RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS LEDPA

THÈSE

Présentée en vue d'obtention du diplôme de doctorat
Option : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

Par

NADIA BENGOUGA

THÈME

HOMOGÉNÉISATION ET CORRECTEURS DE QUELQUES PROBLÈMES DE DIFFUSION DANS UN MILIEU FORTEMENT HÉTÉROGÈNE

Soutenue le : 11/05/2017

Devant le jury composé de :

M. Amar Youkana	Professeur	Université. Batna 2	Président
Mme. Fadila Bentalha	Professeur	Université. Batna 2	Rapporteur
M. Mohamed Zerguine	MCA	Université. Batna 2	Examinateur
M. Nasr-Eddine Hamri	Professeur	Université. Mila	Examinateur
Mme. Fatma Zohra Nouri	Professeur	Université. Annaba	Examinateur

Table des matières

Remerciements

Je remercie énormément Professeur Fadila Bentalha qui m'a initié à la recherche en mathématiques en dirigeant cette thèse. Ses compétences scientifiques et ses qualités humaines m'ont permis de surmonter les nombreuses difficultés liées à ce travail de recherche.

Je remercie vivement le Docteur Ali Sili de m'avoir proposé le sujet du troisième chapitre de cette thèse et m'a apporté l'aide nécessaire pour l'aboutissant des résultats.

Je remercie Professeur Amar Youkana pour avoir présidé le jury de soutenance de ma thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement les membres du jury de soutenance, Docteur Mohamed Zerguine, Professeur Nasr-Eddine Hamri, Professeur Fatma Zohra Nouri, pour avoir accepté d'être examinateurs de cette thèse.

Je tiens à remercier tout le personnel du département mathématique en particulier mes enseignants.

Un immense merci à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements durant toutes mes années d'étude.

Enfin, un grand merci à toute ma famille et à tous mes amis.

Notations

Les notations suivantes seront utilisées tout le long de cette thèse.

– On note $B(0,r)$ la boule de centre 0 et de rayon r.
– On note S_r la sphère de centre 0 et de rayon r

$$S_r := \partial B(0,r),$$

et

$$\fint_{S_r} .d\sigma := \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r} .d\sigma.$$

– $|D|$ désigne la mesure de D où D un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$ et

$$\fint_{D} .\, dx = \frac{1}{|D|}\int_{D} .\, dx.$$

– Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on note

  – $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω.

  – $\Omega^T := \Omega \times]0,T[$, tel que $T \in \mathbb{R}_+^*$.

  – χ_Ω désigne la fonction caractéristique de Ω.

– C désigne une constante strictement positive qui varie d'une ligne à une autre.

Espaces fonctionnels

$\mathcal{D}(\Omega)$	Ensemble des fonctions infiniment dérivables dont le support et le support de toute ses dérivées sont dans un même compact dans Ω.
$C_c(\Omega)$	Ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω.

Introduction

Pour pouvoir étudier les phénomènes physiques intervenant dans la nature, on a tout d'abord besoin d'un modèle permettant de déterminer les équations régissant ces phénomènes, et ensuite on a besoin de pouvoir calculer (numériquement) les solutions de ces équations. Or, il arrive parfois que la puissance de calcul dont on dispose ne soit pas suffisante, non pas en raison d'algorithmes de calcul peu élaborés mais en raison de la complexité intrinsèque du problème, par exemple lorsque le milieu dans lequel le phénomène physique est étudié présente lui-même une très grande complexité. C'est le cas notamment des matériaux composites.

Un des buts de la théorie de l'homogénéisation est d'obtenir une approximation homogène (simple) d'un milieu décrit par des propriétés microscopiques supposées hétérogènes (composites). Les champs d'application sont variés : propriétés des matériaux composites, mécanique des fluides, la fibre optique,...

Du point de vue mathématique, la modélisation de phénomènes intervenant dans ces matériaux composites aboutit à des équations aux dérivées partielles dont les coefficients sont fortement oscillants, ces oscillations génèrent des problèmes dans la résolution numérique de ces équations. En général les coefficients oscillants du problème sont indexés par un très petits paramètres ε représentent la taille liée à la non-homogénéité du milieu. Les méthodes d'homogénéisation permettent justement d'obtenir une bonne approximation facilement calculable de la solution de ce type de problème. Homogénéiser un problème à coefficients oscillants consiste en la recherche d'une équation, dite homogénéisée ou macroscopique à coefficients non oscillants (constants) et a lieu dans un domaine homogène, et donc beaucoup plus simple à traiter numériquement. Ce passage d'un milieu non-homogène à un milieu homogène équivalent revient techniquement à un passage à la limite lorsque ε tend vers zero, de sorte que la suite de solutions u^ε du problème de départ converge vers u la solution du problème homogénéisé.

Lorsqu'on étudie la convergence de la suite de solutions u^ε du problème de départ, on ne dispose que d'une convergence faible et donc la fonction u^ε n'est pas suffisamment proche de la fonction limite u. L'étude de correcteur permet justement de corrigé cette première approche. Trouver le correcteur pour u^ε c'est-à-dire le terme supplémentaire que l'on additionne à u^ε pour obtenir une convergence forte au lieu de faible vers u. Lorsqu'on dispose de bonnes estimations, on peut remplacer le problème de départ par le problème homogénéisée dont la solution est plus simple à calculer.

Si le milieu non-homogène a une structure périodique, on connaît une démarche heuristique, nommée la méthode des échelles multiple (A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolau [7]), elle nous permet de construire, d'un point de vue formel, l'équation homogénéisée ainsi que les coefficients homogénéisées. Cette démarche doit être suivie d'une démonstration de la convergence de la suite de solutions vers la solution macroscopique. Pour démontrer cette convergence, il existe trois méthodes principales d'homogénéisation périodique déterministes, la méthode de l'énergie de Tartar [26], la méthode de la convergence à double échelle (G. Nguetseng [22], G. Allaire [2]) et la méthode de l'éclatement périodique de D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso ([20]).

Si le milieu non-homogène n'a pas une structure périodique, alors il existe des méthodes différentes ($\Gamma-$convergence, $G-$convergence, $H-$convergence) qui permettent la démonstration de la convergence du processus d'homogénéisation (S. Spagnolo [25], L. Tartar [27]).

L'objective principal de cette thèse est l'étude du comportement asymptotique, homogénéisation et correcteur, pour quelques problèmes d'évolution dans des milieux hétérogènes où les problèmes limites ont une structure mathématique différente de la structure des problèmes à homogénéisées de départ.

Les progrès les plus récents en théorie de l'homogénéisation concernent les problèmes où le problème limite a une structure mathématique différente de celle d'origine sont Murat et Cioranescu [17] dans le cas des domaines perforés avec des petits trous (trous de taille r_ε tel que $0 < r_\varepsilon << \varepsilon$) , ils ont montré l'existence d'un terme supplémentaire appelé "terme étrange" dans le problème limite, ils ont été suivis plus tard par de nombreux auteurs, par exemple Allaire [1], Zuazua et al. [18] et Casado-Diaz [16]. Quand les petits trous sont remplis par un matériau différent qui a un comportement très contrasté par rapport à la phase ambiante (ce qui est de l'intérêt des chapitres 1 et 2 de cette thèse), ils a été montré par Bentalha et al. [10], [8], et Bellieud [5], que le problème limite a une structure complètement différente avec l'apparition de termes non locaux. La notion d'effets non locaux a été développé dans le cas des fibres par Bellieud et Bouchitté [3], Bellieud et Gruais [4] et Briane et Tchou [15].

Cette thèse est formé de trois chapitres.

Le premier chapitre de la thèse est consacrée à l'étude du problème de correcteur associé à l'homogénéisation du problème de diffusion suivant :

$$\left\{\begin{array}{rll} \rho^\varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - div\left(k^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\right) = f^\varepsilon & \text{dans} & \Omega^T, \\ \left[u^\varepsilon\right]_\varepsilon = 0 & \text{sur} & \partial D_\varepsilon \times \left]0,T\right[, \\ \left[k^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\right]_\varepsilon n = 0 & \text{sur} & \partial D_\varepsilon \times \left]0,T\right[, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \times \left]0,T\right[, \\ u^\varepsilon\left(0\right) = u_0^\varepsilon & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{0.0.1}$$

où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert borné Lipschitzien tel que $|\Omega| = 1$, $[.]_\varepsilon$ est le saut à l'interface ∂D_ε, n est le vecteur normal extérieur à ∂D_ε , $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^T)$, $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$,

$$\rho^\varepsilon(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ a_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \end{array}\right. \qquad k^\varepsilon(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ b_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{0.0.2}$$

$a_\varepsilon > 0$ et $b_\varepsilon > 0$.

L'ensemble $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{D_\varepsilon}$ est le domaine ambiant connexe, D_ε est la suspension ε-périodique de petites particules sphériques de rayon r_ε telle que $0 < r_\varepsilon << \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon = 0.$$

Pour compenser cette hypothèse restrictive, qui signifie évidemment que le volume de la suspension tends vers zéro, on impose que sa masse totale reste de l'ordre de l'unité, c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon |D_\varepsilon| = a > 0.$$

Dans la suite, nous supposons les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} &b_\varepsilon \geq b_0 > 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ &f^\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

et

$$\begin{aligned} &u_0^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ &\fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C, \\ &\frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ avec } v_0 \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{0.0.4}$$

L'homogénéisation de ce problème a été étudié par Bentalha et al. [10]. La méthode utilisée est la " **méthode de la zone de contrôle** " (voir [10], [8], [9] [11]), qui est une adaptation de la méthode de l'énergie aux sous-structures très fines, elle consiste à introduire dans la formulation variationnelle du problème considérée des fonctions test adéquates pour permettre le passage à la limite.

Sous les hypothèses précédentes, trois cas se distinguent selon les valeurs de coefficient de raréfaction suivant

$$\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}.$$

Si $\gamma > 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon = +\infty$, la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifie

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right), \\ &\frac{1}{|D_\varepsilon|} u^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v \quad \text{faiblement dans } L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right), \end{aligned}$$

où la limite (u, v) est la solution unique du système couplé

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + 4\pi\gamma (u - v) = f \quad & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ a\frac{\partial v}{\partial t} + 4\pi\gamma (v - u) = 0 \quad & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ u = 0 \quad & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(0) = u_0,\ v(0) = v_0 \quad & \text{dans} \quad \Omega. \end{aligned} \right. \tag{0.0.5}$$

Dans les deux autres cas, lorsque $\gamma = +\infty$ ou $\gamma = 0$, et seulement avec la condition $(0.0.3)^1$ sur b_ε, nous avons aussi

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right).$$

Les problèmes limites sont beaucoup plus simples. Pour $\gamma = +\infty$, le problème homogénéisé est

$$\left\{ \begin{aligned} (1+a)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ u = 0 \quad & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(0) = \frac{1}{(1+a)} u_0 + \frac{a}{(1+a)} v_0 \quad & \text{dans} \quad \Omega, \end{aligned} \right.$$

tandis que pour $\gamma = 0$, c'est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,, \\ u(0) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous montrons des résultats de correcteur pour le problème (0.0.1). Nous devons faire des hypothèses plus restrictives sur les données initiales, en effet, on suppose que (0.0.3) est vérifiée mais que de plus,

$$u_0^\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad \text{et} \int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C, \tag{0.0.6}$$

$$u_0^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{0.0.7}$$

$$\int_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \longrightarrow |v_0|_\Omega^2, \; v_0 \in H_0^1(\Omega), \tag{0.0.8}$$

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{0.0.9}$$

Sous ces hypothèses et par utilisation des outils de la méthode de la zone de contrôle, trois cas doivent être traités séparément, selon les valeurs de γ.

Si $\gamma > 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} b_\varepsilon = +\infty$, les résultats de correcteur sont

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } C^0\left([0, T]\,; L^2(\Omega)\right),$$

et

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u, v) + \mathcal{R}_\varepsilon \text{ avec} \\ \mathcal{R}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \end{cases}$$

où u^ε et (u, v) sont respectivement les solutions de (0.0.1) et (0.0.5), et

$$\Phi_\varepsilon(u, v) = (1 - w_{R_\varepsilon})u + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(v), \tag{0.0.10}$$

avec w_{R_ε} et G_{r_ε} définies respectivement, par (1.2.14) et (1.2.22).

Dans les deux autres cas, nous obtenons des résultats similaires de correcteur, avec $v = u$ lorsque $\gamma = +\infty$ respectivement, $v = v_0$ lorsque $\gamma = 0$.

Une des difficultés principales de ce travail est que le problème limite donne deux concentrations u et v, ce qui rend l'étude d'homogénéisation et correcteur plus compliqué car habituellement les problèmes d'homogénéisations classiques (voir [18], [17], [12]) donnent une seule concentration dans leurs problèmes limites.

Dans le deuxième chapitre, on généralise l'étude faite dans le chapitre précédent au cas d'un ouvert borné Lipschitzien Ω de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ tel que $|\Omega| = 1$ et de suspension de très petites particules de forme générale réparties dans un $\varepsilon-$réseau périodique. Nous montrons que les résultats de correcteur trouvés dans le chapitre 1 c'est à dire pour la dimension 3 et pour les particules sphériques, demeurent vrais. Les résultats obtenus ici complètent l'étude de Bentalha et al. [11] sur le comportement asymptotique de ce problème.

Le troisième et dernier chapitre de la thèse est consacrée au cas où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et où A est une partie ouverte strictement contenue dans Ω.

Le sujet de ce chapitre a été proposé et suive par le Dr Ali Sili de l'université de Toulon, France.

On étudie le comportement asymptotique de la solution u_ε d'équation hyperbolique-parabolique suivante :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \delta_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\,(\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[\,, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_\varepsilon^1(x) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{0.0.11}$$

où $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω, et

$$\delta_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(x) = \chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}, \tag{0.0.12}$$

χ_A $\big($resp $\chi_{\Omega\setminus A}\big)$ la fonction caractéristique de A (resp $\Omega \setminus A$) .

Du point de vue du correcteur, le cas d'une équation hyperbolique ($\delta_\varepsilon = 0$) a été étudie par Mourad Sfaxi (voir [23]). Sfaxi a montré que u_ε se décompose en

$$u_\varepsilon = \check{u}_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon, \tag{0.0.13}$$

où $\check{u}_\varepsilon$ est la solution du même équation hyperbolique à données initiales bien préparées de sorte que la suite $\check{u}_\varepsilon$ vérifie les mêmes convergences que la suite u_ε mais fortement au lieu de faiblement.

Ainsi la suite $\hat{u}_\varepsilon$ par définition converge faiblement vers zéro. Cela signifie que le terme $\hat{u}_\varepsilon$ est une perturbation, lorsque les données initiales u_ε^0 et u_ε^1 ne convergent que faiblement dans $L^2(\Omega)$, mais l'énergie associée à $\hat{u}_\varepsilon$ vérifie

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx \rightharpoonup \frac{1}{2}H \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{0.0.14}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \frac{1}{2}H \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{0.0.15}$$

où $H \in \mathbb{R}$ est tel que $H > 0$.

Les convergences (0.0.14) et (0.0.15) signifient que $\hat{u}_\varepsilon$ vérifie le principe d'équipartition de l'énergie (voir [12]).

On se pose ici la question de savoir si l'équipartition de l'énergie qui devient dans notre cas

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx \rightharpoonup \frac{1}{3}H \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{0.0.16}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \frac{1}{3}H \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{0.0.17}$$

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \rightharpoonup \frac{1}{3}H \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{0.0.18}$$

reste vraie.

On répond à la question par la négation et on montre que contrairement au cas hyperbolique la perturbation $\hat{u}_\varepsilon$ ne vérifie pas le principe d'équipartition de l'énergie.

Description de la thèse

Cette thèse est composé de trois chapitres et quatre annexes.

Le premier chapitre est consacrée à l'étude du problème de correcteur associé à l'homogénéisation du problème de diffusion posée dans une structure binaire formée par une phase connectée ambiante entourant une suspension de très petites sphères réparties dans un réseau $\varepsilon-$périodique. La suspension a une masse totale de l'ordre de l'unité et un volume global tendant vers zéro quand $\varepsilon \to 0$.

Le plan du chapitre 1 est le suivant :

-La section 1.1 comporte le rappel de quelques outils d'analyse fonctionnelle qui sont en relation avec le problème étudié.

-La section 1.2 est consacrée aux notations et à la position du problème. D'un point de vue plus précis, on commence par la description du problème (sous-section 1.2.1 et sous-section 1.2.2). Dans la sous-section 1.2.3 on introduit les outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle nécessaires pour prouver les résultats d'homogénéisation et de correcteur. L'argument est basé sur l'introduction d'opérateur G_r définis par (1.2.22) qui ont un effet localisant, et de la fonction w_{R_ε} définie à partir de la solution fondamentale du Laplacien avec $r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon$. Dans la sous-section 1.2.4 nous allons rappeler quelques résultats obtenus dans [10] sur l'homogénéisation de notre problème.

-La section 1.3 est consacrée à l'étude de correcteur pour une classe de données initiales, trois cas doivent être traités séparément, selon les valeurs de γ, la sous-section 1.3.1 s'intéresse au premier cas $\gamma > 0$. Dans la sous-section 1.3.2 et la sous-section 1.3.3 nous prouvons respectivement, les résultats de correcteurs pour les cas $\gamma = +\infty$ et $\gamma = 0$.

Dans le deuxième chapitre, on généralise l'étude faite dans le chapitre précédent au cas d'un ouvert borné Lipschitzien Ω de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ tel que $|\Omega| = 1$ et de suspension de très petites particules de forme générale réparties dans un $\varepsilon-$réseau périodique.

On détaille le plan du chapitre 2.

-La section 2.1 est consacrée aux notations et à la position du problème, comme dans le chapitre 1 on commence par la description du problème (sous-section 2.1.1). Dans la sous-section 2.1.2 on introduit les outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle similaires à ceux du chapitre 1, nécessaires pour prouver les résultats d'homogénéisation et de correcteur. A savoir les opérateurs localisants F_ε, G_ε définis par (2.1.19) et (2.1.21) et la fonction v_ε définie par (2.1.14) et leurs propriétés. Dans la sous-section 2.1.3 nous allons rappeler quelques résultats obtenus dans [11] sur l'homogénéisation de notre problème.

-La section 2.2 est consacrée à l'énoncé et à la démonstration des résultats de correcteur pour les trois cas selon les valeurs de γ défini par (2.1.13), la sous-section 2.2.1 s'intéresse au premier cas $\gamma > 0$. Dans la sous-section 2.2.2 et la sous-section 2.2.3 nous prouvons respectivement, les résultats de correcteurs pour les cas $\gamma = +\infty$ et $\gamma = 0$.

Dans le dernier chapitre de la thèse, on s'intéresse à l'étude de l'homogénéisation et correcteur pour une équation hyperbolique-parabolique dégénérée posée dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$. L'équation dégénère au sens que le coefficient de conductivité dans une partie ouverte A strictement contenue dans Ω est égale à 1, alors qu'à l'extérieur de A il est de l'ordre de ε^2.

Le plan du chapitre 3 est le suivant :

-La section 3.1 est consacrée aux notations et à la position du problème.

-La section 3.2 est consacrée à l'énoncé des résultats d'homogénéisation.

-La section 3.3 est consacrée à l'énoncé des résultats de correcteur.

-Dans la section 3.4, on donne les démonstrations des résultats de la section 3.2 et de la section 3.3.

On achève cette thèse par les quatre annexes.

-Dans l'annexe A on donne les démonstrations des outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle du chapitre 1.

-Dans l'annexe B,on établit un résultat de régularité.

-Dans l'annexe C, on montre quelques résultats d'homogénéisations utilisées pour la démonstration des résultats de correcteur du chapitre 1 et du chapitre 2.

-Enfin, dans l'annexe D, on montre l'existence et l'unicité du problème (3.1.5) pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé.

Chapitre 1

Correcteur pour le processus de diffusion dans une structure binaire raréfiée

Résumé

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude du problème de correcteur associé à l'homogénéisation d'une équation parabolique posée dans une structure binaire formée par une phase connexe ambiante entourant une suspension de très petites sphères réparties dans un réseau $\varepsilon-$périodique. La suspension a une masse totale de l'ordre de l'unité et un volume global tendant vers zéro quand $\varepsilon \to 0$. Les résultats obtenus ici complètent l'étude de Bentalha et al. [10] sur le comportement asymptotique de ce problème.

1.1 Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques outils d'analyse fonctionnelle qui sont en relation avec le problème étudié.

Proposition 1.1.1 ([19]). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $u \in L^2\left(0, T; H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap C^0\left(\left[0, T\right]; L^2\left(\Omega\right)\right)$. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $\Phi \in C^\infty([0, T]; \mathcal{D}(\Omega))$, tel que*

$$\begin{cases} i) \|u - \Phi\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \leq \delta, \\ ii) \|\nabla u - \nabla \Phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \delta, \end{cases}$$

où $C^\infty([0, T]; \mathcal{D}(\Omega))$ est l'espace des fonctions u mesurables sur $\Omega \times [0, T]$ telles que $u(., t) \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$, et l'application $t \in [0, T] \mapsto u(., t) \in \mathcal{D}(\Omega)$ est indéfiniment différentiable.

Théorème 1.1.1 ([13]). *[Théorème d'Ascoli-Arzela]*

Soit K un espace métrique compact et soit H un sous-ensemble borné de $C(K)$.

On suppose que H est uniformément équicontinu i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in H.$$

Alors H est relativement compact dans $C(K)$.

Résultat de compacité

Soient X et Y deux espaces de Banach réflexifs tel que $X \subset Y$ avec injection continue, compacte et dense.

Proposition 1.1.2 ([18]). *On suppose que*

$$g^\varepsilon \rightharpoonup g \quad \textit{dans } L^1(0,T;X),$$

$$\frac{\partial g^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial g}{\partial t} \quad \textit{dans } L^1(0,T;Y),$$

alors

$$g^\varepsilon \longrightarrow g \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T];Y).$$

1.2 Position du problème et notations

1.2.1 Le processus de diffusion

Soient $T > 0$, ε un réel positif qui prend ses valeurs dans une suite de réels qui tend vers zéro, et Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^3$ tel que $|\Omega| = 1$. On suppose que Ω est occupé par un mélange de deux matériaux différents, l'un formant la phase ambiante connexe et l'autre étant concentré dans une suspension εY-périodique de petites particules sphériques, avec

$$Y := \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)^3, \tag{1.2.1}$$

la cellule de référence.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on note

$$Y_\varepsilon^k := \varepsilon k + \varepsilon Y,\ k \in \mathbb{Z}^3, \tag{1.2.2}$$

$$\Omega_{Y_\varepsilon} := \text{intérieur} \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} \overline{Y_\varepsilon^k},\ \text{où } Z_\varepsilon := \left\{k \in \mathbb{Z}^3,\ Y_\varepsilon^k \subset \Omega\right\}. \tag{1.2.3}$$

La suspension est définie par la réunion suivante

$$D_\varepsilon := \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} B(\varepsilon k, r_\varepsilon), \tag{1.2.4}$$

où $0 < r_\varepsilon << \varepsilon$ et $B(\varepsilon k, r_\varepsilon)$ est la boule de rayon r_ε et de centre εk, $k \in Z_\varepsilon$.

L'hypothèse $0 < r_\varepsilon << \varepsilon$, qui veut dire

$$\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \longrightarrow 0, \tag{1.2.5}$$

entraîne

$$|D_\varepsilon| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{1.2.6}$$

Le domaine Ω_ε est donné par

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{D_\varepsilon}. \tag{1.2.7}$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - div\left(k^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\right) = f^\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ \left[u^\varepsilon\right]_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times \left]0, T\right[, \\ \left[k^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\right]_\varepsilon n = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times \left]0, T\right[, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

où $[.]_\varepsilon$ est le saut à l'interface ∂D_ε, n est le vecteur normal extérieur à ∂D_ε, $f^\varepsilon \in L^2\left(\Omega^T\right)$, $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ et

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ a_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

$$k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ b_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.2.10}$$

$a_\varepsilon > 0$ et $b_\varepsilon > 0$ sont respectivement la densité de la masse relative et la diffusivité de la suspension.

1.2.2 Formulation variationnelle du problème

La formulation variationnelle du problème (1.2.8) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \text{ tel que} \\ \dfrac{d}{dt}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon, w)_\Omega + (k^\varepsilon \nabla u^\varepsilon, \nabla w)_\Omega = (f^\varepsilon, w)_\Omega \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.2.11}$$

Théorème 1.2.1 ([21]). *Pour tout $\varepsilon > 0$, sous les hypothèses et les notations précédentes, le problème* (1.2.11) *admet une unique solution. De plus $u^\varepsilon \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ et $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$.*

1.2.3 Outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle

Dans cette sous-section, on introduit les outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle et dont les démonstrations sont données dans l'annexe A.

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{R} := \left\{ (R_\varepsilon)_\varepsilon,\ r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon \right\},$$

c'est-à-dire $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ sii

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} = 0. \tag{1.2.12}$$

Cet ensemble est non vide, car il contient la suite suivante

$$(R_\varepsilon)_\varepsilon = \left(\sqrt{r_\varepsilon \varepsilon}\right)_\varepsilon .$$

On désigne le domaine compris entre les sphères de rayon a et b par

$$C(a,b) := \left\{x \in \mathbb{R}^3, a < |x| < b\right\},$$

et de façon correspondante

$$C_\varepsilon^k(a,b) := \varepsilon k + C(a,b).$$

Pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$, on définit la zone de contrôle par

$$C_\varepsilon := \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} C_\varepsilon^k(r_\varepsilon, R_\varepsilon).$$

Nous notons dans tout ce qui suit

$$\gamma_\varepsilon := \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} \quad \text{et} \quad \gamma := \lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon. \tag{1.2.13}$$

γ est appelée coefficient de raréfaction.

Définition 1.2.1. Pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$, on définit $w_{R_\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ par

$$w_{R_\varepsilon}(x) := \begin{cases} 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon, \\ W_{R_\varepsilon}(x - \varepsilon k) & \text{dans} \quad C_\varepsilon^k,\ \forall k \in Z_\varepsilon, \\ 1 & \text{dans} \quad D_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.2.14}$$

tel que

$$W_{R_\varepsilon}(y) = \frac{r_\varepsilon}{(R_\varepsilon - r_\varepsilon)} \left(\frac{R_\varepsilon}{|y|} - 1\right) \quad \text{pour } y \in C(r_\varepsilon, R_\varepsilon), \tag{1.2.15}$$

est un élément de $H^1(C(r_\varepsilon, R_\varepsilon))$, de plus est la solution fondamentale du Laplacien suivant

$$\begin{cases} \Delta W_{R_\varepsilon} = 0 & \text{dans} \quad C(r_\varepsilon, R_\varepsilon), \\ W_{R_\varepsilon} = 1 & \text{pour} \quad |y| = r_\varepsilon, \\ W_{R_\varepsilon} = 0 & \text{pour} \quad |y| = R_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.2.16}$$

et est une fonction radiale.

w_{R_ε} a les propriétés suivantes données par la proposition suivante.

Proposition 1.2.1 ([10]). *Pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$, on a*

$$0 \leq w_{R_\varepsilon} \leq 1, \tag{1.2.17}$$

$$|\nabla w_{R_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)} \leq C\gamma_\varepsilon^{1/2}, \tag{1.2.18}$$

$$w_{R_\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.2.19}$$

Les deux lemmes suivants sont une adaptation des lemmes A.3 et A.4 [3].

Lemme 1.2.2 ([10]). *Pour tout $0 < r_1 < r_2$ et $u \in H^1(C(r_1, r_2))$, on a*

$$|\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} \geq \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left| \fint_{S_{r_2}} u d\sigma - \fint_{S_{r_1}} u d\sigma \right|^2. \tag{1.2.20}$$

Lemme 1.2.3 ([10]). *Il existe une constante positive $C > 0$ telle que $\forall (R, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1)$, $\forall u \in H^1(B(0,R))$,*

$$\int_{B(0,R)} \left| u - \fint_{S_{\alpha R}} u d\sigma \right|^2 dx \leq C \frac{R^2}{\alpha} |\nabla u|^2_{B(0,R)}. \quad (1.2.21)$$

On introduit les opérateurs localisants donnés par la définition suivante.

Définition 1.2.2. Pour tout $r > 0$, on définit la fonction constante par morceaux $G_r : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ par

$$G_r(\theta)(x) := \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S_r^k} \theta(y) \, d\sigma_y \right) 1_{Y_\varepsilon^k}(x), \quad (1.2.22)$$

où $S_r^k = \partial B(\varepsilon k, r)$.

Les opérateurs G_{r_ε} et G_{R_ε} ont les propriétés données par les deux lemmes suivants.

Lemme 1.2.4 ([10]). *Si $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$, alors pour tout $\theta \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$|\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} \leq C \left(\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \right)^{1/2} |\nabla \theta|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.2.23)$$

$$|\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|_{L^2(D_\varepsilon)} \leq C r_\varepsilon |\nabla \theta|_{L^2(D_\varepsilon)}, \quad (1.2.24)$$

$$|G_{R_\varepsilon}(\theta) - G_{r_\varepsilon}(\theta)|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon} \right)^{1/2} |\nabla \theta|_{L^2(C_\varepsilon)}. \quad (1.2.25)$$

De plus ,

$$|G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx = \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx, \quad (1.2.26)$$

$$|G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 dx = \fint_{D_\varepsilon} |G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 dx. \quad (1.2.27)$$

Lemme 1.2.5. *Si $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$, alors pour tout $\theta \in L^\infty(0,T; C^1(\overline{\Omega}))$, on a*

$$|G_{r_\varepsilon}(\theta) - \theta|_{L^\infty(\Omega^T)} \longrightarrow 0, \quad (1.2.28)$$

$$|G_{r_\varepsilon}(\theta) - \theta|_{L^\infty(C_\varepsilon^T \cup D_\varepsilon^T)} \leq 2R_\varepsilon |\nabla \theta|_{L^\infty(\Omega^T)}. \quad (1.2.29)$$

On introduit l'opérateur de moyennisation donné par la définition qui suit.

Définition 1.2.3. Soit l'opérateur $M_{D_\varepsilon} : C_c(\Omega) \to L^2(\Omega)$ défini par

$$M_{D_\varepsilon}(\varphi)(x) := \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{Y_\varepsilon^k} \varphi(y) \, dy \right) 1_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)}(x). \quad (1.2.30)$$

Lemme 1.2.6. *Pour tout $\varphi \in C_c(\Omega)$, on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx = 0. \quad (1.2.31)$$

Proposition 1.2.2 ([10]). *Pour tout $\theta \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, on a*

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dx dt \leq C \max(1, \frac{1}{\gamma_\varepsilon}) |\nabla \theta|^2_{L^2(\Omega^T)}. \quad (1.2.32)$$

1.2.4 Résultats d'homogénéisation

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler quelques résultats obtenus dans [10] sur l'homogénéisation du problème (1.2.8), plus précisément sur le comportement de u^ε la suite de solutions du problème (1.2.8), lorsque ε tend vers 0. Considérons les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon |D_\varepsilon| = a > 0, \\ \\ b_\varepsilon \geq b_0 > 0, \ \forall \varepsilon > 0, \\ \\ f^\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \end{cases} \tag{1.2.33}$$

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ \\ \displaystyle ⨍_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C, \\ \\ \dfrac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ avec } v_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{1.2.34}$$

Proposition 1.2.3 ([10]). *Sous les hypothèses* (1.2.33) *et* (1.2.34)*, on a*

$$u^\varepsilon \textit{ bornée dans } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right). \tag{1.2.35}$$

De plus, il existe $C > 0$, indépendante de ε, telle que

$$⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx \leq C \quad \textit{p.p. dans } [0, T]. \tag{1.2.36}$$

Les résultats d'homogénéisation dépendent de la valeur γ, on distingue les trois cas suivants :

- Les particules ont la taille critique $r_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, correspondant à $\gamma \in]0, +\infty[$.
- Les particules sont plus grandes que la taille critique $\varepsilon^3 << r_\varepsilon << \varepsilon$, correspondant à $\gamma = +\infty$.
- Les particules sont plus petites que la taille critique $r_\varepsilon << \varepsilon^3$, correspondant à $\gamma = 0$.

