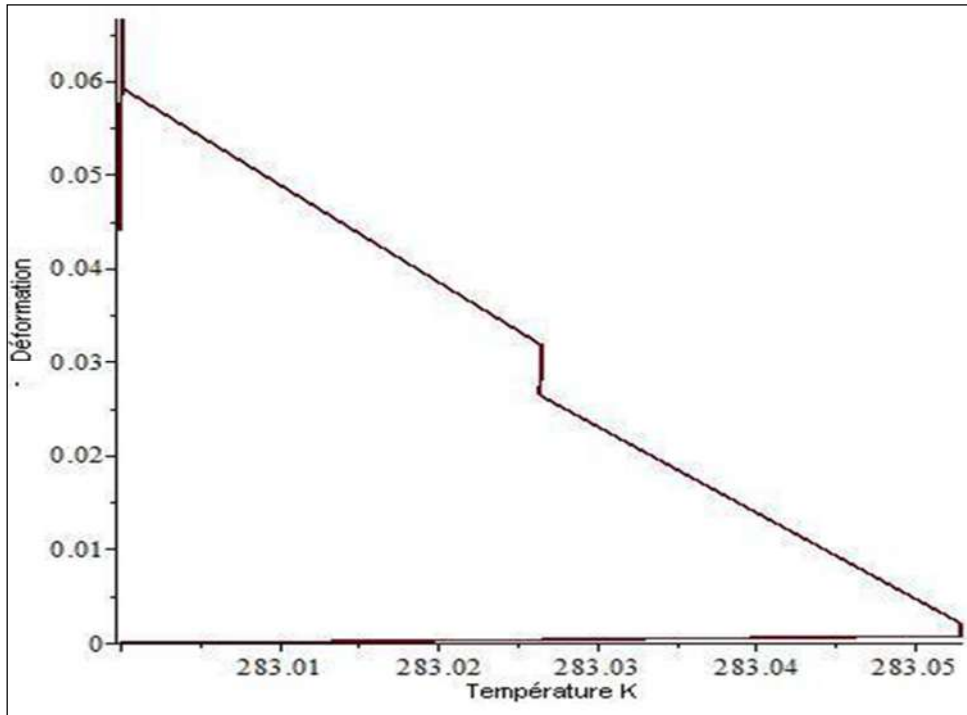


Figure III-41 Courbe de la déformation en fonction de la température

La déformation, figure III-42, augmente par palier jusqu'à 6.7% au cours du chargement puis décroît, au cours du déchargement, jusqu'à 4.4% car l'échantillon a été soumis à une contrainte supérieure à la contrainte élastique limite et a subi une élongation plastique rémanente. La déformation n'est réversible que partiellement.

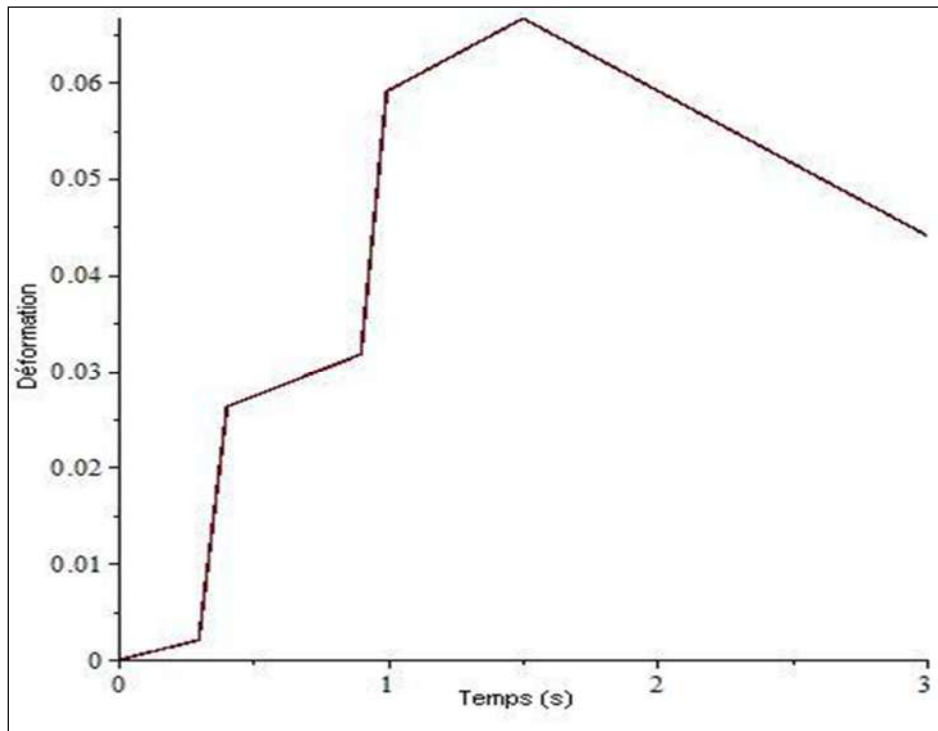


Figure III-42 Evolution de la déformation.

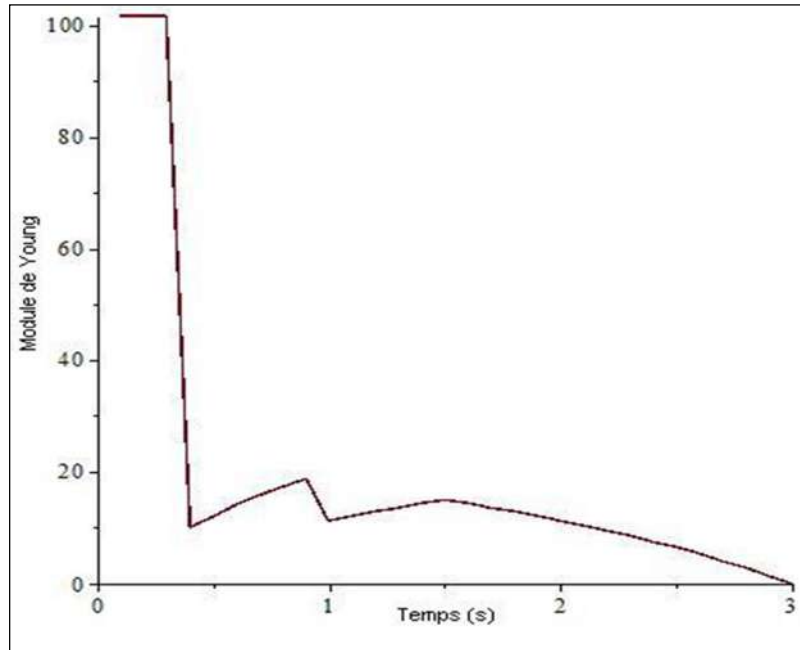


Figure III-43 Evolution du module de Young.(MPa)

Les figures III-43 et III-44 montrent la variation du module de Young au cours du cycle de chargement et de déchargement et sa variation en fonction de la déformation. Sa valeur, initialement légèrement supérieure à 100MPa conformément à la loi du mélange, décroît rapidement en raison de la transformation de l'austénite en martensite et de la réorientation de cette dernière.

