Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Faculté Des Mathématiques Et Informatique
Département de Mathématiques
Université Batna 2

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité
Mathématiques appliquées

Présentée par
Halaoua Madjid

Stabilité de Quelques Classes d'Équations et d'Inclusions Différentielles Semi-linéaires d'ordre Fractionnaires avec Impulsions

Composition du jury

M. BRAHIMI	M.C.A	Univ. Batna 2	Président
E. DJEFFAL	Pro.	Univ. Batna 2	Rapporteur
P. RAYNAUD DE FITTE	Pro.	Univ. Rouen	Co-Rapporteur
I. REZZOUG	Pro.	Univ. Oum El Bouaghi	Examinateur
I. LAKHDARI	Pro.	Univ. Biskra	Examinateur
A. BOUSSAD	MCB	Univ. Batna 2	Invité

Année universitaire
2023/2024

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la bifurcation des solutions positives pour le problème aux limites d'équations différentielles d'ordre fractionnaire non linéaires

$$^{c}D^{\alpha}u(t) + \eta f(t, u(t)) = 0; \quad 0 < t < 1,$$

avec des conditions intégrales :

$$u(0) = u^{''}(0) = 0, \quad u(1) = \beta \int_0^1 u(s)ds.$$

Nous avons d'abord présenté quelques préliminaires contenant une introduction sur le degré topologique accompagnés de la théorie de bifurcation.

Nous avons démontré l'existence de solutions positives sous certaines conditions suffisantes en utilisant la technique de bifurcation.

Enfin, quelques exemples ont été donnés pour illustrer les résultats obtenus.

Mots-clés : Dérivées fractionnaires, problèmes aux limites, conditions intégrales, théorie de bifurcation, degré topologique, fonction de Green.

Abstract

In this thesis, we studies the bifurcation of positive solutions for a boundary-value problem of nonlinear fractional differential equations

$$^{c}D^{\alpha}u(t) + \eta f(t, u(t)) = 0; \quad 0 < t < 1,$$

with integral boundary conditions :

$$u(0) = u^{''}(0) = 0, \quad u(1) = \beta \int_0^1 u(s)ds.$$

We first presented some preliminaries, including an introduction to the topological degree, along with bifurcation theory.

We demonstrated the existence of positive solutions under certain sufficient conditions using the bifurcation technique.

Lastly, some examples were given to illustrate the obtained results.

Keywords : Fractional derivatives, boundary value problems, integral conditions, bifurcation theory, topological degree, Green's function.

Remerciements

Je souhaite ici rendre hommage et exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à sa réalisation de cette thèse et à son aboutissement.

Mes remerciements sadressent tout dabord à mon Directeur de thèse, le Professeur Djeffal El Amir. Tout au long de ce travail, il a su m'apporter un soutien constant, une disponibilité, une écoute, une confiance et des conseils précieux et avisés à la hauteur de ses compétences et de ses réelles qualités humaines.

Merci au messieurs les membres du jury de soutenance d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Jadresse également tous mes remerciements pour ses précieux conseils ma famille pour son soutien.

Table des matières

Introduction

Comme les dérivées fractionnaires sont un excellent outil pour décrire l'hérédité de divers matériaux et processus, ce qui nous incite à étudier ce type de problème aux limites. Ce travail consiste à étudier la bifurcation de solutions positives pour certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire non linéaires avec conditions intégrales.
Notre travail s'appuie principalement sur l'article [1] publié en 2023 par M. Halaoua et E. Djeffal. Nous avons également bénéficié de manière significative de l'article [2], publié par Y. Liu en 2013.
Le travail se propose de reprendre systématiquement toute les démonstrations de l'article [1] en les détaillant dans l'espoir de les rendre plus claires pour un public plus large. Cela nous amène à rappeler ou à détailler certaines notions fondamentales utilisées, telles la théorie de bifurcation, le degré topologique, la fonction de Green, etc. Ces notions préliminaires sont disponibles dans tout ouvrage de référence en Analyse Fonctionnelle, par exemple [3], [4].

Aprés cette bréve introduction, passons maintenant à la description de son contenu et de son organisation. Dans cette Thèse, nous abordons principalement la question de l'existence de solutions positives pour certains problèmes aux limites non linéaires d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales, en utilisant la théorie de bifurcation.

Dans un premier temps, nous avons présenté quelques préliminaires contenant le théorème des fonctions implicites, accompagnés de certaines propriétés du degré topologique, d'abord en dimension finie (degré de Brouwer), puis en dimension infinie (degré de Leray-Schauder). Ce chapitre s'avère être un préquis incontournable pour les chapitres qui suivent.

Le chapitre deux est consacré à la théorie de bifurcation. Les phénomènes de bifurcation ont été largement utilisés dans de nombreux domaines de la physique et ont fait l'objet d'études approfondies, notamment dans les applications où les problèmes sont formulés sous la forme

$$u - F(\lambda, u) = 0, \tag{1}$$

avec $F : E \times \mathbb{R} \to E$ une application complètement continue telle que $F(\lambda, 0) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
En fait, un point $(\lambda_0, 0)$ est appelé point de bifurcation de (1) relativement à la

droite $\{0\} \times \mathbb{R}$ si tout voisinage de ce point contient des solutions de l'équation (1), c'est-à-dire il existe une suite de solutions (λ_n, u_n) de (1) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Pour la bifurcation locale, on utilise la méthode de Liapunov-Schmidt qui décompose l'espace en une somme directe d'un espace propre et de son supplémentaire, décrivant ainsi la réduction d'un problème posé sur des espaces de dimension infinie à un problème posé sur des espaces de dimension finie. Les résultats de la bifurcation globale utilisent les propriétés du degré de Leray-Schauder et le lemme de Whyburn. Dans ce contexte, Schmitt and Thompson ont affirmé que la bifurcation a des conséquences globales. En effet, ils ont montré que s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, tels que $(0, a)$, $(0, b)$ résolvent (1) où a, b ne sont pas des points de bifurcation, et si

$$\deg\,(f(a, .), B_r(0), 0) \neq \deg\,(f(b, .), B_r(0), 0),$$

alors il existe une composante connexe $\mathfrak{C}$ telle que

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{S} = \overline{\{(\lambda, u) : (\lambda, u) \text{ solution de (1)} \quad \text{with } u \neq 0\}} \cup \{0\} \times [a, b].$$

De plus, cette composante est soit non bornée, soit rejoint un point $(\lambda_1, 0)$, et $\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash[a, b]$.
Une application de ces résultats globaux de bifurcation nous amène à la bifurcation à l'infini. En fait, un point (∞, μ) est appelé un point de bifurcation à l'infini pour (1) si tout voisinage de ce point contient des solutions de l'équation (1), c'est-à-dire s'il existe une suite de solutions (λ_n, u_n) de (1) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \mu.$$

Enfin, dans le dernier chapitre, des résultats globaux de bifurcation ont été appliqués pour étudier le problème aux limites non linéaires d'ordre fractionnaire avec conditions intégrales suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) + \eta f(t, u(t)) = 0 & 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \beta \int_0^1 u(s)ds, \end{cases} \tag{2}$$

où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, et $f : [0, 1] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est une fonction continue.
Un cas particulier de (2) a été étudié par Cabada et Wang [5] ; en effet, ils ont utilisé le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii, pour établir le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 *[5] Supposons que l'une des deux conditions suivantes est remplie :*
  (i) (Cas sous-linéaire) $f_0 = \infty$ *et* $f_\infty = 0$.

(*ii*) *(Cas superlinéaire)* $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$ *et il existe* $\mu > 0$ *et* $\theta > 0$ *tels que*

$$f(t, \kappa x) \geq \mu \kappa^\theta f(t, x) \text{ pour tout } \kappa \in (0, 1].$$

Alors, pour $\eta = 1$, *le problème (2) admet au moins une solution dans le cône* P *où*

$$P = \{u \in C([0, 1]) : u(t) \geq \frac{t\beta(\alpha - 2)}{2\alpha}\|u\|, \quad \forall t, s \in [0, 1]\}.$$

et $f_0 := \lim_{u\to 0^+}\{\min_{t\in[0,1]} \frac{f(t, u)}{u}\}$, $f_\infty := \lim_{u\to\infty}\{\max_{t\in[0,1]} \frac{f(t, u)}{u}\}$.