Théorème 1.2.7 ([10]). *Sous les hypothèses* (1.2.33)-(1.2.34)*, et si $\gamma \in]0, +\infty[$ et $b_\varepsilon \to +\infty$, la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de solutions de* (1.2.8) *vérifie*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textit{dans } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \\ u^\varepsilon &\rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{1.2.37}$$

$$\begin{aligned} & G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) \rightharpoonup v \quad \textit{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \\ & \frac{1}{|D_\varepsilon|} u^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v \quad \textit{dans } L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

$$G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon) \longrightarrow u \quad dans\ L^2\left(\Omega^T\right), \tag{1.2.39}$$

où la limite (u, v) est l'unique solution du problème limite suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + 4\pi\gamma\,(u - v) = f & dans\ \ \Omega^T, \\ a\dfrac{\partial v}{\partial t} + 4\pi\gamma\,(v - u) = 0 & dans\ \ \Omega^T, \\ u = 0 & sur\ \ \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ u\,(0) = u_0,\ v(0) = v_0 & dans\ \ \Omega. \end{cases} \tag{1.2.40}$$

De plus, $(u, v) \in \left(C^0\left([0, T]\,; L^2\,(\Omega)\right)\right)^2$.

Théorème 1.2.8 ([10]). *Sous les hypothèses* (1.2.33)-(1.2.34) *et si* $\gamma = +\infty$ *la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *de solutions de* (1.2.8) *vérifie*

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad dans\ L^\infty\left(0, T; L^2\,(\Omega)\right), \\ &u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad dans\ L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{1.2.41}$$

$$\begin{aligned} &G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) \rightarrow u \quad dans\ L^2\left(\Omega^T\right), \\ &\frac{1}{|D_\varepsilon|}u^\varepsilon\chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup u \quad dans\ L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \end{aligned} \tag{1.2.42}$$

$$G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon) \longrightarrow u \quad dans\ L^2\left(\Omega^T\right), \tag{1.2.43}$$

où la limite u est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} (1 + a)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & dans\ \ \Omega^T, \\ u = 0 & sur\ \ \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ u\,(0) = \dfrac{1}{(1 + a)}u_0 + \dfrac{a}{(1 + a)}v_0 & dans\ \ \Omega. \end{cases} \tag{1.2.44}$$

De plus, $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

Théorème 1.2.9 ([10]). *Sous les hypothèses* (1.2.33)-(1.2.34) *et si* $\gamma = 0$ *la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *de solutions de* (1.2.8) *vérifie*

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad dans\ L^\infty\left(0, T; L^2\,(\Omega)\right), \\ &u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad dans\ L^2\left(0, T; H_0^1\,(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|}u^\varepsilon\chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad dans\ \mathcal{D}'\,(\Omega)\ \ p.p.\quad t\ dans\ \ [0, T], \tag{1.2.46}$$

où la limite u est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & dans\ \ \Omega^T, \\ u = 0 & sur\ \ \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ u\,(0) = u_0 & dans\ \ \Omega. \end{cases} \tag{1.2.47}$$

De plus, $u \in C^0\left([0, T]\,; L^2\,(\Omega)\right)$.

1.3 Étude de correcteur pour une classe de données initiales

Dans cette section, nous montrons les résultats de correcteur pour le problème (1.2.8) avec une suite de données initiales u_0^ε vérifiant les hypothèses suivantes

$$u_0^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C, \tag{1.3.1}$$

$$u_0^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{1.3.2}$$

$$\fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \longrightarrow |v_0|_\Omega^2, \tag{1.3.3}$$

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \ v_0 \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3.4}$$

La proposition qui suit et qui est prouvée à la fin de la sous-section qui suit, montre l'existence d'une suite de données initiales u_0^ε vérifiant les hypothèses (1.3.1)-(1.3.4) pour (u_0, v_0) plus lisse que $(L^2(\Omega))^2$.

Pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ et $(\varphi, \psi) \in (H^1(\Omega))^2$ considérons la fonction test suivante

$$\Phi_\varepsilon(\varphi, \psi) := (1 - w_{R_\varepsilon})\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi). \tag{1.3.5}$$

Proposition 1.3.1.

1. *Pour* $\gamma \in [0, +\infty[$ *et* $(u_0, v_0) \in (L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)) \times C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$*, la suite* $u_0^\varepsilon := \Phi_\varepsilon(u_0, v_0)$ *vérifie les hypothèses* (1.3.1)-(1.3.4) .
2. *Pour* $\gamma = +\infty$ *et* $u_0 \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *et* $v_0 := u_0$*, la suite* $u_0^\varepsilon := \Phi_\varepsilon(u_0, u_0)$ *vérifie les hypothèses* (1.3.1)-(1.3.4).

Remarque 1. Notons que les hypothèses (1.3.1)-(1.3.4) entraînent (1.2.34).

1.3.1 Correcteur pour le cas $r_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right)$

Dans cette sous-section, nous étudions le problème de correcteur du problème (1.2.8) dans le cas

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = \gamma \in]0, +\infty[, \tag{1.3.6}$$

et sous la condition

$$b_\varepsilon \to +\infty. \tag{1.3.7}$$

Le résultat principal du correcteur est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Sous les hypothèses* (1.3.6)*,* (1.3.7)*,* (1.2.33) *et* (1.3.1)-(1.3.4)*, la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ *vérifie*

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0, T]; L^2(\Omega)\right), \tag{1.3.8}$$

et

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u, v) + \mathcal{R}_\varepsilon, \ \textit{avec} \\ \mathcal{R}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \end{cases} \tag{1.3.9}$$

où (u, v) *est l'unique solution de* (1.2.40).

Avant de prouver le Théorème 1.3.1 nous aurons besoin des résultats techniques suivants et dont la preuve est donnée à la fin de cette sous-section.

Proposition 1.3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1 on a*

$$\sqrt{a_\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\chi_{D_\varepsilon} \quad \textit{bornée dans } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right), \tag{1.3.10}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \textit{dans } L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right). \tag{1.3.11}$$

Proposition 1.3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1 on a*

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow E(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.12}$$

où

$$E_\varepsilon(t) := \frac{1}{2}(|u^\varepsilon(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon |u^\varepsilon(t)|^2_{D\varepsilon}) + b_\varepsilon \int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} ds + \int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} ds, \tag{1.3.13}$$

$$E(t) := \frac{1}{2}(|u(t)|^2_\Omega + a|v(t)|^2_\Omega) + 4\pi\gamma \int_0^t |u-v|^2_\Omega ds + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds, \tag{1.3.14}$$

sont respectivement les énergies associées aux problèmes (1.2.8) *et* (1.2.40).

Proposition 1.3.4. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1 et pour tout* $(\varphi,\psi) \in (C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)))^2$ *on a*

$$e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \to e(\varphi,\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.15}$$

où Φ_ε *est donné par* (1.3.5) *et*

$$e_\varepsilon(\varphi)(t) := \frac{1}{2}(|\varphi(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon|\varphi(t)|^2_{D\varepsilon}) + b_\varepsilon \int_0^t |\nabla\varphi|^2_{D_\varepsilon} ds + \int_0^t |\nabla\varphi|^2_{\Omega_\varepsilon} ds, \tag{1.3.16}$$

$$e(\varphi,\psi)(t) := \frac{1}{2}(|\varphi(t)|^2_\Omega + a|\psi(t)|^2_\Omega) + 4\pi\gamma \int_0^t |\varphi-\psi|^2_\Omega ds + \int_0^t |\nabla\varphi|^2_\Omega ds. \tag{1.3.17}$$

Proposition 1.3.5. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1 et pour tout* $\psi \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ *on a*

$$⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi\,(.)\,dx \to \int_\Omega v\psi\,(.)\,dx \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{1.3.18}$$

Lemme 1.3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1 et pour tout* $(\varphi,\psi) \in (C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)))^2$ *on a*

$$e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \to e(u-\varphi, v-\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.19}$$

où e_ε *et* e *sont respectivement définies par* (1.3.16) *et* (1.3.17).

Preuve du Théorème 1.3.1. Pour le premier résultat, en utilisant $(1.2.37)^2$ et (1.3.11) nous concluons avec la Proposition 1.1.2 que

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right). \tag{1.3.20}$$

Pour le deuxième résultat, d'abord remarquons que comme $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, alors le Lemme B.0.1 (voir Annexe B) donne

$$v \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right).$$

Ainsi, d'après le Théorème 1.2.7 et le Lemme B.0.1, on a

$$(u, v) \in \left(L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)\right)^2.$$

On considère une suite (φ_n, ψ_n) dans $(C^\infty([0,T]; \mathcal{D}(\Omega)))^2$ (voir Proposition 1.1.1) telle que

$$\varphi_n \to u \quad \text{fortement dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left([0, T]; L^2(\Omega)\right), \tag{1.3.21}$$

$$\psi_n \to v \quad \text{fortement dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left([0, T]; L^2(\Omega)\right), \tag{1.3.22}$$

lorsque $n \to +\infty$.

On a

$$\begin{aligned} e_\varepsilon\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)(t) = \frac{1}{2}\Big(&|\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)(t)|_{\Omega_\varepsilon}^2 + a_\varepsilon|\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)(t)|_{D\varepsilon}^2\Big) + \\ &+ b_\varepsilon \int_0^t |\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)|_{D_\varepsilon}^2 ds + \int_0^t |\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)|_{\Omega_\varepsilon}^2 ds, \end{aligned}$$

comme $b_\varepsilon \geq b_0 > 0$, il vient

$$\begin{aligned} e_\varepsilon\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)(t) &\geq b_\varepsilon \int_0^t |\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)|_{D_\varepsilon}^2 ds + \int_0^t |\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)|_{\Omega_\varepsilon}^2 ds \\ &\geq b_0 \int_0^t |\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)|_{D_\varepsilon}^2 ds + \int_0^t |\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)|_{\Omega_\varepsilon}^2 ds, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\min\{b_0, 1\} \int_0^t |\nabla(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n))|_\Omega^2 ds \leq e_\varepsilon\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)(t).$$

On applique le Lemme 1.3.2, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \min\{b_0, 1\} \int_0^t |\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n, \psi_n)\right)|_\Omega^2 ds \leq \|e\left(u - \varphi_n, v - \psi_n\right)\|_{C^0([0,T])}. \tag{1.3.23}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} e\left(u - \varphi_n, v - \psi_n\right)(t) \quad = \quad & \frac{1}{2}\Big(|\left(u - \varphi_n\right)(t)|_\Omega^2 + a|\left(v - \psi_n\right)(t)|_\Omega^2\Big) + \int_0^t |\nabla\left(u - \varphi_n\right)|_\Omega^2 ds \\ & + 4\pi\gamma \int_0^t |\left(u - \varphi_n\right) - \left(v - \psi_n\right)|_\Omega^2 ds, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|e\left(u - \varphi_n, v - \psi_n\right)\|_{C^0([0,T])} \leq & \frac{1}{2}\Big(\|u - \varphi_n\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}^2 + a\|v - \psi_n\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}^2\Big) \\ & + 8\pi\gamma T\Big(\|u - \varphi_n\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \|v - \psi_n\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}^2\Big) \\ & + \int_0^T |\nabla\left(u - \varphi_n\right)|_\Omega^2 ds, \end{aligned}$$

les convergences (1.3.21) et (1.3.22) nous donnent

$$e\left(u-\varphi_n, v-\psi_n\right) \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.24}$$

Il résulte alors de (1.3.23) et (1.3.24) que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \left|\nabla\left(u^\varepsilon-\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)\right|_\Omega^2 ds = 0. \tag{1.3.25}$$

On a

$$\nabla\left(u^\varepsilon-\Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right)=\nabla\left(u^\varepsilon-\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)+\nabla\left(\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)-\Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right),$$

avec

$$\begin{aligned}\nabla\left(\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)-\Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right)=\left(1-w_{R_\varepsilon}\right)\nabla\left(\varphi_n-u\right)-\left(\varphi_n-u\right)\nabla w_{R_\varepsilon}+&\\ +G_{r_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)\nabla w_{R_\varepsilon},&\end{aligned}$$

alors

$$\left\{\begin{aligned}\|\nabla\left(u^\varepsilon-\Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}\leq C\|\nabla\left(u^\varepsilon-\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)\|_{L^2(\Omega^T)}+&\\ +\|\left(1-w_{R_\varepsilon}\right)\nabla\left(\varphi_n-u\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}+&\\ +\|\left(\varphi_n-u\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}+&\\ +\|G_{r_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}.&\end{aligned}\right. \tag{1.3.26}$$

On conclut (1.3.9) en montrant que chaque terme dans le membre de droite de (1.3.26) tend vers zéro quand $\varepsilon\to 0$.

Le premier terme tend vers zéro grâce à (1.3.25).

Pour le deuxième terme, en utilisant (1.3.21) et l'estimation $0\leq w_{R_\varepsilon}\leq 1$, on obtient

$$\|\left(1-w_{R_\varepsilon}\right)\nabla\left(\varphi_n-u\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}\leq C\|\nabla\left(\varphi_n-u\right)\|_{L^2(\Omega^T)}\to 0.$$

Pour le troisième terme, de (1.2.18), (1.3.21) et $\gamma_\varepsilon\to\gamma$, on a

$$\begin{aligned}\|\left(\varphi_n-u\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}&\leq\|\varphi_n-u\|_{L^2(\Omega^T)}\|\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C\gamma_\varepsilon^{1/2}\|\varphi_n-u\|_{L^2(\Omega^T)}\to 0.\end{aligned}$$

Concernant le dernier terme, l'inégalité de Hölder avec l'estimation (1.2.18) entraînent

$$\begin{aligned}\|G_{r_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}&\leq C\gamma_\varepsilon\|G_{r_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)\|^2_{L^2(\Omega^T)}\\ &\leq 2C\gamma_\varepsilon\|G_{r_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)-G_{R_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)\|^2_{L^2(\Omega^T)}\\ &\quad+4C\gamma_\varepsilon\|G_{R_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)-\left(\psi_n-v\right)\|^2_{L^2(\Omega^T)}\\ &\quad+4C\gamma_\varepsilon\|\psi_n-v\|^2_{L^2(\Omega^T)},\end{aligned} \tag{1.3.27}$$

de plus, on a

$$\|G_{R_\varepsilon}\left(\psi_n-v\right)-\left(\psi_n-v\right)\|^2_{L^2(\Omega^T)}=\|\psi_n-v\|^2_{L^2(\Omega^T\setminus\Omega^T_{Y_\varepsilon})}+\|G_{R_\varepsilon}(\psi_n-v)-(\psi_n-v)\|^2_{L^2(\Omega^T_{Y_\varepsilon})}. \tag{1.3.28}$$

On applique le Lemme 1.2.4, on obtient

$$\|G_{r_\varepsilon}(\psi_n - v) - G_{R_\varepsilon}(\psi_n - v)\|^2_{L^2(\Omega^T)} \le \frac{C}{\gamma_\varepsilon}\|\nabla(\psi_n - v)\|^2_{L^2(\Omega^T)}, \qquad (1.3.29)$$

et

$$\|G_{R_\varepsilon}(\psi_n - v) - (\psi_n - v)\|^2_{L^2\left(\Omega^T_{Y_\varepsilon}\right)} \le C\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon}\|\nabla(\psi_n - v)\|^2_{L^2(\Omega^T)}. \qquad (1.3.30)$$

En combinant (1.3.27)-(1.3.30), on obtient

$$\|G_{r_\varepsilon}(\psi_n - v)\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \le C\left(1 + \frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon}\right)\|\nabla(\psi_n - v)\|^2_{L^2(\Omega^T)} + C\gamma_\varepsilon\|\psi_n - v\|^2_{L^2(\Omega^T)}.$$

En s'aidant de l'inégalité de Poincaré, et des convergences (1.2.12), (1.3.22), $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on aura

$$\|G_{r_\varepsilon}(\psi_n - v)\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \le C\left(1 + \frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon} + \gamma_\varepsilon\right)\|\nabla(\psi_n - v)\|^2_{L^2(\Omega^T)} \to 0.$$

□

Preuve de la Proposition 1.3.2. On multiplie la première équation de (1.2.8) " formellement" par $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ que l'on intègre sur $\Omega \times (0,t), t \in (0,T)$. Il vient

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon(t)|^2 dx = \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx. \qquad (1.3.31)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dxds &= \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dxds + \int_0^t \int_{D_\varepsilon} f^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dxds \\
&= \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dxds + \int_0^t \int_{D_\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{a_\varepsilon}} f^\varepsilon\right)\left(\sqrt{a_\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) dxds \\
&\le \frac{1}{2}\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^T)} + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxds + \frac{1}{2a_\varepsilon}\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^T)} + \frac{a_\varepsilon}{2}\int_0^t \int_{D_\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxds.
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\frac{1}{2a_\varepsilon} = \frac{|D_\varepsilon|}{2a_\varepsilon |D_\varepsilon|},$$

alors par utilisation de $(1.2.33)^1$, $(1.2.33)^3$ et $|D_\varepsilon| \to 0$ on obtient

$$\int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dxds \le C + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxds + \frac{a_\varepsilon}{2}\int_0^t \int_{D_\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxds. \qquad (1.3.32)$$

En combinant (1.3.31) et (1.3.32), on conclut à l'aide de (1.3.1) l'estimation globale

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxds + \frac{a_\varepsilon}{2}\int_0^t \int_{D_\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon(t)|^2 dx \le C, \qquad (1.3.33)$$

d'où, l'estimation (1.3.10).

Par ailleurs, de $|D_\varepsilon| \to 0$, $a_\varepsilon|D_\varepsilon| \to a$ et (1.3.33), on obtient

$$\int_0^t \int_\Omega \Big|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dxds = \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \Big|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dxds + |D_\varepsilon| \frac{1}{a_\varepsilon|D_\varepsilon|} a_\varepsilon \int_0^t \int_{D_\varepsilon} \Big|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dxds \leq C,$$

alors l'estimation précédente avec $(1.2.37)^2$ entraînent (1.3.11). □

Preuve de la Proposition 1.3.3. On commence par calculer les énergies associées aux problèmes (1.2.8) et (1.2.40).

On multiplie la première équation de (1.2.8) par u^ε et on intègre sur $\Omega \times (0,t), t \in (0,T)$, il vient

$$\frac{1}{2}\Big(|u^\varepsilon(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon|u^\varepsilon(t)|^2_{D\varepsilon}\Big) + b_\varepsilon \int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} ds + \int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} ds = \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon u^\varepsilon dxds + \\ + \frac{1}{2}\Big(|u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon|u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}\Big).$$

On pose

$$E_\varepsilon(t) := \frac{1}{2}\Big(|u^\varepsilon(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon|u^\varepsilon(t)|^2_{D\varepsilon}\Big) + b_\varepsilon \int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} ds + \int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} ds,$$
$$E_\varepsilon(0) := \frac{1}{2}\Big(|u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon|u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}\Big),$$

où E_ε est appelé énergie associée au problème (1.2.8).

Ainsi, on peut écrire

$$E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(0) + \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon u^\varepsilon dxds. \tag{1.3.34}$$

Maintenant, on calcule l'énergie du problème (1.2.40), on multiplie les deux premières équations de (1.2.40) respectivement par u et v que l'on intègre sur $\Omega \times (0,t), t \in (0,T)$. On obtient

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2_\Omega + 4\pi\gamma \int_0^t \int_\Omega (u-v)udxds + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds = \int_0^t \int_\Omega fudxds + \frac{1}{2}|u_0|^2_\Omega, \tag{1.3.35}$$

et

$$\frac{a}{2}|v(t)|^2_\Omega + 4\pi\gamma \int_0^t \int_\Omega (v-u)vdxds = \frac{a}{2}|v_0|^2_\Omega. \tag{1.3.36}$$

On somme (1.3.35) et (1.3.36), on aura

$$\frac{1}{2}\Big(|u(t)|^2_\Omega + a|v(t)|^2_\Omega\Big) + 4\pi\gamma \int_0^t |u-v|^2_\Omega ds + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds = \int_0^t \int_\Omega fudxds + \\ + \frac{1}{2}\Big(|u_0|^2_\Omega + a|v_0|^2_\Omega\Big).$$

On pose

$$E(t) := \frac{1}{2}\Big(|u(t)|^2_\Omega + a|v(t)|^2_\Omega\Big) + 4\pi\gamma \int_0^t |u-v|^2_\Omega ds + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds,$$
$$E(0) := \frac{1}{2}\Big(|u_0|^2_\Omega + a|v_0|^2_\Omega\Big),$$

où E est appelé l'énergie associée au problème (1.2.40).

Alors, en peut écrire

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \int_\Omega fudxds. \tag{1.3.37}$$

La démonstration de la convergence (1.3.12) se fait en deux étapes.

Première étape. On montre la convergence simple en temps suivante

$$E_\varepsilon(t) \longrightarrow E(t), \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{1.3.38}$$

En utilisant les convergences $(1.2.33)^3$ et (1.3.20), on obtient

$$\int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon u^\varepsilon dxds \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega fudxds. \tag{1.3.39}$$

Par ailleurs, l'hypothèse (1.3.3) et $|D_\varepsilon| \to 0$, impliquent que

$$|u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} = |D_\varepsilon| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \to 0, \tag{1.3.40}$$

ainsi les convergences (1.3.20) et (1.3.40) entraînent

$$\left| |u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} - |u_0|^2_\Omega \right| \le \left| |u_0^\varepsilon|^2_\Omega - |u_0|^2_\Omega - |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} \right| \le \left| |u_0^\varepsilon|^2_\Omega - |u_0|^2_\Omega \right| + |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} \to 0,$$

alors

$$|u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} \to |u_0|^2_\Omega. \tag{1.3.41}$$

Grâce à $a_\varepsilon |D_\varepsilon| \to a$ et (1.3.3), on obtient

$$a_\varepsilon |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} = a_\varepsilon |D_\varepsilon| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \longrightarrow a |v_0|^2_\Omega. \tag{1.3.42}$$

De (1.3.34), (1.3.37), (1.3.39), (1.3.41) et (1.3.42), on conclut (1.3.38).

Deuxième étape. montrons la convergence uniforme de l'énergie.

Pour montrer la convergence uniforme de l'énergie, on applique le Théorème d'Ascoli-Arzela 1.1.1. Donc on montre que la famille des énergies $(E_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$ vérifie les deux propriétés suivantes

$$\begin{cases} i) |E_\varepsilon(t)| \le C, \forall t \in [0,T], \\ ii) |E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t)| \le \theta(h), \text{ uniformément par rapport à } \varepsilon, \forall t \in [0,T[, \forall h > 0, \end{cases}$$

avec θ tend vers zéro quand h tend vers zéro.

On applique l'inégalité de Hölder dans (1.3.34) et on utilise $(1.2.33)^3$, (1.2.35), (1.3.41) et (1.3.42), on obtient

$$|E_\varepsilon(t)| \le \frac{1}{2}\left(|u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} \right) + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)} \le C,$$

alors $E_\varepsilon(t)$ est borné dans $C^0([0,T])$ et on a immédiatement la propriété $i)$.

Par ailleurs, pour tout $t \in [0,T[$ et $h > 0$ assez petit, on a

$$\begin{aligned}
|E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t)| &= \Big| \int_t^{t+h} \int_\Omega f^\varepsilon u^\varepsilon dx ds \Big| \\
&\leq \int_t^{t+h} \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \int_t^{t+h} \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq C \left(\int_t^{t+h} \|f^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \right)^{1/2} \left(\int_t^{t+h} ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)} h^{1/2} \\
&\leq C h^{1/2},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder, (1.2.33)[3], (1.2.35). Cette inégalité implique que

$$|E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t)| \to 0 \quad \text{as } h \longrightarrow 0, \text{ uniformément en } \varepsilon, \tag{1.3.43}$$

d'où la propriété ii). Les conditions du Théorème d'Ascoli-Arzela étant vérifiées, alors il existe une sous-suite de ε (notée encore ε) et $\xi \in C^0([0,T])$ telle que

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow \xi \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.44}$$

mais comme

$$E_\varepsilon(t) \longrightarrow E(t), \text{ pour tout } t \in [0,T], \tag{1.3.45}$$

en déduit $\xi = E$ ce qui achève la démonstration. $\square$

Preuve de la Proposition 1.3.4. Rappelons d'abord que pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ et $(\varphi, \psi) \in (C^\infty([0,T]; \mathcal{D}(\Omega)))^2$ on a

$$\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) := (1 - w_{R_\varepsilon})\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi), \tag{1.3.46}$$

alors d'après la définition (1.2.14), on a

$$\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) := \begin{cases} \varphi & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon, \\ (1 - w_{R_\varepsilon})\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi) & \text{dans } C_\varepsilon, \\ G_{r_\varepsilon}(\psi) & \text{dans } D_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.3.47}$$

et

$$\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) := \begin{cases} \nabla\varphi & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon, \\ (1 - w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi + \nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi) & \text{dans } C_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } D_\varepsilon. \end{cases} \tag{1.3.48}$$

Maintenant retournons à la démonstration de la convergence (1.3.15). Pour $(\varphi, \psi) \in (C^\infty([0,T]; \mathcal{D}(\Omega)))^2$ on a

$$\begin{cases} e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(t) = \dfrac{1}{2}\Big(|\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon |\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_{D\varepsilon} \Big) + \\ \qquad + b_\varepsilon \displaystyle\int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)|^2_{D_\varepsilon} ds + \int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)|^2_{\Omega_\varepsilon} ds. \end{cases} \tag{1.3.49}$$

Nous allons passer successivement à la limite dans chaque terme de la partie droite de l'égalité ci-dessus.

Premier terme. Notons que

$$\left| |\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} - |\varphi(t)|^2_\Omega \right| \leq \left| |\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_\Omega - |\varphi(t)|^2_\Omega \right| + |\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_{D_\varepsilon},$$

de plus, on obtient en vertu de (1.2.19) et la bornitude uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ (voir Lemme 1.2.5)

$$\begin{aligned}
\left| |\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_\Omega - |\varphi(t)|^2_\Omega \right| &= \left| |\varphi(t) + w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)(t)|^2_\Omega - |\varphi(t)|^2_\Omega \right| \\
&= \left| |w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)(t)|^2_\Omega + 2\int_\Omega w_{R_\varepsilon}\varphi(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)(t)\,dx \right| \\
&\leq |w_{R_\varepsilon}|^2_\Omega |G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi|^2_{L^\infty(\Omega^T)} + 2|w_{R_\varepsilon}|_\Omega |\varphi(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)|_{L^\infty(\Omega^T)} \\
&\leq C|w_{R_\varepsilon}|^2_\Omega + C|w_{R_\varepsilon}|_\Omega \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

et

$$|\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_{D_\varepsilon} = |G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)|^2_{D_\varepsilon} \leq |G_{r_\varepsilon}(\psi)|^2_{L^\infty(\Omega^T)}|D_\varepsilon| \leq C|D_\varepsilon| \to 0.$$

Donc

$$|\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(.)|^2_{\Omega_\varepsilon} \longrightarrow |\varphi(.)|^2_\Omega \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.50}$$

Passons au deuxième terme. On a

$$a_\varepsilon|\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|^2_{D\varepsilon} = a_\varepsilon|G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)|^2_{D\varepsilon} = a_\varepsilon|D_\varepsilon| \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)|^2 dx,$$

en s'aidant du Lemme 1.2.4, de la convergence uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ vers ψ (voir Lemme 1.2.5) et de la convergence $a_\varepsilon|D_\varepsilon| \to a$, on déduit

$$\begin{gathered}
a_\varepsilon|\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(.)|^2_{D\varepsilon} = a_\varepsilon|D_\varepsilon| \int_\Omega |G_{r_\varepsilon}(\psi)(.)|^2 dx \to a|\psi(.)|^2_\Omega, \\
\text{fortement dans } C^0([0,T]).
\end{gathered} \tag{1.3.51}$$

Pour le troisième terme. En sachant que $\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) = 0$ dans D_ε, il vient

$$b_\varepsilon \int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)|^2_{D_\varepsilon} ds = 0. \tag{1.3.52}$$

En ce qui concerne le dernière terme. Il s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)|^2_{\Omega_\varepsilon} ds &= \int_0^t |\nabla\varphi|^2_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon} ds + \int_0^t |(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi + (G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2_{C_\varepsilon} ds \\
&:= A_1 + A_2.
\end{aligned}$$

Remarquons que pour A_1, on a

$$\left| \int_0^t |\nabla\varphi|^2_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon} ds - \int_0^t |\nabla\varphi|^2_\Omega ds \right| = \int_0^t |\nabla\varphi|^2_{D_\varepsilon\cup C_\varepsilon} ds \leq T|D_\varepsilon \cup C_\varepsilon| \|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega^T)},$$

et en sachant que

$$\begin{aligned}|D_\varepsilon \cup C_\varepsilon| &= \Big| \bigcup_{k\in Z_\varepsilon} B(\varepsilon k, R_\varepsilon) \Big| \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \big| B(\varepsilon k, R_\varepsilon)\big| \\ &= \text{card}(Z_\varepsilon)\big|B(0,R_\varepsilon)\big| \\ &\simeq \frac{1}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\pi R_\varepsilon^3 \\ &\simeq \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3 \to 0.\end{aligned} \tag{1.3.53}$$

Alors

$$A_1 \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dxds \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.54}$$

Pour traiter A_2, nous décomposons A_2 en trois termes définis ci-dessous, qui seront traités séparément

$$\begin{cases} A_2 = \displaystyle\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi|^2 dxds + \int_0^t\int_{C_\varepsilon} |(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dxds \\ \qquad + 2\displaystyle\int_0^t\int_{C_\varepsilon}(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi\,(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)\nabla w_{R_\varepsilon} dxds \\ \quad := A_2^1 + A_2^2 + A_2^3. \end{cases}$$

En utilisant $0 \le w_{R_\varepsilon} \le 1$, on obtient

$$\big|A_2^1\big| \le \int_0^t\int_{C_\varepsilon} |(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi|^2 dxds \le T|C_\varepsilon|\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega^T)},$$

en sachant que

$$\begin{aligned}|C_\varepsilon| &= \Big|\bigcup_{k\in Z_\varepsilon} C_\varepsilon^k(r_\varepsilon, R_\varepsilon)\Big| \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\Big|C_\varepsilon^k(r_\varepsilon,R_\varepsilon)\Big| \\ &= \text{card}(Z_\varepsilon)|C_\varepsilon(r_\varepsilon,R_\varepsilon)| \\ &= \text{card}(Z_\varepsilon)\Big(|B(0,R_\varepsilon)| - |B(0,r_\varepsilon)|\Big) \\ &\simeq \frac{1}{\varepsilon^3}\Big(\frac{4}{3}\pi R_\varepsilon^3 - \frac{4}{3}\pi r_\varepsilon^3\Big) \\ &\simeq \frac{4}{3}\pi\Big(\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3 - \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\Big) \to 0.\end{aligned} \tag{1.3.55}$$

Par conséquent

$$A_2^1 \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.56}$$

En s'aidant des estimations de la Proposition 1.2.1 et de la bornitude uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^t\int_{C_\varepsilon}(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi\left(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi\right)\nabla w_{R_\varepsilon}dxds\Big| \leq \\
&\qquad\leq |G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)}|\nabla\varphi|_{L^2(C_\varepsilon^T)}|\nabla w_{R_\varepsilon}|_{L^2(C_\varepsilon^T)} \\
&\qquad\leq |G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)}|\nabla\varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)}T|C_\varepsilon|^{1/2}|\nabla w_{R_\varepsilon}|_{L^2(C_\varepsilon)} \\
&\qquad\leq C|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)}T|C_\varepsilon|^{1/2}|\nabla w_{R_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad\leq C\gamma_\varepsilon^{1/2}|C_\varepsilon|^{1/2},
\end{aligned}$$

de plus, les convergences $\gamma_\varepsilon \longrightarrow \gamma$ et $|C_\varepsilon| \longrightarrow 0$ nous donnent

$$A_2^3 \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{1.3.57}$$

Pour étudier A_2^2, on commence par décomposer A_2^2 en trois termes définis ci-dessous qui seront traités séparément.

$$\begin{cases}
A_2^2 = \displaystyle\int_0^t\int_{C_\varepsilon}|\left(G_{r_\varepsilon}(\psi)-G_{r_\varepsilon}(\varphi)\right)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2dxds + \int_0^t\int_{C_\varepsilon}|\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi)-\varphi\right)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2dxds+ \\
\qquad + 2\displaystyle\int_0^t\int_{C_\varepsilon}\left(G_{r_\varepsilon}(\psi)-G_{r_\varepsilon}(\varphi)\right)\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi)-\varphi\right)|\nabla w_{R_\varepsilon}|^2dxds \\
\quad := A_2^{2,1}+A_2^{2,2}+A_2^{2,3}.
\end{cases}$$

Un calcul direct pour le terme $A_2^{2,1}$ implique que

$$\begin{aligned}
A_2^{2,1} &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^t\int_{C_\varepsilon^k(r_\varepsilon,R_\varepsilon)}|G_{r_\varepsilon}(\psi)-G_{r_\varepsilon}(\varphi)|^2|\nabla w_{R_\varepsilon}|^2dxds \\
&= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\int_0^t\Big|\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\psi d\sigma-\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\varphi d\sigma\Big|^2ds\right)\left(\int_{C_\varepsilon^k(r_\varepsilon,R_\varepsilon)}|\nabla w_{R_\varepsilon}|^2dx\right).
\end{aligned}$$

Par un changement en coordonnées sphériques et en s'aident de (A.1.2), on aura

$$A_2^{2,1} = \sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\int_0^t\Big|\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\psi d\sigma-\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\varphi d\sigma\Big|^2ds\right)\left(\int_0^{2\pi}d\Phi\int_0^\pi\sin\Theta d\Theta\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon}\Big|\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}\Big|^2r^2dr\right),$$

et d'aprés (A.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
A_2^{2,1} &= 4\pi\left(\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon}\right)^2\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\int_0^t\Big|\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\psi d\sigma-\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\varphi d\sigma\Big|^2ds\right)\left(\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon}\frac{1}{r^2}dr\right) \\
&= 4\pi\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{\left(R_\varepsilon-r_\varepsilon\right)\varepsilon^3}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\int_0^t\int_\Omega\Big|\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\psi d\sigma-\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\varphi d\sigma\Big|^2\chi_{Y_\varepsilon^k}dxds\right) \\
&= 4\pi\gamma_\varepsilon\frac{R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon}\left(\int_0^t\int_\Omega|G_{r_\varepsilon}(\psi)-G_{r_\varepsilon}(\varphi)|^2dxds\right),
\end{aligned}$$

en s'aidant de l'hypothèse (1.2.12), il vient

$$\frac{R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon} = \frac{R_\varepsilon}{R_\varepsilon\left(1-\dfrac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon}\right)} = \frac{1}{1-\dfrac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon}} \longrightarrow 1. \tag{1.3.58}$$

Ainsi, en passant à la limite dans $A_2^{2,1}$ et en tenant compte des convergence (1.2.28), (1.3.58) et $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on obtient

$$A_2^{2,1} \longrightarrow 4\pi\gamma \int_0^t \int_\Omega |\psi - \varphi|^2 dxds \quad \text{fortemnet dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{1.3.59}$$

De (1.2.29) et $|\nabla w_{R_\varepsilon}|_\Omega \le C\gamma_\varepsilon^{1/2}$, le terme $A_2^{2,2}$ peut être estimé par

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi\right)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dxds &\le C\gamma_\varepsilon |G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|^2_{L^\infty(C_\varepsilon^T)} \\ &\le C\gamma_\varepsilon R_\varepsilon^2 |\nabla\varphi|^2_{L^\infty(\Omega^T)},\end{aligned}$$

comme $R_\varepsilon \to 0$ et $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on déduit que

$$A_2^{2,2} \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{1.3.60}$$

Concernant $A_2^{2,3}$, en utilisant les mêmes arguments utilisés pour prouver (1.3.60), nous obtenons

$$\begin{aligned}|A_2^{2,3}| &\le 2\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi)||G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi||\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dxds \\ &\le 2T|G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi)|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)}|G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)}\left(\int_{C_\varepsilon} |\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dx\right) \\ &\le C\gamma_\varepsilon R_\varepsilon |G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi)|_{L^\infty(\Omega^T)}|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} \\ &\le CR_\varepsilon \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

alors,

$$A_2^{2,3} \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{1.3.61}$$

Enfin, en combinant (1.3.50), (1.3.51), (1.3.52), (1.3.54), (1.3.56), (1.3.57), (1.3.59), (1.3.60) et (1.3.61), alors on conclut la convergence (1.3.15). □

Preuve de la Proposition 1.3.5. Tout d'abord nous allons prouver que

$$⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi(.)\, dx \to \int_\Omega v\psi(.)\, dx \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T). \tag{1.3.62}$$

Pour $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$, on a

$$\left\langle ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi dx, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(0,T)} = \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi\phi dxdt,$$

alors, en utilisant (1.2.38)[2] on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi dx, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(0,T)} = \int_0^T \int_\Omega v\psi\phi dxdt = \left\langle \int_\Omega v\psi dx, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(0,T)},$$

ce qui montre que (1.3.62) est vrais.