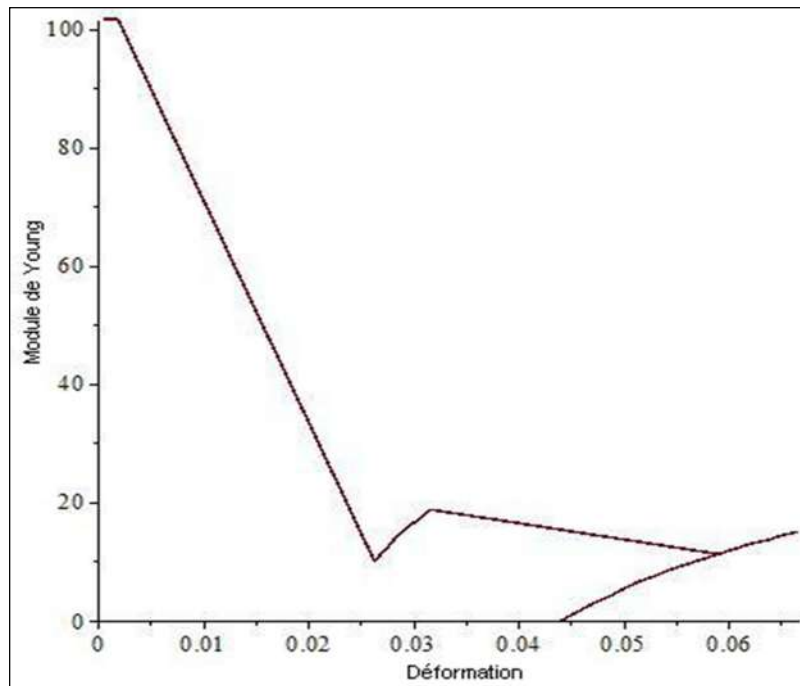


Figure III-44 Courbe du module de Young en fonction de la déformation.

La figure III-45 décrit la variation du module tangent durant les phases de transformation martensitique, de réorientation. et de déchargement.

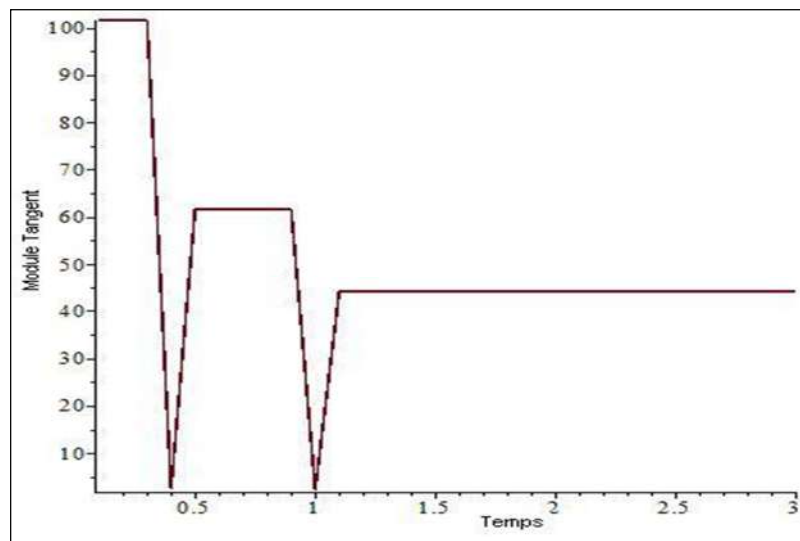


Figure III-45 Evolution du module de tangent.

III-4.7 Domaine quasi plastique 2

L'échantillon est initialement, figure III-46, en phase martensitique. En mode de chargement, la martensite se déforme élastiquement, puis la martensite ainsi déformée se réoriente et continue à se déformer élastiquement jusqu'à ce que la contrainte appliquée atteigne la contrainte élastique limite. Au-delà de cette contrainte élastique limite ; la déformation devient plastique et on constate alors, qu'après une décharge totale, une déformation persiste et n'est réversible qu'à la condition qu'un apport de chaleur vienne réchauffer l'échantillon.

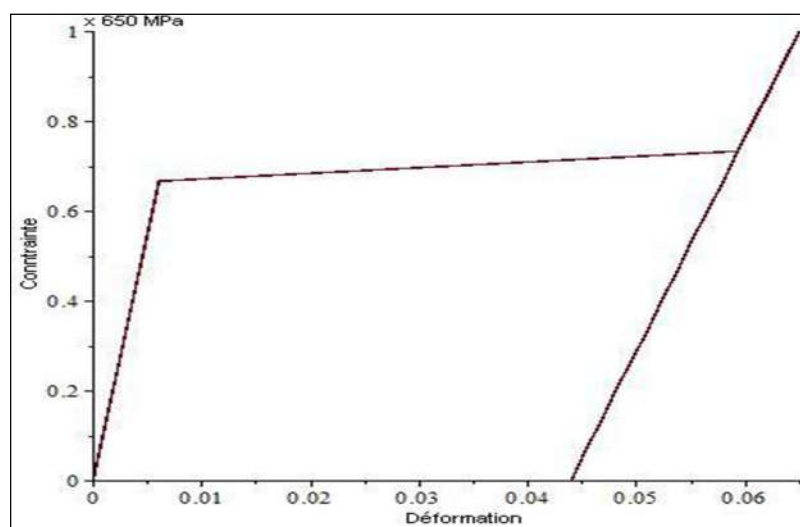


Figure III-46 Hystérésis en contrainte.

La figure III-47 retrace l'évolution de la température en fonction du temps. La température est quasi constante autour de la valeur 283°K. L'échantillon est en phase martensitique donc stable à basse température.