Nous avons introduit des hypothèses différentes de celles du théorème précédent ; en fait, en considérant le problème (2) sous les hypothèses suivantes :
(H1) $\exists(\overline{r}, \overline{R}) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \overline{r} < \overline{R}$, et il existe des fonctions $a_0, a^0, b_\infty, b^\infty \in C(J, \mathbb{R}^+)$ et $\zeta_1, \xi_1, \zeta_2, \xi_2 \in C(J, \mathbb{R}^+)$ telles que $a_0(.), a^0(.), b_\infty(.)$, et $b^\infty(.)$ ne sont jamais identiquement nulles dans tout sous-intervalle de $J := [0, 1]$ et vérifient

$$a_0(t)(v - \xi_1(t, v)) \leq f(t, v) \leq a^0(t)(v + \xi_2(t, v)) \quad \forall(t, v) \in J \times [0, \overline{r}],$$

$$b_\infty(t)(v - \zeta_1(t, v)) \leq f(t, v) \leq b^\infty(t)(v + \zeta_2(t, v)) \quad \forall(t, v) \in J \times [\overline{R}, +\infty),$$

et pour $i \in \{1, 2\}$, uniformément par rapport à t, nous avons

$$\xi_i(t, v) = o(v) \text{ si } v \to 0 \text{ et } \zeta_i(t, v) = o(v) \text{ au voisinage de } \infty.$$

Évidemment, la condition **(H1)** signifie que la non-linéarité $f(.,.)$ est asymptotiquement linéaire en 0 et à l'infini.

À la fin de cette thèse, nous avons fourni un nombre assez important de références bibliographiques permettant au lecteur intéressé d'avoir accès à quelques-unes des sources que nous avons utilisées pour rédiger ce travail. Cette liste est bien entendu non exhaustive, et certaines entrées ne sont pas citées dans le texte.

Chapitre 1

Analyse dans les espaces de Banach

Dans ce chapitre, nous avons compilé un certain nombre de définitions et énoncés de théorèmes qui sont utilisés à un moment ou un autre de ce texte. Ils sont, pour la plupart, accompagnés d'une preuve détaillée. Lorsque ce n'est pas le cas, le lecteur est systématiquement invité à consulter les références bibliographiques citées.

1.1 Espaces de Banach

Un **espace de Banach** E est un espace vectoriel normé et complet pour la distance d induite par la norme $\|.\|$, où $\|.\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que

1. $\|.\| \geq 0, \quad \forall u \in E$,
2. $\|u\| = 0$ est équivalent à $u = 0 \in E$,
3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, pour tout scalaire λ et chaque $u \in E$,
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, pour tout $u, v \in E$ (inégalité triangulaire),

et la distance d est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\mathrm{d}\,(u, v) = \|u - v\|$, pour tout $u, v \in E$.

Un **espace de Hilbert** E est un espace vectoriel réel (ou complexe) normé complet pour la distance induite par la norme $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, u \in E$, avec $\langle ., . \rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ telle que

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, $\forall u, v \in E$,
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in E$,
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall u, v \in E$,
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in E$, et $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$,

Dans la littérature classique de l'analyse, nous constatons que l'ensemble des espaces suivants sont des exemples d'espaces de Banach.

Espaces de fonctions continues

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On notera

$$\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ tel que } f \text{ est continue sur } \Omega\}.$$

Soit

$$\|f\|_0 = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|_m,$$

oú $|.|_m$ est la norme de $\mathbb{R}^m$.

Tant que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue, il en résulte que l'espace

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^m) : \|f\|_0 < \infty\}$$

est un espace de Banach.
En outre, si Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $\overline{\Omega} \subset \Omega'$, on note

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{ \text{ la restriction à } \overline{\Omega} \text{ de } f \in \mathcal{C}^0(\Omega', \mathbb{R}^m)\}.$$

Si Ω est borné et que $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, alors $\|f\|_0 < +\infty$ et $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ est un espace de Banach.

Les espaces L^p

Soit Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. Pour $1 \leq p < \infty$, soit

$$\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|_m^p dx)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on a

$$\|f\|_{L^\infty} = ess \sup_{x\in\Omega} |f(x)|_m,$$

où *ess* sup représente le supremum essentiel.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{f : \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Alors, $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ est un **espace de Hilbert** avec un produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x).g(x)dx,$$

où $f(x).g(x)$ est le produit scalaire de $f(x)$ et $g(x)$ dans l'espace de Hilbert $\mathbb{R}^m$ (espace euclidien).

Espace des opérateurs linéaires bornés

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit

$$\mathcal{L}(E; F) = \{f : E \to F \text{ tel que } f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

Pour $f \in \mathcal{L}(E; F)$, on note $\|.\|_\mathcal{L}$ la norme de $\mathcal{L}(E; F)$ et on a

$$\|f\|_\mathcal{L} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F.$$

Cet espace est un espace de Banach si F l'est.

1.2 Différentiabilité

1.2.1 Différentielles de Gâteaux et Fréchet

Soit E et F des espaces de Banach et soit U un ouvert de E.
Une fonction $f : U \to F$ est dite **Gâteaux différentiable** en $x_0 \in U$ dans la direction h si la limite $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\{f(x_0 + th) - f(x_0)\}$ existe.

f est dite **Fréchet differentiable** au point x_0 s'il existe une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E; F)$, tel que pour $\|h\|$ suffisamment petit, on a

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + \circ(\|h\|) \text{ et } \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\circ(\|h\|)}{\|h\|} = 0.$$

Si une telle application $T \in \mathcal{L}(E; F)$ existe, elle est unique. On note $Df(x_0)$ la dérivée au sens de Fréchet de f en x_0.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de x_0 si f est Fréchet differentiable dans ce voisinage et l'application $Df : x \mapsto Df(x)$ est continue.
Si l'application $Df : U \mapsto \mathcal{L}(E; F)$ est Fréchet differentiable en x_0, on dit que f est deux fois differentiable et la differentielle seconde $D^2 f(x_0)$ est un élément de $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$. De la même manière, pour $h \in E$, on définit la différentiabilité d'ordre supérieur $D^n f(x_0)(h, ..., h)$.

1.2.2 Formule de Taylor

Théorème 1.2.1 *Supposons que $f : E \to F$ et tous ses dérivés de Fréchet $Df, ..., D^{m+1}f$ sont continues sur un ouvert U. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que le segment $[x, x + h]$ est inclus dans U, on a*

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k f(x) h^k + \frac{1}{(m)!} \int_0^1 (1 - s)^m D^{m+1} f(x + sh) h^{m+1} ds.$$

1.3 Applications Particulières

1.3.1 Applications complètement continues

Soient E et F deux espaces de Banach et soit Ω un ouvert de E. L'application $f : \Omega \to F$ est dite **compacte** si l'image de tout borné est relativement compacte dans F. On dit que f est **complètement continue** si elle est compacte et continue.

Remarque 1.3.1 *Il est clair que*

1. *Toute application compacte est complétement continue ; la réciproque est vraie si Ω est borné,*

2. *Toute application linéaire et compacte est complètement continue, et la réciproque est vraie si elle est de rang fini,*
3. *Une application compacte n'est pas nécessairement continue ; par exemple, la fonction représentée dans la figure ci-dessous est compacte mais pas continue.*

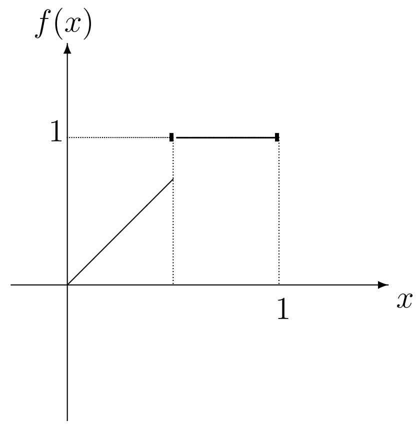

Fig. 1

Proposition 1.3.1 *Une application $f : X \to Y$ est compacte si et seulement si de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{n_k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

Remarque 1.3.2 *Soient L, N deux applications de X dans X.*

1. *Si L est complètement continue et N est continue, alors NoL est complètement continue.*
   En effet,
   pour toute suite bornée (u_n) de X, il existe une sous-suite $(L(u_{n_k}))$ qui converge vers v. La continuité de N noue affirme que la suite $NoL(u_{n_k})$ coverge vers $N(v)$, d'où NoL est complètement continuité.
2. *Si L est complètement continue et N est continue et bornée, alors LoN est complètement continue.*
   En effet,
   Pour tout borné B de X, l'ensemble $N(B)$ est borné et comme L est complétement continue, $LoN(B)$ est relativement compact. D'où LoN est complètement continuité.