Dans la suite, on montre que la convergence (1.3.62) est en fait une convergence forte dans $C^0([0,T])$.

D'après l'inégalité de Hölder et (1.2.36), on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi dx\Big|^2 dt &\leq \int_0^T \left(\fint_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx\right)\left(\fint_{D_\varepsilon} |\psi|^2 dx\right) dt \\ &\leq C|\psi|^2_{L^\infty(\Omega^T)} \\ &\leq C.\end{aligned} \tag{1.3.63}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\psi(t)dx\right) = \fint_{D_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\psi(t)dx + \fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(t)dx,$$

car, pour $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ on a

$$\begin{aligned}\Big\langle \frac{d}{dt}\left(\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\psi(t)dx\right), \varphi\Big\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(0,T)} &= -\Big\langle \left(\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\psi(t)dx\right), \frac{d\varphi}{dt}\Big\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(0,T)} \\ &= -\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(x,t)\psi(x,t)\varphi^{'}(t)dxdt.\end{aligned}$$

Ainsi, par intégration par parties et en tenant compte de $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$, il vient

$$\begin{aligned}&\Big\langle \frac{d}{dt}\left(\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\psi(t)dx\right), \varphi\Big\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(0,T)} = \\ &= \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} \left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,t)\psi(x,t) + u^\varepsilon(x,t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t)\right]\varphi(t)dxdt \\ &= \Big\langle \fint_{D_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\psi(t)dx + \fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(t)dx, \varphi\Big\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(0,T)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\psi(t)dx\right) = \fint_{D_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\psi(t)dx + \fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(t)dx, \text{ dans } \mathcal{D}^{'}(0,T).$$

En utilisant le même raisonnement que dans (1.3.63), et en tenant compte de la convergence $a_\varepsilon|D_\varepsilon| \to a$, (1.2.36), et (1.3.10), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big|\frac{d}{dt}\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi dx\Big|^2 dt \leq 2\int_0^T \left(\Big|\fint_{D_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\psi dx\Big|^2 + \Big|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} dx\Big|^2\right) dt \\ &\leq 2\int_0^T \left(|\psi|^2_{L^\infty(\Omega^T)}\fint_{D_\varepsilon} \Big|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \Big|\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|^2_{L^\infty(\Omega^T)}\fint_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx\right) dt \\ &\leq 2\int_0^T \left(|\psi|^2_{L^\infty(\Omega^T)}\frac{1}{a_\varepsilon|D_\varepsilon|}a_\varepsilon\int_{D_\varepsilon} \Big|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \Big|\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|^2_{L^\infty(\Omega^T)}\fint_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx\right) dt \\ &\leq C.\end{aligned} \tag{1.3.64}$$

De (1.3.63) et (1.3.64), on déduit que la fonction $\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi\,(t)\,dx$ est bornée dans $H^1\,(0,T)$ et grâce à la compacité de l'injection $H^1\,(0,T) \subset C^0\,([0,T])$, il existe une sous-suite de ε (notée encore ε) et $\Phi \in C^0([0,T])$ tel que

$$\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi\,(.)\,dx \longrightarrow \Phi \quad \text{fortement dans } C^0\,([0,T])\,, \tag{1.3.65}$$

tenant compte de la convergence (1.3.62) et de l'unicité de la limite, en déduit

$$\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi(.)\,dx \longrightarrow \int_\Omega v\psi(.)dx \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]).$$

□

Preuve du Lemme 1.3.2. Pour tout $t \in [0,T]$ fixe, on a

$$\begin{cases} e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(t) = e_\varepsilon(u^\varepsilon)(t) + e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(t) - \\ \qquad - \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon(x,t)\,\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(x,t)\,dx - a_\varepsilon \int_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(x,t)\,\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(x,t)\,dx \\ \qquad - 2\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(x,s)\,\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(x,s)\,dxds \\ \qquad - 2b_\varepsilon \int_0^t \int_{D_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(x,s)\,\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(x,s)\,dxds, \end{cases}$$

d'après (1.3.47) et (1.3.48), on a

$$\begin{cases} e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(t) = e_\varepsilon(u^\varepsilon)(t) + e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(t) - \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx \\ \qquad - a_\varepsilon \int_{D_\varepsilon} u^\varepsilon G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)\,dx - 2\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\,dxds \\ \qquad := I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 - I_\varepsilon^3 - I_\varepsilon^4 - 2I_\varepsilon^5. \end{cases} \tag{1.3.66}$$

Nous allons passer successivement à la limite dans chaque terme de la partie droite de l'égalité ci-dessus.

Le terme I_ε^1. En sachant que $I_\varepsilon^1(.) = E_\varepsilon(.)$ et $e(u,v)(.) = E(.)$, et grâce à la Proposition 1.3.3, on a

$$I_\varepsilon^1(.) \longrightarrow e(u,v)(.) \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.67}$$

Le terme I_ε^2. D'après la Proposition 1.3.4, on a

$$I_\varepsilon^2(.) \longrightarrow e(\varphi,\psi)(.) \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.68}$$

Le terme I_ε^3. On a

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx - \int_\Omega u\varphi(t)\,dx\Big| &\leq \Big|\int_{\Omega_\varepsilon} (u^\varepsilon - u)(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big| + \\ &+ \Big|\int_{D_\varepsilon} u(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big| + \Big|\int_\Omega u(t)(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) - \varphi)(t)\,dx\Big| \\ &:= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Le terme J_1 converge vers zero. En effet

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\Omega_\varepsilon} (u^\varepsilon - u)(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big| &\leq |(u^\varepsilon - u)(t)|_{L^2(\Omega)} |\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |(u^\varepsilon - u)(t)|_{L^2(\Omega)} |(1 - w_{R_\varepsilon})\varphi(t) + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

de plus, on obtient en vertu de (1.2.17) et la bornitude uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ (voir Lemme 1.2.5) et la convergence (1.3.20)

$$\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_{\Omega_\varepsilon}(u^\varepsilon-u)(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big|\leq C|u^\varepsilon-u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\to 0.$$

Le terme J_2 converge aussi vers zero. D'après (1.3.47) on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_{D_\varepsilon}u(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big|&=\Big|\int_{D_\varepsilon}u(t)G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)\,dx\Big|\\&\leq |u(t)|_{L^2(\Omega)}|G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)|_{L^2(D_\varepsilon)},\end{aligned}$$

alors, en tenant compte de la bornitude uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ et de la convergence $|D_\varepsilon|\to 0$, il vient

$$\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_{D_\varepsilon}u(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big|\leq |u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}|G_{r_\varepsilon}(\psi)|_{L^\infty(\Omega^T)}|D_\varepsilon|^{1/2}\to 0.$$

Le terme J_3 converge aussi vers zero. D'après (1.3.47) on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(t)\left(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)-\varphi\right)(t)\,dx&=\int_{C_\varepsilon}u(t)w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)(t)\,dx+\\&\quad+\int_{D_\varepsilon}u(t)(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)(t)dx,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega u(t)\left(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)-\varphi\right)(t)\,dx\Big|&\leq |u(t)|_{L^2(\Omega)}|w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)(t)|_{L^2(C_\varepsilon)}\\&\quad+|u(t)|_{L^2(\Omega)}|(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)(t)|_{L^2(D_\varepsilon)},\end{aligned}$$

ainsi, en utilisant (1.2.19) et la bornitude uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$, on aura

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_\Omega u(t)\left(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)-\varphi\right)(t)\,dx\Big|&\leq C|u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}|w_{R_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)}+\\&\quad+|u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}|G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)}|D_\varepsilon|^{1/2}\to 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, comme les termes J_1, J_2 et J_3 convergent uniformément vers zero, alors en déduit

$$I_\varepsilon^3(.)\longrightarrow\int_\Omega u\varphi(.)dx\quad\text{fortement dans } C^0([0,T]).\tag{1.3.69}$$

Le terme I_ε^4. Tenant compte de la convergence $a_\varepsilon|D_\varepsilon|\to a$ et de la Proposition 1.3.5, il vient

$$\begin{aligned}I_\varepsilon^4(.)&=a_\varepsilon|D_\varepsilon|\fint_{D_\varepsilon}u^\varepsilon G_{r_\varepsilon}(\psi)(.)\,dx\\&\to a\int_\Omega v\psi(.)dx\quad\text{fortement dans } C^0([0,T]).\end{aligned}\tag{1.3.70}$$

En effet, on a

$$\Big|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon G_{r_\varepsilon}(\psi)(t)dx - \int_\Omega v\psi(t)dx\Big| \leq \Big|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon (G_{r_\varepsilon}(\psi)-\psi)dx\Big| + \\ + \Big|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi(t)dx - \int_\Omega v\psi(t)dx\Big|,$$

où le terme de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro fortement dans $C^0([0,T])$, car l'estimation (1.2.36) et la convergence uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ vers ψ, nous donnent

$$\begin{aligned}\Big|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon (G_{r_\varepsilon}(\psi)-\psi)dx\Big| &\leq \left(\fint_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\psi)-\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C|G_{r_\varepsilon}(\psi)-\psi|_{L^\infty(\Omega^T)} \to 0.\end{aligned}$$

et la Proposition 1.3.5, aussi nous donne

$$\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi(t)dx - \int_\Omega v\psi(t)dx\Big| \longrightarrow 0.$$

Le terme I^5_ε. En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la Proposition 4.6 [10] (voir Annexe C.1), on obtient

$$I^5_\varepsilon(t) \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + 4\pi\gamma(v-u)(\psi-\varphi))dxds, \\ \text{pour chaque } t \in [0,T]. \tag{1.3.71}$$

Maintenant, nous voulons montrer que la convergence précédente a lieu dans $C^0([0,T])$. En effet, on applique l'inégalité de Hölder dans I^5_ε et on utilise (1.2.35), les estimations de la Proposition 1.2.1, la bornitude uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ (voir Lemme 1.2.5) et le fait que $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on obtient

$$\begin{aligned}|I^5_\varepsilon(t)| &= \Big|\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\, dxds\Big| \\ &\leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T_\varepsilon)} \|\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\|_{L^2(\Omega^T_\varepsilon)} \\ &\leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)} \|(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi + (G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^T)} \\ &\leq C,\end{aligned}$$

et pour $t \in [0,T[$, $h>0$ assez petit, on a

$$\begin{aligned}|I^5_\varepsilon(t+h) - I^5_\varepsilon(t)| &\leq \|\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)} h^{1/2} \\ &\leq C\|(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi + (G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} h^{1/2} \\ &\leq Ch^{1/2}.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$i)\ \sup_{0\leq t\leq T}|I^5_\varepsilon(t)| \leq C,$$

et

$$ii)\ |I^5_\varepsilon(t+h) - I^5_\varepsilon(t)| \leq Ch^{1/2}, \quad \text{pour } t\in[0,T[,\ h>0 \text{ assez petit.}$$

Par conséquent, de $i)$ et $ii)$, on a les conditions du Théorème d'Ascoli-Arzela, ce qui implique

$$I_\varepsilon^5(.) \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + 4\pi\gamma(v-u)(\psi-\varphi))dxds, \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.72}$$

Finalement, en combinant (1.3.67)-(1.3.70) et (1.3.72), on conclut la convergence (1.3.19). □

Preuve de la Proposition 1.3.1. 1. Cas $\gamma \in [0,+\infty[$. Démontrons (1.3.1). D'abord remarquons que le Lemme 1.2.5 nous donne $G_{r_\varepsilon}(v_0) \in L^\infty(\Omega)$, car on a supposé que $v_0 \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, de plus, en sachant que $w_{R_\varepsilon} \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $(u_0, v_0) \in (L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)) \times C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, on a $u_0^\varepsilon \in H^1(\Omega)$.

D'autre part, d'après (1.3.48) on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx &= \int_\Omega k^\varepsilon |\nabla \Phi_\varepsilon(u_0, v_0)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{C_\varepsilon} |(1-w_{R_\varepsilon})\nabla u_0 + (G_{r_\varepsilon}(v_0) - u_0)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dx \\
&\le \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega |(1-w_{R_\varepsilon})\nabla u_0|^2 dx + 2\int_\Omega |(G_{r_\varepsilon}(v_0) - u_0)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dx.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations de la Proposition 1.2.1, le Lemme 1.2.5 et le fait que $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx &\le C + 2\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|G_{r_\varepsilon}(v_0) - u_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\le C + C\|G_{r_\varepsilon}(v_0) - u_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \gamma_\varepsilon \\
&\le C,
\end{aligned} \tag{1.3.73}$$

d'où l'estimation (1.3.1).

Démontrons (1.3.2). Tenant compte de la convergence (1.2.19) et du Lemme 1.2.5, il vient

$$\begin{aligned}
\|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} &= \|w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(v_0) - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|G_{r_\varepsilon}(v_0) - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \to 0,
\end{aligned}$$

or la convergence forte implique la convergence faible, d'où la convergence (1.3.2).

On démontre maintenant (1.3.3). D'après (1.3.47) on a

$$\left| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right| = \left| \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(v_0)|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right|,$$

ainsi, le Lemme 1.2.4 et la convergence uniform de $G_{r_\varepsilon}(v_0)$ vers v_0 (voir Lemme 1.2.5), nous permettent de conclure que

$$\left| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right| = \left| \int_\Omega |G_{r_\varepsilon}(v_0)|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right| \to 0.$$

Quand à la dernière convergence, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(\Omega)} &= \fint_{D_\varepsilon} u_0^\varepsilon(x)\, \varphi(x) dx \\
&= \frac{1}{|D_\varepsilon|} \int_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(v_0)(x)\, \varphi(x) dx \\
&= \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} \left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon}} v_0(y)\, d\sigma_y \right) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le Théorème de la moyenne, il existe

$$y^k_\varepsilon \in S^k_{r_\varepsilon},\ \xi^k_\varepsilon \in B(\varepsilon k, r_\varepsilon),$$

tels que

$$\left\langle \frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(\Omega)} = \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} v_0(y^k_\varepsilon) \varphi(\xi^k_\varepsilon) |B(\varepsilon k, r_\varepsilon)|.$$

En sachant que

$$|D_\varepsilon| = \sum_{k \in Z_\varepsilon} |B(\varepsilon k, r_\varepsilon)| = \text{card}(Z_\varepsilon) |B(0, r_\varepsilon)|, \text{ et } \text{card}(Z_\varepsilon) \simeq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3},$$

et comme $|\Omega| = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(\Omega)} &= \sum_{k \in Z_\varepsilon} (v_0(y^k_\varepsilon) - v_0(\xi^k_\varepsilon)) \varphi(\xi^k_\varepsilon) |Y^k_\varepsilon| \\
&\quad + \sum_{k \in Z_\varepsilon} v_0(\xi^k_\varepsilon) \varphi(\xi^k_\varepsilon) |Y^k_\varepsilon|.
\end{aligned}$$

Le premier terme de droite tend vers zéro grâce au Théorème des accroissements finis. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in Z_\varepsilon} (v_0(y^k_\varepsilon) - v_0(\xi^k_\varepsilon)) \varphi(\xi^k_\varepsilon) |Y^k_\varepsilon| &\leq \sum_{k \in Z_\varepsilon} |y^k_\varepsilon - \xi^k_\varepsilon| |\nabla v_0|_{L^\infty(\Omega)} \varphi(\xi^k_\varepsilon) |Y^k_\varepsilon| \\
&\leq \sqrt{3} \varepsilon |\nabla v_0|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \varphi(\xi^k_\varepsilon) |Y^k_\varepsilon| \to 0,
\end{aligned} \tag{1.3.74}$$

car la définition de l'intégrale de Lebesgue nous donne

$$\sum_{k \in Z_\varepsilon} \varphi(\xi^k_\varepsilon) |Y^k_\varepsilon| \longrightarrow \int_\Omega \varphi(x) dx.$$

Encore la définition de l'intégrale de Lebesgue nous donne

$$\sum_{k \in Z_\varepsilon} v_0(\xi^k_\varepsilon) \varphi(\xi^k_\varepsilon) |Y^k_\varepsilon| \longrightarrow \int_\Omega v_0(x) \varphi(x) dx. \tag{1.3.75}$$

De (1.3.74) et (1.3.75), en déduit la convergence (1.3.4).

2. Cas $\gamma = +\infty$. La preuve des hypothèses (1.3.1)-(1.3.4) est similaire à celle correspondante au cas $\gamma \in [0, +\infty[$, la différence réside dans la démonstration de l'estimation (1.3.1). En effet, d'après (1.3.73) on a

$$\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C + C\|G_{r_\varepsilon}(u_0) - u_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}\gamma_\varepsilon.$$

Alors, en s'aident du Lemme 1.2.5 et comme $r_\varepsilon \ll R_\varepsilon \ll \varepsilon$, on aura

$$\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C + CR_\varepsilon^2 \gamma_\varepsilon |\nabla u_0|^2_{L^\infty(\Omega)} = C + C\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \leq C.$$

□

1.3.2 Correcteur pour le cas $\varepsilon^3 << r_\varepsilon << \varepsilon$

Dans cette sous-section, nous étudions le problème de correcteur pour le problème (1.2.8) dans le cas

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = +\infty. \tag{1.3.76}$$

Le résultat principal de correcteur obtenu dans ce cas est le suivant.

Théorème 1.3.3. *Sous les hypothèses* (1.3.76)*,* (1.2.33)*,* (1.3.1)-(1.3.4) *avec* $v_0 := u_0$*, la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *vérifie*

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right), \tag{1.3.77}$$

et

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u,u) + \mathcal{R}_\varepsilon, \ \textit{avec} \\ \mathcal{R}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(0,T; W_0^{1,1}(\Omega)), \end{cases} \tag{1.3.78}$$

où u *est l'unique solution de* (1.2.44).

Comme dans la sous-section précédente, avant de prouver le Théorème 1.3.3 nous aurons besoin des résultats techniques suivants.

Proposition 1.3.6. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.3 on a*

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow E_1(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.79}$$

avec

$$E_1(t) := \frac{1}{2}(1+a)|u(t)|^2_\Omega + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds,$$

l'énergie du problème (1.2.44).

De plus, pour tout $\varphi \in C^\infty([0,T]; \mathcal{D}(\Omega))$ *on a*

$$e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi))(.) \to e(\varphi,\varphi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.80}$$

$$⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi\,(.)\, dx \to \int_\Omega u\varphi\,(.)\, dx \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0,T]\right), \tag{1.3.81}$$

$$e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi))(.) \to e(u-\varphi, u-\varphi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.82}$$

où e_ε *et* e *sont respectivement définies par* (1.3.16) *et* (1.3.17).

Remarque 2. Notons que dans ce cas, il est facile de constater que la Proposition 1.3.2 reste valable sous les hypothèses du Théorème 1.3.3.

Preuve du Théorème 1.3.3. La preuve du premier résultat est similaire à celle correspondante au Théorème 1.3.1.

Pour le deuxième résultat, observons d'abord que le Théorème 1.2.8 nous donne

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

On considère une suite φ_n dans $C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ telle que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\varphi_n \to u \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right). \qquad (1.3.83)$$

On a

$$\begin{aligned} \|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(u,u)\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &\leq C\|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n,\varphi_n)\right)\|_{L^2(\Omega^T)} + \\ &+ \|\left(1-w_{R_\varepsilon}\right)\nabla\left(\varphi_n - u\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \\ &+ \|\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}. \end{aligned} \qquad (1.3.84)$$

Observons d'abord, que les deux premiers termes sur le terme de droite de l'inégalité ci-dessus tendent vers zéro, la preuve est similaire à celle du Théorème 1.3.1.

Concernant le dernier terme, l'inégalité de Hölder avec l'estimation (1.2.18) entraînent que

$$\begin{aligned} \|\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &= \|\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T;L^1(C_\varepsilon))} \\ &\leq C\gamma_\varepsilon \|G_{r_\varepsilon}(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\|^2_{L^2(C_\varepsilon^T)} \\ &\leq 2C\gamma_\varepsilon \Big(\|G_{r_\varepsilon}(\varphi_n - u) - G_{R_\varepsilon}(\varphi_n - u)\|^2_{L^2(C_\varepsilon^T)} + \\ &\quad + \|G_{R_\varepsilon}(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\|^2_{L^2(C_\varepsilon^T)}\Big), \end{aligned}$$

on applique le Lemme 1.2.4, on obtient

$$\begin{aligned} \|\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &\leq 2C\gamma_\varepsilon \Big(\frac{C}{\gamma_\varepsilon}\|\nabla(\varphi_n - u)\|^2_{L^2(\Omega^T)} + \\ &\quad + C\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon}\|\nabla(\varphi_n - u)\|^2_{L^2(\Omega^T)}\Big). \end{aligned}$$

Tenant compte de la convergence (1.3.83) et le fait que $r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon$, il vient

$$\|\left(G_{r_\varepsilon}(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C(1 + \frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon})\|\nabla(\varphi_n - u)\|^2_{L^2(\Omega^T)} \to 0.$$

Par conséquent, comme chaque terme dans le membre de droite de (1.3.84) tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$, en déduit la convergence (1.3.78) et la preuve est complète. □

Preuve de la Proposition 1.3.6. En reprenant la démonstration des résultats obtenus dans la sous-section précédente, on ne fera apparaitre que les parties différentes dans la démonstrations de chaque résultat.

1) La convergence (1.3.79) se démontre comme la convergence correspondante dans la Proposition 1.3.3, en considérant l'énergie associée au problème limite (1.2.44) donnée par

$$E_1(t) := \frac{1}{2}(1+a)|u(t)|^2_\Omega + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds,$$

avec

$$E_1(t) := E_1(0) + \int_0^t \int_\Omega fudxds,$$

et

$$E_1(0) := \frac{1}{2}(1+a)\Big|\frac{1}{(1+a)}u_0 + \frac{a}{(1+a)}v_0\Big|^2_\Omega.$$

Grâce au hypothèse $v_0 := u_0$ on trouve

$$E_1(0) := \frac{1}{2}(1+a)|u_0|^2_\Omega.$$

2) La deuxième différence se trouve dans la démonstration de la convergence (1.3.80), plus précisément lorsque on traite le terme A_2 (voir la démonstration de la Proposition 1.3.4). En effet

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi + (G_{r_\varepsilon}(\varphi)-\varphi)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dxds \leq \\ &\leq 2\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi|^2 dxds + 2\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(G_{r_\varepsilon}(\varphi)-\varphi)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dxds \leq \\ &\leq 2T\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega^T)}|C_\varepsilon| + 2T|G_{r_\varepsilon}(\varphi)-\varphi|^2_{L^\infty(C_\varepsilon^T)}|\nabla w_{R_\varepsilon}|^2_{L^2(C_\varepsilon)} \leq \\ &\leq C|C_\varepsilon| + CR_\varepsilon^2\gamma_\varepsilon = C|C_\varepsilon| + C\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les estimations de la Proposition 1.2.1, le Lemme 1.2.5 et les faits que $|C_\varepsilon| \to 0$ et $r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon$.

3) Dans la convergence (1.3.81) on voit que la limite v est remplacée par u lorsque on compare avec la convergence (1.3.18), cette différence est dû à l'utilisation de la convergence (1.2.42)[2].

4) En ce qui concerne la dernière convergence, en utilisant les mêmes arguments utilisée dans la preuve du Lemme 1.3.2, on trouve (voir Annexe C.2)

$$I^5_\varepsilon = \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi)dxds \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dxds, \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{1.3.85}$$

□

1.3.3 Correcteur pour le cas $r_\varepsilon << \varepsilon^3$

Dans cette sous-section, nous étudions le problème du correcteur pour le problème (1.2.8) dans le cas

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon = 0. \tag{1.3.86}$$

Le résultat principal de correcteur obtenu dans ce cas est le suivant.

Théorème 1.3.4. *Sous les hypothèses* (1.3.86), (1.2.33), (1.3.1)-(1.3.4)*, la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *vérifie*

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right), \tag{1.3.87}$$

et

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u,v_0) + \mathcal{R}_\varepsilon, \ \textit{avec} \\ \mathcal{R}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega)), \end{cases} \tag{1.3.88}$$

où u *est l'unique solution de* (1.2.47).

Comme dans les autres cas, avant de prouver le Théorème 1.3.4 nous aurons besoin des résultats techniques suivants.

Proposition 1.3.7. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.4 on a*

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow E_2(.) + \frac{a}{2}|v_0|^2_\Omega \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.89}$$

tel que

$$E_2(t) := \frac{1}{2}|u(t)|^2_\Omega + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds,$$

E_2 *étant l'énergie du problème* (1.2.47).

De plus, pour tout $(\varphi,\psi) \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \longrightarrow \overline{e}(\varphi,\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.90}$$

$$⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(.)\,\psi dx \to \int_\Omega v_0\psi dx \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.91}$$

$$e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \to \overline{e}(u-\varphi, v_0-\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.92}$$

avec

$$\overline{e}(\varphi,\psi)(t) := \frac{1}{2}(|\varphi(t)|^2_\Omega + a|\psi|^2_\Omega) + \int_0^t |\nabla\varphi|^2_\Omega ds,$$

et e_ε *est définie par* (1.3.16).

Remarque 3. Notons dans ce cas que la Proposition 1.3.2 est toujours valable sous les hypothèses du Théorème 1.3.4 et avec la même démonstration.

Preuve du Théorème 1.3.4. La preuve du premier résultat est similaire à celle du Théorème 1.3.1.

Pour le deuxième résultat, d'après le Théorème 1.2.9 nous avons

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

On considère une suite (φ_n,ψ_n) dans $C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$ telle que,

$$\begin{aligned} &\varphi_n \to u \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right), \\ &\psi_n \to v_0 \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\|\nabla(u^\varepsilon-\Phi_\varepsilon(u,v_0))\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq\; & C\|\nabla\left(u^\varepsilon-\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)\|_{L^2(\Omega^T)}\\ & +\|\left(1-w_{R_\varepsilon}\right)\nabla\left(\varphi_n-u\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}\\ & +\|\left(\varphi_n-u\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}\\ & +\|G_{r_\varepsilon}\left(\psi_n-v_0\right)\nabla w_{R_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

En suivant la démarche donnée dans la preuve de la convergence (1.3.9) (voir la démonstration du Théorème 1.3.1), il est facile de voir que chaque terme de la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro lorsque $\varepsilon\to 0$, ce qui achève la démonstration. □

Preuve de la Proposition 1.3.7. La preuve du résultat est similaire à celle correspondante du premier cas dans lequel $\gamma\in\,]0,+\infty[$, avec quelques différences qui apparaissent ci-dessous.

1) Démonstration de la convergence (1.3.89). Dans ce cas l'énergie associée au problème limite (1.2.47) est donnée par

$$E_2(t):=\frac{1}{2}|u\left(t\right)|_\Omega^2+\int_0^t|\nabla u|_\Omega^2ds,$$

avec

$$E_2(t):=E_2(0)+\int_0^t\int_\Omega fudxds,$$

et

$$E_2(0):=\frac{1}{2}|u_0|_\Omega^2.$$

En suivant la démarche donnée dans la preuve de la convergence (1.3.12) (voir la démonstration de la Proposition 1.3.3), on trouve

$$E_\varepsilon\left(.\right)\longrightarrow\int_0^t\int_\Omega fudxds+\frac{1}{2}|u_0|_\Omega^2+\frac{a}{2}|v_0|_\Omega^2\quad\text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right),$$

de là apparaît la différence.