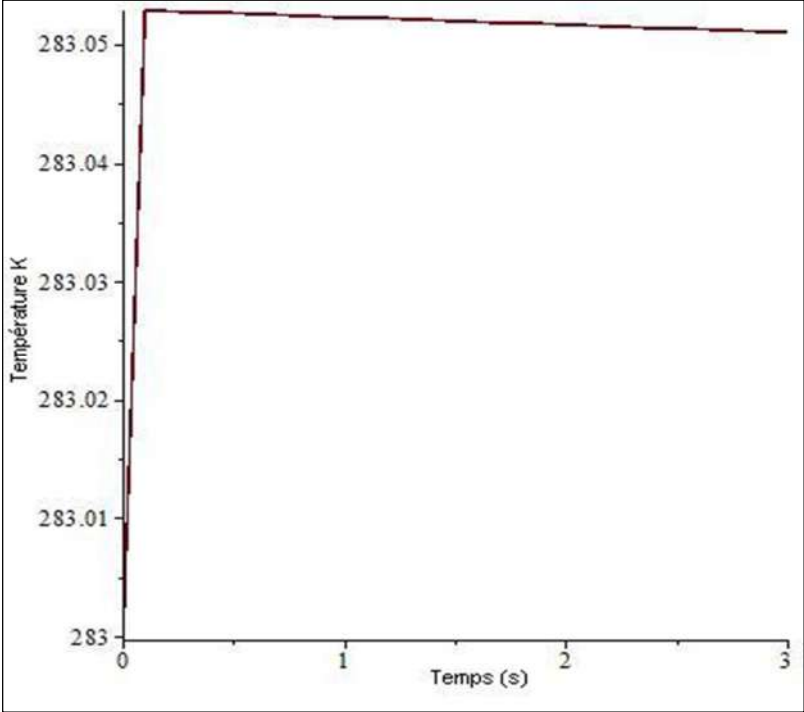


Figure III-47 Evolution de la température

Les figures III-48 et III-49 montrent la disparition des variantes M^+ et M^- et l'évolution de la martensite réorientée de 0 à l'unité

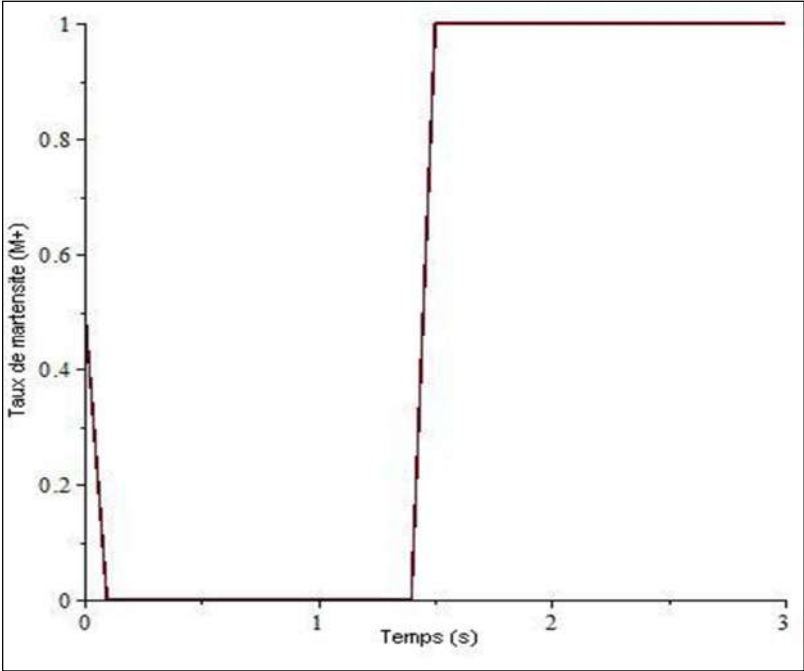


Figure III-48 Evolution de la fraction de martensite (M^+)

Le saut quasi vertical de la courbe de la valeur 0 à la valeur 1 correspond à la phase de réorientation de la martensite.

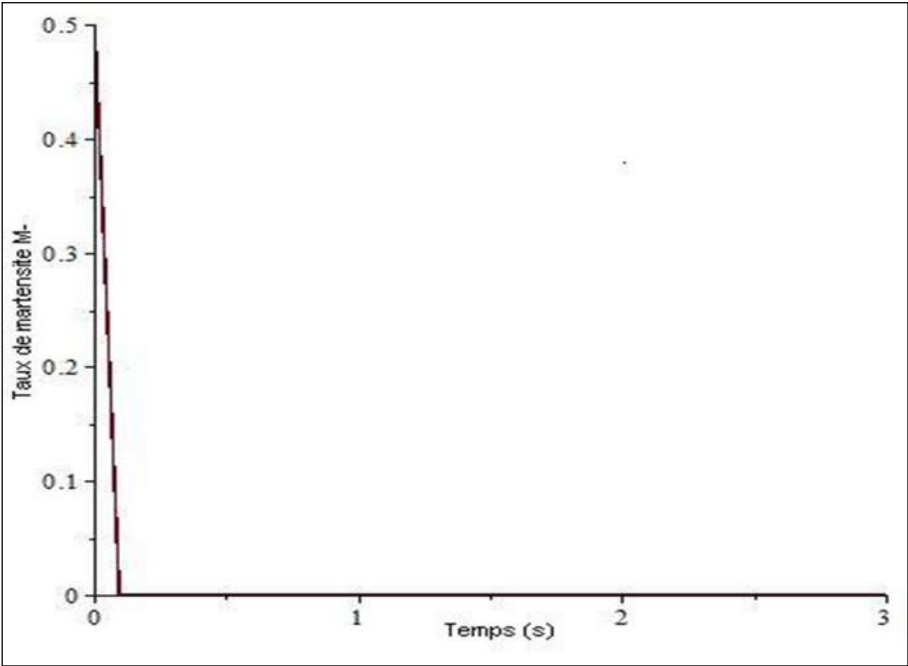


Figure III-49 Evolution de la fraction de martensite (M-).

Les figures III-50 et III-51 retracent l'évolution de la température en fonction de la déformation et inversement. Force est de constater la très faible variation de la température.