Lemme 1.3.1 *Soit Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application complètement continue. Si f est Fréchet differentiable au point $x_0 \in \Omega$, alors, l'application linéaire $T = Df(x_0)$ est compacte, donc elle est complètement continue.*

Preuve — Comme T est linéaire, il suffit de montrer que $T(\{x : \|x\| \leq 1\})$ est précompact dans F. (Le symbole $\|.\|$ désigne à la fois la norme dans E et la norme

dans F).
Si ce n'était pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset E$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \|x_n\| \leq 1 \text{ et } \|Tx_n - Tx_m\| \geq \varepsilon \text{ pour } n \neq m.$$

Choisir $0 < \delta < 1$ tel que pour $h \in E$ et $\|h\| \leq \delta$ on a

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\| < \frac{\varepsilon}{3}\|h\|.$$

Donc pour $n \neq m$, on aura

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + \delta x_n) - f(x_0 + \delta x_m)\| &\geq \delta\|Tx_n - Tx_m\| \\ &- \|f(x_0 + \delta x_n) - f(x_0) - \delta Tx_n\| \\ &- \|f(x_0 + \delta x_m) - f(x_0) - \delta Tx_m\| \\ &\geq \delta\varepsilon - \frac{\delta\varepsilon}{3} - \frac{\delta\varepsilon}{3} = \frac{\delta\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

De sorte que la suite $\{f(x_0 + \delta x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ n'a pas une sous-suite qui converge.
D'autre part, pour $\delta > 0$, petit, l'ensemble $\{x_0 + \delta x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ est borné, et comme f est complètement continue, alors $\{f(x_0 + \delta x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ est précompacte. D'où la contradiction. ■

1.3.2 Applications Propres

Considérons $M \subset E$, et $Y \subset F$ comme des espaces métriques dont la distance est induite par les normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$, respectivement. On dit qu'une application $f : M \to Y$ est **propre** si elle est continue et pour tout compact K de Y, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est compact dans M.

Lemme 1.3.2 *Soient h, g deux applications de E dans F. Si h est complètement continue et g est propre, alors l'application $f = g - h$ est propre, à condition que f soit coercive, i.e.*

$$\|f(x)\| \to \infty \text{ si } \|x\| \to \infty.$$

Preuve — Soit K un compact de F et soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie dans $N = f^{-1}(K)$. Alors, il existe une suite $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie dans K tel que

$$y_n = f(x_n) = g(x_n) - h(x_n).$$

Comme K est compact, la suite $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ admet une sous-suite convergente, la coercivité de f nous affirme que la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, et de plus, puisque h est complètement continue, la suite $\{h(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ doit avoir une sous-suite convergente. On en déduit que la suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ possède également une sous-suite convergente. Par conséquent, les trois suites $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{h(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sont convergentes. g est propre et $g(x_n) = y_n + h(x_n)$, alors la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge aussi, et donc N est précompact. La continuité de g et h nous indique que N est fermé. ■

Corollaire 1.3.1 *Soit $h : E \to E$ une application complètement continue, si $f = id - h$ est coercive, alors une telle application f est propre.*

Dans les espaces de dimension finie, les concepts de coercivité et de propreté sont équivalents, c'est à dire que nous avons :

Lemme 1.3.3 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application continue, alors f est propre si et seulement si f est coercive.*

1.3.3 Applications contractante, Théorème du point fixe de Banach

Soit M un sous-ensemble d'un espace de Banach E. Une application $f : M \to E$ est dite contractante s'il existe une constante $k \in [0, 1[$, telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \text{ pour tout } x, y \in M.$$

Théorème 1.3.1 *Soit M un sous-ensemble fermé de E et $f : M \to M$ une application contractante, alors f possède un point fixe unique dans M ; i.e. il existe $x \in M$ unique tel que*

$$f(x) = x. \tag{1.2}$$

Preuve — Soit $x_0 \in M$. On considère la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$ définie par

$$x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1. \tag{1.3}$$

En utilisant (1.3) et le fait que f est contractante, pour tout $j \geq 1$ on a

$$\|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq k^j\|x_1 - x_0\|,$$

Donc, on en déduit que pour $m > n$ on a également

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_1 - x_0\|(k^n + ... + k^{m-1}) = \frac{k^n - k^m}{1 - k}\|x_1 - x_0\|. \tag{1.4}$$

D'après (1.4), la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est de Cauchy dans E, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ existe, puisque M est fermé, $x \in M$. Mais f étant contractante, elle est continue, donc par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans (1.3), on obtient (1.2), ce qui montre que f possède un point fixe. Enfin, si $y \in M$ un autre point fixe de f, alors

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

$k < 1$, donc $x = y$. L'application f a donc un unique point fixe. ∎

Remarque 1.3.3 *Notons que le théorème 1.3.1 est également valable si E un espace métrique complet de distance d en remplaçant $\|x - y\|$ par $d(x, y)$ dans la preuve.*

1.3.4 Théorème des Fonctions Implicites

Le théorème des fonctions implicites joue un rôle essentiel dans la théorie de bifurcation, de plus il est, en effet, un outil très important pour la résolution du problème non linéaire

$$f(x, y) = 0, \tag{1.5}$$

avec $f : U \times V \subset X \times Y \to Z$ une application continue, X, Y et Z des espaces de Banach, U un ouvert de X et V un ouvert de Y.
Considérant la condition **(H)** suivante :
Pour chaque $\lambda \in V$, l'application $f(., \lambda) : U \to Z$ est Fréchet differentiable dans U avec dérivation de Fréchet $D_u f(u, \lambda)$, et l'application $(u, \lambda) \to D_u f(u, \lambda)$ est continue de $U \times V$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 1.3.2 ***(Théorème des Fonctions Implicites)*** *Soit f une application satisfaisant à la condition* ***(H)****. Supposons qu'il existe $(u_0, \lambda_0) \in U \times V$ tel que $D_u f(u_0, \lambda_0)$ est un homéomorphisme linéaire de E dans F i.e. $(D_u f(u_0, \lambda_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $[D_u f(u_0, \lambda_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, il existe $\delta > 0$, $r > 0$ et une unique application $u : B_\delta(\lambda_0) = \{\lambda : \|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta\} \to E$ telle que*

$$f(u(\lambda), \lambda) = f(u_0, \lambda_0) \tag{1.6}$$

où $\|u(\lambda) - u_0\| \leq r$ et $u(\lambda_0) = u_0$.

Preuve — Considérons l'équation suivante

$$f(u, \lambda) = f(u_0, \lambda_0),$$

elle est équivalente à

$$[D_u f(u_0, \lambda_0)]^{-1}(f(u, \lambda) - f(u_0, \lambda_0)) = 0,$$

ou à

$$u = u - [D_u f(u_0, \lambda_0)]^{-1}(f(u, \lambda) - f(u_0, \lambda_0)) \underbrace{=}_{\text{def}} G(u, \lambda). \tag{1.7}$$

L'application G possède les propriétés suivantes :
- **(i)** $G(u_0, \lambda_0) = u_0$,
- **(ii)** G et $D_u G$ sont continus dans C,
- **(iii)** $D_u G(u_0, \lambda_0) = 0$.