2) La preuve de la convergence (1.3.90) est beaucoup plus simple parce que dans ce cas, le terme A_2 (voir la démonstration de la Proposition 1.3.4) est traitée comme suit

$$\begin{aligned}A_2&=\int_0^t\int_{C_\varepsilon}|\left(1-w_{R_\varepsilon}\right)\nabla\varphi+\left(G_{r_\varepsilon}\left(\psi\right)-\varphi\right)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2dxds\\&\leq 2\int_0^t\int_{C_\varepsilon}|\left(1-w_{R_\varepsilon}\right)\nabla\varphi|^2dxds+2\int_0^t\int_{C_\varepsilon}|\left(G_{r_\varepsilon}\left(\psi\right)-\varphi\right)\nabla w_{R_\varepsilon}|^2dxds\\&\leq 2T\Big(\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega^T)}^2|C_\varepsilon|+C|G_{r_\varepsilon}\left(\psi\right)-\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)}^2\gamma_\varepsilon\Big)\to 0,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les estimations de la Proposition 1.2.1, la bornitude uniforme de $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ et les faits que $|C_\varepsilon|\to 0$, $\gamma_\varepsilon\to 0$.

3) Pour la convergence (1.3.91), grâce à la convergence (1.2.46) on a

$$⨍_{D_\varepsilon}u^\varepsilon\left(t\right)\psi dx\to\int_\Omega v_0\psi dx\quad\text{p.p.}\quad t\text{ dans }\left[0,T\right],$$

et cette convergence est dans $C^0([0,T])$, puisque la fonction $⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\,\psi dx$ est bornée dans $H^1(0,T)$, comme dans la preuve de la Proposition 1.3.5.

$4)$ En ce qui concerne la dernière convergence, en utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme 1.3.2, la différence vient de la limite de I_ε^5, qui est

$$I_\varepsilon^5 = \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\,dxds \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxds \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{1.3.93}$$

où la démonstration trouve dans l'annexe C.3. □

Chapitre 2

Correcteur pour le processus de diffusion dans une structure binaire périodique raréfié de forme quelconque

Résumé

Dans ce chapitre nous généralisons l'étude de correcteur faite dans le chapitre précédent pour le même problème au cas des particules de forme quelconque. Pour se faire nous utilisons la méthode de la zone de contrôle adaptée aux particules de forme quelconques. Cette méthode a été élaboré par Bentalha et al. [11] pour homogénéiser ce même problème, et les résultats trouvés dans ce chapitre complètent les résultats d'homogénéisation trouvés dans [11].

2.1 Position du problème et notations

2.1.1 Le processus de diffusion

Rappelons le processus de diffusion

$$\begin{cases} \rho^{\varepsilon}\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t} - div\,(k^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}) = f^{\varepsilon} & \text{dans} \quad \Omega^{T}, \\ [u^{\varepsilon}]_{\varepsilon} = 0 & \text{sur} \quad \partial D_{\varepsilon} \times \left]0, T\right[, \\ [k^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}]_{\varepsilon}\, n = 0 & \text{sur} \quad \partial D_{\varepsilon} \times \left]0, T\right[, \\ u^{\varepsilon} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ u^{\varepsilon}(0) = u_0^{\varepsilon} & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où

- Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^N, N \geq 3$ tel que $|\Omega| = 1$.

- Le sous-ensemble D_{ε} est une suspension $\varepsilon Y-$périodique de petites particules de forme quelconque, avec

$$Y := \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)^{N}, \tag{2.1.2}$$

la cellule de référence.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on note

$$Y_\varepsilon^k := \varepsilon k + \varepsilon Y,\ k \in \mathbb{Z}^N,$$

$$\Omega_{Y_\varepsilon} := \text{intérieur} \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} \overline{Y_\varepsilon^k},\ \text{avec}\ Z_\varepsilon := \left\{k \in \mathbb{Z}^N,\ Y_\varepsilon^k \subset \Omega\right\},$$

$$D_\varepsilon^k := \varepsilon k + r_\varepsilon D,$$

$$D_\varepsilon := \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} D_\varepsilon^k,$$

où $0 < r_\varepsilon << \varepsilon$ et D un ensemble ouvert de classe C^1 dans $B(0,1)$, la boule de rayon 1 et de centre 0.

– L'hypothèse $0 < r_\varepsilon << \varepsilon$, qui veut dire

$$\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \longrightarrow 0, \tag{2.1.3}$$

entraîne

$$|D_\varepsilon| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{2.1.4}$$

– Le domaine Ω_ε est donné par

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{D_\varepsilon}. \tag{2.1.5}$$

– $[.]_\varepsilon$ est le saut à l'interface ∂D_ε, n est le vecteur normal extérieur à ∂D_ε, $f^\varepsilon \in L^2\left(\Omega^T\right)$, $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ et

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ a_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

$$k^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ b_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

– $a_\varepsilon > 0$ et $b_\varepsilon > 0$ sont respectivement la densité de la masse relative et la diffusivité de la suspension.

Problème (2.1.1) a une solution faible dans le sens suivant :

Théorème 2.1.1 ([21]). *Sous les hypothèses et les notations ci-dessus, il existe une unique solution u_ε vérifiant*

$$\begin{cases} \textit{Trouver}\ u^\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ \textit{tel que} \\ \dfrac{d}{dt}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon, w)_\Omega + (k^\varepsilon \nabla u^\varepsilon, \nabla w)_\Omega = (f^\varepsilon, w)_\Omega \quad \textit{dans}\ \mathcal{D}'(0,T),\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \quad \textit{dans}\ \Omega. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

De plus, $u_\varepsilon \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

2.1.2 Outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle

Pour tout $\lambda > 1$, on note w_λ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda = 0 & \text{dans} \quad C_\lambda := B(0,\lambda)\backslash D, \\ w_\lambda = 1 & \text{sur} \quad \partial D, \\ w_\lambda = 0 & \text{sur} \quad S_\lambda := \partial B(0,\lambda). \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Des résultats classiques nous donnent la convergence de (voir [21])

$$\text{cap}_\lambda(D) := \int_{C_\lambda} |\nabla w_\lambda|^2, \tag{2.1.10}$$

vers la capacité de D, c'est à dire

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \text{cap}_\lambda(D) = \text{cap}(D) := \int_{\mathbb{R}^N\backslash D} |\nabla w_\infty|^2, \tag{2.1.11}$$

où w_∞ est la solution du problème de Dirichlet extérieur suivant

$$\begin{cases} -\Delta w_\infty = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \setminus D, \\ w_\infty = 1 & \text{sur} \quad \partial D. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Introduisons l'ensemble des suites

$$\mathcal{R} := \left\{ (R_\varepsilon)_\varepsilon,\ r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon \right\},$$

pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$, on définit la zone de contrôle associée

$$C_\varepsilon := \bigcup_{k\in Z_\varepsilon} (B_\varepsilon^k \backslash \overline{D_\varepsilon^k}),$$

avec $B_\varepsilon^k := B(\varepsilon k, R_\varepsilon)$.

Nous notons dans tout ce qui suit

$$\lambda_\varepsilon := r_\varepsilon^{-1} R_\varepsilon, \quad \gamma_\varepsilon := \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^N}, \quad \gamma := \lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_\varepsilon. \tag{2.1.13}$$

γ_ε est appelé coefficient de raréfaction.

Définition 2.1.1. Pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$, on définit $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ par

$$v_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon, \\ v_\varepsilon^k(x) & \text{dans} \quad B_\varepsilon^k \backslash D_\varepsilon^k,\ \forall k \in Z_\varepsilon, \\ 1 & \text{dans} \quad D_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.1.14}$$

tel que

$$v_\varepsilon^k(x) = w_{\lambda_\varepsilon}\left(\frac{x - \varepsilon k}{r_\varepsilon}\right), \tag{2.1.15}$$

est la solution fondamentale du Laplacien (2.1.9).

v_ε a les propriétés données par la proposition suivante.

Proposition 2.1.1 ([11]). *Pour tout* $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ *, on a*

$$0 \leq v_\varepsilon \leq 1, \tag{2.1.16}$$

$$|\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq C\gamma_\varepsilon^{1/2}, \tag{2.1.17}$$

$$v_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{2.1.18}$$

On introduit les opérateurs localisants données par la définition suivante.

Définition 2.1.2. Le premier opérateur spécifique, $F_\varepsilon : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \to L^2(\Omega^T)$, défini par

$$F_\varepsilon(\theta)(x,t) = \sum_{k\in Z_\varepsilon} 1_{Y_\varepsilon^k}(x)\, F_\varepsilon^k(\theta)(t), \tag{2.1.19}$$

$$F_\varepsilon^k(\theta)(t) = \frac{1}{r_\varepsilon^{N-1}\mathrm{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)} \int_{\partial D_\varepsilon^k} \theta(z,t) \left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial \nu}\right)\left(\frac{z-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right) d\sigma_z, \tag{2.1.20}$$

où ν est le vecteur normal extérieur à ∂D_ε^k.

Le deuxième opérateur spécifique, $G_\varepsilon : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow L^2(\Omega^T)$, qui est défini par

$$G_\varepsilon(\theta)(x,t) = \sum_{k\in Z_\varepsilon} 1_{Y_\varepsilon^k}(x)\, G_\varepsilon^k(\theta)(t), \tag{2.1.21}$$

$$G_\varepsilon^k(\theta)(t) = \frac{1}{r_\varepsilon^{N-1}\mathrm{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)} \int_{\partial B_\varepsilon^k} \theta(z,t) \left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial \nu}\right)\left(\frac{z-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right) d\sigma_z, \tag{2.1.22}$$

où ν est le vecteur normal extérieur à ∂B_ε^k.

Les opérateurs F_ε et G_ε ont les propriétés donnés par les deux lemmes suivants.

Lemme 2.1.2 ([11]). *Pour tout* $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ *et* $\theta \in H_0^1(\Omega)$*, on a*

$$|\theta - G_\varepsilon(\theta)|_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} \leq C\left(\frac{\varepsilon^N}{R_\varepsilon^{N-2}}\right)^{1/2} |\nabla\theta|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.1.23}$$

$$|\theta - F_\varepsilon(\theta)|_{L^2(D_\varepsilon)} \leq C r_\varepsilon |\nabla\theta|_{L^2(D_\varepsilon)}, \tag{2.1.24}$$

$$|F_\varepsilon(\theta) - G_\varepsilon(\theta)|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\frac{\varepsilon^N}{r_\varepsilon^{N-2}}\right)^{1/2} |\nabla\theta|_{C_\varepsilon}. \tag{2.1.25}$$

De plus,

$$|F_\varepsilon(\theta)|_\Omega^2 = \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |F_\varepsilon(\theta)|^2 dx = \fint_{D_\varepsilon} |F_\varepsilon(\theta)|^2 dx, \tag{2.1.26}$$

$$|G_\varepsilon(\theta)|_\Omega^2 = \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_\varepsilon(\theta)|^2 dx = \fint_{D_\varepsilon} |G_\varepsilon(\theta)|^2 dx. \tag{2.1.27}$$

Lemme 2.1.3 ([11]). *Pour tout* $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ *et* $\theta \in L^\infty(0,T;C^1(\overline{\Omega}))$*, on a*

$$|F_\varepsilon(\theta) - \theta|_{L^\infty(\Omega^T)} \longrightarrow 0, \tag{2.1.28}$$

$$|F_\varepsilon(\theta) - \theta|_{L^\infty(C_\varepsilon^T \cup D_\varepsilon^T)} \leq 2R_\varepsilon |\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega^T)}. \tag{2.1.29}$$

Proposition 2.1.2 ([11]). *Pour tout* $\theta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$*, on a*

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dx dt \leq C \max(1, \frac{1}{\gamma_\varepsilon}) |\nabla\theta|_{L^2(\Omega^T)}^2. \tag{2.1.30}$$

2.1.3 Résultats d'homogénéisation

Dans cette sous-section, nous allons rappeler les résultats d'homogénéisation du problème (2.1.1) obtenus dans [11]. Ces résultats sont prouvés sous les hypothèses suivantes.

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon |D_\varepsilon| = a > 0, \\ \\ b_\varepsilon \geq b_0 > 0, \ \forall \varepsilon > 0, \\ \\ f^\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \end{cases} \tag{2.1.31}$$

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ \\ \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C, \\ \\ \frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ avec } v_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.1.32}$$

Proposition 2.1.3 ([11]). *Sous les hypothèses* (2.1.31) *et* (2.1.32)*, on a*

$$u^\varepsilon \ \textit{bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.1.33}$$

De plus, il existe $C > 0$, indépendante de ε, telle que

$$\fint_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx \leq C \quad \textit{p.p. dans } [0,T]. \tag{2.1.34}$$

Comme dans le chapitre précédent, les résultats d'homogénéisation dépendent de la valeur γ, on distingue les trois cas suivants :

- les particules ont la taille critique $r_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{N}{N-2}})$, correspondant à $\gamma \in]0,+\infty[$.
- les particules sont plus grandes que la taille critique $\varepsilon^{\frac{N}{N-2}} << r_\varepsilon << \varepsilon$, correspondant à $\gamma = +\infty$.
- les particules sont plus petites que la taille critique $0 < r_\varepsilon << \varepsilon^{\frac{N}{N-2}}$, correspondant à $\gamma = 0$.

Théorème 2.1.4 ([11]). *Sous les hypothèses* (2.1.31)-(2.1.32)*, et si $\gamma \in]0,+\infty[$ et $b_\varepsilon \to +\infty$, la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de solutions de* (2.1.1) *vérifie*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textit{dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ u^\varepsilon &\rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

$$\begin{aligned} &F_\varepsilon(u^\varepsilon) \rightharpoonup v \quad \textit{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \\ &\frac{1}{|D_\varepsilon|} u^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v \quad \textit{dans } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

$$G_\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) \longrightarrow u \quad \textit{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \tag{2.1.37}$$

où la limite (u, v) est l'unique solution du problème limite suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + cap(D)\gamma\left(u - v\right) = f & \textit{dans} \quad \Omega^T, \\ a\dfrac{\partial v}{\partial t} + cap(D)\gamma\left(v - u\right) = 0 & \textit{dans} \quad \Omega^T, \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,, \\ u\left(0\right) = u_0, \ v(0) = v_0 & \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1.38}$$

De plus, $(u, v) \in \left(C^0\left([0, T]\,; L^2\left(\Omega\right)\right)\right)^2$.

Théorème 2.1.5 ([11]). *Sous les hypothèses* (2.1.31)-(2.1.32) *et si* $\gamma = +\infty$ *la suite* $\left(u^\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ *de solutions de* (2.1.1) *vérifie*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textit{dans } L^\infty\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right), \\ u^\varepsilon &\rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{2.1.39}$$

$$\begin{aligned} & F_\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) \to u \quad \textit{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \\ & \frac{1}{|D_\varepsilon|} u^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \end{aligned} \tag{2.1.40}$$

où la limite u est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} (1 + a)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \textit{dans} \quad \Omega^T, \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,, \\ u\left(0\right) = \dfrac{1}{(1 + a)} u_0 + \dfrac{a}{(1 + a)} v_0 & \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1.41}$$

De plus, $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

Théorème 2.1.6 ([11]). *Sous les hypothèses* (2.1.31)-(2.1.32) *et si* $\gamma = 0$ *la suite* $\left(u^\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ *de solutions de* (2.1.1) *vérifie*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textit{dans } L^\infty\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right), \\ u^\varepsilon &\rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^2\left(0, T; H_0^1\left(\Omega\right)\right), \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} u^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'\left(\Omega\right) \textit{ p.p.} \quad t \textit{ dans } \left[0, T\right], \tag{2.1.43}$$

où la limite u est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \textit{dans} \quad \Omega^T, \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,, \\ u\left(0\right) = u_0 & \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1.44}$$

De plus, $u \in C^0\left([0, T]\,; L^2\left(\Omega\right)\right)$.

2.2 Étude de correcteur pour une classe de données initiales

Dans cette section, nous montrons que tous les résultats de correcteur du chapitre précédent se généralisent sans problème au cas d'une structure binaire raréfiée par une suspension de très petites particules de forme quelconque distribués dans un réseau $\varepsilon-$périodique, sous les mêmes conditions supplémentaires sur la suite de données initiales u_0^ε .

Rappelons les hypothèses nécessaires pour démontrer les résultats de correcteur

$$u_0^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C, \tag{2.2.1}$$

$$u_0^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{2.2.2}$$

$$\fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \longrightarrow |v_0|_\Omega^2, \tag{2.2.3}$$

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ v_0 \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2.4}$$

Comme précédemment, on peut construire un exemple de suite vérifiant (2.2.1)-(2.2.4). La proposition qui suit et qui est prouvée à la fin de la sous-section qui suit, montre l'existence d'une suite de données initiales u_0^ε vérifiant les hypothèses (2.2.1)-(2.2.4) pour (u_0, v_0) plus lisse que $(L^2(\Omega))^2$.

Pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ et $(\varphi, \psi) \in (H^1(\Omega))^2$ considérons la fonction test suivante

$$\Phi_\varepsilon(\varphi, \psi) := (1 - v_\varepsilon)\varphi + v_\varepsilon F_\varepsilon(\psi), \tag{2.2.5}$$

Proposition 2.2.1.

1. *Pour* $\gamma \in [0, +\infty[$ *et* $(u_0, v_0) \in (L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)) \times C_0^1(\overline{\Omega})$*, la suite* $u_0^\varepsilon := \Phi_\varepsilon(u_0, v_0)$ *vérifie les hypothèses* (2.2.1)-(2.2.4).
2. *Pour* $\gamma = +\infty$ *et* $u_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ *et* $v_0 := u_0$*, la suite* $u_0^\varepsilon := \Phi_\varepsilon(u_0, u_0)$ *vérifie les hypothèses* (2.2.1)-(2.2.4).

2.2.1 Correcteur pour le cas $r_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{N}{N-2}})$

Dans cette sous-section, nous étudions le problème de correcteur du problème (2.1.1) dans le cas

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = \gamma \in]0, +\infty[, \tag{2.2.6}$$

et sous la condition

$$b_\varepsilon \to +\infty. \tag{2.2.7}$$

Notre résultat principal du correcteur est le suivant :

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothèses* (2.2.6), (2.2.7), (2.1.31) *et* (2.2.1)-(2.2.4), *la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *vérifie*

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0, T]; L^2(\Omega)\right), \tag{2.2.8}$$

et

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u,v) + \mathcal{R}_\varepsilon, \ \textit{avec} \\ \mathcal{R}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega)), \end{cases} \tag{2.2.9}$$

où (u,v) *est l'unique solution de* (2.1.38).

Pour montrer ce résultat, on utilise les résultats techniques suivants dont la preuve se trouve à la fin de cette sous-section.

Proposition 2.2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1 on a*

$$\sqrt{a_\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\chi_{D_\varepsilon} \quad \textit{bornée dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.2.10}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \textit{dans } \ L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.2.11}$$

Proposition 2.2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1 on a*

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow E(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.12}$$

où

$$E_\varepsilon(t) := \frac{1}{2}\Big(|u^\varepsilon(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon|u^\varepsilon(t)|^2_{D\varepsilon}\Big) + b_\varepsilon\int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}ds + \int_0^t |\nabla u^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon}ds, \tag{2.2.13}$$

$$E(t) := \frac{1}{2}\Big(|u(t)|^2_{\Omega}+a|v(t)|^2_{\Omega}\Big)+cap(D)\gamma\int_0^t |u-v|^2_{\Omega}ds+\int_0^t |\nabla u|^2_{\Omega}ds, \tag{2.2.14}$$

sont respectivement les énergies associées aux problèmes (2.1.1) *et* (2.1.38).

Proposition 2.2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, pour tout* $(\varphi,\psi) \in (C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)))^2$ *on a*

$$e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \to e(\varphi,\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.15}$$

où Φ_ε *est donné par* (2.2.5) *et*

$$e_\varepsilon(\varphi)(t) := \frac{1}{2}(|\varphi(t)|^2_{\Omega_\varepsilon}+a_\varepsilon|\varphi(t)|^2_{D\varepsilon})+b_\varepsilon\int_0^t |\nabla\varphi|^2_{D_\varepsilon}ds+\int_0^t |\nabla\varphi|^2_{\Omega_\varepsilon}ds, \tag{2.2.16}$$

$$e(\varphi,\psi)(t) := \frac{1}{2}(|\varphi(t)|^2_{\Omega}+a|\psi(t)|^2_{\Omega})+cap(D)\gamma\int_0^t |\varphi-\psi|^2_{\Omega}ds+\int_0^t |\nabla\varphi|^2_{\Omega}ds. \tag{2.2.17}$$

Proposition 2.2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, pour tout* $\psi \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ *on a*

$$⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon\psi(.)\,dx \to \int_\Omega v\psi(.)\,dx \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{2.2.18}$$

Lemme 2.2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, pour tout* $(\varphi,\psi) \in (C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)))^2$ *on a*

$$e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \to e(u-\varphi,v-\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.19}$$

où e_ε *et* e *sont respectivement définies par* (2.2.16) *et* (2.2.17).

Preuve du Théorème 2.2.1. Pour le premier résultat, utilisant (2.1.35)^2 et (2.2.11) nous concluons avec la Proposition 1.1.2 que

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right). \tag{2.2.20}$$

Pour le deuxième résultat, d'abord remarquons que $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, alors le Lemme B.0.1 (voir Annexe B) donne

$$v \in L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right).$$

Ainsi, d'après le Théorème 2.1.4 et le Lemme B.0.1, on a

$$(u,v) \in \left(L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap C^0\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right)\right)^2.$$

On considère une suite (φ_n, ψ_n) dans $(C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)))^2$ (voir Proposition 1.1.1) tel que

$$\varphi_n \to u \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap C^0\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right), \tag{2.2.21}$$

$$\psi_n \to v \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap C^0\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right), \tag{2.2.22}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Comme $b_\varepsilon \geq b_0 > 0$, on a

$$\min\left\{b_0,1\right\}\int_0^t \left|\nabla(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n,\psi_n))\right|_\Omega^2 ds \leq e_\varepsilon\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)(t).$$

On applique le Lemme 2.2.2, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}\min\left\{b_0,1\right\}\int_0^t \left|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)\right|_\Omega^2 ds \leq \left\|e\left(u-\varphi_n, v-\psi_n\right)\right\|_{C^0([0,T])}. \tag{2.2.23}$$

Par conséquent, les convergences (2.2.21) et (2.2.22) nous donnent

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \left|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)\right|_\Omega^2 ds = 0. \tag{2.2.24}$$

On a

$$\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right) = \nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right) + \nabla\left(\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right) - \Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right),$$

avec

$$\nabla\left(\Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right) - \Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right) = \left(1-v_\varepsilon\right)\nabla\left(\varphi_n - u\right) - \left(\varphi_n - u\right)\nabla v_\varepsilon + F_\varepsilon\left(\psi_n - v\right)\nabla v_\varepsilon,$$

alors

$$\left\{\begin{aligned}\left\|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(u,v\right)\right)\right\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq{}& C\left\|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\psi_n\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega^T)} + \\ &+ \left\|\left(1-v_\varepsilon\right)\nabla\left(\varphi_n - u\right)\right\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \\ &+ \left\|\left(\varphi_n - u\right)\nabla v_\varepsilon\right\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \\ &+ \left\|F_\varepsilon\left(\psi_n - v\right)\nabla v_\varepsilon\right\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}.\end{aligned}\right. \tag{2.2.25}$$

On conclut (2.2.9) en montrant que chaque terme dans le membre de droite de (2.2.25) tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$.

Le premier terme tend vers zéro grâce à (2.2.24).

Pour le deuxième terme, en utilisant (2.2.21) et l'estimation $0 \leq v_\varepsilon \leq 1$, on obtient

$$\| (1 - v_\varepsilon) \nabla (\varphi_n - u) \|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C \|\nabla (\varphi_n - u) \|_{L^2(\Omega^T)} \to 0.$$

Pour le troisième terme, de (2.2.21), (2.1.17) et $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on a

$$\| (\varphi_n - u) \nabla v_\varepsilon \|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C \gamma_\varepsilon^{1/2} \|\varphi_n - u\|_{L^2(\Omega^T)} \to 0.$$

Concernant le dernier terme, l'inégalité de Hölder avec l'estimation (2.1.17) entraînent

$$\begin{aligned} \|F_\varepsilon (\psi_n - v) \nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &\leq C\gamma_\varepsilon \|F_\varepsilon (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)} \\ &\leq 2C\gamma_\varepsilon \|F_\varepsilon (\psi_n - v) - G_\varepsilon (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)} \\ &\quad + 4C\gamma_\varepsilon \|G_\varepsilon (\psi_n - v) - (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)} \\ &\quad + 4C\gamma_\varepsilon \|\psi_n - v\|^2_{L^2(\Omega^T)}, \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

de plus, on a

$$\|G_\varepsilon (\psi_n - v) - (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)} = \|\psi_n - v\|^2_{L^2(\Omega^T \setminus \Omega^T_{Y_\varepsilon})} + \|G_\varepsilon(\psi_n - v) - (\psi_n - v)\|^2_{L^2(\Omega^T_{Y_\varepsilon})}. \tag{2.2.27}$$

On applique le Lemme 2.1.2, on obtient

$$\|F_\varepsilon (\psi_n - v) - G_\varepsilon (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)} \leq \frac{C}{\gamma_\varepsilon} \|\nabla (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)}, \tag{2.2.28}$$

et

$$\|G_\varepsilon (\psi_n - v) - (\psi_n - v) \|^2_{L^2\left(\Omega^T_{Y_\varepsilon}\right)} \leq C \frac{\varepsilon^N}{R_\varepsilon^{N-2}} \|\nabla (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)}. \tag{2.2.29}$$

En combinant (2.2.26)-(2.2.29), on obtient

$$\|F_\varepsilon (\psi_n - v) \nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C \left(1 + \left(\frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon} \right)^{N-2} \right) \|\nabla (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)} + C\gamma_\varepsilon \|\psi_n - v\|^2_{L^2(\Omega^T)}.$$

En s'aidant de l'inégalité de Poincaré, $r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon$, et des convergences (2.2.22), $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on aura

$$\|F_\varepsilon (\psi_n - v) \nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C \left(1 + \left(\frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon} \right)^{N-2} + \gamma_\varepsilon \right) \|\nabla (\psi_n - v) \|^2_{L^2(\Omega^T)} \to 0.$$

□

Preuve de la Proposition 2.2.2. On multiplie la première équation de (2.1.1) " formellement" par $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ que l'on intègre sur $\Omega \times (0, t), t \in (0, T)$. Il vient

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \Big|^2 dxds + \frac{1}{2} \int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon (t) |^2 dx = \int_0^t \int_\Omega f^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dxds + \frac{1}{2} \int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx. \tag{2.2.30}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega f^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}dxds=\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}dxds+\int_0^t\int_{D_\varepsilon} f^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}dxds\\&=\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}dxds+\int_0^t\int_{D_\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{a_\varepsilon}}f^\varepsilon\right)\left(\sqrt{a_\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)dxds\\&\leq\frac{1}{2}\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^T)}+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds+\frac{1}{2a_\varepsilon}\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^T)}+\frac{a_\varepsilon}{2}\int_0^t\int_{D_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds.\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\frac{1}{2a_\varepsilon}=\frac{|D_\varepsilon|}{2a_\varepsilon|D_\varepsilon|},$$

alors par utilisation de $(2.1.31)^1$, $(2.1.31)^3$ et $|D_\varepsilon|\to 0$ on obtient

$$\int_0^t\int_\Omega f^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}dxds\leq C+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds+\frac{a_\varepsilon}{2}\int_0^t\int_{D_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds. \tag{2.2.31}$$

En combinant (2.2.30) et (2.2.31), on conclut à l'aide de (2.2.1) l'estimation globale

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds+\frac{a_\varepsilon}{2}\int_0^t\int_{D_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds+\frac{1}{2}\int_\Omega k^\varepsilon|\nabla u^\varepsilon\left(t\right)|^2dx\leq C, \tag{2.2.32}$$

d'où, l'estimation (2.2.10).

Par ailleurs, de $|D_\varepsilon|\to 0$, $a_\varepsilon|D_\varepsilon|\to a$ et (2.2.32), on obtient

$$\int_0^t\int_\Omega\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds=\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds+|D_\varepsilon|\frac{1}{a_\varepsilon|D_\varepsilon|}a_\varepsilon\int_0^t\int_{D_\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2dxds\leq C,$$

alors l'estimation précédente avec $(2.1.35)^2$ entraînent (2.2.11). □

Preuve de la Proposition 2.2.3. Nous avons les identités d'énergies suivantes

$$\begin{aligned}E_\varepsilon(t)&=E_\varepsilon(0)+\int_0^t\int_\Omega f^\varepsilon u^\varepsilon dxds,\\E(t)&=E(0)+\int_0^t\int_\Omega fudxds,\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

avec

$$\begin{aligned}E_\varepsilon(0)&=\frac{1}{2}\Big(|u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon}+a_\varepsilon|u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}\Big),\\E(0)&=\frac{1}{2}\Big(|u_0|^2_\Omega+a|v_0|^2_\Omega\Big).\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

La démonstration de la convergence (2.2.12) se fait en deux étapes.

Première étape. On montre la convergence simple en temps suivante

$$E_\varepsilon(t)\longrightarrow E(t),\ \text{pour tout } t\in[0,T]. \tag{2.2.35}$$

En utilisant les convergences $(2.1.31)^3$ et (2.2.20), on aura

$$\int_0^t\int_\Omega f^\varepsilon u^\varepsilon dxds\longrightarrow\int_0^t\int_\Omega fudxds. \tag{2.2.36}$$

Par ailleurs, l'hypothèse (2.2.3) and $|D_\varepsilon| \to 0$, implique que

$$|u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} = |D_\varepsilon| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \to 0, \tag{2.2.37}$$

ainsi les convergences (2.2.20) et (2.2.37) entraînent que

$$\Big| |u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} - |u_0|^2_\Omega \Big| \leq \Big| |u_0^\varepsilon|^2_\Omega - |u_0|^2_\Omega - |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} \Big| \leq \Big| |u_0^\varepsilon|^2_\Omega - |u_0|^2_\Omega \Big| + |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} \to 0,$$

alors

$$|u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} \longrightarrow |u_0|^2_\Omega. \tag{2.2.38}$$

Grâce à $a_\varepsilon |D_\varepsilon| \to a$ et (2.2.3), on obtient

$$a_\varepsilon |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} = a_\varepsilon |D_\varepsilon| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx \longrightarrow a|v_0|^2_\Omega. \tag{2.2.39}$$

De (2.2.33), (2.2.34), (2.2.36), (2.2.38) et (2.2.39), on conclut (2.2.35).

Deuxième étape. montrons la convergence uniforme de l'énergie.

Pour montrer la convergence uniforme de l'énergie, on applique le Théorème d'Ascoli-Arzela. En effet, on applique l'inégalité de Hölder dans (2.2.33)[1] et on utilise (2.1.31)[3], (2.1.33), (2.2.38) et (2.2.39), on obtient

$$|E_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2}\Big(|u_0^\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon |u_0^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} \Big) + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)} \leq C. \tag{2.2.40}$$

Maintenant, pour tout $t \in [0, T[$ et $h > 0$ assez petit, on a

$$\begin{aligned} |E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t)| &\leq \int_t^{t+h} \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \int_t^{t+h} \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq Ch^{1/2}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder, (2.1.31)[3] et (2.1.33). Cette inégalité implique que

$$|E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t)| \to 0 \quad \text{lorsque } h \to 0, \text{ uniformément en } \varepsilon, \tag{2.2.41}$$

Par conséquent, de (2.2.35), (2.2.40), (2.2.41) et du Théorème d'Ascoli-Arzela, en déduit la convergence (2.2.12). □

Preuve de la Proposition 2.2.4. Rappelons d'abord que pour tout $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ et $(\varphi, \psi) \in (C^\infty([0,T]; \mathcal{D}(\Omega)))^2$ on a

$$\Phi_\varepsilon(\varphi, \psi) := (1 - v_\varepsilon)\varphi + v_\varepsilon F_\varepsilon(\psi), \tag{2.2.42}$$

alors d'après la Définition 2.1.1, on a

$$\Phi_\varepsilon(\varphi, \psi) := \begin{cases} \varphi & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon, \\ (1 - v_\varepsilon)\varphi + v_\varepsilon F_\varepsilon(\psi) & \text{dans} \quad C_\varepsilon, \\ F_\varepsilon(\psi) & \text{dans} \quad D_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.2.43}$$

et

$$\nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) := \begin{cases} \nabla\varphi & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon, \\ (1-v_\varepsilon)\nabla\varphi + \nabla v_\varepsilon (F_\varepsilon(\psi)-\varphi) & \text{dans } C_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } D_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.2.44}$$

Maintenant retournons à la démonstration de la convergence (2.2.15). Pour $(\varphi,\psi) \in (C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)))^2$ on a

$$\begin{cases} e_\varepsilon\left(\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)\right)(t) = \dfrac{1}{2}\Big(|\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} + a_\varepsilon|\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{D\varepsilon}\Big) + \\ \qquad + b_\varepsilon \displaystyle\int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)|^2_{D_\varepsilon} ds + \int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)|^2_{\Omega_\varepsilon} ds. \end{cases} \tag{2.2.45}$$

Nous allons passer successivement à la limite dans chaque terme de la partie droite de l'égalité ci-dessus.