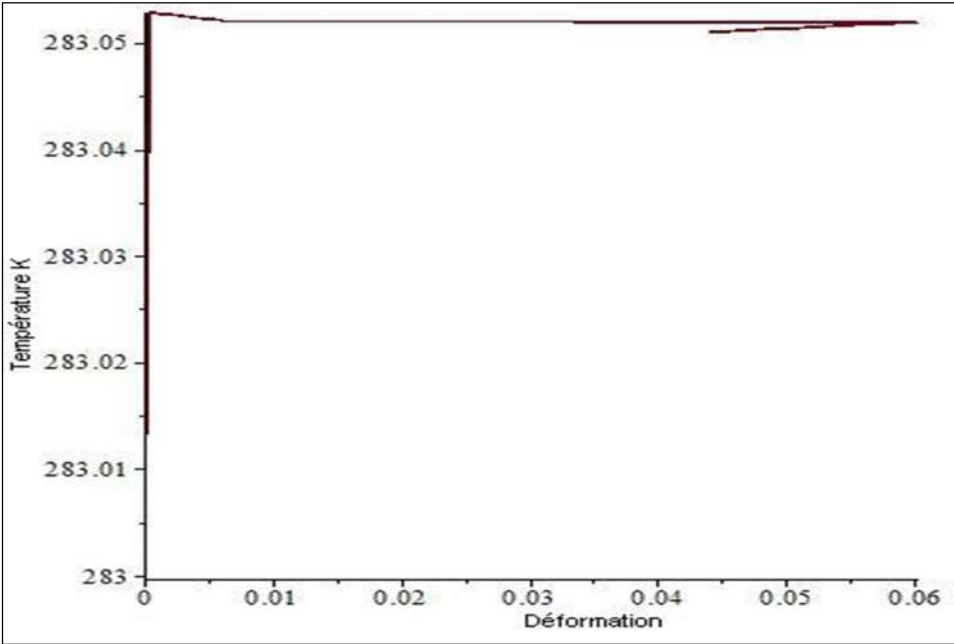


Figure III-50 Courbe de la température en fonction de la déformation

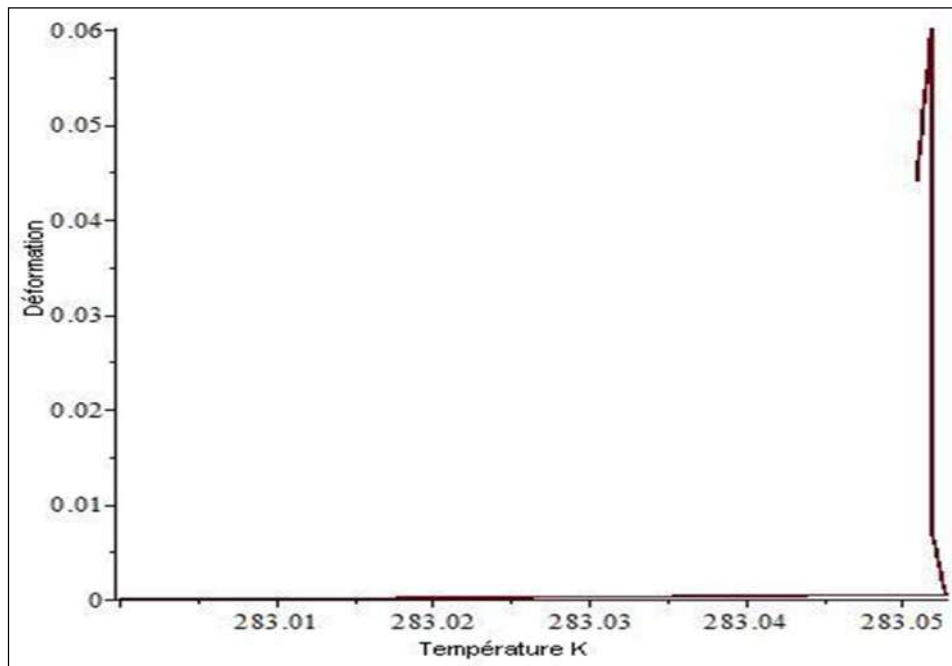


Figure III-51 Courbe de la déformation en fonction de la température

La figure III-52 montre que la courbe d'évolution de la déformation est simulée par trois lignes droites qui correspondent, pour la première ligne, à la phase allongement élastique de la martensite, à la phase réorientation de la martensite, pour la deuxième ligne et à la phase déformation plastique de la martensite pour la troisième ligne.

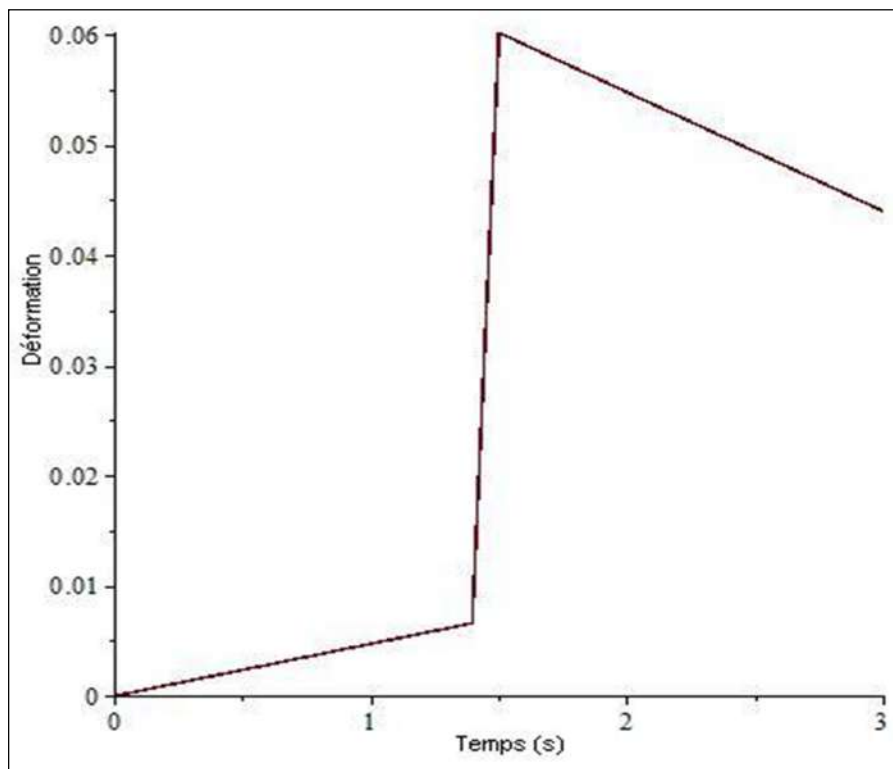


Figure III-52 Evolution de la déformation

Le module de Young, figure III-53 et III 54, ne varie, en mode chargement, que durant la phase de réorientation de la martensite. Cette variation linéaire est représentée par une ligne horizontale, ou le module de l'échantillon reste constant et une ligne quasi verticale ou l'on assiste à la diminution de ce même module. La troisième ligne, légèrement incurvée vers le haut, dénote que le matériau est dans le domaine plastique et que la déformation n'est plus linéaire