De plus, pour $\|u_1 - u_0\| \leq r$, $\|u_2 - u_0\| \leq r$ et r est suffisamment petit on a

$$\begin{aligned} \|G(u_1, \lambda) - G(u_2, \lambda)\| &\leq (\sup_{0 \leq t \leq 1} \|D_u G(u_1 + t(u_2 - u_1), \lambda)\|)\|u_1 - u_2\| \quad (1.8) \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

On note $B_\delta(\lambda_0) = \{\lambda \in V : \|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta\}$ et

$$M = \{u : B_\delta(\lambda_0) \to E;\ \text{continue}\ , u(\lambda_0) = u_0, \|u(\lambda) - u_0\|_0 \leq r \text{ et } \|u\|_0 \leq +\infty\}.$$

où $\|u\|_0 = \sup_{\lambda \in B_\delta(\lambda_0)} \|u(\lambda)\|$. Alors, M est un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach et (1.7) définit dans M l'équation suivante :

$$u(\lambda) = G(u(\lambda), \lambda). \tag{1.9}$$

Pour $u \in M$, on définit l'application $g : M \to M$ par

$$g(u)(\lambda) = G(u(\lambda), \lambda),$$

alors, d'après (1.9) on a

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|.$$

Donc, g est contractante de M dans elle même ; et d'après le théorème (1.3.1) du point fixe, g possède un unique point fixe ■

Remarque 1.3.4 *Dans le théorème des Fonctions Implicites, si f est k-fois continûment différentiable, alors l'application $\lambda \mapsto u(\lambda)$ hérite cette propriété.*

1.4 Théorème d'Inversion Locale

Le théorème d'inversion locale indique que si une fonction est continûment différentiable en un point, et sa différentielle en ce point est inversible alors, la restriction localement est inversible et son inverse et différentiable. En effet ; on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.1 *Soient E, X deux espaces de Banach, $U \subset E$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to X$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $Df(a)$ est un homéomorphisme linéaire de E dans X.*
Alors, il existe un voisinage ouvert U' de a, un voisinage ouvert V de $f(a)$ et une application g déterminée d'une façon unique telles que

- *f est une bijection de U' dans V, et g est son application réciproque.*
- *g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $Dg(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$.*

1.5 Théorème de l'extension de Dugundji

Le résultat suivant concerne le prolongement continue d'une application définie sur une partie fermée de l'espace à l'espace tout entier.

Théorème 1.5.1 *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $f : C \to K$ une application continue, où C est fermé dans E et K un convexe de F. Alors, il existe une application continue*

$$\widetilde{F} : E \to K$$

telle que

$$\widetilde{f}(u) = f(u), u \in C.$$

Preuve — Pour chaque $u \in E\backslash C$ on pose

$$r_u = \frac{1}{3}\ \mathrm{dist}(u, C) \text{ et } B_u = \{v \in E : \|v - u\| < r_u\}.$$

Alors

$$\mathrm{diam} B_u \leq\ \mathrm{dist}(B_u, C).$$

La famille $\{B_u\}_{u\in E\backslash C}$ est donc un recouvrement ouvert de l'espace métrique $E\backslash C$ et elle possède un sous-recouvrement ouvert localement fini $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, i.e.

(i) $\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \supset E\backslash C$,

(ii) pour chaque $\lambda \in \Lambda$ il existe B_u tel que $\mathcal{O}_\lambda \subset B_u$,

(iii) $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est localement fini.

On définit la fonction $q : E\backslash C \to (0, \infty)$ par

$$q(u) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dist}(u, E\backslash\mathcal{O}_\lambda). \tag{1.10}$$

La famille $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est localement fini, de sorte que la somme dans l'équation (1.10) contient un nombre fini de termes, et donc la fonction q est continue. On note

$$\rho_\lambda(u) = \frac{\mathrm{dist}(u, E\backslash\mathcal{O}_\lambda)}{q(u)}, \quad \lambda \in \Lambda, u \in E\backslash C.$$

Il est clair que pour $\lambda \in \Lambda$ et $u \in E\backslash C$ on a

$$0 \leq \rho_\lambda(u) \leq 1,\ \sum_{\lambda\in\Lambda}\rho_\lambda(u) = 1.$$

Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ on prend $u_\lambda \in C$ tel que

$$\mathrm{dist}(u_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \leq 2\ \mathrm{dist}(C, \mathcal{O}_\lambda),$$

et on définit une fonction $\widetilde{f}$ telle que

$$\widetilde{f}(u) = \begin{cases} f(u), u \in C \\ \displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}\rho_\lambda(u)f(u_\Lambda), u \notin C. \end{cases}$$

Alors, $\widetilde{f}$ possède les propriétés suivantes :

(i) $\widetilde{f}$ est définie sur E et est une extension de f.

(ii) $\widetilde{f}$ est continue à l'intérieur de C.

(iii) $\widetilde{f}$ est continue dans $E\backslash C$.

Pour montrer que $\widetilde{f}$ est continue sur E, il suffit de montrer qu'elle est continue sur ∂C. Soit $u \in \partial C$, alors puisque f est continue, pour un $\epsilon > 0$ donné on peut trouver $\delta = \delta(u, \epsilon) > 0$ tel que si $\|u - v\| \leq \delta$, et $v \in C$ on a

$$\|\widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(v)\| \leq \epsilon.$$

Maintenant pour $v \in E\backslash C$ on a

$$\|\widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(v)\| = \|f(u) - \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(v) f(u_\lambda)\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(v)\|f(u) - f(u_\lambda)\|.$$

Il est clair que pour $\lambda \in \Lambda$, $\operatorname{dist}(v, E\backslash\mathcal{O}_\lambda) > 0$ si $\rho_\lambda(v) \neq 0$, i.e. $v \in \mathcal{O}_\lambda$.
Par conséquent, $\|v - u_\lambda\| \leq \|v - w\| + \|w - u_\lambda\|$ pour tout $w \in \mathcal{O}_\lambda$.
Puisque $\|v-w\| \leq \operatorname{diam} \mathcal{O}_\lambda$, nous pouvons prendre l'infimum sur $w \in \mathcal{O}_\lambda$ et obtenir

$$\|v - u_\lambda\| \leq \operatorname{diam} \mathcal{O}_\lambda + \operatorname{dist}(u_\lambda, \mathcal{O}_\lambda).$$

Pour un certain $u_1 \in E\backslash C$, $\mathcal{O}_\lambda \subset B_{u_1}$. Ainsi, puisque

$$\operatorname{diam} \mathcal{O}_\lambda \leq \operatorname{diam} B_{u_1} \leq \operatorname{dist}(B_{u_1}, C) \leq \operatorname{dist}(C, \mathcal{O}_\lambda),$$

on obtient

$$\|v - u_\lambda\| \leq 3 \operatorname{dist}(C, \mathcal{O}_\lambda) \leq 3\|v - u\|.$$

De plus, pour λ tel que $\rho_\lambda(v) \neq 0$, nous avons également

$$\|u - u_\lambda\| \leq \|v - u\| + \|v - u_\lambda\| \leq 4\|u - v\|.$$

Donc si $\|u - v\| \leq \frac{\delta}{4}$, alors

$$\|u - u_\lambda\| \leq \delta, \text{ et } \|f(u) - f(u_\lambda)\| \leq \epsilon.$$

Par conséquent

$$\|\widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(v)\| \leq \epsilon \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(v) = \epsilon.$$

D'où la continuité de $\widetilde{f}$. ■

Corollaire 1.5.1 *Soient E, X deux espaces de Banach et soit $f : C \to X$ une application continue, où C est fermé dans E. Alors, f possède un prolongement continu $\widetilde{f}$ sur E tout entier tel que*

$$\widetilde{f}(E) \subset \ cof(C),$$

où $cof(C)$ est l'enveloppe convexe de $f(C)$.

Corollaire 1.5.2 *Soit K un sous-ensemble fermé, convexe d'un espace de Banach E. Alors, il existe une application continue $f : E \to K$ telle que $f(E) = K$ et $f(u) = u$ si $u \in K$, i.e. K est une rétraction continue de E.*

Preuve — Comme l'application d'identité $id : K \to K$ est continue et le sous-ensemble K est fermeé et convexe, on peut appliquer le corollaire 1.5.1 pour obtenir la conclusion désirée. ■

1.6 Degré topologique

Dans cette section, nous rappellons quelques propriétés du degré topologique, d'abord en dimension finie (degré de Brouwer), puis en dimension infinie (degré de Leray-Schauder).

1.6.1 Degré topologique de Brouwer

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue, $b \in \mathbb{R}^n$ et $b \notin f(\partial\Omega)$. L'idée du degré topologique est d'associer au triplet (f, Ω, b) un nombre entier noté $\deg(f, \Omega, b)$ tel que si cet entier est non nul, l'équation $f(x) = b$ admet une solution dans Ω. Il est appelé le degré de Brouwer de l'application f relativement à l'ouvert Ω et à la cible b.