Premier terme. Notons que

$$\Big||\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{\Omega_\varepsilon} - |\varphi\left(t\right)|^2_{\Omega}\Big| \leq \Big||\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{\Omega} - |\varphi\left(t\right)|^2_{\Omega}\Big| + |\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{D_\varepsilon},$$

de plus, on obtient en vertu de (2.1.18) et la bornitude uniforme de $F_\varepsilon(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ (voir Lemme 2.1.3)

$$\begin{aligned} \Big||\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{\Omega} - |\varphi\left(t\right)|^2_{\Omega}\Big| &= \Big||\varphi(t) + v_\varepsilon(F_\varepsilon(\psi)-\varphi)\left(t\right)|^2_{\Omega} - |\varphi\left(t\right)|^2_{\Omega}\Big| \\ &= \Big||v_\varepsilon(F_\varepsilon(\psi)-\varphi)\left(t\right)|^2_{\Omega} + 2\int_\Omega v_\varepsilon\varphi(F_\varepsilon(\psi)-\varphi)\left(t\right)dx\Big| \\ &\leq |v_\varepsilon|^2_\Omega |F_\varepsilon(\psi)-\varphi|^2_{L^\infty(\Omega^T)} + 2|v_\varepsilon|_\Omega |\varphi(F_\varepsilon(\psi)-\varphi)|_{L^\infty(\Omega^T)} \to 0, \end{aligned}$$

et

$$|\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{D_\varepsilon} = |F_\varepsilon(\psi)(t)|^2_{D_\varepsilon} \leq |F_\varepsilon(\psi)|^2_{L^\infty(\Omega^T)}|D_\varepsilon| \leq C|D_\varepsilon| \to 0.$$

Donc

$$|\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(.)|^2_{\Omega_\varepsilon} \longrightarrow |\varphi\left(.\right)|^2_{\Omega} \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{2.2.46}$$

Deuxième terme. On a

$$a_\varepsilon|\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(t)|^2_{D\varepsilon} = a_\varepsilon|F_\varepsilon\left(\psi\right)(t)|^2_{D\varepsilon} = a_\varepsilon|D_\varepsilon|\fint_{D_\varepsilon} |F_\varepsilon\left(\psi\right)(t)|^2 dx,$$

en s'aidant du Lemme 2.1.2, de la convergence uniforme de $F_\varepsilon(\psi)$ vers ψ (voir Lemme 2.1.3) et de la convergence $a_\varepsilon|D_\varepsilon| \to a$, on déduit

$$\begin{gathered} a_\varepsilon|\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)(.)|^2_{D\varepsilon} = a_\varepsilon|D_\varepsilon|\int_\Omega |F_\varepsilon\left(\psi\right)(.)|^2 dx \to a|\psi(.)|^2_\Omega, \\ \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \end{gathered} \tag{2.2.47}$$

Troisième terme. En sachant que $\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) = 0$ dans D_ε, il vient

$$b_\varepsilon \int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right)|^2_{D_\varepsilon} ds = 0. \tag{2.2.48}$$

Dernier terme. Il s'écrit

$$\int_0^t |\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)|^2_{\Omega_\varepsilon} ds = \int_0^t |\nabla\varphi|^2_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon} ds + \int_0^t |(1-v_\varepsilon)\nabla\varphi + (F_\varepsilon(\psi)-\varphi)\nabla v_\varepsilon|^2_{C_\varepsilon} ds$$
$$:= A_1 + A_2.$$

Remarquons que pour A_1, on a

$$\Big|\int_0^t |\nabla\varphi|^2_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon} ds - \int_0^t |\nabla\varphi|^2_\Omega ds\Big| = \int_0^t |\nabla\varphi|^2_{D_\varepsilon\cup C_\varepsilon} ds \le T|D_\varepsilon\cup C_\varepsilon| \|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega^T)},$$

et en sachant que card$(Z_\varepsilon) \simeq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^N}$ et $|\Omega| = 1$, on aura

$$\begin{aligned} |D_\varepsilon\cup C_\varepsilon| &= \Big|\bigcup_{k\in Z_\varepsilon} B(\varepsilon k, R_\varepsilon)\Big| \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \big|B(\varepsilon k, R_\varepsilon)\big| \\ &= \text{card}(Z_\varepsilon)\big|B(0,R_\varepsilon)\big| \\ &\simeq \frac{1}{\varepsilon^N} C R_\varepsilon^N \\ &\simeq C\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^N \to 0, \end{aligned} \tag{2.2.49}$$

par conséquent

$$A_1 \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dxds \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{2.2.50}$$

Pour traiter A_2, nous décomposons A_2 en trois termes définis ci-dessous, qui seront traités séparément

$$\begin{cases} A_2 = \displaystyle\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(1-v_\varepsilon)\nabla\varphi|^2 dxds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(F_\varepsilon(\psi)-\varphi)\nabla v_\varepsilon|^2 dxds + \\ \qquad + 2\displaystyle\int_0^t \int_{C_\varepsilon} (1-v_\varepsilon)\nabla\varphi\,(F_\varepsilon(\psi)-\varphi)\nabla v_\varepsilon dxds \\ := A_2^1 + A_2^2 + A_2^3. \end{cases}$$

En utilisant $0 \le v_\varepsilon \le 1$, on obtient

$$\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(1-v_\varepsilon)\nabla\varphi|^2 dxds \le T|C_\varepsilon| \|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega^T)},$$

en sachant que

$$\begin{aligned} |C_\varepsilon| &= \Big|\bigcup_{k\in Z_\varepsilon} B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k\Big| \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \big|B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k\big| \\ &= \text{card}(Z_\varepsilon)\big|B_\varepsilon\setminus D_\varepsilon\big| \\ &= \text{card}(Z_\varepsilon)\Big(\big|B(0,R_\varepsilon)\big| - \big|r_\varepsilon D\big|\Big) \\ &\simeq \frac{1}{\varepsilon^N}\Big(CR_\varepsilon^N - Cr_\varepsilon^N\Big) \\ &\simeq C\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^N - C\left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^N \to 0. \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

Alors, on trouve que

$$A_2^1 \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{2.2.52}$$

En s'aidant des estimations de la Proposition 2.1.1, et de la bornitude uniforme de $F_\varepsilon(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$, on obtient

$$\Big|\int_0^t\int_{C_\varepsilon}\left(1-v_\varepsilon\right)\nabla\varphi\left(F_\varepsilon\left(\psi\right)-\varphi\right)\nabla v_\varepsilon dxds\Big| \leq C\gamma_\varepsilon^{1/2}|C_\varepsilon|^{1/2},$$

de plus, les convergences $\gamma_\varepsilon \longrightarrow \gamma$ et $|C_\varepsilon| \longrightarrow 0$ nous donne

$$A_2^3 \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0\left([0,T]\right). \tag{2.2.53}$$

Pour étudier A_2^2, on commence par décomposer A_2^2 en trois termes définis ci-dessous qui seront traités séparément.

$$\begin{cases} A_2^2 = \displaystyle\int_0^t\int_{C_\varepsilon}|\left(F_\varepsilon\left(\psi\right)-F_\varepsilon\left(\varphi\right)\right)\nabla v_\varepsilon|^2dxds + \int_0^t\int_{C_\varepsilon}|\left(F_\varepsilon\left(\varphi\right)-\varphi\right)\nabla v_\varepsilon|^2dxds + \\ \qquad + 2\displaystyle\int_0^t\int_{C_\varepsilon}\left(F_\varepsilon\left(\psi\right)-F_\varepsilon\left(\varphi\right)\right)\left(F_\varepsilon\left(\varphi\right)-\varphi\right)|\nabla v_\varepsilon|^2dxds \\ \quad := A_2^{2,1} + A_2^{2,2} + A_2^{2,3}. \end{cases}$$

D'après la Définition 2.1.1 de v_ε, on a

$$\begin{aligned} A_2^{2,1} &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^t\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}|F_\varepsilon\left(\psi\right)-F_\varepsilon\left(\varphi\right)|^2|\nabla v_\varepsilon^k|^2dxds \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}|\nabla v_\varepsilon^k|^2dx\right)\left(\int_0^t|F_\varepsilon^k(\psi)(s)-F_\varepsilon^k(\varphi)(s)|^2ds\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, encore d'après la Définition 2.1.1 de v_ε, on a

$$\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}|\nabla v_\varepsilon^k|^2dx = \int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}\Big|\frac{1}{r_\varepsilon}\nabla w_{\lambda_\varepsilon}\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)\Big|^2dx, \tag{2.2.54}$$

alors, par le changement de variable suivant

$$y = \frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon},\ x\in B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k,\ y\in B(0,\lambda_\varepsilon)\setminus D,$$

on aura

$$\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}|\nabla v_\varepsilon^k|^2dx = r_\varepsilon^{N-2}\int_{B(0,\lambda_\varepsilon)\setminus D}|\nabla w_{\lambda_\varepsilon}\left(y\right)|^2dy,$$

en sachant que (2.1.10), on aura

$$\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}|\nabla v_\varepsilon^k|^2dx = r_\varepsilon^{N-2}\mathrm{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D). \tag{2.2.55}$$

En remplaçant (2.2.55) dans $A_2^{2,1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
A_2^{2,1} &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} r_\varepsilon^{N-2}\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)\left(\int_0^t |F_\varepsilon^k(\psi)(s)-F_\varepsilon^k(\varphi)(s)|^2 ds\right)\\
&= \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^N}\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\int_0^t\int_\Omega |F_\varepsilon^k(\psi)(s)-F_\varepsilon^k(\varphi)(s)|^2\chi_{Y_\varepsilon^k}dxds\right)\\
&= \gamma_\varepsilon\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\int_0^t\int_\Omega |F_\varepsilon^k(\psi)(s)-F_\varepsilon^k(\varphi)(s)|^2\chi_{Y_\varepsilon^k}dxds\right)\\
&= \gamma_\varepsilon\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)\int_0^t\int_\Omega |F_\varepsilon(\psi)-F_\varepsilon(\varphi)|^2dxds.
\end{aligned}$$

Alors, en passant à la limite et en tenant compte des convergences (2.1.11), (2.1.28), et $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on obtient

$$A_2^{2,1} \longrightarrow \text{cap}(D)\gamma\int_0^t\int_\Omega |\psi-\varphi|^2dxds \quad \text{fortemnet dans } C^0([0,T]). \quad (2.2.56)$$

De (2.1.29) et $|\nabla v_\varepsilon|_\Omega \le C\gamma_\varepsilon^{1/2}$, le terme $A_2^{2,2}$ peut être estimé par

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{C_\varepsilon} |(F_\varepsilon(\varphi)-\varphi)\nabla v_\varepsilon|^2dxds &\le C\gamma_\varepsilon|F_\varepsilon(\varphi)-\varphi|^2_{L^\infty(C_\varepsilon^T)}\\
&\le C\gamma_\varepsilon R_\varepsilon^2|\nabla\varphi|^2_{L^\infty(\Omega^T)},
\end{aligned}$$

comme $R_\varepsilon \to 0$ et $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, en déduit que

$$A_2^{2,2} \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \quad (2.2.57)$$

Concernant $A_2^{2,3}$, en utilisant les mêmes arguments utilisés pour prouver (2.2.57), nous obtenons

$$A_2^{2,3} \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \quad (2.2.58)$$

Enfin, en combinant (2.2.46), (2.2.47), (2.2.48), (2.2.50), (2.2.52), (2.2.53), (2.2.56), (2.2.57) et (2.2.58), on conclut la convergence (2.2.15). □

Preuve de la Proposition 2.2.5. Tout d'abord nous allons prouver que

$$⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon\psi(.)\,dx \longrightarrow \int_\Omega v\psi(.)\,dx \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T). \quad (2.2.59)$$

Pour $\phi\in\mathcal{D}(0,T)$, on a

$$\left\langle ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon\psi dx,\phi\right\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(0,T)} = \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon\psi\phi dxdt,$$

alors, en utilisant (2.1.36)^2 on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon\psi dx,\phi\right\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(0,T)} = \int_0^T\int_\Omega v\psi\phi dxdt = \left\langle\int_\Omega v\psi dx,\phi\right\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(0,T)},$$

ce qui montre que (2.2.59) est vrais.

La convergence (2.2.59) est dans $C^0([0,T])$, puisque la fonction $⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi dx$ est bornée dans $H^1(0,T)$ et l'injection $H^1(0,T) \subset C^0([0,T])$ est compacte. En effet, de (2.1.34) on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big| ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \psi dx\Big|^2 dt &\le \int_0^T \left(⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx\right)\left(⨍_{D_\varepsilon} |\psi|^2 dx\right) dt \\ &\le C|\psi|^2_{L^\infty(\Omega^T)} \le C,\end{aligned} \tag{2.2.60}$$

de plus, on a

$$\frac{d}{dt}\left(⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\psi(t)dx\right) = ⨍_{D_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\psi(t)dx + ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(t)\frac{\partial \psi}{\partial t}(t)dx,$$

alors, en utilisant le même raisonnement que dans (2.2.60), et en tenant compte de la convergence $a_\varepsilon|D_\varepsilon| \to a$, (2.1.34), (2.2.10), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big|\frac{d}{dt}⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon\psi dx\Big|^2 dt &\le 2\int_0^T \left(|\psi|^2_{L^\infty(\Omega^T)} ⨍_{D_\varepsilon}\Big|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \Big|\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|^2_{L^\infty(\Omega^T)} ⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx\right) dt \\ &\le 2\int_0^T \left(|\psi|^2_{L^\infty(\Omega^T)} \frac{1}{a_\varepsilon|D_\varepsilon|} a_\varepsilon \int_{D_\varepsilon}\Big|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \Big|\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|^2_{L^\infty(\Omega^T)} ⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx\right) dt \\ &\le C.\end{aligned}$$

□

Preuve du Lemme 2.2.2. Pour tout $t \in [0,T]$ fixe, d'après (2.2.43) et (2.2.44), on a

$$\left\{\begin{aligned} e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(t) &= e_\varepsilon(u^\varepsilon)(t) + e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(t) \\ &\quad - \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx - a_\varepsilon \int_{D_\varepsilon} u^\varepsilon F_\varepsilon(\psi)(t)\,dx \\ &\quad - 2\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\,dxds \\ &:= I^1_\varepsilon + I^2_\varepsilon - I^3_\varepsilon - I^4_\varepsilon - 2I^5_\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{2.2.61}$$

Nous allons passer successivement à la limite dans chaque terme de la partie droite de l'égalité ci-dessus.

Le terme I^1_ε. En sachant que $I^1_\varepsilon(.) = E_\varepsilon(.)$ et $e(u,v)(.) = E(.)$, et grâce à la Proposition 2.2.3, on a

$$I^1_\varepsilon(.) \longrightarrow e(u,v)(.) \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{2.2.62}$$

Le terme I^2_ε. D'après la Proposition 2.2.4, on a

$$I^2_\varepsilon(.) \longrightarrow e(\varphi,\psi)(.) \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{2.2.63}$$

Le terme I^3_ε. On a

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx - \int_\Omega u\varphi(t)\,dx\Big| &\le \Big|\int_{\Omega_\varepsilon}(u^\varepsilon - u)(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big| + \\ &+ \Big|\int_{D_\varepsilon} u(t)\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx\Big| + \Big|\int_\Omega u(t)\left(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi) - \varphi\right)(t)\,dx\Big| \\ &\le |(u^\varepsilon - u)(t)|_{L^2(\Omega)}|(1-v_\varepsilon)\varphi(t) + v_\varepsilon F_\varepsilon(\psi)(t)|_{L^2(\Omega)} + \\ &+ |u(t)|_{L^2(\Omega)}\Big(|F_\varepsilon(\psi)(t)|_{L^2(D_\varepsilon)} + |v_\varepsilon(F_\varepsilon(\psi) - \varphi)(t)|_{L^2(C_\varepsilon)} + |(F_\varepsilon(\psi) - \varphi)(t)|_{L^2(D_\varepsilon)}\Big).\end{aligned}$$

En utilisant (2.1.16) et la bornitude uniforme de $F_\varepsilon(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$, on obtient

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)(t)\,dx-\int_\Omega u\varphi(t)dx\right|\leq C|u^\varepsilon-u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+$$
$$+|u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\Big(|F_\varepsilon(\psi)|_{L^\infty(\Omega^T)}|D_\varepsilon|^{1/2}+C|v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}+|F_\varepsilon(\psi)-\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)}|D_\varepsilon|^{1/2}\Big).$$

Ainsi, comme $v_\varepsilon\to 0$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et $|D_\varepsilon|\to 0$, et grâce à (2.2.20), on déduit

$$I_\varepsilon^3\to\int_\Omega u\varphi(.)dx\quad\text{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{2.2.64}$$

Le terme I_ε^4. Tenant compte de la convergence $a_\varepsilon|D_\varepsilon|\to a$ et de la Proposition 2.2.5, il vient

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^4(.) &= a_\varepsilon|D_\varepsilon|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon F_\varepsilon(\psi)(.)\,dx \\ &\to a\int_\Omega v\psi(.)dx\quad\text{fortement dans } C^0([0,T]). \end{aligned} \tag{2.2.65}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\left|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon F_\varepsilon(\psi)(t)dx-\int_\Omega v\psi(t)dx\right| &\leq \left|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(F_\varepsilon(\psi)-\psi)dx\right| \\ &\quad+\left|\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon\psi(t)dx-\int_\Omega v\psi(t)dx\right|,\end{aligned}$$

où le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro fortement dans $C^0([0,T])$, grâce au estimation (2.1.34) et la convergence uniforme de $F_\varepsilon(\psi)$ vers ψ, et la Proposition 2.2.5.

Le terme I_ε^5. En utilisant les mêmes arguments utilisés dans le Théorème 5.4 [11] (voir Annexe C.4), on obtient

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^5(t) &\to \int_0^t\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+\text{cap}(D)\gamma(v-u)(\psi-\varphi))dxds, \\ &\quad\text{pour chaque } t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{2.2.66}$$

Maintenant, nous voulons montrer que la convergence précédente reste valable dans $C^0([0,T])$. En effet, on applique l'inégalité de Hölder dans I_ε^5 et on utilise (2.1.33), les estimations de la Proposition 2.1.1, la bornitude uniforme de $F_\varepsilon(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ (voir Lemme 2.1.3) et le fait que $\gamma_\varepsilon\to\gamma$, pour $t\in[0,T[$, $h>0$ assez petit, on a

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon^5(t+h)-I_\varepsilon^5(t)| &\leq \|\nabla\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^T)}h^{1/2} \\ &\leq C\|(1-v_\varepsilon)\nabla\varphi+(F_\varepsilon(\psi)-\varphi)\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}h^{1/2} \\ &\leq Ch^{1/2}.\end{aligned}$$

Ainsi, le Théorème d'Ascoli-Arzela nous donne

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^5(.) &\to \int_0^t\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+\text{cap}(D)\gamma(v-u)(\psi-\varphi))dxds, \\ &\quad\text{fortement dans } C^0([0,T]). \end{aligned} \tag{2.2.67}$$

Finalement, en combinant (2.2.62)-(2.2.67), alors on conclut la convergence (2.2.19). □

Preuve de la Proposition 2.2.1. 1. Cas $\gamma \in [0, +\infty[$. D'abord remarquons qu'avec la supposition $v_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$, le Lemme 2.1.3 nous donne

$$F_\varepsilon(v_0) \in L^\infty(\Omega),$$

de plus, en sachant que $v_\varepsilon \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $(u_0, v_0) \in (L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)) \times C_0^1(\overline{\Omega})$, on a alors $u_0^\varepsilon \in H^1(\Omega)$.

Démontrons (2.2.1), d'après (2.2.44) on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx &= \int_\Omega k^\varepsilon |\nabla \Phi_\varepsilon(u_0, v_0)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{C_\varepsilon} |(1 - v_\varepsilon)\nabla u_0 + (F_\varepsilon(v_0) - u_0)\nabla v_\varepsilon|^2 dx \\ &\leq \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega |(1 - v_\varepsilon)\nabla u_0|^2 dx + 2\int_\Omega |(F_\varepsilon(v_0) - u_0)\nabla v_\varepsilon|^2 dx.\end{aligned}$$

En utilisant les estimations de la Proposition 2.1.1, le Lemme 2.1.3 et le fait que $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx &\leq C + 2\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|F_\varepsilon(v_0) - u_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C + C\|F_\varepsilon(v_0) - u_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \gamma_\varepsilon \\ &\leq C.\end{aligned} \tag{2.2.68}$$

Démontrons (2.2.2). Tenant compte de la convergence (2.1.18) et du Lemme 2.1.3, il vient

$$\|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} = \|v_\varepsilon(F_\varepsilon(v_0) - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|F_\varepsilon(v_0) - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Maintenant on démontre (2.2.3). D'après (2.2.43) on a

$$\left| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right| = \left| \fint_{D_\varepsilon} |F_\varepsilon(v_0)|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right|,$$

ainsi, le Lemme 2.1.2 et la convergence uniform de $F_\varepsilon(v_0)$ vers v_0 (voir Lemme 2.1.3), nous permet de conclure

$$\left| \fint_{D_\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right| = \left| \int_\Omega |F_\varepsilon(v_0)|^2 dx - |v_0|^2_\Omega \right| \longrightarrow 0.$$

Démontrons (2.2.4). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(\Omega)} &= \fint_{D_\varepsilon} u_0^\varepsilon(x)\, \varphi(x) dx \\ &= \fint_{D_\varepsilon} F_\varepsilon(v_0)(x)\, \varphi(x) dx \\ &= \fint_{D_\varepsilon} (F_\varepsilon(v_0) - v_0)\varphi(x) dx + \fint_{D_\varepsilon} v_0(x)\, \varphi(x) dx \\ &:= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon.\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.1.3, on obtient

$$|I_1^\varepsilon| \leq \left(\fint_{D_\varepsilon} |F_\varepsilon(v_0) - v_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\fint_{D_\varepsilon} |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.69}$$

$$\leq |F_\varepsilon(v_0) - v_0|_{L^\infty(\Omega)} |\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \to 0.$$

Le Théorème de la moyenne entraîne qu'il existe $\xi_\varepsilon^k \in D_\varepsilon^k$ tel que

$$I_2^\varepsilon = \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^k} v_0(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} |D_\varepsilon^k| v_0(\xi_\varepsilon^k) \varphi(\xi_\varepsilon^k),$$

or

$$|D_\varepsilon| = \text{card}(Z_\varepsilon) |D_\varepsilon^k|,$$

et

$$\text{card}(Z_\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{\varepsilon^N} = \frac{1}{\varepsilon^N} = \frac{1}{|Y_\varepsilon^k|}.$$

Ainsi, la définition de l'intégrale de Lebesgue nous donne

$$I_2^\varepsilon = \sum_{k \in Z_\varepsilon} v_0(\xi_\varepsilon^k) \varphi(\xi_\varepsilon^k) |Y_\varepsilon^k| \longrightarrow \int_\Omega v_0(x) \varphi(x) dx. \tag{2.2.70}$$

De (2.2.69) et (2.2.70), en déduit que

$$\left\langle \frac{1}{|D_\varepsilon|} u_0^\varepsilon \chi_{D_\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}(\Omega)} \to \int_\Omega v_0(x) \varphi(x) dx,$$

par conséquent la convergence (2.2.4).

2. Cas $\gamma = +\infty$. Les preuves des hypothèses (2.2.1)-(2.2.4) sont similaires à celles correspondantes au cas $\gamma \in [0, +\infty[$, la différence réside dans la démonstration de l'estimation (2.2.1). En effet, d'après (2.2.68) on a

$$\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C + C \|F_\varepsilon(u_0) - u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \gamma_\varepsilon.$$

En utilisant le Lemme 2.1.3, et le fait que $r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon$, on obtient

$$\int_\Omega k^\varepsilon |\nabla u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C + C R_\varepsilon^2 \gamma_\varepsilon |\nabla u_0|_{L^\infty(\Omega)}^2 = C + C \left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{N-2} \leq C.$$

□

2.2.2 Correcteur pour le cas $\varepsilon^{\frac{N}{N-2}} << r_\varepsilon << \varepsilon$

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème de correcteur pour le problème (2.1.1) dans le cas

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = +\infty. \tag{2.2.71}$$

Le résultat principal de correcteur obtenu dans ce cas est le suivant :

Théorème 2.2.3. *Sous les hypothèses* (2.2.71)*,* (2.1.31)*,* (2.2.1)-(2.2.4) *avec* $v_0 := u_0$*, la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *vérifie*

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right), \tag{2.2.72}$$

et

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u,u) + \mathcal{R}_\varepsilon, \ \textit{avec} \\ \mathcal{R}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega)), \end{cases} \tag{2.2.73}$$

où u *est l'unique solution de* (2.1.41).

Comme dans le paragraphe précédent, on a besoin des résultats techniques suivants.

Proposition 2.2.6. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.3 on a*

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow E_1(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.74}$$

avec

$$E_1(t) := \frac{1}{2}(1+a)|u(t)|_\Omega^2 + \int_0^t |\nabla u|_\Omega^2 ds,$$

l'énergie du problème (2.1.41).

De plus, pour tout $\varphi \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ *on a*

$$e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi))(.) \to e(\varphi,\varphi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.75}$$

$$⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi\,(.)\,dx \to \int_\Omega u\varphi\,(.)\,dx \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0,T]\right), \tag{2.2.76}$$

$$e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi))(.) \to e(u-\varphi,u-\varphi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]). \tag{2.2.77}$$

Remarque 4. Notons que dans ce cas, il est facile de constater que la Proposition 2.2.2 reste valable sous les hypothèses du Théorème 2.2.3.

Preuve du Théorème 2.2.3. Le premier résultat est une conséquence directe des convergences $(2.1.39)^2$, (2.2.11) et de la Proposition 1.1.2.

Pour le deuxième résultat, observons d'abord que du Théorème 2.1.5 on a

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

On considère une suite φ_n dans $C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ telle que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\varphi_n \to u \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap C^0\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right). \tag{2.2.78}$$

On a

$$\begin{aligned} \|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(u,u\right)\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq{}& C\|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon\left(\varphi_n,\varphi_n\right)\right)\|_{L^2(\Omega^T)} + \\ &+ \|\left(1-v_\varepsilon\right)\nabla\left(\varphi_n - u\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \\ &+ \|\left(F_\varepsilon\left(\varphi_n - u\right) - \left(\varphi_n - u\right)\right)\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}. \end{aligned} \tag{2.2.79}$$

Observons d'abord, que les deux premiers termes du terme de droite de l'inégalité ci-dessus tendent vers zéro, la preuve est similaire à celle correspondante au Théorème 2.2.1.

Concernant le dernier terme, l'inégalité de Hölder avec l'estimation (2.1.17) entraînent que

$$\begin{aligned}\| (F_\varepsilon(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)) \nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &= \| (F_\varepsilon(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)) \nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^1(C_\varepsilon))} \\ &\leq C\gamma_\varepsilon \|F_\varepsilon(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\|^2_{L^2(C_\varepsilon^T)} \\ &\leq 2C\gamma_\varepsilon \Big(\|F_\varepsilon(\varphi_n - u) - G_\varepsilon(\varphi_n - u)\|^2_{L^2(C_\varepsilon^T)} + \\ &\quad + \|G_\varepsilon(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)\|^2_{L^2(C_\varepsilon^T)}\Big),\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.1.2, de plus par utilisation de $r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon$, (2.2.78) on obtient

$$\| (F_\varepsilon(\varphi_n - u) - (\varphi_n - u)) \nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C \left(1 + \left(\frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon}\right)^{N-2}\right) \|\nabla(\varphi_n - u)\|^2_{L^2(\Omega^T)} \to 0.$$

Par conséquent, en notant que le membre de droite de (2.2.79) tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$, en déduit la convergence (2.2.73) et la preuve est complète. $\square$

Preuve de la Proposition 2.2.6. On reprend les démonstrations des résultats correspondantes à la sous-section précédente, dans la suite on fera apparaitre seulement les différences notables dans la démonstration de chaque résultat.

1) La convergence (2.2.74), se démontre comme la convergence correspondante dans la Proposition 2.2.3. L'énergie associée au problème limite (2.1.41) est donnée par

$$E_1(t) := \frac{1}{2}(1+a)|u(t)|^2_\Omega + \int_0^t |\nabla u|^2_\Omega ds,$$

avec

$$E_1(t) := E_1(0) + \int_0^t \int_\Omega fudxds,$$

et

$$E_1(0) := \frac{1}{2}(1+a)\Big|\frac{1}{(1+a)}u_0 + \frac{a}{(1+a)}v_0\Big|^2_\Omega.$$

Grâce au hypothèse $v_0 := u_0$, on trouve que

$$E_1(0) := \frac{1}{2}(1+a)|u_0|^2_\Omega.$$

2) La deuxième différence se trouve dans la démonstration de la convergence (2.2.75), plus précisément lorsque on traite le terme A_2 (voir la démonstration de la Proposition 2.2.4). En effet

$$\begin{aligned}A_2 &= \int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(1-v_\varepsilon)\nabla\varphi + (F_\varepsilon(\varphi) - \varphi)\nabla v_\varepsilon|^2 dxds \leq \\ &\leq 2\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(1-v_\varepsilon)\nabla\varphi|^2 dxds + 2\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |(F_\varepsilon(\varphi) - \varphi)\nabla v_\varepsilon|^2 dxds \leq \\ &\leq 2T\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega^T)}|C_\varepsilon| + 2T|F_\varepsilon(\varphi) - \varphi|^2_{L^\infty(C_\varepsilon^T)}|\nabla v_\varepsilon|^2_{L^2(C_\varepsilon)} \leq \\ &\leq C|C_\varepsilon| + CR_\varepsilon^2\gamma_\varepsilon = C|C_\varepsilon| + C\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{N-2} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les estimations de la Proposition 2.1.1, le Lemme 2.1.3 et les faits qui $|C_\varepsilon| \to 0$, $r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon$.

3) En ce qui concerne la dernière convergence, en utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme 2.2.2, la différence provient de la limite de I_ε^5, qui est dans ce cas

$$I_\varepsilon^5 = \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi) dxds \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxds, \text{ fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.80}$$

où la démonstration de la limite de I_ε^5 se trouve dans Annexe C.5. □

2.2.3 Correcteur pour le cas $0 < r_\varepsilon << \varepsilon^{\frac{N}{N-2}}$

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème de correcteur pour le problème (2.1.1) dans le dernier cas

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_\varepsilon = 0. \tag{2.2.81}$$

Théorème 2.2.4. *Sous les hypothèses* (2.2.81)*,* (2.1.31)*,* (2.2.1)*-*(2.2.4)*, la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *vérifie*

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{fortement dans } C^0\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right), \tag{2.2.82}$$

et

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \Phi_\varepsilon(u,v_0) + \mathcal{R}_\varepsilon, \textit{ avec} \\ \mathcal{R}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega)), \end{cases} \tag{2.2.83}$$

où u est l'unique solution de (2.1.44).

Comme dans les autres cas, nous aurons besoin des résultats techniques suivants.

Proposition 2.2.7. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.4 on a*

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow E_2(.) + \frac{a}{2}|v_0|_\Omega^2 \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.84}$$

avec

$$E_2(t) := \frac{1}{2}|u(t)|_\Omega^2 + \int_0^t |\nabla u|_\Omega^2 ds,$$

l'énergie du problème (2.1.44).