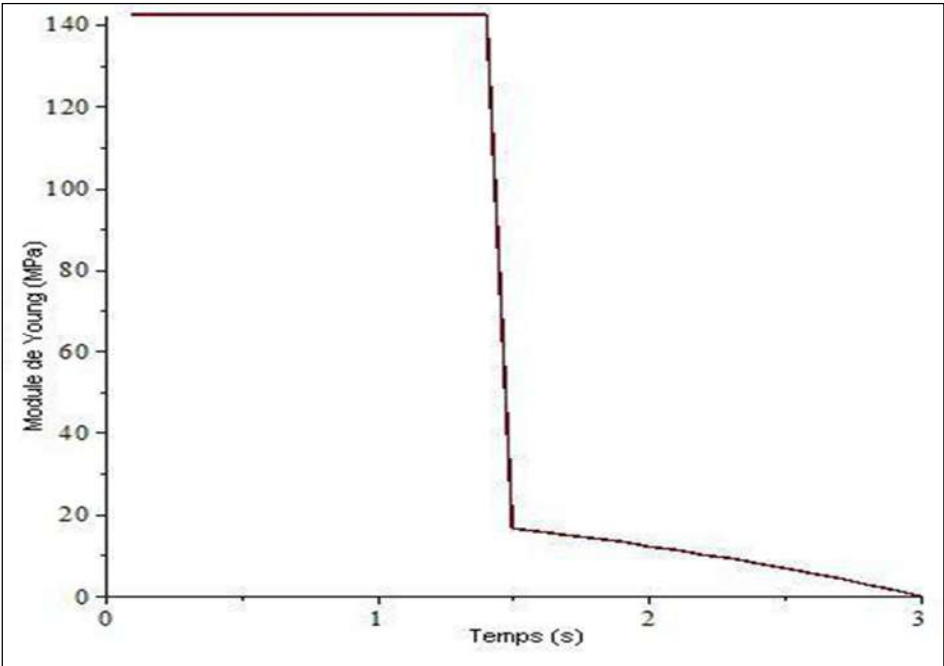


Figure III-53 Evolution du module de Young

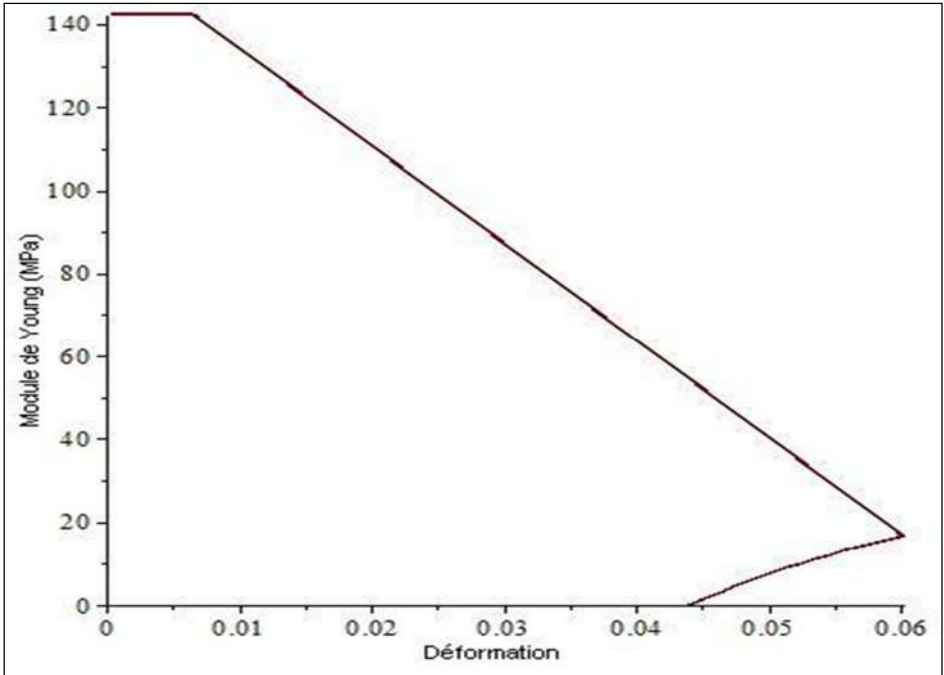


Figure III-54 Courbe du module de Young en fonction de la déformation

La figure III-55 décrit la variation du module tangent durant les phases de déformation élastique de la martensitique, de réorientation. et de déchargement.