Définition 1.6.1
Si la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ de f en x_0 est inversible, on appelle $x_0 \in \Omega$ un ***point régulier*** *de f. Dans le cas contraire, x_0 est appelé un* ***point critique*** *de f. On note par $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques de f sur l'ouvert Ω, i.e.*

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega; \quad det\ Df(x) = 0\}).$$

De même, pour $b \in f(\overline{\Omega})$ et si $f^{-1}(b) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$, on dit que b est une ***valeur régulière****. Dans le cas contraire, si cette intersection n'est pas vide, b est appelée valeur singulière ou critique.*

Proposition 1.6.1 *([3])*
Si $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, alors, pour toute valeur régulière $b \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $f^{-1}(\{b\})$ est fini.

Preuve —
L'image réciproque d'un ensemble fermé est fermée, alors $f^{-1}(\{b\})$ est fermé dans un ouvert borné, donc compact.
D'après le théorème d'inversion locale, les points de $f^{-1}(\{b\})$ sont isolés, et par conséquent, discrets. Ainsi, $f^{-1}(\{b\})$ est fini. ∎

Définition 1.6.2 *Si $b \notin f(\partial\Omega \cup S_f(\Omega))$, on définit le* ***degré topologique de Brouwer*** *de f en b relativement à l'ouvert Ω par :*

$$deg(f, \Omega, b) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(\{b\})} sgn\ detDf(x) & (Somme\ finie) \\ 0 \quad si\ \Omega \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset, \end{cases}$$

où

$$sgn\ detDf(x) = \begin{cases} +1, & si\ dét\ Df(x) > 0, \\ -1, & si\ \ det\ Df(x) < 0. \end{cases}$$

Il est clair que le degré est un entier. Si $deg(f,\Omega,b)\neq 0$, *l'équation*

$$f(x)=y \tag{1.11}$$

admet une solution.

Lemme 1.6.1
La définition précedente du degré peut se formuler autrement. En effet, soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *une famille de fonctions positives telle que*

$$supp\varphi_\varepsilon\subset B_\varepsilon(0)\ \ et\ \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1.$$

D'après la proposition 1.6.1, on a

$$f^{-1}(\{b\})=\{x_1,x_2,...,x_k\},k\in\mathbb{N}.$$

Alors, pour ε *assez petit, le support de l'application* $x\mapsto\varphi_\varepsilon(|f(x)-b|)$ *admet* k *composantes connexes* $U_1,U_2,...,U_k$ *contenant respectivement les points* $x_1,x_2,...,x_k$. *De plus, par un changement de variables dans les intégrales, on a*

$$\begin{aligned}\int_\Omega\varphi_\varepsilon(|f(x)-b|)Df(x)dx &= \sum_{i=1}^k\int_{U_i}\varphi_\varepsilon(|f(x)-b|)Df(x)dx\\ &= \sum_{i=1}^k sgn|Df(x_k)|\int_{U_i}\varphi_\varepsilon(|f(x)-b|)|Df(x)|dx\\ &= \sum_{i=1}^k sgn|Df(x_k)|\int_{B_\varepsilon(0)}\varphi_\varepsilon(y)dy\\ &= \sum_{i=1}^k sgn|Df(x_k)|=deg(f,\Omega,b).\end{aligned}$$

Il est bien défini, appelé le ***degré de Brouwer****, et est indépendant de* φ *et de* $\varepsilon\in]0,dist(b,f(\partial\Omega))[$.

1.6.2 Propriétés du Degré de Brouwer

Nous procédons ensuite à établir certaines propriétés du degré de Brouwer d'une application qui seront pertinentes non seulement pour le calcul du degré, mais aussi pour l'extension de la définition du degré aux applications définies dans des espaces de dimension infinie.

Proposition 1.6.2 ***(Propriété de solution)*** *Soit* $f\in\mathcal{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ *tel que* $y\notin f(\partial\Omega)$ *et supposons que* $deg\ (f,\Omega,y)\neq 0$. *Alors, l'équation* $f(x)=y$ *a une solution dans* Ω.

Proposition 1.6.3 ***(Propriété de continuité)*** *Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que deg (f, Ω, y) soit défini. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $\widehat{y} \in \mathbb{R}$ avec $\|f - g\| + |y - \widehat{y}| < \epsilon$, on a*

$$\textit{deg } (f, \Omega, y) = \textit{ deg } (g, \Omega, \widehat{y}).$$

Proposition 1.6.4 ***(Propriété d'invariance par homotopie)*** *Soient $f, g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tels que $f(x) \neq y$ et $g(x) \neq y$ pour $x \in \partial\Omega$. Soit $h : [a, b] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que $h(t, x) \neq y, (t, x) \in [a, b] \times \partial\Omega$. De plus, supposons que $h(a, x) = f(x)$ et $h(b, x) = g(x)$ pour $x \in \overline{\Omega}$. Alors,*

$$\textit{deg } (f, \Omega, y) = \textit{ deg } (g, \Omega, y);$$

et plus généralement, deg $(h(t, .), \Omega, y) =$ constant pour $a \leq t \leq b$.

Corollaire 1.6.1 *Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tel que deg (f, Ω, y) soit défini, et soit également $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tel que $|f(x) - g(x)| < |f(x) - y|, x \in \partial\Omega$. Alors, on a*

$$\textit{deg } (f, \Omega, y) = \textit{ deg } (g, \Omega, y).$$

Preuve — Pour $0 \leq t \leq 1$ et $x \in \partial\Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} |y - tg(x) - (1-t)f(x)| &= |(y - f(x)) - t(g(x) - f(x))| \\ &\leq |y - f(x)| - t|g(x) - f(x)| \\ &< 0 \text{ car } 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

Donc l'application $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ définie par $h(t, x) = tg(x) + (1-t)f(x)$ satisfait les conditions de la Proposition 1.6.4 et la conclusion découle de cette proposition.
■

Corollaire 1.6.2 *Soient f et g deux applications telles que $f(x) = g(x), x \in \partial\Omega$. Si le degré est défini, alors deg $(f, \Omega, y) =$ deg (g, Ω, y), ce qui signifie que le degré dépend uniquement des valeurs sur la frontière $\partial\Omega$.*

Proposition 1.6.5 ***(Propriété d'additivité)*** *Soit Ω un ensemble ouvert et borné. Supposons que Ω est l'union de m ensembles ouverts $\Omega_1, ..., \Omega_m$, et soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ une fonction continue, et $y \in \mathbb{R}^n$ un point tel que $y \notin f(\partial\Omega_i)$ pour tout $i = 1, ..., m$. Alors, on a*

$$\textit{deg } (f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{m} \textit{ deg } (f, \Omega_i, y).$$

Proposition 1.6.6 ***(Propriété d'Excision)*** *Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et soit K un sous-ensemble fermé de $\overline{\Omega}$ tel que $y \notin f(\partial\Omega \cup K)$. Alors,*

$$\textit{deg } (f, \Omega, y) = \textit{ deg } (f, \Omega \backslash K, y).$$

Proposition 1.6.7 ***(La formule du produit cartésien)*** *Soit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ un ensemble ouvert et borné dans $\mathbb{R}^n$, où Ω_1 est ouvert dans $\mathbb{R}^p$ et Ω_2 est ouvert dans $\mathbb{R}^q$, avec $p+q=n$.*
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit $x=(x_1,x_2)$, où $x_1 \in \mathbb{R}^p$ et $x_2 \in \mathbb{R}^q$. Supposons que $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ où $f_1 : \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}^p$ et $f_2 : \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^q$ sont continues.
Supposons que $y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^n$ soit tel que $y_i \notin f_i(\partial\Omega_i)$ pour $i=1,2$. Alors,

$$deg\ (f,\Omega,y) = \ deg\ (f_1,\Omega_1,y_1)\ deg\ (f_2,\Omega_2,y_2).$$

À titre d'exemple illustrant l'application des propriétés mentionnées ci-dessus, nous démontrons le théorème du point fixe de Brouwer

Théorème 1.6.1 ***(Théorème du point fixe de Brouwer)*** *Soit $f \in \mathcal{C}\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, où $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, tel que $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$. Alors, f possède un point fixe dans Ω, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x)=x$.*

Preuve — Supposons que f n'ait aucun point fixe dans $\partial\Omega$. Définissons, pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $h(t,x) = x - tf(x)$. Alors, pour tout t dans l'intervalle $[0,1]$ et pour tout $x \in \partial\Omega$, on a $h(t,x) \neq 0$.
D'après la propriété d'homotopie, nous avons

$$\deg\ (h(t,0),\Omega,0) = \ \deg\ (h(0,0),\Omega,0).$$

Comme $\deg\ (id,\Omega,0)=1$, cela implique, par la propriété de solution, que l'équation $x - f(x) = 0$ a une solution dans Ω. ■

Le théorème 1.6.1 reste valide si la boule unité de $\mathbb{R}^n$ est remplacée par n'importe quel ensemble homéomorphe à la boule unité (en remplaçant f par $g^{-1}fg$, où g est l'homéomorphisme).
Le théorème reste également valide si la boule unité est remplacée par n'importe quel ensemble convexe compact (ou un ensemble homéomorphe à celui-ci) en utilisant le théorème d'extension de Dugundji (Théorème 1.5.1).