De plus, pour tout $(\varphi,\psi) \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$e_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \longrightarrow \overline{e}(\varphi,\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.85}$$

$$\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon(.)\psi dx \to \int_\Omega v_0 \psi dx \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.86}$$

$$e_\varepsilon(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi))(.) \to \overline{e}(u-\varphi, v_0-\psi)(.) \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T]), \tag{2.2.87}$$

avec

$$\overline{e}(\varphi,\psi)(t) := \frac{1}{2}(|\varphi(t)|_\Omega^2 + a|\psi|_\Omega^2) + \int_0^t |\nabla\varphi|_\Omega^2 ds.$$

Remarque 5. Notons que dans ce cas, il est facile de constater que la Proposition 2.2.2 reste valable sous les hypothèses du Théorème 2.2.4.

Preuve du Théorème 2.2.4. Le premier résultat est une conséquence directe des convergences $(2.1.42)^2$, (2.2.11) et de la Proposition 1.1.2.

Pour le deuxième résultat, d'après le Théorème 2.1.6 nous avons

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

On considère une suite (φ_n, ψ_n) dans $C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$ telle que,

$$\begin{aligned} &\varphi_n \to u \quad \text{fortement dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right), \\ &\psi_n \to v_0 \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} \|\nabla(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(u,v_0))\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C\|\nabla\left(u^\varepsilon - \Phi_\varepsilon(\varphi_n,\psi_n)\right)\|_{L^2(\Omega^T)} + \\ \qquad + \|\left(1-v_\varepsilon\right)\nabla\left(\varphi_n - u\right)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \\ \qquad + \|\left(\varphi_n - u\right)\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \\ \qquad + \|F_\varepsilon\left(\psi_n - v_0\right)\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}. \end{cases}$$

En suivant la démarche donnée dans la preuve de la convergence (2.2.9) (voir la démonstration du Théorème 2.2.1), il est facile de voir que chaque terme de la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui achève la démonstration. □

Preuve de la Proposition 2.2.7. La preuve du résultat est similaire à celle correspondante au premier cas dans lequel $\gamma \in]0,+\infty[$, avec quelques différences qui apparaissent ci-dessous.

1) Démonstration de la convergence (2.2.84). L'énergie associée au problème limite (2.1.44) est donnée par

$$E_2(t) := \frac{1}{2}|u(t)|_\Omega^2 + \int_0^t |\nabla u|_\Omega^2 ds,$$

avec

$$E_2(t) := E_2(0) + \int_0^t \int_\Omega fudxds,$$

et

$$E_2(0) := \frac{1}{2}|u_0|_\Omega^2.$$

En suivant la démarche donnée dans la preuve de la convergence (2.2.12) (voir la démonstration de la Proposition 2.2.3), on trouve que

$$E_\varepsilon(.) \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega fudxds + \frac{1}{2}|u_0|_\Omega^2 + \frac{a}{2}|v_0|_\Omega^2 \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]),$$

de là apparaît la différence.

$2)$ La preuve de la convergence (2.2.85) est beaucoup plus simple parce que dans ce cas, le terme A_2 (voir la démonstration de la Proposition 2.2.4) est traité comme suit

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^t \int_{C_\varepsilon} |\left(1-v_\varepsilon\right)\nabla\varphi + \left(F_\varepsilon\left(\psi\right)-\varphi\right)\nabla v_\varepsilon|^2 dxds \\
&\leq 2\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |\left(1-v_\varepsilon\right)\nabla\varphi|^2 dxds + 2\int_0^t \int_{C_\varepsilon} |\left(F_\varepsilon\left(\psi\right)-\varphi\right)\nabla v_\varepsilon|^2 dxds \\
&\leq 2T\Big(\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega^T)}|C_\varepsilon| + C|F_\varepsilon\left(\psi\right)-\varphi|^2_{L^\infty(\Omega^T)}\gamma_\varepsilon\Big) \to 0,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les estimations de la Proposition 2.1.1, la bornitude uniforme de $F_\varepsilon(\psi)$ dans $L^\infty(\Omega^T)$ et les faits que $|C_\varepsilon| \to 0$, $\gamma_\varepsilon \to 0$.

$3)$ En ce qui concerne la dernière convergence, en utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme 2.2.2, en notant que la différence vient de la limite de I^5_ε, qui est

$$I^5_\varepsilon = \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla\Phi_\varepsilon\left(\varphi,\psi\right) dxds \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dxds \text{ fortement dans } C^0\left(\left[0,T\right]\right). \tag{2.2.88}$$

Ce résultat est prouvé dans Annexe C.6. □

Chapitre 3

Équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'homogénéisation et correcteur pour une équation hyperbolique-parabolique dégénérée posée dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$. L'équation dégénère au sens que le coefficient de conductivité dans une partie ouverte A strictement contenue dans Ω est égale à 1, alors qu'à l'extérieur de A il est de l'ordre de ε^2.

Nous montrons que sous l'effet de données initiales oscillantes, il apparaît une perturbation qui ne vérifie pas le principe d'équipartition de l'énergie.

3.1 Position du problème et notations

Soient $T > 0$, Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, A une partie ouverte régulière de Ω. On suppose A strictement contenue dans Ω, i.e. $\Omega \setminus \bar{A} \subset\subset \Omega$, où $\bar{A}$ désigne la fermeture de A. Considérons le problème hyperbolique-parabolique suivant :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\left(\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_\varepsilon^1(x) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec

$$\rho_\varepsilon(x) = \chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}. \tag{3.1.2}$$

On suppose que les données initiales u_ε^0 et u_ε^1 vérifient

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \in H^1\left(\Omega\right), \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}\right) |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx \leq C, \ \forall \varepsilon, \\ \\ \exists u^0 \in H^1\left(\Omega\right), \quad u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } L^2\left(\Omega\right). \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{cases} u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega), \\ \exists u^1 \in L^2(\Omega), \quad u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Le problème (3.1.1) a une solution faible dans le sens suivant :

Théorème 3.1.1 ([21]). *Sous les hypothèses et les notations ci-dessus, il existe une unique solution u_ε vérifiant*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\ \langle \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi \rangle + (\rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \varphi)_\Omega + (\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi)_\Omega = 0, \ \textit{dans } \mathcal{D}'(0,T), \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ u_\varepsilon(x.0) = u_\varepsilon^0(x) \quad \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_\varepsilon^1(x) \quad \textit{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Preuve . Voir Annexe D. □

Un exemple de suite vérifiant (3.1.3)

Supposons que Ω soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et A une partie ouverte régulière strictement contenue dans Ω. Il suffit de prendre u_ε^0 de la forme (voir [23])

$$u_\varepsilon^0(x) = \phi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon}), \tag{3.1.6}$$

avec $\phi(x)$ régulière à support compact dans $\Omega \backslash \overline{A}$, $\psi(y)$ régulière et $Y-$périodique où Y est le cube unité de $\mathbb{R}^N$.

L'hypothèse (3.1.3) est vérifiée par la suite définie par (3.1.6). En effet, d'abord $u_\varepsilon^0 \in H^1(\Omega)$ pour tout ε, car

$$\nabla u_\varepsilon^0(x) = \nabla\phi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}\phi(x)\nabla\psi(\frac{x}{\varepsilon}) \in L^2(\Omega).$$

L'estimation dans (3.1.3) est aussi vérifiée car

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\backslash A}\right) |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx &= \int_\Omega \varepsilon^2 \chi_{\Omega\backslash A} |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx \\ &= \int_{\Omega\backslash A} \left| \varepsilon \nabla\phi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon}) + \phi(x)\nabla\psi(\frac{x}{\varepsilon}) \right|^2 dx \\ &\leq C. \end{aligned}$$

La suite u_ε^0 converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $u_0(x) = \phi(x) ⨍_Y \psi(y)dy$, élément de $H^1(\Omega)$. Donc la condition (3.1.3) est vérifiée.

3.2 Problème limite

Pour obtenir le problème limite, on utilise les estimations a priori suivantes.

Lemme 3.2.1. *La suite u_ε de solutions de* (3.1.1) *vérifie les estimations a priori suivantes :*

$$\|\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c, \tag{3.2.1}$$

$$\|\nabla u_\varepsilon \chi_A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c, \tag{3.2.2}$$

$$\|\varepsilon \nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c, \tag{3.2.3}$$

$$\|\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c. \tag{3.2.4}$$

Notre résultat concernant le problème limite est le suivant :

Théorème 3.2.2. *Il existe $v \in L^\infty(0,T;H^1(A))$ tel que la suite u_ε de solutions de* (3.1.1) *vérifie :*

$$\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon \longrightarrow v\chi_A \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.2.5}$$

$$\nabla u_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup \nabla v \chi_A \quad \textit{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.2.6}$$

$$\varepsilon \nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup 0 \quad \textit{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.2.7}$$

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \quad \textit{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.2.8}$$

De plus, v est l'unique solution du problème limite suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial v}{\partial t} - \triangle v = 0 & \textit{dans} \quad A \times]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \textit{sur} \quad \partial A \times]0,T[\,, \\ v(x,0) = u^0(x) & \textit{dans} \quad A, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = u^1(x) & \textit{dans} \quad A. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

3.3 Correcteur

On introduit $\check{u}_\varepsilon$ comme étant la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \check{u}_\varepsilon}{\partial t^2} + \rho_\varepsilon \dfrac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t} - div\,(\rho_\varepsilon \nabla \check{u}_\varepsilon) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ \check{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[\,, \\ \check{u}_\varepsilon(x,0) = u^0\chi_A & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u^1\chi_A & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

et on définit

$$\hat{u}_\varepsilon := u_\varepsilon - \check{u}_\varepsilon. \tag{3.3.2}$$

On montre alors les résultats suivants :

Théorème 3.3.1. *La suite* $\check{u}_\varepsilon$ *de solutions de* (3.3.1) *vérifie les convergences suivantes :*

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\check{u}_\varepsilon \longrightarrow v\chi_A \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.3.3}$$

$$\nabla\check{u}_\varepsilon\chi_A \longrightarrow \nabla v\chi_A \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.3.4}$$

$$\varepsilon\nabla\check{u}_\varepsilon\chi_{\Omega\backslash A} \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.3.5}$$

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial\check{u}_\varepsilon}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \ \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.3.6}$$

Théorème 3.3.2. *La suite* $\hat{u}_\varepsilon$ *définie par* (3.3.2) *vérifie les convergences suivantes :*

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\hat{u}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.3.7}$$

$$\nabla\hat{u}_\varepsilon\chi_A \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.3.8}$$

$$\varepsilon\nabla\hat{u}_\varepsilon\chi_{\Omega\backslash A} \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.3.9}$$

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial\hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \ \textit{faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.3.10}$$

Ces convergences sont fortes si et seulement si

$$\begin{cases} \int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2\chi_{\Omega\backslash A}\right)|\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0|^2 dx \longrightarrow 0, \\ \int_A |u_\varepsilon^1 - u^1|^2 dx \longrightarrow 0. \end{cases} \tag{3.3.11}$$

Si la condition (3.3.11) *n'est pas vérifiée, alors il existe un réel H strictement positif tel que, pour une sous-suite toujours notée ε, on a*

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial\hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx \rightharpoonup He^{-t} \quad *\textit{faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{3.3.12}$$

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon|\nabla\hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \rightharpoonup He^{-t} \quad *\textit{faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{3.3.13}$$

$$\int_0^t\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial\hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \rightharpoonup H(1-e^{-t}) \ *\textit{faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.3.14}$$

Remarque 6. Le terme $\hat{u}_\varepsilon$ agit comme une perturbation dûe aux oscillations des données initiales u_ε^0 et u_ε^1. Si la condition (3.3.11) n'est pas satisfaite, les convergences (3.3.12)-(3.3.14) signifient que cette perturbation ne vérifie pas le principe d'équipartition de l'énergie.

3.4 Preuves des résultats

Preuve du Lemme 3.2.1. On multiplie la première équation du système (3.1.1) par $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ que l'on intègre sur $\Omega\times(0,t)$, $t\in(0,T)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2\chi_{\Omega\backslash A}\right)|\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\ = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon|u_\varepsilon^1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2\chi_{\Omega\backslash A}\right)|\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Comme les données u_ε^0 et u_ε^1 appartiennent aux classes (3.1.3) et (3.1.4), on déduit de (3.4.1) les estimations (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4).

Pour démontrer l'estimation (3.2.1), on multiplie (3.1.1) par u_ε puis on intègre sur $\Omega \times (0,s)$, $s \in (0,T)$. On aura après intégration par parties du terme hyperbolique,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon(x,s)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,s)|^2 dx + \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx d\sigma = \\ = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^0(x)|^2 dx + \int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon^0 u_\varepsilon^1(x)dx + \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,\sigma)\Big|^2 dx d\sigma.\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

En réintégrant (3.4.2) sur $(0,t)$, pour un t de l'intervalle (s,T), il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,s)|^2 dx ds + \int_0^t \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx d\sigma ds \leq \\ \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^0(x)|^2 dx + t\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^0(x)|^2 dx \\ + t\int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon^0 u_\varepsilon^1(x)dx + t^2 \|\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Comme la suite de données initiales u_ε^0 est bornée dans $L^2(\Omega)$ et que la suite produit $u_\varepsilon^0 u_\varepsilon^1$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, alors l'estimation (3.2.4) avec l'inégalité (3.4.3) impliquent

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,s)|^2 dx ds + \int_0^t \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx d\sigma ds \leq C,$$

d'où, l'estimation (3.2.1). □

Preuve du Théorème 3.2.2. Les estimations (3.2.1) et (3.2.2) impliquent que la suite

$$u_\varepsilon \quad \text{est bornée dans } L^\infty(0,T;H^1(A)), \tag{3.4.4}$$

il existe alors un élément $v \in L^\infty(0,T;H^1(A))$ et une sous-suite ε tels que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H^1(A)), \tag{3.4.5}$$

d'où la convergence (3.2.6).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &= \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\chi_A + \varepsilon\nabla u_\varepsilon\chi_{\Omega\setminus A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\chi_A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\chi_{\Omega\setminus A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq \|\nabla u_\varepsilon\chi_A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\chi_{\Omega\setminus A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},\end{aligned}$$

les estimations (3.2.2) et (3.2.3) nous donne

$$\|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{3.4.6}$$

Donc en outre, la suite $\varepsilon u_\varepsilon$ étant bornée dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, il existe alors un certain w de $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ tel que

$$\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup w \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.4.7}$$

Dans la suite on montre que w est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{A} \times]0, T[\,, \\ w = 0 & \text{sur } \partial(\Omega \setminus \bar{A}) \times]0, T[\,, \\ w(.,0) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{A}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(.,0) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{A}. \end{cases} \tag{3.4.8}$$

En divisant la première équation du (3.1.1) par ε on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon}\rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon}\rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div((\frac{1}{\varepsilon}\chi_A + \varepsilon\chi_{\Omega\setminus A})\nabla u_\varepsilon) = 0. \tag{3.4.9}$$

En multipliant (3.4.9) par $\varphi\psi \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{A}) \times \mathcal{D}(0,T)$, où φ est prolongée par zéro dans A, et en intégrant l'équation obtenue sur $\Omega \times (0,T)$, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^T \Big\langle \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt + \int_0^T \Big\langle \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega \varepsilon\chi_{\Omega\setminus A}\nabla u_\varepsilon \nabla\varphi\psi dx dt = 0. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Dans (3.4.10), on passe à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, de (3.4.7) on déduit

$$\begin{aligned} \Big\langle \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\langle \varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \longrightarrow \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\langle w\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle, \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

$$\begin{aligned} \Big\langle \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\Big\langle \varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \longrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}\Big\langle w\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial w}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle, \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \varepsilon\nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}\nabla\varphi\psi dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \nabla w \chi_{\Omega\setminus A}\nabla\varphi\psi dx dt.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt + \int_0^T \Big\langle \frac{\partial w}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \nabla w \chi_{\Omega\setminus A}\nabla\varphi\psi dx dt = 0, \end{aligned}$$

et donc w vérifie l'équation limite suivante

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 \quad \text{dans } (\Omega \setminus \bar{A}) \times]0, T[\,. \tag{3.4.13}$$

Reste à identifier les données initiales de la limite w. A l'aide des estimations (3.2.3), (3.2.4) on a

- $\varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}$ est bornée dans $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega \setminus \bar{A}))$,
- $\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A}$ est bornée dans $L^\infty(0,T; L^2(\Omega \setminus \bar{A}))$,
- $\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_{\Omega\setminus A}$ est bornée dans $L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega \setminus \bar{A}))$,

et en s'aidant de la convergence (3.4.7), il vient

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup w\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega\setminus\bar{A})),\\
&\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega\setminus\bar{A})),\\
&\varepsilon\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega\setminus\bar{A})).
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Grâce aux injections compactes $H_0^1(\Omega\setminus\bar{A}) \hookrightarrow L^2(\Omega\setminus\bar{A}) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega\setminus\bar{A})$ et la Proposition 1.1.2, on conclut que

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \to w\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];L^2(\Omega\setminus\bar{A})),\\
&\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A} \to \frac{\partial w}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];H^{-1}(\Omega\setminus\bar{A})).
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.4.16}$$

alors

$$\begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon^0 \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \varepsilon u_\varepsilon^1 \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.4.17}$$

grâce (3.4.15) et en vertu de

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_\varepsilon(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \to w(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),\\
&\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \to \frac{\partial w}{\partial t}(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

De (3.4.17) et (3.4.18), en déduit que

$$\begin{cases} w(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.4.19}$$

Ainsi w est solution du problème (3.4.8).

Remarquons aussi que, d'après (3.4.7), on a

$$\varepsilon u_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup w\chi_A \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.4.20}$$

De la convergence (3.4.5), on déduit que

$$\varepsilon u_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup 0 \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.4.21}$$

Il suit alors de (3.4.20), (3.4.21), que

$$w \equiv 0 \quad \text{dans } A\times(0,T). \tag{3.4.22}$$

En conclusion, comme w est la solution du problème (3.4.8) et vérifie (3.4.22), on déduit que

$$w \equiv 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T). \tag{3.4.23}$$

La convergence (3.2.7) est donc une conséquence de (3.4.7) et (3.4.23).
Les estimations (3.2.2), (3.2.4), nous donnent

- $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(A))$,
- $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A$ est bornée dans $L^\infty(0,T;H^{-1}(A))$,

et en s'aidant de la convergence (3.4.5), on a

$$\begin{aligned}
&u_\varepsilon\chi_A \rightharpoonup v\chi_A \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;H^1(A)),\\
&\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(A)),\\
&\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A \rightharpoonup \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\chi_A \quad \text{* faiblement dans } L^\infty(0,T;H^{-1}(A)).
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

Grâce aux injections compactes $H^1(A) \subset L^2(A) \subset H^{-1}(A)$ et la Proposition 1.1.2, on conclut que

$$\begin{aligned}
&u_\varepsilon\chi_A \to v\chi_A \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];L^2(A)),\\
&\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \to \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];H^{-1}(A)).
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

En s'aident des convergences $(3.4.15)^1$, $(3.4.25)^1$ et en vertu de

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}u_\varepsilon = u_\varepsilon\chi_A + \varepsilon u_\varepsilon\chi_{\Omega\setminus A} \longrightarrow v\chi_A \quad \text{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.4.26}$$

on obtient (3.2.5).

La convergence (3.2.8) est une conséquence de l'estimation (3.2.4) et de la convergence (3.2.5).

Maintenant, on identifie les données initiales de la limite v, on sait que

$$\begin{cases}
u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega),\\[1ex]
u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega),
\end{cases} \tag{3.4.27}$$

alors

$$\begin{cases}
u_\varepsilon^0\chi_A \rightharpoonup u^0\chi_A \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega),\\[1ex]
u_\varepsilon^1\chi_A \rightharpoonup u^1\chi_A \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega),
\end{cases} \tag{3.4.28}$$

mais grâce au (3.4.25), en vertu

$$\begin{cases}
u_\varepsilon(.,0)\chi_A \to v(.,0)\chi_A \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),\\[1ex]
\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(.,0)\chi_A \to \dfrac{\partial v}{\partial t}(.,0)\chi_A \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega),
\end{cases} \tag{3.4.29}$$

on conclut que

$$\begin{cases}
v(.,0)\chi_A = u^0\chi_A \quad \text{dans } \Omega,\\[1ex]
\dfrac{\partial v}{\partial t}(.,0)\chi_A = u^1\chi_A \quad \text{dans } \Omega.
\end{cases} \tag{3.4.30}$$

Pour obtenir l'équation limite (3.2.9), on multiplie (3.1.1) par une fonction test de la forme $\varphi\psi \in H_0^1(A) \times \mathcal{D}(0,T)$, avec φ prolongée par zéro à l'extérieure de A, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A, \varphi\Big\rangle \psi dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt + \\ + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt = 0,\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

où $\langle .,.\rangle$ désigne le crochet de dualité $(H^{-1}(A), H_0^1(A))$.

En passant à la limite par rapport à ε et en tenant compte des convergences (3.4.24), il vient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A, \varphi\Big\rangle \psi dt \quad \longrightarrow \quad \int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\chi_A, \varphi\Big\rangle \psi dt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt \quad \longrightarrow \quad \int_0^T \int_\Omega \nabla v \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt.$$

Et donc v vérifie l'équation limite suivante :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \ \text{ dans } A \times (0,T). \tag{3.4.32}$$

Remarquons que l'équation (3.4.32) peut être obtenue en prenant seulement une fonction test de la forme $\varphi\psi \in H_0^1(\Omega) \times \mathcal{D}(0,T)$, telle que φ définie comme suit

$$\begin{cases} \varphi \in C^1(\bar{A}), \\ \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus A, \\ \varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.33}$$

On obtient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\chi_A, \varphi\Big\rangle \psi dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla v \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt = 0.$$

En appliquant la formule de Green, il vient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v, \varphi\Big\rangle \psi dt + \int_0^T \ll \frac{\partial v}{\partial n}, \varphi \gg \psi dt = 0,$$

où

$\langle .,.\rangle$ désigne le crochet de dualité $\Big((H^1(A))^{'}, H^1(A)\Big)$,

$\ll .,. \gg$ le crochet de dualité $\Big((H^{-1/2}(\partial A))^{'}, H^{1/2}(\partial A)\Big)$.

Et grâce à (3.4.32), on conclut que

$$\int_0^T \ll \frac{\partial v}{\partial n}, \varphi \gg \psi dt = 0,$$

par conséquent $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur $\partial A \times (0,T)$. □

Preuve du Théorème 3.3.1. Notons d'abord que les convergences (3.2.5)-(3.2.8) sont toutes vérifiées par la suite $\check{u}_\varepsilon$ de solutions de (3.3.1).

La convergence (3.3.3) n'est autre que (3.2.5) appliquée à la suite $\check{u}_\varepsilon$.

On montre dans la suite les convergences (3.3.4)-(3.3.6). La conservation de l'énergie associée a $\check{u}_\varepsilon$ s'écrit :

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A})|\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx$$
$$= \int_A |u^1(x)|^2 dx + \int_A |\nabla u^0(x)|^2 dx. \tag{3.4.34}$$

Retournons à l'équation limite (3.2.9), multiplions cette dernière par $2\dfrac{\partial v}{\partial t}$ puis intégrons sur $A \times (0,t)$, $t \in (0,T)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx \\ = \int_A |u^1(x)|^2 dx + \int_A |\nabla u^0(x)|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.4.35}$$

De (3.4.34), (3.4.35), en déduit

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A})|\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx$$
$$= \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx. \tag{3.4.36}$$

On passe à la limite supérieure dans les membres de (3.4.36), on aura

$$\begin{aligned}\limsup_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + \limsup_\varepsilon 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \\ \limsup_\varepsilon \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A})|\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \\ = \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \\ + \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Par ailleurs, la suite $\check{u}_\varepsilon$ vérifie les convergences faibles (3.2.6)-(3.2.8), alors la semi-continuité inférieure nous donne pour presque tout $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}&\liminf_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx \geq \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx, \\ &\liminf_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \geq \int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds, \\ &\liminf_\varepsilon \int_\Omega \chi_A |\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \geq \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx, \\ &\liminf_\varepsilon \int_\Omega \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A} |\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \geq 0.\end{aligned} \tag{3.4.38}$$

De (3.4.37), on a

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx=&-\limsup_{\varepsilon}2\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds\\&-\limsup_{\varepsilon}\int_{\Omega}(\chi_{A}+\varepsilon^{2}\chi_{\Omega\setminus A})|\nabla\check{u}_{\varepsilon}(x,t)|^{2}dx\\&+\int_{A}\Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx+2\int_{0}^{t}\int_{A}\Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds\\&+\int_{A}|\nabla v(x,t)|^{2}dx.\end{aligned}\tag{3.4.39}$$

Rappelons que

$$\liminf_{\varepsilon}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds\le\limsup_{\varepsilon}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds,$$

$$\liminf_{\varepsilon}\int_{\Omega}(\chi_{A}+\varepsilon^{2}\chi_{\Omega\setminus A})|\nabla\check{u}_{\varepsilon}(t)|^{2}dx\le\limsup_{\varepsilon}\int_{\Omega}(\chi_{A}+\varepsilon^{2}\chi_{\Omega\setminus A})|\nabla\check{u}_{\varepsilon}(t)|^{2}dx.\tag{3.4.40}$$

De (3.4.38) et (3.4.40), on obtient

$$\begin{aligned}&-\limsup_{\varepsilon}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds\le-\int_{0}^{t}\int_{A}\Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds,\\&-\limsup_{\varepsilon}\int_{\Omega}(\chi_{A}+\varepsilon^{2}\chi_{\Omega\setminus A})|\nabla\check{u}_{\varepsilon}(t)|^{2}dx\le-\int_{A}|\nabla v(x,t)|^{2}dx.\end{aligned}\tag{3.4.41}$$

Ainsi, (3.4.39) et (3.4.41) nous donne

$$\limsup_{\varepsilon}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx\le\int_{A}\Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx.\tag{3.4.42}$$

En comparant (3.4.38)[1] et (3.4.42), on conclut que

$$\liminf_{\varepsilon}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx=\limsup_{\varepsilon}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx=\int_{A}\Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx,$$

d'où on tire

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx=\int_{A}\Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^{2}dx.\tag{3.4.43}$$

De la même manière, on traite les deux autres termes dans (3.4.37) et on obtient

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\rho_{\varepsilon}\Big|\frac{\partial\check{u}_{\varepsilon}}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds=\int_{0}^{t}\int_{A}\Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^{2}dxds,\\&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega}|\nabla\check{u}_{\varepsilon}(x,t)\chi_{A}|^{2}dx=\int_{A}|\nabla v(x,t)|^{2}dx,\\&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega}|\varepsilon\nabla\check{u}_{\varepsilon}(x,t)\chi_{\Omega\setminus A}|^{2}dx=0.\end{aligned}\tag{3.4.44}$$

Par conséquent, les convergences (3.3.4)-(3.3.6) découlent des convergences faibles (3.2.6)-(3.2.8) appliquées à la suite $\check{u}_{\varepsilon}$ et des convergences (3.4.43)-(3.4.44).

□

Preuve du Théorème 3.3.2. Les convergences (3.3.7)-(3.3.10) découlent immédiatement de (3.2.5)-(3.2.8), (3.3.3)-(3.3.6) et de la Définition 3.3.2.

On montre dans la suite que les convergences (3.3.8)-(3.3.10) sont en fait des convergences fortes si et seulement si la condition (3.3.11) est satisfaite.

D'après la Définition 3.3.2, $\hat{u}_\varepsilon$ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_\varepsilon}{\partial t^2} + \rho_\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} - div(\rho_\varepsilon \nabla \hat{u}_\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega^T, \\ \hat{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[, \\ \hat{u}_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0 - u^0 \chi_A & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_\varepsilon^1 - u^1 \chi_A & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.4.45}$$

L'équation de l'énergie du problème (3.4.45), s'écrit

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dxds + \\ &\qquad \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \\ &= \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^1 - u^1 \chi_A|^2 dx + \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0 \chi_A|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.4.46}$$

En utilisant $(3.3.11)^2$ et $(3.1.4)^2$, il vient

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}(u_\varepsilon^1 - u^1\chi_A) = (u_\varepsilon^1 - u^1)\chi_A + \varepsilon u_\varepsilon^1 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.4.47}$$

De $(3.3.11)^1$ on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0 \chi_A) = \sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0) + \varepsilon \nabla u^0 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \\ \text{fortement dans } L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

Par conséquent, en passant à la limite dans les deux membres de (3.4.46) et en tenant compte de (3.4.47) et de (3.4.48), on conclut que les convergences (3.3.8)-(3.3.10) sont fortes.

Réciproquement, si on suppose que les convergences (3.3.8)-(3.3.10) sont fortes, on voit immédiatement, via l'équation (3.4.46), que la suite de données initiales $(u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1)$ vérifie la convergence (3.3.11). En effet, en passant à la limite dans les deux membres de (3.4.46) et en tenant compte des convergences fortes (3.3.8)-(3.3.10), on obtient

$$\begin{aligned} &\lim_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^1 - u^1\chi_A|^2 dx = 0, \\ &\lim_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0 \chi_A|^2 dx = 0. \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

En utilisant $(3.4.49)^1$ et $(3.1.4)^2$, il vient

$$(u_\varepsilon^1 - u^1)\chi_A = \sqrt{\rho_\varepsilon}(u_\varepsilon^1 - u^1\chi_A) - \varepsilon u_\varepsilon^1 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.4.50}$$

De $(3.4.49)^2$, on obtient

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0) = \sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0\chi_A) - \varepsilon \nabla u^0 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.4.51}$$

Par conséquent, la suite de données initiales $(u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1)$ vérifie la condition (3.3.11).

On montre dans la suite la deuxième partie du théorème. Pour cela, on suppose que la condition (3.3.11) n'est pas vérifiée.