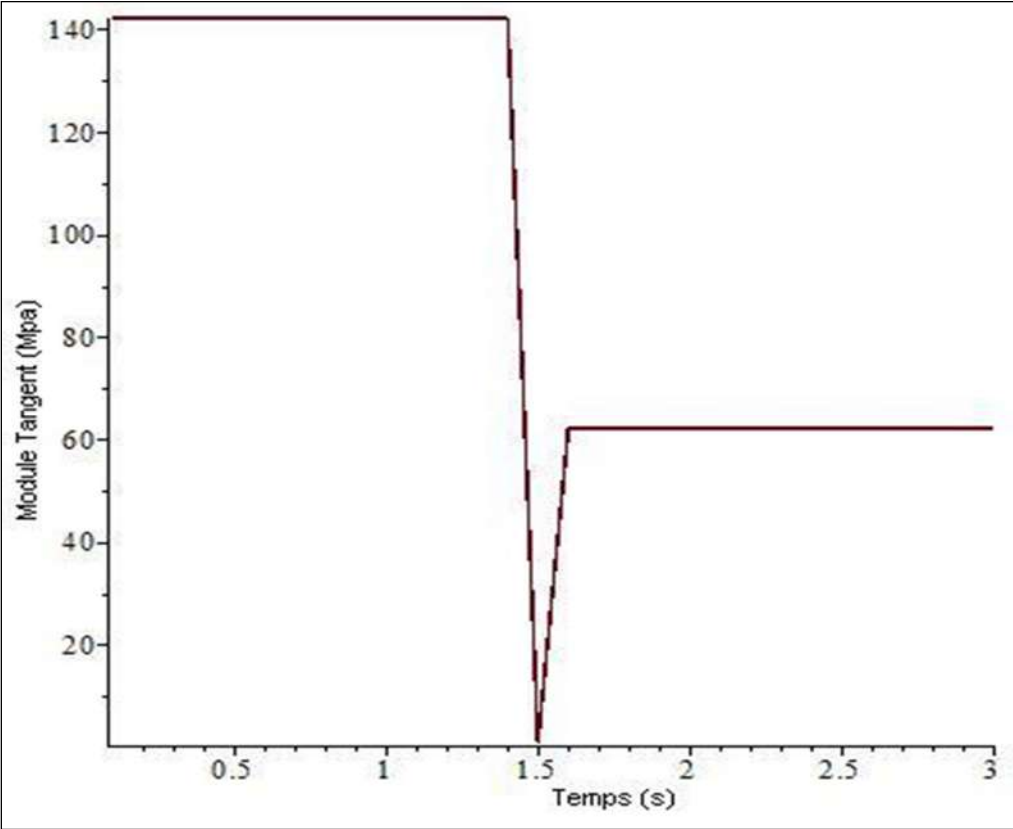


Figure III-55 Evolution du module Tangent.

Chapitre IV

Application à l'étude de la fatigue

IV-1 Loi de comportement

Le modèle monodimensionnel de fatigue proposé par A.Moumni et al [29-30] s'inspire du modèle rhéologique de Reuss et est basé sur l'énergie dissipée dans la boucle d'hystérésis stabilisée. Pour des chargements de traction, le nombre de cycles à rupture est relié à l'énergie dissipée par une loi puissance.

L'énergie dissipée est donnée par la relation :

$$W_d = \int_{cycle} \sigma \cdot \varepsilon = \sum_{cycle} \sigma_{moyen} \cdot \Delta \varepsilon \quad (IV.1)$$

Et
$$W_d = \alpha \cdot N^\beta \quad (IV.2)$$

Cette formule est modifiée comme suit, si la pression hydrostatique est prise en compte :

$$W_d + a \cdot P = \alpha \cdot N^\beta \quad (IV.3)$$

les paramètres α et β sont ajustés avec des résultats expérimentaux. Les échelles logarithmiques du nombre de cycles à rupture N et de l'énergie dissipée W_d constituent les axes du repère.

La modélisation unifiée proposée par Zaki et Moumni [29-30] décrit complètement les divers effets exhibés par les alliages à mémoire de forme et notamment le changement de phase qui est pris en compte à l'aide du taux global de martensite réorientée z . dans les chapitres précédents l'expression analytique du taux de martensite a été obtenue, ce qui simplifie grandement la manipulation de la loi de comportement proposée [29].

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - z \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{tr}) \quad (\text{IV.4})$$

$\underline{\underline{C}}$ représente le tenseur élastique équivalent du matériau à mémoire de forme.

$\underline{\underline{\varepsilon}}_{tr}$ représente le tenseur de déformation inélastique local

z est donné par les différentes formules obtenues dans le chapitre III c-à-d $z = x(t)^+$

Dans le cas isotrope, on peut écrire la loi de comportement sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2 \cdot \mu_{eq} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} - z \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{tr}) + \lambda_{eq} \cdot tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{I}} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Avec } \mu_{eq} = \frac{1}{2 \cdot (1 + \nu)} \left(\frac{1 - z}{E_A} + \frac{z}{E_M} \right)^{-1}$$

$$\lambda_{eq} = \frac{1}{(1 - 2\nu) \cdot (1 + \nu)} \left(\frac{1 - z}{E_A} + \frac{z}{E_M} \right)^{-1}$$

Dans le cas monodimensionnel, cette loi s'écrit :

$$\sigma = 2 * \mu_{eq} \cdot (\varepsilon - z \cdot \varepsilon_{tr}) + \lambda_{eq} \cdot \varepsilon$$

$$\text{Soit : } \sigma = (2 \cdot \mu_{eq} + \lambda_{eq}) \cdot \varepsilon - 2 \cdot \mu_{eq} \cdot \varepsilon_{tr} \cdot z \quad (\text{IV.6})$$

Dans le cas de notre étude ; c'est-à-dire un alliage à variantes jumelles

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{E_M (\varepsilon - (x_+ - x_-) \varepsilon_T)}{x_+ + x_- + \frac{E_M}{E_A} x_A} \dots \dots \dots (\text{IV.7})$$

Si l'on opte pour un chargement périodique, sinusoïdal par exemple, on peut obtenir un chargement cyclique.

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t_c} \cdot t \quad (\text{IV.8})$$

pour un cycle dont la durée est de t_c secondes par exemple.

IV-2 Fonctions critères et lois complémentaires [29-30]

Il faut ajouter à ces équations les fonctions critères et les lois complémentaires régissant les variables internes. Ces variables internes sont les variables d'état que les auteurs de la loi de comportement utilisent pour décrire la transformation martensitique et qui sont :

- la déformation macroscopique ε et les déformations locales des deux phases, ε_A pour l'austénite et ε_M pour la martensite.
- la température T .
- des variables internes décrivant les phénomènes dissipatifs c'est-à-dire le taux de martensite z et la déformation de transformation locale au sein de la martensite ε_{tr} .

La fonction critère F_z^1 a pour expression :

$$F_z^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) \sigma^2 - C(T) + \sigma \cdot \varepsilon_{tr} - (G + b) \cdot z - a \cdot (1 - z) - \frac{2}{3} \cdot \varepsilon_{tr}^2 \cdot \left((\alpha - \beta) \cdot z + \frac{\beta}{2} \right) \quad (\text{IV.9})$$

La fonction critère F_z^2 s'écrit :

$$F_z^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) \sigma^2 + C(T) - \sigma \cdot \varepsilon_{tr} + (G - b) \cdot z - a \cdot (1 - z) + \frac{2}{3} \cdot \varepsilon_{tr}^2 \cdot \left((\alpha - \beta) \cdot z + \frac{\beta}{2} \right) \quad (\text{IV-10})$$

La fonction critère F_z^3 s'écrit quant à elle :

$$F_z^3 = \left\| s - \frac{2}{3}[\alpha \cdot z + \beta \cdot (1-z) \cdot \varepsilon_{tr}] - \frac{2 \cdot \mu}{3 \cdot z} \cdot \frac{\varepsilon_{tr}}{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \varepsilon_{tr}^2}} \right\|_{VM} - z \cdot Y \quad (IV-11)$$

Les lois complémentaires associées au changement de phase vérifient les propriétés suivantes :

- Si $F_z^1 < 0$ et $F_z^2 < 0$ aucun changement de phase ne se produit : $\dot{z} = 0$.