1.6.3 Degré topologique de Leray-Schauder

Le degré topologique de Leray-Schauder est une généralisation du degré de Brouwer. Cette généralisation offre une boîte à outils mathématique précieuse pour l'étude de la topologie des espaces de Banach de dimension infinie et la résolution de problèmes non linéaires dans ces espaces. Il convient de noter que, pour introduire la notion de degré topologique en dimension infinie, la continuité de l'application ne suffit plus (et même la régularité supérieure, telle que C^1 ou autre, ne suffit pas non plus).

D'autre part, étant donné un ouvert borné Ω, l'ensemble image $f(\overline{\Omega})$ n'est pas en général compact ; il le sera si f est complètement continue. De plus, $f(\partial\Omega)$ est un ensemble fermé si f est une application fermée, ce qui est vrai si elle est une perturbation compacte. C'est pourquoi, nous commençons d'abord par introduire la notion suivante.

Définition 1.6.3
Soit E un espace de Banach réel muni de la norme $\|.\|$, et soit $\Omega \subset E$ un ensemble ouvert borné. Soit $F : \overline{\Omega} \to E$ une application continue telle que $F(\overline{\Omega})$ soit inclus dans un sous-espace de dimension finie de E. L'application définie par

$$f(x) = x + F(x) = (id + F)(x)$$

est appelée une perturbation de dimension finie de l'identité dans E.

Soit y un point dans E tel que $y \in f(\partial\Omega)$ et soit $\widetilde{E}$ un sous-espace de dimension finie de E contenant y et $F(\overline{\Omega})$. On prend une base $e_1, ..., e_n$ de $\widetilde{E}$ et on définit l'homéomorphisme linéaire $T : \widetilde{E} \to \mathbb{R}^n$ par

$$T(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i) = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Considérons l'application

$$TFT^{-1} : T(\overline{\Omega} \cap \widetilde{E}) \to \mathbb{R}^n,$$

où $F : \overline{\Omega} \to E$ une application continue telle que $F(\overline{\Omega}) \subset \widetilde{E}$.
Alors, puisque $y \notin f(\partial\Omega)$, on a

$$T(y) \notin TFT^{-1}(T(\partial\Omega \cup \widetilde{E})).$$

On définit $\Omega_0 = T(\Omega \cap \widetilde{E})$, un sous-ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, et on considère $\widetilde{f} = TFT^{-1}$ et $y_0 = T(y)$. Alors, le degré $\deg(\widetilde{f}, \Omega_0, y_0)$ est bien défini.
En algèbre linéaire, il est facile de montrer que l'entier $\deg(\widetilde{f}, \Omega_0, y_0)$ est indépendant du choix de l'espace $\widetilde{E}$ et de la base de $\widetilde{E}$.
Donc, pour $f = \mathrm{id} + F$, où F une perturbation complètement continue de l'identité, et soit $y \notin f(\partial\Omega)$, alors le **degré de Leray Schauder** de l'application $f = \mathrm{id} + F$, relativement a l'ouvert Ω et à la cible y, noté $\deg(f, \Omega, y)$ est bien définie et on a

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(\widetilde{f}, \Omega_0, y_0).$$

Notons que le degré de Leray-Schauder possède des propriétés similaires au degré de Brouwer.

1.6.4 Propriétés du Degré de Leray Schauder

Le degré de Leray-Schauder possède des propriétés analogues à celles du degré de Brouwer : existence de solution, continuité, invariance par homotopie, additivité et excision. La formule du produit cartésien est également vérifiée. Ensuite, nous étendons le théorème du point fixe de Brouwer aux espaces de Banach.

Théorème 1.6.2 ***(Théorème du point fixe de Schauder)*** *Soit K un sous-ensemble convexe compact de E, et soit $F : K \to K$ une fonction continue. Alors, F admet un point fixe dans K.*

Preuve —
Étant donné que K est compact, il existe $r > 0$ tel que $K \subset B_r(0) = \{x \in E : \|x\| < r\}$. En appliquant le Théorème d'Extension (Théorème 1.5.1), nous pouvons prolonger continûment F à $\overline{B_r(0)}$. Appelons cette extension $\widetilde{F}$. Alors, $\widetilde{F}(\overline{B_r(0)}) \subset$ co$F(K) \subset K$, où co$F(K)$ désigne l'enveloppe convexe de $F(K)$, c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe contenant $F(K)$. Ansi, $\widetilde{F}$ est complètement continue. Considérons l'homotopie $k(t,x) = x - t\widetilde{F}(x), \quad 0 \leq t \leq 1$. Étant donné que $t\widetilde{F}(K) \subset tK \subset B_r(0)$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $x \in \overline{B_r(0)}$, on en déduit que $k(t,x) \neq 0$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $x \in \partial B_r(0)$. Par conséquent, en utilisant la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, on obtient

$$\text{constant} \;=\; \deg\,(k(t,.), B_r(0), 0) = \;\deg\,(id, B_r(0), 0) = 1.$$

La propriété de solution du degré implique donc que l'équation $x - \widetilde{F}(x) = 0$ admet une solution $x \in B_r(0)$, donc dans K, c'est-à-dire $x - F(x) = 0$. ■

Dans de nombreuses applications, il est facile de de vérifier que que l'application F est complètement continue, mais il est difficile de trouver un ensemble compact convexe K tel que $F : K \to K$, En revanche, des ensembles convexes fermés K ayant cette propriété sont plus faciles à identifier.. Dans un tel cas, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.6.3 ***(Schauder)*** *Soit K un ensemble fermé, borné et convexe de E, et soit $F : K \to K$ une application complètement continue. Alors, F admet un point fixe dans K.*

Chapitre 2

Théorie de bifurcation

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étendrons la propriété d'homotopie du degré de Leray-Schauder, et nous en déduirons le principe de continuation de Leray-Schauder. Nous fournirons également une généralisation du théorème des fonctions implicites et présenterons quelques résultats de bifurcation globale dans les équations non linéaires. Nos principaux outils pour établir ces résultats globaux seront les propriétés du degré de Leray-Schauder.

2.2 Le Principe de Continuation de Leray-Schauder

Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble ouvert et borné de $[a, b] \times E$, où E est un espace de Banach. Soit $F : \overline{\mathcal{O}} \to E$ une application completement continue. Considérons

$$f(\lambda, u) = u - F(\lambda, u) \tag{2.1}$$

et supposons que

$$f(\lambda, u) \neq 0, \forall(\lambda, u) \in \partial\mathcal{O} \tag{2.2}$$

(où $\partial\mathcal{O}$ désigne la frontière de $\mathcal{O}$ dans $[a, b] \times E$).

Théorème 2.2.1 ***(Le principe de l'homotopie généralisée)*** *Soit f définie par (2.1) et satisfait (2.2). Alors, pour $a \leq \lambda \leq b$, on a*

$$deg\ (f(\lambda, .), \mathcal{O}_\lambda, 0) = \ constant,$$

(où $\mathcal{O}_\lambda = \{u \in E : (\lambda, u) \in \mathcal{O}\}$).