Multiplions la première équation de (3.4.45) par $\varphi \hat{u}_\varepsilon$, où $\varphi \in \mathcal{D}(0,T), \hat{u}_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, après avoir intégré par parties son terme hyperbolique, il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \Big|^2 dx \right) \varphi(t) dt - \int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 dx \right) \varphi(t) dt = \\ &- \int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \hat{u}_\varepsilon dx \right) \varphi^{'}(t) dt + \int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \hat{u}_\varepsilon dx \right) \varphi(t) dt. \end{aligned} \tag{3.4.52}$$

Par utilisation de (3.3.7), (3.3.10), on conclut que le second membre de (3.4.52) tend vers zéro avec ε, et comme φ est arbitraire, on aura

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \Big|^2 dx - \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 dx \rightharpoonup 0 \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.4.53}$$

Par ailleurs, posons

$$H^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^1 - u^1 \chi_A|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0 \chi_A|^2 dx. \tag{3.4.54}$$

En vertu de (3.1.4)

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}(u_\varepsilon^1 - u^1 \chi_A) = (u_\varepsilon^1 - u^1)\chi_A + \varepsilon u_\varepsilon^1 \chi_{\Omega \backslash A} \quad \text{est bornée dans } L^2(\Omega).$$

Ainsi, en utilisant l'estimation de (3.1.3), on obtient

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0 \chi_A) = \sqrt{\rho_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0 \chi_A \quad \text{est bornée dans } L^2(\Omega).$$

Et donc, $(H^\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite bornée de nombre réels positifs, et donc il existe un réel H strictement positif tel que, pour une sous-suite de ε encore notée ε, on a

$$H^\varepsilon \longrightarrow H \quad \text{dans } \mathbb{R}. \tag{3.4.55}$$

En s'aidant de (3.4.46), (3.4.54) et (3.4.55), on obtient pour la même sous-suite ε

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx + 2 \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx ds \\ &+ \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \longrightarrow 2H \quad \text{fortement dans } C([0,T]). \end{aligned} \tag{3.4.56}$$

Par sommation de (3.4.53) et (3.4.56), on obtient

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \Big|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx ds \rightharpoonup H \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.4.57}$$

Posons $l(t)$ la limite dans $L^\infty(0,T)$ de la suite $\displaystyle\int_\Omega \rho_\varepsilon |\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}|^2 dx$, pour $t \in (0,T)$, on définit une fonction $\varphi \in L^1(0,T)$ comme suit

$$\varphi(s) = \chi_{(0,t)}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \in (0,t), \\ 0 & \text{si} \quad s \in (t,T). \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx \right) \varphi(s) ds \longrightarrow \int_0^T l(s)\varphi(s) ds.$$

Mais, comme

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx \right) \varphi(s) ds = \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx ds,$$

et

$$\int_0^T l(s)\varphi(s) ds = \int_0^t l(s) ds,$$

alors, en déduit que

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx ds \longrightarrow \int_0^t l(s) ds. \tag{3.4.58}$$

Par ailleurs, l'estimation (3.2.4) appliquée à la suite $\hat{u}_\varepsilon$ nous donne

$$\sup_{0<t<T} \Big| \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx ds \Big| \leq T \| \sqrt{\rho_\varepsilon} \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c,$$

il en découle que $\displaystyle\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx ds$ est bornée dans $L^\infty(0,T)$. Alors la convergence (3.4.58) devient

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dx ds \rightharpoonup \int_0^t l(s) ds \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.4.59}$$

De (3.4.57), (3.4.59), on conclut que

$$l(t) + \int_0^t l(s) ds = H, \tag{3.4.60}$$

après avoir dérivé les deux termes de l'équation (3.4.60), on conclut que l est la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} l'(t) + l(t) = 0, \\ l(0) = H. \end{cases} \tag{3.4.61}$$

En s'aidant de la théorie de E.D.O, nous avons pour chaque $t \in (0,T)$

$$l(t) = He^{-t}. \tag{3.4.62}$$

En utilisant (3.4.53), (3.4.57) et (3.4.62), on conclut que

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx \longrightarrow He^{-t} \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T),$$
$$\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 dx \longrightarrow He^{-t} \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T),$$
$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \longrightarrow H(1-e^{-t}) \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T),$$

par conséquent, $\hat{u}_\varepsilon$ ne vérifie pas le principe d'équipartition de l'énergie. □

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié les problèmes d'homogénéisation et des correcteurs pour quelque problèmes d'évolution dans des milieux hétérogènes :

- Processus de diffusion dans une structure binaire raréfiée.
- Processus de diffusion dans une structure binaire raréfié périodique de forme quelconque.
- Équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Le premier chapitre de la thèse met en lumière une étude du problème de correcteur associée à l'homogénéisation du processus de diffusion dans une mixture formée d'un milieu ambiant entourant de toute petites particules sphériques. Bentalha et al. [10] montrent que l'homogénéisation de ce problème se caractérise par l'apparition d'un terme supplémentaire dans l'équation limite appelé "les effet non locaux" qui est donnée par $4\pi\gamma(u - v)$ et qui représente l'effet des particules. Dans ce travail on a réussi à construire une famille de correcteurs pour une classe de données initiales. Il se manifeste aussi par l'apparition de la quantité v dans le terme correcteur. De plus, le travail du chapitre 2 montre que ce résultat se généralise sans problème au cas plus générale où les particules sont de forme quelconques. Finalement et d'après ce travail on conclut que les particules évanescentes ont un effet sur l'étude du correcteur.

Il existe plusieurs prolongements de ce travail, par exemple les perspectives suivantes :

- Étude de correcteur dans le cas critique $\gamma_\varepsilon \to \gamma > 0$ et $b_\varepsilon \to b$ avec b est un nombre réel fini.
- Homogénéisation et correcteur dans le cas de domaine perforés avec des petits trous et des petites particules.

Le travail du chapitre 3 montre que lorsque on considère un choix approprié des données initiales on aura une bonne approximation de la solution de l'équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Dans la continuité de ce travail on a les perspectives suivantes :

- Étude de l'équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans une structure mince hétérogène.
- Étude de l'équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans un milieu fibré hétérogène.

Annexe A

Démonstration des outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle

Dans cette annexe nous démontrons les outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle du chapitre 1. Nous reprenons quelques démonstrations existantes déjà dans [10].

A.1 Preuve de la Proposition 1.2.1

D'après la Définition 1.2.1 de w_{R_ε}, pour montrer (1.2.17) il suffit de montrer que $0 \leq W_{R_\varepsilon} \leq 1$. En effet

Soit $y \in C\left(r_\varepsilon, R_\varepsilon\right)$, on a

$$r_\varepsilon \leq |y| \leq R_\varepsilon,$$

alors

$$0 \leq \frac{R_\varepsilon}{|y|} - 1 \leq \left(\frac{R_\varepsilon}{r_\varepsilon} - 1\right),$$

par conséquent

$$0 \leq \frac{r_\varepsilon}{(R_\varepsilon - r_\varepsilon)}\left(\frac{R_\varepsilon}{|y|} - 1\right) \leq 1.$$

Donc

$$0 \leq W_{R_\varepsilon}(y) \leq 1.$$

Maintenant on montre (1.2.19), d'aprés (1.2.14), (1.2.17) et (1.3.53) on a

$$|w_{R_\varepsilon}|_\Omega^2 = |w_{R_\varepsilon}|_{C_\varepsilon \cup D_\varepsilon}^2 = \int_{C_\varepsilon \cup D_\varepsilon} |w_{R_\varepsilon}|^2 dx \leq |C_\varepsilon \cup D_\varepsilon| \to 0.$$

Reste à prouver (1.2.18). On a par définition de w_{R_ε}

$$\begin{aligned} |\nabla w_{R_\varepsilon}|_\Omega^2 &= \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^k(r_\varepsilon, R_\varepsilon)} |\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dx \\ &= \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{C(r_\varepsilon, R_\varepsilon)} |\nabla W_{R_\varepsilon}|^2 dy \qquad \text{(A.1.1)} \\ &= \text{card}(Z_\varepsilon) \int_{C(r_\varepsilon, R_\varepsilon)} |\nabla W_{R_\varepsilon}|^2 dy. \end{aligned}$$

Par un changement en coordonnées sphériques on a

$$\nabla W_{R_\varepsilon} = \left(\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \Theta}, \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \Phi}\right),$$

avec $(r, \Theta, \Phi) \in]r_\varepsilon, R_\varepsilon[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ et

$$y_1 = r\cos\Theta,\ y_2 = r\sin\Theta\cos\Phi,\ y_3 = r\sin\Theta\sin\Phi.$$

Puisque W_{R_ε} est une fonction radiale, alors

$$\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \Theta} = \frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \Phi} = 0,$$

par conséquent

$$\nabla W_{R_\varepsilon} = \left(\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}, 0, 0\right). \tag{A.1.2}$$

Par ailleurs, on a

$$dy_1 dy_2 dy_3 = r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\Phi,$$

et d'après (1.2.15)

$$\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}(r) = \frac{r_\varepsilon}{(R_\varepsilon - r_\varepsilon)}\left(\frac{-R_\varepsilon}{r^2}\right). \tag{A.1.3}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_{C(r_\varepsilon,R_\varepsilon)} |\nabla W_{R_\varepsilon}|^2 dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \left|\frac{r_\varepsilon}{(R_\varepsilon - r_\varepsilon)}\left(\frac{R_\varepsilon}{r^2}\right)\right|^2 r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\Phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \left(\frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\right)^2 \int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \frac{1}{r^2} dr \\
&= 4\pi \left(\frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{R_\varepsilon - r_\varepsilon}{R_\varepsilon r_\varepsilon}\right),
\end{aligned}$$

alors

$$\int_{C(r_\varepsilon,R_\varepsilon)} |\nabla W_{R_\varepsilon}|^2 dy = 4\pi\left(\frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\right). \tag{A.1.4}$$

Donc, (A.1.1), (A.1.4) nous donne

$$|\nabla w_{R_\varepsilon}|^2_\Omega = \text{card}(Z_\varepsilon)4\pi\left(\frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\right) \simeq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3}4\pi\left(\frac{R_\varepsilon r_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\right) \simeq 4\pi\frac{1}{\left(1 - \frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon}\right)}\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3},$$

et grâce à (1.2.12), on conclut que

$$|\nabla w_{R_\varepsilon}|^2_\Omega \leq C\gamma_\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration. □

A.2 Preuve du Lemme 1.2.2

On commence par montrer

$$|\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} \geq \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1}\Big|\fint_{S_1}\big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big)d\sigma\Big|^2, \tag{A.2.1}$$

où $d\sigma$ est la mesure sur la sphère unité

$$d\sigma := \sin\Theta d\Theta d\Phi,$$

et

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}, \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial u}{\partial \Phi}\right).$$

On déduit directement de cette dernière égalité que

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} &\geq \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\Big|\frac{\partial u}{\partial r}\Big|^2 r^2 dr \sin\Theta d\Theta \\ &\geq \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} I(\Theta,\Phi)\sin\Theta d\Theta, \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

où on a posé

$$I(\Theta,\Phi) := \inf\left\{\int_{r_1}^{r_2}|\varphi^{'}(r)|^2 r^2 dr,\ \varphi\in H^1(r_1,r_2),\ \varphi(r_1) = u(r_1,\Theta,\Phi),\ \varphi(r_2) = u(r_2,\Theta,\Phi)\right\}.$$

Rechercher $I(\Theta,\Phi)$ revient à poser le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi\in K \text{ tel que} \\ a(\chi,\phi) = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\chi^{'}(r)(\phi-\chi)^{'}(r) r^2 dr \geq 0,\ \forall \phi\in K, \\ K = \left\{\phi\in H^1(r_1,r_2),\ \phi(r_1) = u(r_1,\Theta,\Phi),\ \phi(r_2) = u(r_2,\Theta,\Phi)\right\}. \end{cases} \tag{A.2.3}$$

Pour $\varphi\in\mathcal{D}(]r_1,r_2[)$ on a $\pm\varphi+\chi\in K$, donc d'après (A.2.3)

$$a(\chi,\pm\varphi+\chi) = \pm\int_{r_1}^{r_2}\chi^{'}(r)\varphi^{'}(r) r^2 dr \geq 0,$$

d'où

$$\int_{r_1}^{r_2}\chi^{'}(r)\varphi^{'}(r) r^2 dr = 0,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(]r_1,r_2[),$$

donc

$$(\chi^{'}(r)r^2)^{'} = 0.$$

Ceci entraîne

$$\chi^{'}(r) r^2 = -c_1,$$

ce qui implique

$$\chi(r) = \frac{c_1}{r} + c_2.$$

A partir des égalités $\chi(r_1) = u(r_1,\Theta,\Phi),\ \chi(r_2) = u(r_2,\Theta,\Phi)$, on a

$$\chi(r) = \frac{1}{r}\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}(u(r_1,\Theta,\Phi) - u(r_2,\Theta,\Phi)) + c_2,$$

il en découle

$$\begin{aligned} I(\Theta,\Phi) &= \int_{r_1}^{r_2} (\chi^{'}(r))^2 r^2 dr \\ &= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big)^2. \end{aligned}$$

Du calcul précédent on déduit

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} &\geq \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} I(\Theta,\Phi) \sin\Theta d\Theta \\ &= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{S_1} \big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big)^2 d\sigma \\ &= 4\pi \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} ⨍_{S_1} \big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big)^2 d\sigma, \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Hölder

$$|\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} \geq 4\pi \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(⨍_{S_1} \big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big) d\sigma \right)^2.$$

On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned} ⨍_{S_{r_2}} u d\sigma &= \frac{1}{4\pi r_2^2} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} u(r_2,\Theta,\Phi) \sin\Theta r_2^2 d\Theta \\ &= ⨍_{S_1} u(r_2,\Theta,\Phi) d\sigma. \end{aligned}$$

□

A.3 Preuve du Lemme 1.2.3

Supposons pour l'instant que le résultat est vrais pour $R = 1$. Alors, par le changement de variable

$$\begin{aligned} &x = Ry,\ x \in B(0,R), y \in B(0,1); \\ &u(x) = \check{u}(y), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \left| u - ⨍_{S_{\alpha R}} u d\sigma \right|^2 dx &= R^3 \int_{B(0,1)} \left| \check{u} - ⨍_{S_\alpha} \check{u} d\sigma \right|^2 dy \\ &\leq C \frac{R^3}{\alpha} |\nabla \check{u}|^2_{B(0,1)} \\ &= C \frac{R^3}{\alpha} |R \nabla u|^2_{B(0,R)} \frac{1}{R^3} \\ &= C \frac{R^2}{\alpha} |\nabla u|^2_{B(0,R)}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer le résultat pour $R = 1$. Pour $u \in H^1(B(0,1))$ et pour tout $r \in (0,1)$ on utilise la notation suivante

$$\begin{aligned} \hat{u}(r) &= ⨍_{S_r} u d\sigma, \\ [u] &= ⨍_{B(0,1)} u d\sigma. \end{aligned}$$

Un calcul direct en coordonnés sphériques donne

$$[u] = \frac{3}{4\pi}\int_{B(0,1)} u d\sigma = \frac{3}{4\pi}\int_0^1 dr \int_{S_r} u d\sigma = 3\int_0^1 r^2 \hat{u}(r) dr,$$

ce qui entraîne, en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\big|[u] - \hat{u}(\alpha)\big|^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{3}r\big(\hat{u}(r) - \hat{u}(\alpha)\big)\sqrt{3}r dr\right)^2 \leq \int_0^1 3r^2\big(\hat{u}(r) - \hat{u}(\alpha)\big)^2 dr.$$

Par application du Lemme 1.2.2 pour $\{\alpha, r\}$, on déduit l'estimation

$$\begin{aligned} \big|[u] - \hat{u}(\alpha)\big|^2 &\leq \left(\int_0^1 \frac{|r-\alpha|}{4\pi r\alpha} 3r^2 dr\right) |\nabla u|^2_{B(0,1)} \\ &= \frac{3}{4\pi\alpha}\left(\int_0^1 |r-\alpha| r dr\right) |\nabla u|^2_{B(0,1)} \\ &\leq \frac{C}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,1)}. \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Par ailleurs, on a d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\int_{B(0,1)} \big|u - [u]\big|^2 dx \leq C|\nabla u|^2_{B(0,1)}. \tag{A.3.2}$$

En combinant (A.3.1) et (A.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} \big|u(x) - \hat{u}(\alpha)\big|^2_{B(0,1)} &\leq 2\big|u(x) - [u]\big|^2_{B(0,1)} + 2\big|[u] - \hat{u}(\alpha)\big|^2_{B(0,1)} \\ &\leq C|\nabla u|^2_{B(0,1)} + \frac{C}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,1)} \\ &\leq \frac{C}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,1)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

A.4 Preuve du Lemme 1.2.4

Montrons (1.2.23). On a

$$\begin{aligned} |\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y_\varepsilon^k} |\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 dx \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y_\varepsilon^k} \left|\theta - \sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\fint_{S^k_{R_\varepsilon}} \theta(y)\, d\sigma_y\right) 1_{Y_\varepsilon^k}(x)\right|^2 dx \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y_\varepsilon^k} \left|\theta - \fint_{S^k_{R_\varepsilon}} \theta(y)\, d\sigma_y\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme diamètre de $Y_\varepsilon^k = \varepsilon\sqrt{3}$, on a donc

$$Y_\varepsilon^k \subset B(\varepsilon k, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}),$$

alors

$$|\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} \leq \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2})} \left|\theta - \fint_{S^k_{R_\varepsilon}} \theta(y)\, d\sigma_y\right|^2 dx.$$

On applique le Lemme 1.2.3 avec le choix de $R = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha = \frac{2R_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{3}}$, on obtient

$$|\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} \leq C\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2})} |\nabla\theta|^2 dx. \tag{A.4.1}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2})} |\nabla\theta|^2 dx &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y^k_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dx + \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2})\setminus Y^k_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dx \\ &\leq |\nabla\theta|^2_{L^2(\Omega)} + 2|\nabla\theta|^2_{L^2(\Omega)} = 3|\nabla\theta|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{A.4.2}$$

car

$$\Big|\bigcup_{k\in Z_\varepsilon} \left(B\Big(\varepsilon k, \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}\Big) \setminus Y^k_\varepsilon\right)\Big| < 2|\Omega|.$$

Par conséquent, (A.4.1), (A.4.2) nous donne

$$|\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} \leq C\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon}|\nabla\theta|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Montrons maintenant (1.2.24). On a

$$\begin{aligned}|\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(D_\varepsilon)} &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} |\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} \left|\theta - \fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta(y)\, d\sigma_y\right|^2 dx.\end{aligned}$$

On applique le Lemme 1.2.3 pour $R = r_\varepsilon$ et $\alpha = 1$, on obtient

$$|\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(D_\varepsilon)} \leq Cr^2_\varepsilon \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} |\nabla\theta|^2 dx \leq Cr^2_\varepsilon |\nabla\theta|^2_{L^2(D_\varepsilon)}.$$

Démontrons (1.2.25). On a

$$|G_{R_\varepsilon}(\theta) - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y^k_\varepsilon} \left|\fint_{S^k_{R_\varepsilon}} \theta d\sigma_y - \fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta d\sigma_y\right|^2 dx.$$

On applique le Lemme 1.2.2 pour $r_1 = r_\varepsilon$ et $r_2 = R_\varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned}|G_{R_\varepsilon}(\theta) - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y^k_\varepsilon} \frac{R_\varepsilon - r_\varepsilon}{4\pi R_\varepsilon r_\varepsilon} dy |\nabla\theta|^2_{C^k_\varepsilon(r_\varepsilon, R_\varepsilon)} \\ &\leq \frac{R_\varepsilon - r_\varepsilon}{4\pi R_\varepsilon r_\varepsilon} \sum_{k\in Z_\varepsilon} |Y^k_\varepsilon| |\nabla\theta|^2_{C^k_\varepsilon(r_\varepsilon, R_\varepsilon)} \\ &\leq \varepsilon^3 \frac{R_\varepsilon - r_\varepsilon}{4\pi R_\varepsilon r_\varepsilon} \sum_{k\in Z_\varepsilon} |\nabla\theta|^2_{C^k_\varepsilon(r_\varepsilon, R_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'hypothèse (1.2.12) nous donne

$$\frac{R_\varepsilon - r_\varepsilon}{R_\varepsilon} = 1 - \frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon} \to 1,$$

par conséquent

$$|G_{R_\varepsilon}(\theta) - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega)} \le C\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}|\nabla\theta|^2_{C_\varepsilon}.$$

Montrons (1.2.26). Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx &= \frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)}\left|\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y)\,d\sigma_y\right|^2 dx \\ &= \frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{k\in Z_\varepsilon}|B(\varepsilon k, r_\varepsilon)|\left|\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y)\,d\sigma_y\right|^2 \\ &= \frac{|B(0,r_\varepsilon)|}{|D_\varepsilon|}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left|\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y)\,d\sigma_y\right|^2, \end{aligned}$$

en sachant que

$$|D_\varepsilon| = \sum_{k\in Z_\varepsilon}|B(\varepsilon k, r_\varepsilon)| = \text{card}(Z_\varepsilon)|B(0,r_\varepsilon)|, \text{ et } \text{card}(Z_\varepsilon) \simeq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3}, \qquad \text{(A.4.3)}$$

et comme $|\Omega| = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx &= \varepsilon^3\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left|\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y)\,d\sigma_y\right|^2 \\ &= |Y^k_\varepsilon|\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left|\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y)\,d\sigma_y\right|^2 \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y^k_\varepsilon}\left|\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y)\,d\sigma_y\right|^2 dx \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y^k_\varepsilon}\left|\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y)\,d\sigma_y\right)1_{Y^k_\varepsilon}(x)\right|^2 dx \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y^k_\varepsilon}|G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx = |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour montrer (1.2.27), on répète la démonstration précédente où $G_{r_\varepsilon}(\theta)$ est remplacé par $G_{R_\varepsilon}(\theta)$.

$\square$

A.5 Preuve du Lemme 1.2.5

Montrons (1.2.28). On a

$$G_{r_\varepsilon}(\theta)(x,t) - \theta(x,t) = \sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta(y,t)\,d\sigma_y\right)1_{Y^k_\varepsilon}(x) - \theta(x,t).$$

Pour tout $x \in \Omega$, il existe $k \in Z_\varepsilon$ tel que $x \in Y_\varepsilon^k$, on a donc

$$\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(⨍_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta\left(y,t\right)d\sigma_y\right)1_{Y^k_\varepsilon}\left(x\right) = ⨍_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta\left(y,t\right)d\sigma_y.$$

Par ailleurs d'aprés le Théorème de la moyenne, il existe $\xi^k_\varepsilon \in S^k_{r_\varepsilon}$ tel que

$$⨍_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta\left(y,t\right)d\sigma_y = \theta(\xi^k_\varepsilon, t),$$

alors

$$G_{r_\varepsilon}\left(\theta\right)\left(x,t\right) - \theta(x,t) = \theta(\xi^k_\varepsilon, t) - \theta(x,t).$$

On applique le Théorème des accroissements finis, pour $x \in Y^k_\varepsilon$ on obtient

$$|G_{r_\varepsilon}\left(\theta\right)\left(x,t\right) - \theta(x,t)| \leq |(\xi^k_\varepsilon, t) - (x,t)||\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega^T)} \leq \varepsilon\sqrt{3}|\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega^T)},$$

par conséquent

$$|G_{r_\varepsilon}\left(\theta\right) - \theta|_{L^\infty(\Omega^T)} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Démontrons (1.2.29). Pour tout $x \in C_\varepsilon \cup D_\varepsilon = \cup_{k\in Z_\varepsilon} B\left(\varepsilon k, R_\varepsilon\right)$, il existe $k \in Z_\varepsilon$ tel que $x \in B\left(\varepsilon k, R_\varepsilon\right)$, on a donc

$$G_{r_\varepsilon}\left(\theta\right)\left(x,t\right) - \theta(x,t) = ⨍_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta\left(y,t\right)d\sigma_y - \theta(x,t).$$

D'aprés le Théorème de la moyenne, il existe $\xi^k_\varepsilon \in S^k_{r_\varepsilon}$ tel que

$$G_{r_\varepsilon}\left(\theta\right)\left(x,t\right) - \theta(x,t) = \theta(\xi^k_\varepsilon, t) - \theta(x,t),$$

alors d'aprés le Théorème des accroissements finis, pour $x \in B\left(\varepsilon k, R_\varepsilon\right)$ on obtient

$$|G_{r_\varepsilon}\left(\theta\right)\left(x,t\right) - \theta(x,t)| \leq |(\xi^k_\varepsilon, t) - (x,t)||\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega^T)} \leq 2R_\varepsilon|\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega^T)},$$

par conséquent

$$|G_{r_\varepsilon}\left(\theta\right) - \theta|_{L^\infty(C^T_\varepsilon \cup D^T_\varepsilon)} \leq 2R_\varepsilon|\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega^T)}.$$

□

A.6 Preuve du Lemme 1.2.6

On a

$$⨍_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx = \frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)}\left|\varphi - ⨍_{Y^k_\varepsilon}\varphi\left(y\right)dy\right|^2 dx,$$

d'aprés le Théorème de la moyenne, il existe $\xi^k_\varepsilon \in Y^k_\varepsilon$ tel que

$$⨍_{Y^k_\varepsilon}\varphi\left(y\right)dy = \varphi(\xi^k_\varepsilon),$$

alors

$$\fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx = \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(\xi_\varepsilon^k)|^2 dx.$$

Comme $\varphi \in C_c(\Omega)$, alors φ est uniformément continue sur Ω, alors pour tout $\delta > 0$ il existe $\delta' > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \Omega,\ |x - y| < \delta' \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta.$$

Par ailleurs, pour tout x et ξ_ε^k dans Y_ε^k, on a $|x - \xi_\varepsilon^k| < \sqrt{3}\varepsilon$, et par conséquent on prend $\delta' = \sqrt{3}\varepsilon$ on obtient

$$\begin{aligned}
\fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx &\leq \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} \delta^2 dx \\
&\leq \delta^2 \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} |B(\varepsilon k, r_\varepsilon)| \\
&= \delta^2 \frac{|D_\varepsilon|}{|D_\varepsilon|} = \delta^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx \longrightarrow 0.$$

$\square$

A.7 Preuve de la Proposition 1.2.2

On a

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt \leq 2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt + 2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt.$$

D'aprés (1.2.24) et (1.2.26), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt &\leq Cr_\varepsilon^2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dxdt + 2 \int_0^T \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\
&\leq Cr_\varepsilon^2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dxdt + 4 \int_0^T \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{r_\varepsilon}(\theta) - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\
&\quad +8 \int_0^T \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{R_\varepsilon}(\theta) - \theta|^2 dxdt + 8 \int_0^T \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

(1.2.25), (1.2.23) et l'inégalité de Poincaré entraînent que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt \leq Cr_\varepsilon^2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dxdt + C\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^T} |\nabla\theta|^2 dxdt + \\
+ C\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt + C \int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{A.7.1}$$

En utilisant (A.4.3), on obtient

$$\frac{r_\varepsilon^2}{|D_\varepsilon|} \simeq \frac{3\varepsilon^3}{4\pi r_\varepsilon}. \tag{A.7.2}$$

De (A.7.1) et (A.7.2), on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt &\leq C\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\int_{D_\varepsilon^T} |\nabla\theta|^2 dxdt + C\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\int_{C_\varepsilon^T} |\nabla\theta|^2 dxdt + \\
&\quad + C\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon}\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt + C\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt \\
&\leq C\left(\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} + 1\right)\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt \\
&\leq C\max\left(1, \frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\right)\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

$\square$

Annexe B

Un résultat de régularité

Dans le lemme ci-dessus, on établit un résultat de régularité pour la limite v définie dans le Théorème 1.2.7 et le Théorème 2.1.4.

Lemme B.0.1. *Si on suppose que*

$$v_0 \in H_0^1(\Omega), \tag{B.0.1}$$

alors, la limite v définie dans le Théorème 1.2.7 et le Théorème 2.1.4 vérifie

$$v \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right). \tag{B.0.2}$$

Preuve. Tout d'abord d'après le Théorème 1.2.7, on a v est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial v}{\partial t} + 4\pi\gamma (v - u) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ v(0) = v_0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{B.0.3}$$

On remarque que la première équation de (B.0.3) est une équation différentielle ordinaire. Alors par utilisation de la méthode de la variation de constante la solution v pour tout $t \in [0, T]$ s'écrit

$$v(t) = e^{-kt} v_0 + \int_0^t k e^{-k(t-s)} u(s)\, ds, \text{ avec } k = \frac{4\pi\gamma}{a}. \tag{B.0.4}$$

En effet, on a

$$a\frac{\partial v}{\partial t} + 4\pi\gamma (v - u) = 0,$$

si on pose $k = \dfrac{4\pi\gamma}{a}$, cette dernière devient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + kv = ku. \tag{B.0.5}$$

La résolution de l'équation (B.0.5) se fait en deux étapes.

Première étape. On résoudre l'équation suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t} + kv = 0. \tag{B.0.6}$$

Cette dernière entraînne que

$$\frac{v'}{v} = -k,$$

ce qui implique

$$\ln v(t) = -kt + c.$$

D'où

$$v(t) = ce^{-kt}.$$

D'après la méthode de la variation de la constante, on pose $c = c(t)$, on aura

$$v(t) = c(t)e^{-kt}. \tag{B.0.7}$$

Deuxième étape. Calcul de c(t), on remplace (B.0.7) dans (B.0.5), on obtient

$$c^{'}(t) = ke^{kt}u(t).$$

On intègre sur $(0,t)$, $t \in (0,T)$, il vient

$$c(t) = c(0) + \int_0^t ke^{ks}u(s,x)ds. \tag{B.0.8}$$

On remplace (B.0.8) dans (B.0.7), on obtient

$$v(t) = e^{-kt}c(0) + \int_0^t ke^{-k(t-s)}u(s,x)ds.$$

Par ailleurs, en prenant $t = 0$ dans (B.0.7), on obtient $c(0) = v_0$ et le résultat recherché.

On montre dans la suite que $v \in L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$. De (B.0.4) on a $v = 0$ sur $\partial\Omega$ car $v_0 \in H_0^1\left(\Omega\right)$ et $u \in L^2(0,T;H_0^1\left(\Omega\right))$ (voir Théorème 1.2.7).

Par ailleurs, de (B.0.4) on a

$$\nabla v(t) = e^{-kt}\nabla v_0 + \int_0^t e^{-k(t-s)}k\nabla u\left(s\right)ds,$$

en effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $i = \overline{1,3}$

$$\begin{aligned}
\langle\frac{\partial v}{\partial x_i}(t),\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(\Omega)} &= -\langle v(t),\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(\Omega)} = -\int_\Omega v(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx \\
&= -\int_\Omega e^{-kt}v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx - \int_\Omega\int_0^t ke^{-k(t-s)}u\left(s\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dsdx \\
&= -\langle e^{-kt}v_0,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(\Omega)} - \int_0^t ke^{-k(t-s)}\left(\int_\Omega u\left(s\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx\right)ds \\
&= \langle e^{-kt}\frac{\partial v_0}{\partial x_i},\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(\Omega)} + \int_0^t ke^{-k(t-s)}\left(\int_\Omega\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}\varphi dx\right)ds \\
&= \langle e^{-kt}\frac{\partial v_0}{\partial x_i},\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(\Omega)} + \int_\Omega\left(\int_0^t ke^{-k(t-s)}\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}ds\right)\varphi(x)dx \\
&= \langle e^{-kt}\frac{\partial v_0}{\partial x_i},\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(\Omega)} + \langle\int_0^t ke^{-k(t-s)}\frac{\partial u(s)}{\partial x_i}ds,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega^T)} &= \int_0^T\int_\Omega\left|e^{-kt}\nabla v_0 + \int_0^t e^{-k(t-s)}k\nabla u\left(s\right)ds\right|^2 dxdt \\
&\leq 2\int_0^T\int_\Omega|e^{-kt}\nabla v_0|^2dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega\left|\int_0^t e^{-k(t-s)}k\nabla u\left(s\right)ds\right|^2dxdt \\
&\leq 2T\|\nabla v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2T^2k^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega^T)},
\end{aligned}$$

alors, de $(1.2.37)^2$, (B.0.1), on déduit (B.0.2).

Pour la régularité de v définie dans le Théorème 2.1.4 on reprend la démonstrations précédente, et on obtient le résultat recherché. $\square$

Annexe C

Des résultats d'homogénéisations

Dans cette annexe, on justifie la limite du terme I_ε^5 introduit dans la démonstration des résultats du chapitres 1 et 2 .

Les notations sont celle du chapitre 1.

C.1 Preuve de la convergence (1.3.71)

Rappelons que pour tout $(\varphi, \psi) \in (C^\infty([0,T]; \mathcal{D}(\Omega)))^2$ le terme I_ε^5 est définie par :

$$I_\varepsilon^5(t) := \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi, \psi)\, dxds, \quad \text{pour chaque } t \in [0,T].$$

D'après (1.3.48), on a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^5(t) &= \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dxds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi) \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} dxds \\ &:= A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Commençons par déterminer la limite du terme A_1, on a

$$A_1 = \int_0^t \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi \chi_{\Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon} dxds.$$

En sachant que

$$\Omega = (\Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon) + C_\varepsilon + D_\varepsilon,$$

alors

$$|\Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon| = |\Omega| - |C_\varepsilon \cup D_\varepsilon| \to 1,$$

car $|\Omega| = 1$ et d'après (1.3.53), on a $|C_\varepsilon \cup D_\varepsilon| \to 0$.

Donc

$$\nabla \varphi \chi_{\Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon} \longrightarrow \nabla \varphi \quad \text{p.p. } (x,t) \times \Omega^T,$$

de plus on a

$$|\nabla \varphi(x,t) \chi_{\Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon}| \leq |\nabla \varphi(x,t)|, \quad \forall (x,t) \in \Omega^T,$$

alors d'après le théorème de la convergence dominées de Lebesgue, il vient

$$\nabla\varphi\chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon} \longrightarrow \nabla\varphi \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{C.1.1}$$

Tenant compte de la convergence $(1.2.37)^2$, on déduit

$$A_1 \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx ds. \tag{C.1.2}$$

Le terme A_2 converge vers zéro. En effet,

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \left| (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon \nabla\varphi \right| dx ds \\ &\leq |\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} \int_0^t \int_{C_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon| dx ds \\ &\leq |\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} T^{\frac{1}{2}} |C_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \to 0, \end{aligned} \tag{C.1.3}$$

où nous avons utilisé l'estimation (1.2.35), $0 \leq w_{R_\varepsilon} \leq 1$ et le fait que $|C_\varepsilon| \to 0$.