- Si $F_z^1 = 0$ (resp. $F_z^2 = 0$) (seuil de changement de phase direct (resp. inverse) atteint)

et $F_z^1 < 0$ (resp. $F_z^2 < 0$) (Décharge) alors $\dot{z} = 0$.

- Si $F_z^1 = 0$ (resp. $F_z^2 = 0$) (seuil de changement de phase direct (resp. inverse) atteint)

et $F_z^1 \geq 0$ ($F_z^2 \geq 0$) alors \dot{z} est donné par la condition de consistance $\dot{F}_z^1 = 0$ (resp. $\dot{F}_z^2 = 0$).

- Si l'évaluation de F_z^1 et de F_z^2 conduit à un incrément de z non nul, alors il faut

calculer l'incrément de déformation de transformation en résolvant $F_z^3 = 0$ avec la valeur

de z obtenue par résolution de $F_z^1 = 0$.

Pour mieux comprendre le fonctionnement du modèle, décrivons un cycle de chargement en pseudo élasticité.

Au début du chargement, le matériau est dans sa phase austénitique et a un comportement élastique. Le taux de martensite z est nul et la déformation de transformation est nulle aussi. Les contraintes se situent à l'intérieur du critère F_z^1

A partir d'une certaine valeur du chargement σ_{ms} le critère F_z^1 devient nul et le critère F_z^3 est atteint. En effet, à la température ou l'on se place, le chargement provoque simultanément le changement de phase et l'orientation de la martensite naissante. A partir de cette sollicitation, nous avons simultanément évolution du taux de martensite z et la déformation de transformation ε_{tr} devient égale à 1. Lorsque $z=1$ tout le matériau est dans sa phase martensitique, l'austénite est totalement transformée. Si la sollicitation continue d'augmenter la martensite orientée continue seule à se déformer.

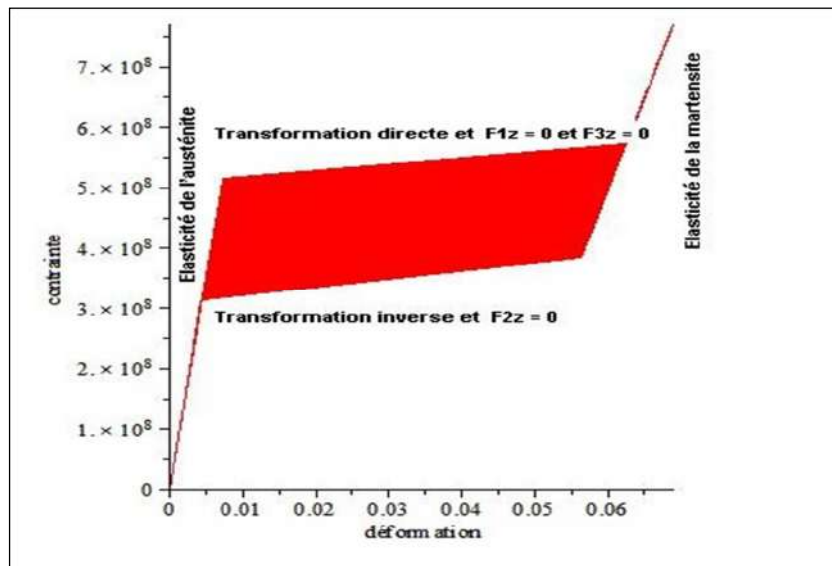


Figure IV-1 Représentation du déclenchement des fonctions Critères lors du cycle pseudo élastique

La surface en rouge représente l'énergie dissipée lors d'un cycle d'hystérésis.

La fonction critère de l'évolution du taux de martensite orientée se présente comme suit :

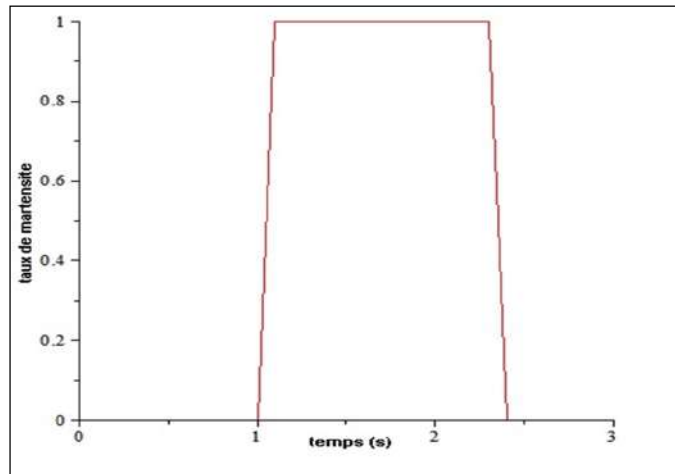


Figure IV-2 Evolution du taux de martensite

Le saut brusque de ce taux montre bien que la transformation martensitique est très rapide et donc que le changement de phase se fait, comme il a été précisé, à une vitesse qui avoisine celle du son dans le matériau.

L'ensemble de ces équations constitue un système d'équations non linéaire que l'on résout numériquement par la méthode de Newton-Raphson. Il faut noter que la contrainte et le taux global de martensite orientée z sont donnés, pour la contrainte par le type de sollicitation choisi et pour la variable z par les formules du chapitre III. Ce qui simplifie le schéma de calcul.

Conclusion générale

Les transformations de Laplace ont permis de résoudre le système d'équations différentielles raide et de contourner ainsi un formalisme mathématique et informatique très lourd. En effet, le recours aux transformations de Laplace a permis d'éviter la résolution numérique du système d'équations différentielles et la prise en compte de sa raideur. Il a aussi permis l'obtention de l'expression analytique des deux équations à coefficients variables représentant le taux de martensite réorientée et la température. Mais ce système est basé sur les probabilités de transition de phase et demeure un calcul probabiliste entaché d'erreurs. L'étude approfondie des configurations cristallographiques de l'austénite et des variantes de martensite peut, me semble-t-il, mener à une meilleure connaissance du passage de l'austénite à la martensite. Les recherches, à mon sens, devraient s'orienter dans cet axe et permettre la représentation tensorielle de ce passage d'une phase solide symétrique et régulière à une autre phase solide de moindre symétrie et moins régulière.