Preuve — On suppose que $\mathcal{O} \neq \emptyset$ et on note $a = \inf\{\lambda : \mathcal{O}_\lambda \notin \emptyset\}$, $b = \sup\{\lambda : \mathcal{O}_\lambda \notin \emptyset\}$.
Soit $\widehat{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup ((a - \epsilon, a] \times \mathcal{O}_a \cup [b, b + \epsilon) \times \mathcal{O}_b)$, où $\epsilon > 0$ est fixé. Alors $\widehat{\mathcal{O}}$ est un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R} \times E$. Soit $\widetilde{F}$ l'extension de F à $\mathbb{R} \times E$ dont

l'existence est garantie par le théorème d'extension de Dugundji (Theorem 1.5.1).
Soit

$$\widetilde{f}(\lambda, u) = (\lambda - \lambda^*, u - \widetilde{F}(\lambda, u)),$$

où $a \leq \lambda^* \leq b$ est fixé. Alors $\widetilde{f}$ est une perturbation complètement continue de l'identité dans $\mathbb{R} \times E$.
En outre, pour tout λ^* tel que

$$\widetilde{f}(\lambda, u) \neq 0, \quad (\lambda, u) \in \partial\widehat{\mathcal{O}},$$

on a donc que le degré topologique $\deg(\widetilde{f}, \widehat{\mathcal{O}}, 0)$ est défini et constant pour de tels λ^*. Soit $0 \leq t \leq 1$, et considérons le champ de vecteurs

$$\widetilde{f}_t(\lambda, u) = (\lambda - \lambda^*, u - t\widetilde{F}(\lambda, u) - (1-t)\widetilde{F}(\lambda^*, u)).$$

Alors $\widetilde{f}_t(\lambda, u) = 0$ si et seulement si $\lambda = \lambda^*$ et $u = \widetilde{F}(\lambda^*, u)$. Ainsi, par hypothèses, on a $\widetilde{f}_t(\lambda, u) \neq 0$ pour $(\lambda, u) \in \partial\widehat{\mathcal{O}}$ et $t \in [0, 1]$. Par le principe d'invariance homotopique, on a

$$\deg(\widetilde{f}_1, \widehat{\mathcal{O}}, 0) = \deg(\widetilde{f}, \widehat{\mathcal{O}}, 0) = \deg(\widetilde{f}_0, \widehat{\mathcal{O}}, 0).$$

D'autre part,

$$\deg(\widetilde{f}_0, \widehat{\mathcal{O}}, 0) = \deg(\widetilde{f}_0, (a - \epsilon, b + \epsilon) \times \mathcal{O}_{\lambda^*}, 0),$$

par la propriété d'excision du degré. En utilisant la formule du produit cartésien, on a également

$$\deg(\widetilde{f}_0, (a - \epsilon, b + \epsilon) \times \mathcal{O}_{\lambda^*}, 0) = \deg(f(\lambda^*, .), \mathcal{O}_{\lambda^*}, 0).$$

Cela complète la démonstration. ■

Nous déduisons immédiatement le principe de continuation de Leray-Schauder

Théorème 2.2.2 ***(Le théorème de continuation de Leray-Schauder)[18]*** *Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble ouvert et borné de $[a, b] \times E$, et soit $f : \overline{\mathcal{O}} \to E$ une application définie par (2.1) et satisfaisant (2.2).*
De plus, supposons que

$$deg\,(f(a, .), \mathcal{O}_a, 0) \neq 0.$$

Soit

$$S = \{(\lambda, u) \in \overline{\mathcal{O}} : f(\lambda, u) = 0\}.$$

Alors, il existe un ensemble fermé et connexe $\mathcal{C}$ dans S tel que

$$\mathcal{C}_a \cap \mathcal{O}_a \neq \emptyset \neq \mathcal{C}_b \cap \mathcal{O}_b.$$

Preuve — Suite au Théorème 2.2.1, on a

$$\deg(f(a, .), \mathcal{O}_a, 0) = \deg(f(b, .), \mathcal{O}_b, 0).$$

Par conséquent,

$$\{a\} \times S_a = A \neq \emptyset \neq B = \{b\} \times S_b.$$

Comme F est complètement continu, alors S est un sous-espace métrique compact de $[a, b] \times E$. Nous appliquons maintenant le lemme de Whyburn (voir [13]) pour $X = S$.
S'il n'existe aucun continuum comme affirmé précédemment, alors il existera des ensembles compacts X_A, X_B dans X tels que

$$A \subset X_A, \quad B \subset X_B, \quad X_A \cap X_B = \emptyset, \quad X_A \cup X_B = X.$$

Nous pouvons donc trouver un ensemble ouvert $U \subset [a, b] \times E$ tel que

$$A \subset U \cap \mathcal{O} = V \text{ et } S \cap \partial V = \emptyset = V_b.$$

Par conséquent,

$$\deg\,(f(\lambda, .), V_\lambda, 0) = \text{ constant}, \quad \lambda \geq a.$$

D'autre part, le principe d'excision implique que

$$\deg\,(f(a, .), V_a, 0) = \deg\,(f(a, .), \mathcal{O}_a, 0).$$

Puisque $V_b = \emptyset$, ces égalités conduisent à une contradiction. ■

2.3 Généralisation du Théorème des Fonctions Implicites

Supposons que $F : \mathbb{R} \times E \to E$ soit une application complètement continue, et considérons l'équation

$$f(\lambda, u) = u - F(\lambda, u) = 0. \tag{2.3}$$

Soit (λ_0, u_0) une solution de (2.3) satisfaisant la condition du théorème de la fonction implicite (Theorem 1.3.2) en (λ_0, u_0). Alors, il existe une courbe de solutions $\{(\lambda, u(\lambda))\}$ de (2.3) définie dans un voisinage de λ_0, passant par (λ_0, u_0).
De plus, les conditions du Théorème 1.3.2 impliquent que la solution u_0 est une solution isolée de (2.3) pour $\lambda = \lambda_0$, et si $\mathcal{O}$ est un voisinage isolant, alors

$$\deg\,(f(\lambda_0, .), \mathcal{O}, 0) \neq 0. \tag{2.4}$$

Nous allons maintenant démontrer que la condition (2.4) est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une branche de solutions globales de l'équation (2.3) dans les sous-espaces $[\lambda_0, \infty) \times E$ et $(-\infty, \lambda_0] \times E$.

Théorème 2.3.1 ***[18]*** *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de E, et supposons que pour $\lambda = \lambda_0$, l'équation (2.3) ait une solution unique dans $\mathcal{O}$ avec*

$$deg\,(f(\lambda_0, .), \mathcal{O}, 0) \neq 0.$$

Définissons

$$\mathfrak{S}^+ = \{(\lambda, u) \in [\lambda_0, \infty) \times E : (\lambda, u) \textit{ est une solution de } (2.3)\}$$

et

$$\mathfrak{S}^- = \{(\lambda, u) \in (-\infty, \lambda_0] \times E : (\lambda, u) \textit{ est une solution de } (2.3)\}.$$

Alors, il existe une composante connexe $\mathcal{C}^+ \subset \mathfrak{S}^+$ (respectivement $\mathcal{C}^- \subset \mathfrak{S}^-$) telle que :

i) $\mathcal{C}^+_{\lambda_0} \cap \mathcal{O} = \{u_0\}$ *(respectivement $\mathcal{C}^-_{\lambda_0} \cap \mathcal{O} = \{u_0\}$),*

ii) *$\mathcal{C}^+$ est soit non bornée dans $[\lambda_0, \infty) \times E$ (respectivement $\mathcal{C}^-$ est soit non bornée dans $(-\infty, \lambda_0]) \times E$) , soit $\mathcal{C}^+_{\lambda_0} \cap (E \backslash \overline{\mathcal{O}}) \neq \emptyset$ (respectivement $\mathcal{C}^-_{\lambda_0} \cap (E \backslash \overline{\mathcal{O}}) \neq \emptyset$).*