Le terme A_3, s'écrit

$$\begin{aligned} A_3 = &\int_0^t \int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} \left(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi \right) dx ds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} \left(G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi) \right) dx ds \\ := &I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Le terme I_1 aussi converge vers zéro, car

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \left| \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} \left(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi \right) \right| dx ds \\ &\leq |G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} |\nabla w_{R_\varepsilon}|_{L^2(\Omega^T)} \\ &\leq 2R_\varepsilon |\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} C \gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CR_\varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{C.1.4}$$

où nous avons utilisé le Lemme 1.2.5, les estimations (1.2.35), (1.2.18) et les faits qui $R_\varepsilon \to 0$, $\gamma_\varepsilon \to \gamma$.

Maintenant, on détermine la limite de I_2,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} \left(G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi) \right) dx ds \\ &= \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_0^t \left(\fint_{S_{r_\varepsilon}^k} \psi d\sigma - \fint_{S_{r_\varepsilon}^k} \varphi d\sigma \right) \left(\int_{C_\varepsilon^k(r_\varepsilon, R_\varepsilon)} \nabla w_{R_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon dx \right) ds, \end{aligned}$$

puis, on considère le changement de variable suivant :

$$x = y + \varepsilon k, \quad y \in C\left(r_\varepsilon, R_\varepsilon\right),$$

ainsi, d'après la Définition 1.2.1 on obtient

$$w_{R_\varepsilon}(y + \varepsilon k) = W_{R_\varepsilon}(y),$$

et on note

$$\breve{u}_\varepsilon^k(x) = u_\varepsilon(x + \varepsilon k). \tag{C.1.5}$$

Donc, on peut écrire

$$\int_{C_\varepsilon^k(r_\varepsilon,R_\varepsilon)} \nabla w_{R_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon dx = \int_{C(r_\varepsilon,R_\varepsilon)} \nabla W_{R_\varepsilon} \nabla \check{u}_\varepsilon^k dx,$$

on passe au changement de variables sphérique. D'après (A.1.2) et (A.1.3), il vient

$$\begin{aligned}
\int_{C_\varepsilon^k(r_\varepsilon,R_\varepsilon)} \nabla w_{R_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}(r)\frac{\partial \check{u}_\varepsilon^k}{\partial r} r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\Phi \\
&= -\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \frac{\partial \check{u}_\varepsilon^k}{\partial r} dr \sin\Theta d\Theta d\Phi \\
&= \frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=r_\varepsilon} - \check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=R_\varepsilon}\right)\sin\Theta d\Theta d\Phi \\
&= \frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\int_{S_1}\left(\check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=r_\varepsilon} - \check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=R_\varepsilon}\right) d\sigma,
\end{aligned} \tag{C.1.6}$$

S_1 étant la sphère de rayon 1 centrée en zéro.

En remarquant que

$$\begin{aligned}
⨍_{S_R} h d\sigma &= \frac{1}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(R,\Theta,\Phi)R^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(r,\Theta,\Phi)\big|_{r=R}\sin\Theta d\Theta d\Phi,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$⨍_{S_R} h d\sigma = ⨍_{S_1} h\big|_{r=R} d\sigma.$$

Donc, on peut écrire

$$\int_{S_1}\left(\check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=r_\varepsilon} - \check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=R_\varepsilon}\right) d\sigma = 4\pi\left(⨍_{S_{r_\varepsilon}} \check{u}_\varepsilon^k d\sigma - ⨍_{S_{R_\varepsilon}} \check{u}_\varepsilon^k d\sigma\right),$$

alors, en utilisant la notation (C.1.5), on obtient

$$\int_{S_1}\left(\check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=r_\varepsilon} - \check{u}_\varepsilon^k\big|_{r=R_\varepsilon}\right) d\sigma = 4\pi\left(⨍_{S_{r_\varepsilon}^k} u_\varepsilon d\sigma - ⨍_{S_{R_\varepsilon}^k} u_\varepsilon d\sigma\right). \tag{C.1.7}$$

Finalement, on remplace (C.1.6) et (C.1.7) dans I_2, on trouve

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{4\pi r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^t\left(⨍_{S_{r_\varepsilon}^k}\psi d\sigma - ⨍_{S_{r_\varepsilon}^k}\varphi d\sigma\right)\left(⨍_{S_{r_\varepsilon}^k} u_\varepsilon d\sigma - ⨍_{S_{R_\varepsilon}^k} u_\varepsilon d\sigma\right) ds \\
&= \frac{4\pi r_\varepsilon R_\varepsilon}{\varepsilon^3\left(R_\varepsilon - r_\varepsilon\right)}\int_0^t\int_\Omega \left(G_{r_\varepsilon}(u_\varepsilon) - G_{R_\varepsilon}(u_\varepsilon)\right)\left(G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi)\right) dx ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite dans I_2 et en tenant compte des convergences (1.2.38)[1], (1.2.39), (1.2.28), (1.3.58) et $\gamma_\varepsilon \to \gamma$, on obtient

$$I_2 \longrightarrow 4\pi\gamma\int_0^t\int_\Omega (v-u)(\psi-\varphi) dx ds. \tag{C.1.8}$$

De (C.1.2), (C.1.3), (C.1.4) et (C.1.8), en déduit

$$I_\varepsilon^5(t) \to \int_0^t\int_\Omega (\nabla u \nabla\varphi + 4\pi(v-u)(\psi-\varphi)) dx ds, \quad \text{pour chaque } t\in[0,T],$$

ce qui achève la démonstration. □

C.2 Preuve de la convergence (1.3.85)

Rappelons que pour tout $\varphi \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ le terme I_ε^5 est définie par :

$$I_\varepsilon^5(t) := \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi)\,dxds, \quad \text{pour chaque } t \in [0,T].$$

On a par définition (1.3.48) de Φ_ε

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^5(t) &= \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dxds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi) \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} dxds \\ &:= A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les limites de A_1 et A_2, on reprend la démonstration des termes similaires à celles de la preuve de la section précédente, on obtient

$$\begin{aligned} A_1 &\longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxds, \\ A_2 &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Le terme A_3 converge vers zéro. En effet

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \left| \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi) \right| dxds \\ &\leq |G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} |\nabla w_{R_\varepsilon}|_{L^2(\Omega^T)} \\ &\leq 2R_\varepsilon |\nabla \varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} C \gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 1.2.5, les estimations (1.2.35), (1.2.18) et les faits qui $r_\varepsilon \to 0$, $R_\varepsilon \to 0$.

Donc

$$I_\varepsilon^5(t) \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxds, \quad \text{pour chaque } t \in [0,T].$$

$\square$

C.3 Preuve de la convergence (1.3.93)

Rappelons que pour tout $(\varphi,\psi) \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$ le terme I_ε^5 est définie par :

$$I_\varepsilon^5(t) := \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\,dxds, \quad \text{pour chaque } t \in [0,T].$$

D'après (1.3.48), on a

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon^5(t) = &\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx ds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx ds \\
&+ \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi) \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} dx ds \\
:= &\, A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}
$$

Pour les termes A_1 et A_2, on reprend la démonstration des termes similaires à celles de la preuve de la première section de cet annexe, on obtient

$$
\begin{aligned}
&A_1 \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx ds, \\
&A_2 \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Le terme A_3 converge vers zero. En effet

$$
\begin{aligned}
|A_3| &\leq \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \left| \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi) \right| dx ds \\
&\leq |G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} |\nabla w_{R_\varepsilon}|_{L^2(\Omega^T)} \\
&\leq C \gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé le Lemme 1.2.5, les estimations (1.2.35), (1.2.18) et le fait que $\gamma_\varepsilon \to 0$.

Par conséquent

$$
I_\varepsilon^5(t) \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx ds, \quad \text{pour chaque } t \in [0, T].
$$

□

Dans la suite, les notations sont celles du chapitre 2.

C.4 Preuve de la convergence (2.2.66)

Pour tout $(\varphi, \psi) \in (C^\infty([0, T]; \mathcal{D}(\Omega)))^2$ le terme I_ε^5 dans le chapitre 2 est défini par :

$$
I_\varepsilon^5(t) := \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi, \psi) dx ds, \quad \text{pour chaque } t \in [0, T],
$$

alors, d'après (2.2.5) on a

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon^5(t) = &\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx ds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (1 - v_\varepsilon) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx ds \\
&+ \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon (F_\varepsilon(\varphi) - \varphi) dx ds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon (F_\varepsilon(\psi) - F_\varepsilon(\varphi)) dx ds \\
:= &\, A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned}
$$

Le théorème de la convergence dominées de Lebesgue implique $\nabla\varphi\chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon} \to \nabla\varphi$ dans $L^2(\Omega)$, et tenant compte de la convergence $(2.1.35)^2$ on obtient

$$A_1 \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx ds. \tag{C.4.1}$$

Le terme A_2 converge vers zéro. En effet, les estimations (2.1.33) et $0 \le v_\varepsilon \le 1$, et le fait que $|C_\varepsilon| \to 0$, nous donne

$$\begin{aligned} |A_2| &\le \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \big|\left(1 - v_\varepsilon\right)\nabla u^\varepsilon \nabla\varphi\big| dx ds \\ &\le |\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} \int_0^t \int_{C_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon| dx ds \\ &\le |\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} T^{\frac{1}{2}} |C_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \to 0. \end{aligned} \tag{C.4.2}$$

Le terme A_3 aussi converge vers zéro, car

$$\begin{aligned} |A_3| &\le \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \big|\nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon \left(F_\varepsilon\left(\varphi\right) - \varphi\right)\big| dx ds \\ &\le |F_\varepsilon\left(\varphi\right) - \varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} |\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} \\ &\le 2R_\varepsilon |\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} C\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\le CR_\varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{C.4.3}$$

où nous avons utilisé le Lemme 2.1.3, les estimations (2.1.33), (2.1.17) et les faits qui $R_\varepsilon \to 0$, $\gamma_\varepsilon \to \gamma$.

Maintenant on traite le terme A_4. D'après la Définition 2.1.1 de v_ε, on a

$$\begin{aligned} A_4 &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_0^t \int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k} \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon^k \left(F_\varepsilon\left(\psi\right) - F_\varepsilon\left(\varphi\right)\right) dx ds \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_0^t \left(F_\varepsilon^k(\psi)(s) - F_\varepsilon^k(\varphi)(s)\right) \left(\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k} \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon^k dx\right) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, la Définition 2.1.1 de v_ε encore nous donne

$$\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k} \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon^k dx = \frac{1}{r_\varepsilon} \int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k} \nabla u^\varepsilon \nabla w_{\lambda_\varepsilon} \left(\frac{x - \varepsilon k}{r_\varepsilon}\right) dx. \tag{C.4.4}$$

Par ailleurs, la formule de Green nous donne

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k} u^\varepsilon(x,t)\left(\Delta(-w_{\lambda_\varepsilon})\right)\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right) dx = &- \int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k} \nabla u^\varepsilon(x,t) \nabla(-w_{\lambda_\varepsilon}) \left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right) dx \\ &- \int_{\partial D_\varepsilon^k} u^\varepsilon(x,t) \left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial\nu}\right)\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right) d\sigma \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon^k} u^\varepsilon(x,t) \left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial\nu}\right)\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right) d\sigma, \end{aligned}$$

où ν est le vecteur normal extérieur à ∂B_ε^k.

Comme w_{λ_ε} est la solution du problème (2.1.9), alors

$$0=-\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}\nabla u^\varepsilon(x,t)\nabla(-w_{\lambda_\varepsilon})\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)dx-\int_{\partial D_\varepsilon^k}u^\varepsilon(x,t)\left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial\nu}\right)\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)d\sigma$$

$$+\int_{\partial B_\varepsilon^k}u^\varepsilon(x,t)\left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial\nu}\right)\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)d\sigma,$$

par conséquent

$$\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}\nabla u^\varepsilon(x,t)\nabla w_{\lambda_\varepsilon}\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)dx=\int_{\partial D_\varepsilon^k}u^\varepsilon(x,t)\left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial\nu}\right)\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)d\sigma$$

$$-\int_{\partial B_\varepsilon^k}u^\varepsilon(x,t)\left(-\frac{\partial w_{\lambda_\varepsilon}}{\partial\nu}\right)\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)d\sigma.$$

D'où, la Définition 2.1.2 implique

$$\frac{1}{r_\varepsilon^{N-1}\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)}\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}\nabla u^\varepsilon(x,t)\nabla w_{\lambda_\varepsilon}\left(\frac{x-\varepsilon k}{r_\varepsilon}\right)dx=F_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(t)-G_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(t). \tag{C.4.5}$$

De (C.4.4), (C.4.5), on déduit

$$F_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(t)-G_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(t)=\frac{1}{r_\varepsilon^{N-2}\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)}\int_{B_\varepsilon^k\setminus D_\varepsilon^k}\nabla u^\varepsilon\nabla v_\varepsilon^k dx\quad\text{pour chaque } t\in[0,T].$$

On remplace cette dernière égalité dans A_4, on obtient

$$\begin{aligned}A_4&=r_\varepsilon^{N-2}\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^t\left(F_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(s)-G_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(s)\right)\left(F_\varepsilon^k(\psi)(s)-F_\varepsilon^k(\varphi)(s)\right)ds\\&=\gamma_\varepsilon\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^t\int_\Omega\left(F_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(s)-G_\varepsilon^k(u^\varepsilon)(s)\right)\left(F_\varepsilon^k(\psi)(s)-F_\varepsilon^k(\varphi)(s)\right)\chi_{Y_\varepsilon^k}dxds\\&=\gamma_\varepsilon\text{cap}_{\lambda_\varepsilon}(D)\int_0^t\int_\Omega\left(F_\varepsilon(u^\varepsilon)(s)-G_\varepsilon(u^\varepsilon)(s)\right)\left(F_\varepsilon(\psi)(s)-F_\varepsilon(\varphi)(s)\right)dxds.\end{aligned}$$

Alors, en passant à la limite et en tenant compte des convergence (2.1.11), (2.1.28), (2.1.36)[1], (2.1.37), et $\gamma_\varepsilon\to\gamma$, on obtient

$$A_4\longrightarrow\text{cap}(D)\gamma\int_0^t\int_\Omega(v-u)(\psi-\varphi)dxds. \tag{C.4.6}$$

De (C.4.1), (C.4.2), (C.4.3) et (C.4.6), en déduit

$$I_\varepsilon^5(t)\to\int_0^t\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi+\text{cap}(D)\gamma(v-u)(\psi-\varphi))dxds,\ \text{pour chaque } t\in[0,T].$$

□

C.5 Preuve de la convergence (2.2.80)

Rappelons que pour tout $\varphi \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ le terme I_ε^5 est défini par :

$$I_\varepsilon^5(t) := \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\varphi)\, dxds, \quad \text{pour chaque } t \in [0,T].$$

D'après (2.2.5), on a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^5(t) &= \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dxds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (1 - v_\varepsilon) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (F_\varepsilon(\varphi) - \varphi) \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon dxds \\ &:= A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les limites de A_1 et A_2, on reprend la démonstration des termes similaires à ceux de la preuve de la section précédente, on obtient

$$\begin{aligned} A_1 &\longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxds, \\ A_2 &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Le terme A_3 converge vers zéro. En effet

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \big|\nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon (F_\varepsilon(\varphi) - \varphi)\big| dxds \\ &\leq |F_\varepsilon(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} |\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} \\ &\leq 2R_\varepsilon |\nabla \varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} C \gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{N-2}{2}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 2.1.3, les estimations (2.1.33), (2.1.17) et les hypothèses $r_\varepsilon \to 0$, $R_\varepsilon \to 0$.

Donc

$$I_\varepsilon^5(t) \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxds, \quad \text{pour chaque } t \in [0,T].$$

$\square$

C.6 Preuve de la convergence (2.2.88)

Rappelons que pour tout $(\varphi,\psi) \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$ le terme I_ε^5 est défini par :

$$I_\varepsilon^5(t) := \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon(\varphi,\psi)\, dxds, \quad \text{pour chaque } t \in [0,T].$$

On a par définition (2.2.5) de Φ_ε

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon^5(t) = & \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx ds + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (1 - v_\varepsilon) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx ds \\
& + \int_0^t \int_{C_\varepsilon} (F_\varepsilon (\psi) - \varphi) \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon dx ds \\
:= & A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Pour les termes A_1 et A_2, on reprend la démonstration des termes similaires à ceux de la preuve de la section C.4 de cet annexe, on obtient

$$\begin{aligned}
A_1 &\longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx ds, \\
A_2 &\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Le terme A_3 converge vers zero. En effet, le Lemme 2.1.3, les estimations (2.1.33), (2.1.17) et la convergence $\gamma_\varepsilon \to 0$ nous donne

$$\begin{aligned}
|A_3| &\leq \int_0^t \int_{C_\varepsilon} \left| \nabla u^\varepsilon \nabla v_\varepsilon (F_\varepsilon (\psi) - \varphi) \right| dx ds \\
&\leq |F_\varepsilon (\psi) - \varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} |\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} \\
&\leq C \gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$I_\varepsilon^5(t) \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx ds, \quad \text{pour chaque } t \in [0, T].$$

□

Annexe D

Existence et unicité de solutions de (3.1.5)

Dans cette annexe, on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1.5) pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, on utilise pour cela la méthode classique de Galerkin (voir [19], [21]). La preuve est donnée en plusieurs étapes.

Les notations sont celle du chapitre 3.

D.1 Problème approché

Soit H_ε l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant :

$$(u,v)_{H_\varepsilon} = (\rho_\varepsilon u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x) u(x) v(x) dx, \quad \forall (u,v) \in \left[L^2(\Omega)\right]^2. \tag{D.1.1}$$

Soit $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ la base orthonormale en H_ε des fonctions propres de l'opérateur $-div\,(\rho_\varepsilon \nabla)$ (voir Proposition 8.23 [19]). De plus, $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est aussi une base orthogonale en $H_0^1(\Omega)$.

Introduisons le sous-espace V_m de $H_0^1(\Omega)$ engendré par $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$. Ainsi on définit l'opérateur de projection P_m de $H_0^1(\Omega)$ vers V_m par

$$P_m v = \sum_{j=1}^{m} (v, w_j)_{H_\varepsilon} w_j, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{D.1.2}$$

Des résultats classiques sur les espaces de Hilbert, on a (voir [19]) ce qui suit

$$P_m v \longrightarrow v \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \tag{D.1.3}$$

Soit la fonction $u_{\varepsilon,m} : [0,T] \longrightarrow V_m$ tel que

$$u_{\varepsilon,m}(t,x) = \sum_{j=1}^{m} g_j^{\varepsilon,m}(t) w_j(x), \tag{D.1.4}$$

la solution du problème approchée suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2} w_k dx + \int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t} w_k dx + \int_\Omega \rho^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,m} \nabla w_k dx = 0, \\ \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T), k = \overline{1,m}, \\ u_{\varepsilon,m}(0) = u^0_{\varepsilon,m} = P_m u^0_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}(0) = u^1_{\varepsilon,m} = P_m u^1_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{D.1.5}$$

où la convergence (D.1.3) nous assurent les convergences suivantes

$$u^0_{\varepsilon,m} \longrightarrow u^0_\varepsilon \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ quand } m \to \infty, \tag{D.1.6}$$

$$u^1_{\varepsilon,m} \longrightarrow u^1_\varepsilon \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ quand } m \to \infty. \tag{D.1.7}$$

Par ailleurs, on a

$$u_{\varepsilon,m}(0) = P_m u^0_\varepsilon,$$

alors, en s'aidant de (D.1.2), (D.1.4), cette dernière devient

$$\sum_{j=1}^m g_j^{\varepsilon,m}(0) w_j(x) = \sum_{j=1}^m (u^0_\varepsilon, w_j)_{H_\varepsilon} w_j(x),$$

grâce à la linéarité et l'indépendance de $w_1, w_2, ..., w_m$, on obtient

$$g_j^{\varepsilon,m}(0) = (u^0_\varepsilon, w_j)_{H_\varepsilon}.$$

De la même manière, on trouve

$$\frac{dg_j^{\varepsilon,m}}{dt}(0) = (u^1_\varepsilon, w_j)_{H_\varepsilon}.$$

A l'aide de (D.1.4), la première équation dans (D.1.5) devient

$$\sum_{j=1}^m \frac{d^2 g_j^{\varepsilon,m}}{dt^2}(t) \int_\Omega \rho^\varepsilon w_j(x) w_k(x) dx + \sum_{j=1}^m \frac{dg_j^{\varepsilon,m}}{dt}(t) \int_\Omega \rho^\varepsilon w_j(x) w_k(x) dx$$
$$+ \sum_{j=1}^m g_j^{\varepsilon,m}(t) \int_\Omega \rho^\varepsilon \nabla w_j(x) \nabla w_k(x) dx = 0,$$

mais comme $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale. Il vient que le système (D.1.5) est équivalent au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 g_k^{\varepsilon,m}}{dt^2}(t) + \dfrac{dg_k^{\varepsilon,m}}{dt}(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^m g_j^{\varepsilon,m}(t) \int_\Omega \rho^\varepsilon \nabla w_j(x) \nabla w_k(x) dx = 0, \quad k = \overline{1,m}, \\ g_k^{\varepsilon,m}(0) = (u^0_\varepsilon, w_k)_{H_\varepsilon}, \\ \dfrac{dg_k^{\varepsilon,m}}{dt}(0) = (u^1_\varepsilon, w_k)_{H_\varepsilon}. \end{cases} \tag{D.1.8}$$

D'après les résultats classiques sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence et l'unicité de solution $g_1^{\varepsilon,m}, g_2^{\varepsilon,m}, ..., g_m^{\varepsilon,m} \in C^1([0, t_m])$, on peut prendre $T = t_m$ grâce à l'estimation (D.2.2) ci-dessous. Ainsi $u_{\varepsilon,m}$ est bien déterminé et $u_{\varepsilon,m} \in C^1([0, T], V_m)$.

D.2 Estimation a priori

Première estimation : estimation pour $(u_{\varepsilon,m})_{m>0}$ et $\left(\dfrac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}\right)_{m>0}$.

On multiplie la première équation dans (D.1.5) par $\dfrac{dg_k^{\varepsilon,m}}{dt}$ que l'on somme sur k, il vient après intégration sur $(0, t)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\varepsilon \Big|\frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}(t)\Big|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \rho^\varepsilon \Big|\frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}\Big|^2 dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\varepsilon |\nabla u_{\varepsilon,m}(t)|^2 dx \\ = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\varepsilon |u^1_{\varepsilon,m}|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\varepsilon |\nabla u^0_{\varepsilon,m}|^2 dx.\end{aligned} \tag{D.2.1}$$

En s'aident des hypothèses (D.1.6), (D.1.7), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\varepsilon \Big|\frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}(t)\Big|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \rho^\varepsilon \Big|\frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}\Big|^2 dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\varepsilon |\nabla u_{\varepsilon,m}(t)|^2 dx \leq C, \tag{D.2.2}$$

où C est une constante positive indépendante de m.

Par conséquent

$$u_{\varepsilon,m} \quad \text{bornée dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{D.2.3}$$

$$\frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t} \quad \text{bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{D.2.4}$$

Deuxième estimation : estimation pour $\left(\dfrac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2}\right)_{m>0}$.

D'après (D.1.5), pour tout $\varphi \in V_m$ on a

$$(\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2}, \varphi)_\Omega = -(\rho^\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}, \varphi)_\Omega - (\rho^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,m}, \nabla\varphi)_\Omega,$$

alors

$$\begin{aligned}\Big|\left(\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2}, \varphi\right)_\Omega\Big| &\leq \Big|\left(\rho^\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}, \varphi\right)_\Omega\Big| + \big|(\rho^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,m}, \nabla\varphi)_\Omega\big| \\ &\leq \Big\|\rho_\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}\Big\|_\Omega \|\varphi\|_\Omega + \|\rho_\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,m}\|_\Omega \|\nabla\varphi\|_\Omega \\ &\leq C\Big\|\rho_\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}\Big\|_\Omega \|\nabla\varphi\|_\Omega + \|\rho_\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,m}\|_\Omega \|\nabla\varphi\|_\Omega.\end{aligned}$$

De (D.2.3), (D.2.4), en déduit

$$\Big|\left(\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2}, \varphi\right)_\Omega\Big| \leq C\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in V_m,$$

où C est une constante positive indépendante de m.

Donc, comme V_m est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on déduit par densité que

$$\left| \left(\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2}, \varphi \right)_\Omega \right| \leq C \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

par conséquent

$$\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2} \quad \text{est bornée dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{D.2.5}$$

D.3 Passage à la limite

D'après les estimations (D.2.3), (D.2.4), (D.2.5), il existe une sous-suite de $(u_{\varepsilon,m})_{m>0}$ notée encore m et une fonction u_ε telle que

$$\begin{aligned} &u_{\varepsilon,m} \rightharpoonup u_\varepsilon \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ &\frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ &\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2} \rightharpoonup \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \tag{D.3.1}$$

Soient $\psi \in \mathcal{D}(0,T),\ v \in H_0^1(\Omega)$. On multiplie l'équation (D.1.5) par $(v, w_k)_{H_\varepsilon}\psi$, puis en somme sur k, on obtient

$$\int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon,m}}{\partial t^2} P_m v(x)\psi(t)dx + \int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t} P_m v(x)\psi(t)dx + \int_\Omega \rho^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,m} \nabla P_m v(x)\psi(t)dx = 0.$$

On intègre sur $(0,T)$, il vient après une intégration par partie dans le premier membre de cette dernière,

$$-\int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t} P_m v(x)\psi'(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t} P_m v(x)\psi(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,m} \nabla P_m v(x)\psi(t)dxdt = 0.$$

En passant à la limite dans l'égalité précédente, et en utilisant (D.1.3), (D.3.1), on obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} v(x)\psi'(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} v(x)\psi(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v(x)\psi(t)dxdt = 0.$$

Alors, encore une intégration par partie nous donne

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}, v \right\rangle_{H^{-1}\times H_0^1(\Omega)} \psi(t)dt + \int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} v(x)\psi(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \rho^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v(x)\psi(t)dxdt = 0, \tag{D.3.2}$$

et donc u_ε est vérifié la première équation du problème (3.1.5).

Dans la suite on identifie les conditions initiales associées à u_ε.

Grâce aux injections compactes $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ et la Proposition 1.1.2 et en s'aident des convergences (D.3.1), on conclut que

$$\begin{aligned} & u_{\varepsilon,m} \longrightarrow u_\varepsilon \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];L^2(\Omega)), \\ & \rho_\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t} \longrightarrow \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \tag{D.3.3}$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} u^0_{\varepsilon,m} \longrightarrow u^0_\varepsilon \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ quand } m \to \infty, \\ \rho_\varepsilon u^1_{\varepsilon,m} \longrightarrow \rho_\varepsilon u^1_\varepsilon \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ quand } m \to \infty, \end{cases} \tag{D.3.4}$$

(D.3.3) nous donnent

$$\begin{aligned} & u_{\varepsilon,m}(.,0) \longrightarrow u_\varepsilon(.,0) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ & \rho_\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon,m}}{\partial t}(.,0) \longrightarrow \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(.,0) \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \tag{D.3.5}$$

De (D.3.4) et (D.3.5), en déduit que

$$\begin{cases} u_\varepsilon(.,0) = u^0_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(.,0) = u^1_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{D.3.6}$$

D.4 Unicité

Supposons que le problème (3.1.5) possède deux solutions $u_\varepsilon, v_\varepsilon$, alors

$$w_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon,$$

est la solution du problème homogène suivant :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial t^2} + \rho_\varepsilon \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} - div\,(\rho_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[\,, \\ w_\varepsilon(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{D.4.1}$$

On multiplie la première équation du système (D.4.1) par $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}$ que l'on intègre sur $\Omega \times (0,t)$, $t \in (0,T)$. On obtient :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}\right) |\nabla w_\varepsilon|^2 dx = 0,$$

d'où

$$w_\varepsilon = 0,$$

par conséquent $u_\varepsilon = v_\varepsilon$. $\square$

Bibliographie

[1] G. ALLAIRE, Homogenization of the Navier Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. *Abstract framework, a volume distribution of holes. Arch. Rational. Mech. Anal.* 113 (1991) 209 − 259.

[2] G. ALLAIRE, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Analysis, Vol. 23, (1992), p. 1482-1518.

[3] M. BELLIEUD, G. BOUCHITTÉ, Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Non local effects. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pis Cl. Sci.* (4) **26 (3)** (1998) 407-436.

[4] M. BELLIEUD, I. GRUAIS, Homogenization of an elastic material reinforced by very stiff or heavy fibers. Non local effects. Memory effects. *J. Math. Pures Appl.* **84 (1)** (2005) 55-96.

[5] M. BELLIEUD, Homogenization of evolution problems for a composite medium with very small and heavy inclusions, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **11** (**2**), (2005) 266-284.

[6] N. BENGOUGA, F. BENTALHA, Corrector for a diffusion process in a rarefied binary structure. Asymptotic Analysis, vol. 98, no. 3, pp. 257-284, 2016.

[7] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, *North-Holland, Amsterdam, 1978.*

[8] F. BENTALHA, I. GRUAIS, DAN. POLISEVSKI, Homogenization of a conductive suspension in a Stokes-Bussinesq flow, Applicable Analysis. 85 (6-7) (2006), 811-830.

[9] F. BENTALHA, I. GRUAIS, DAN. POLISEVSKI, Asymptotic thermal flow around a highly conductive suspension. Analele Universitatii din Bucuresti, Seria Matematica, Anul LV (2006), pp.17-26.

[10] F. BENTALHA, I. GRUAIS, D. POLISEVSKI, Diffusion process in a rarefied binary structure. Revue Roumaine de Mathématiques Pures et appliquées, 52 (2007), 2, 129-149.

[11] F. BENTALHA, I. GRUAIS, D. POLISEVSKI, Diffusion in a highly rarified binary structure of general periodic shape. Applicable analysis. Vol 87, N° 6-June 2008, 635-655.

[12] S. BRAHIM - OTSMANE, G. A. FRANCFORT, F. MURAT, Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, *J. Math. Pures Appl.*, (71), 1992, 197-231.

[13] H. BREZIS, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Dunod Paris (1983).

[14] M. BRIANE, Homogenization of the Stokes equations with high-contrast viscosity. J. Math. Pures Appl. 82 (2003) 843-876.

[15] M. BRIANE, N. TCHOU, Fibered microstructure for some non-local Dirichlet forms. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **30** (2001) 681-712.

[16] J. CASADO-DIAZ, Two-scale convergence for nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **130 A** (2000) 249-276.

[17] D. CIORANESCU, F. MURAT, A strange term coming from nowhere. In *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials.*, volume 31 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, A. Cherkaev, R. Kohn (eds.), pages 45-93. Birkhäuser, Boston 1997.

[18] D. CIORANESCU, P. DONATO, F. MURAT, E. ZUAZUA, Homogenization and corrector for the wave equation in domains with small holes. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1991), p. 251-293.

[19] D. CIORANESCU, P. DONATO, An introduction to homogenization. Oxford Lecture Series in Math. App., Vol. 17, Oxford University Press. (1999).

[20] D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN, G. GRISO, Periodic unfolding method in homogenization, C.R. Académie des Sciences de Paris, Série I335 (2002), p. 99-104.

[21] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthiers-Villars, Paris (1969).

[22] G. NGUETSENQ, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal., Vol. 20, (1989), p. 608-629.

[23] M. SFAXI, Analyse asymptotique de problèmes d'évolution dégénérés dans des structures hétérogènes et anisotropes. Thèse de Doctorat, Université de Provence - U.F.R. M.I.M, 2006.

[24] M. SFAXI, A. Sili, Correctors for Parabolic Equations in a Heterogeneous Fibered Medium. Bollettino U.M.I. (8) 10-B (2007), 1025-1053.

[25] S. SPAGNOLO, Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21, 1967, p. 657-699.

[26] L. TARTAR, Estimations of homogeneous coefficients, Topics in the Mathematical Modelling of composite Materials, ed. A. Cherkaev and R. Kohn, Birkäuser, Boston, (1997), p. 9-20.

[27] L. TARTAR, Cours Peccot au Collège de France, Unpublished, partially written in Meyers, (1977).