Bien sûr, des difficultés de tout ordre telles que la coexistence des deux phases dans le même temps, ne tarderont pas à faire leur apparition mais ne doivent pas décourager les chercheurs.

La détermination du tenseur d'ordre quatre des constantes élastiques ne peut se faire que si cette étape est franchie avec succès.

De plus, la théorie développée par Muller, Achenbach et Seelecke est basée sur l'existence de deux variantes jumelles (Twins) de martensite. Une perspective plus ambitieuse serait l'étude de l'alliage à mémoire de forme comportant plusieurs variantes de martensite. Les travaux de Toyohiko Aiki [33] en 2003 peuvent servir de base à cette nouvelle étude des AMF. En effet, l'auteur a introduit un nouveau concept d'opérateur d'hystérésis et a démontré l'existence et l'unicité, dans le cas monodimensionnel, d'une hystérésis pour un nombre quelconque de variante de l'alliage.

Références

- [1] Zongbin Li
Study on cristallographic features of Ni-Mn-Ga ferromagnetic shape memory Alloys Université de Lorraine 2011.
- [2] Duval Arnaud
Modélisation du comportement thermomécanique d'alliages à Mémoire de forme. Application au dimensionnement de microsystèmes et Extension en non local. 2009.
- [3] Qifu Li
Modelling and finite element analysis of smart materials.
These 2006 (Dr Stefan seelecke chair of advisory committee).
- [4] L. C. Brinson
One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1:207/234, 1990.
- [5] V. Brailovski, S. Prokoshkin, P. Terriault, and F. Trochu
Shape memory Alloys: Fundamentals, Modeling and Applications. Université du Québec, École de technologie supérieure, 2003.
- [6] Yves Chemisky
Modélisation du comportement macroscopique des alliages à mémoire de forme - Application aux matériaux composites, thèse Université Paul Verlaine de Metz, 2009.
- [7] Ashish Khandelwal and Vidyashankar Buravalla
Models for Shape memory Alloy Behavior: An overview of modeling approaches International Journal of Structural Changes in Solids – mechanics and applications, volume 1, number 1 december 2009, pp. 111-148.
- [8] X. Gao, M. Huang, et L. C. Brinson.
A multivariant micromechanical model for SMAs Part 1. Crystallographic issues. for single crystal model. International Journal of Plasticity, 16 (10-11) :1345–1369, 2000.
- [9] M. Huang, X. Gao, et L. C. Brinson.
A multivariant micromechanical model for SMAs Part 2. Polycrystal model. International Journal of Plasticity, 16(10-11) 1371–1390, 2000.
- [10] D. Entemeyer, E. Patoor, A. Eberhardt, et M. Berveiller
strain rate sensitivity in superelasticity.

[11][international journal of plasticity, 16(2000) 1269–1288.

[12]International Journal of Plasticity, 17, 2001.

[13]Q.P. Sun et Y.J. He.

A multistage continuum model of the grain-size dependence of the stress hysteresis in shape memory alloy polycrystals.

International Journal of Solids and Structures, 45(13) 3868–3896, 2008.

[14]Arnaud Duval

Modélisation du comportement thermomécanique d'alliages à mémoire de forme. Application au dimensionnement de microsystèmes et extension en non local, Thèse présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité Mécanique et Énergétique »,

Thèse de doctorat Université Henri Poincaré, Nancy 1, 2009.

[15]M. Panico et L. C. Brinson.

A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys.

Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 55 (11) 2491–2511, 2007.

[16]P. Popov et D. C. Lagoudas.

A 3-d constitutive model for shape memory alloys incorporating pseudo elasticity and detwinning of self-accommodated martensite. International Journal of Plasticity, 23(10-11). 1679–1720, 2007.

[17] B. Peultier, T. Ben Zineb, et E. Patoor.

A simplified micromechanical constitutive law adapted to the design of shape memory applications by finite element methods.

Materials Science and engineering : A, 481-482 :384–388, 2008.

[18]S. Seelecke and I. Müller.

Shape memory alloy actuators in smart structures: Modeling and simulation. Appl. Mech. Rev. 57(1), 2004, p 23-46.

[19]Achenbach and Müller 1982] M. Achenbach and I. Müller, "A model for shape memory", Journal de Physique, Colloque C4, ICOMAT-82 43 (1982), 163–167

[20] Dirk Helm.

Thermomechanics of martensitic phase transitions in shape memory alloys constitutive theories for small and large deformations.

Journal of mechanics of Materials and structures vol. 2, no. 1, 2007.

[21]Shibin Yang and Stefan Seelecke.

Modeling and Analysis of SMA-Based Adaptive Structures", Excerpt from the Proceedings of the COMSOL.

Conference, 2008 Boston, USA.

- [22] E. Hairer – G. Wanner
Solving ordinary differential equations II Stiff and differential algebraic problems Springer series in computational mathematics.
- [23] David Guibert
Analyse de méthodes de résolution parallèles d'EDO/EDA raides
Université Claude Bernard Lyon I 2009.
- [24] Nimesis Technology of shape memory alloys
- [25] K Chastaing.
Etude d'alliages à mémoire de forme base Ru pour applications hautes températures . Thèse de doctorat 2009.
- [26] Carma
- [27] J-J Meister, R-Gotthardt.
Observation par microscope électronique de la transformation martensitique
D'un alliage Cu-Zn. Thèse de doctorat 2014.
- [28] Jérémy Cochoy
Méthodes numériques Rock4 pour la résolution d'équations différentielles et étude de l'algèbre pre-Lie sous-jacente. 2011.
- [29] Claire Morin
Fatigue thermomécanique des matériaux à mémoire de forme
Thèse magistère 2008 (responsable de thèse Ziad Moumni) ENSTA Paristech.
- [30] Claire Morin
A comprehensive approach for fatigue analysis for shape memory alloys
Thèse de doctorat 2011 Ecole polytechnique Paris
- [31] Clément Dunand-châtellet
The self-organized criticality as an explanation of fatigue failure for shape
Memory alloys Thèse de doctorat 2012 Ecole polytechnique Paris.
- [32] Nicole Lewis
A thermomechanically coupled SMA actuator model for finite element.
simulations of adaptive structures. [2011].
- [33] Toyohiko Aiki
One dimensional shape memory alloy problems including a hysteresis.
operator [2003]