Preuve — Soit $\mathcal{C}^+$ un sous-ensemble connexe maximal de $\mathfrak{S}^+$ satisfaisant l'assertion **i**). Supposons que $\mathcal{C}^+ \cap (E \backslash \mathcal{O}) = \emptyset$ et que $\mathcal{C}^+$ est borné dans $[\lambda_0, \infty) \times E$. Alors, il existe une constante $R > 0$ telle que pour chaque $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$, on a

$$\|u\| + |\lambda| < R.$$

Soit

$$\mathfrak{S}^+_{2R} = \{(\lambda, u) \in \mathfrak{S}^+ : \|u\| + |\lambda| \leq 2R\},$$

alors $\mathfrak{S}^+_{2R}$ est un sous-ensemble compact de $[\lambda_0, \infty) \times E$, et donc un espace métrique compact.
En fait, il existe deux possibilités : soit $\mathfrak{S}^+_{2R} = \mathcal{C}^+$, soit il existe $(\lambda, u) \in \mathfrak{S}^+_{2R}$ tel que $(\lambda, u) \notin \mathcal{C}^+$. Dans les deux cas, on peut trouver un ensemble ouvert borné $U \subset [\lambda_0, \infty) \times E$ tel que $U_{\lambda_0} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{S}^+_{2R} \cap \partial U = \emptyset$, $\mathcal{C}^+ \subset U$.
D'après le Théorème 2.2.1, on a

$$\deg\,(f(\lambda_0, .), U_{\lambda_0}, 0) = \text{ constant}, \quad \lambda \geq \lambda_0,$$

où cette constante est donnée par

$$\deg\,(f(\lambda_0, .), U_{\lambda_0}, 0) = \deg\,(f(\lambda_0, .), \mathcal{O}, 0)$$

et elle est non nul, d'après (2.4).
D'autre part, il existe $\lambda^* > \lambda_0$ tel que U_{λ^*} ne contienne aucune solution de l'équation (2.3), et donc $\deg\,(f(\lambda^*, .), U_{\lambda^*}, 0) = 0$, ce qui est en contradiction avec (2.4). (Pour obtenir l'existence d'un ensemble ouvert U avec les propriétés précédentes, nous utilisons à nouveau le lemme de Whyburn.)

De manière similaire, on peut démontrer l'existence de la composante $\mathcal{C}^-$, qui satisfait les propriétés mentionnées précédemment. ■

2.4 Théorème de Krein-Rutman

Soit E un espace de Banach et K un cône dans E, c'est-à-dire un sous-ensemble convexe fermé de E satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\forall u \in K, t \geq 0 : \quad tu \in K$.
- $K \cap \{-K\} = \{0\}$.

Rappelons que le cône K induit une relation d'ordre partiel $\leq$ sur l'espace E, où $u \leq v$ si et seulement si $v - u \in K$.
De plus, rappelons qu'un opérateur linéaire $L : E \to E$ est positif si K est invariant sous L, c'est-à-dire $L(K) \subseteq K$. Il est dit fortement positif si $L : K \backslash \{0\} \to \operatorname{int} K$, où K est un cône dont l'intérieur $\operatorname{int} K$ est non vide

Théorème 2.4.1 *Soit K un cône dans l'espace de Banach E, et soit $L : E \to E$ un opérateur linéaire compact et positif. Supposons qu'il existe $w \in K$ avec $w \neq 0$ et une constante $m > 0$ tel que*

$$w \leq mLw,$$

où $\leq$ est une relation d'ordre partiel sur K. Alors, il existe $\lambda_0 > 0$ et $u \in K$ avec $\|u\| = 1$, tel que

$$u = \lambda_0 Lu.$$

Preuve — Restreignons l'opérateur L au cône K et notons $\widetilde{L}$ son extension de Dugundji à l'espace E. Puisque L est un opérateur linéaire compact, l'opérateur $\widetilde{L}$ est une application complètement continue avec $\widetilde{L}(E) \subset K$. Choisissez $\epsilon > 0$ et considérez l'équation suivante :

$$u - \lambda \widetilde{L}(u + \epsilon w) = 0. \tag{2.5}$$

Pour $\lambda = 0$, l'équation (2.5) admet une solution unique $u = 0$. En appliquant le Théorème 2.3.1, on peut conclure qu'il existe une composante connexe non bornée $\mathcal{C}_\epsilon^+ \subset [0, \infty) \times E$ de solutions de (2.5). Comme $\widetilde{L}(E) \subset K$, alors pour tout $(\lambda, u) \in \mathcal{C}_\epsilon^+$, on a $u \in K$, ce qui implique que

$$u = \lambda L(u + \epsilon w).$$

Ainsi, $\lambda Lu \leq u$ et

$$\frac{\lambda \epsilon}{m} \leq \lambda \epsilon Lw \leq u.$$

En appliquant L à cette dernière inégalité de manière répétée, nous obtenons par induction que

$$(\frac{\lambda}{m})^n \epsilon w \leq u. \tag{2.6}$$

Par hypothèse, $w \neq 0$, alors on déduit de (2.6) que $\lambda \leq m$. De plus, si $(\lambda, u) \in \mathcal{C}_\epsilon^+$, alors $\lambda \leq m$, et donc $\mathcal{C}_\epsilon^+ \subset [0, m] \times K$. Puisque $\mathcal{C}_\epsilon^+$ est non borné, alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\lambda_\epsilon > 0$ et $u_\epsilon \in K$ avec $|u_\epsilon| = 1$, tel que

$$u_\epsilon = \lambda_\epsilon L(u_\epsilon + \epsilon w).$$

Comme L est compact, l'ensemble $\{(\lambda_\epsilon, u_\epsilon)\}$ contient une sous-suite convergente. En faisant tendre ϵ vers 0, cette sous-suite converge vers un certain point (λ_0, u). Cependant, en raison de la contrainte $\|u\| = 1$, il en résulte que $\lambda_0 > 0$. ■

Le théorème de **Krein-Rutman** est un corollaire du Théorème 2.4.1 où L est un opérateur linéaire compact et fortement positif.

Théorème 2.4.2 ***(Théorème de Krein-Rutman)[18]*** *Soit K un cône dans l'espace de Banach E dont l'intérieur, $intK$, n'est pas vide ($intK \neq \emptyset$). Soit L un opérateur linéaire compact fortement positif. Alors, il existe un unique $\lambda_0 > 0$ tels que*

1. *Il existe $u \in intK$ tel que $u = \lambda_0 Lu$.*

2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq \lambda_0$, et s'il existe $v \in E$, $v \neq 0$, tel que $v = \lambda Lv$, alors $v \notin K \cup \{-K\}$ et $\lambda_0 < |\lambda|$.*

Preuve — Soit $w \in K\backslash\{0\}$. Puisque $Lw \in \operatorname{int}K$, il existe un $\delta > 0$, suffisamment petit, tel que $Lw - \delta w \in \operatorname{int}K$, c'est-à-dire, en termes d'ordre partiel, cela se traduit par l'inégalité

$$\delta w \leq Lw.$$

Nous appliquons donc le Théorème 2.4.1 pour obtenir $\lambda_0 > 0$ et $u \in K$ tels que

$$u = \lambda_0 Lu.$$

Puisque L est fortement positif, nous devons avoir $u \in \operatorname{int}K$. Si $(\lambda, v) \in (0, \infty) \times (K\backslash 0)$ est tel que $v = \lambda Lv$, alors $v \in \operatorname{int}K$. Par conséquent, pour tout $\delta > 0$, suffisamment petit, nous avons $u - \delta v \in \operatorname{int}K$.

Il existe donc un $\delta^* > 0$ maximal, tel que $u - \delta^* v \in K$, c'est-à-dire $u - rv \notin K$, $r > \delta^*$.

Maintenant,

$$L(u - \delta^* v) = \frac{1}{\lambda_0}(u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta^* v),$$

ce qui implique que

$$u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta^* v \in \operatorname{int}K,$$

sauf si $u - \delta^* v = 0$.

Si cette dernière condition est satisfaite, alors $\lambda_0 = \lambda$. Sinon, $\lambda_0 < \lambda$, car δ^* est maximal. Si $\lambda_0 < \lambda$, nous pouvons inverser les rôles de u et v et obtenir également $\lambda < \lambda_0$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $\lambda = \lambda_0$, ce qui signifie qu'il s'agit de la seule valeur caractéristique de L et que son espace propre est contenu dans le cône K. De plus, tout autre vecteur propre correspondant à λ_0 doit être un multiple constant de u. En d'autres termes, λ_0 est une valeur caractéristique de L de multiplicité géométrique égale à un, ce qui équivaut à dire que la dimension du noyau de $id - \lambda_0 L$ est égale à un.

Soit $\lambda \neq \lambda_0$ une autre valeur caractéristique de L, et soit $v \neq 0$ tel que

$$v \notin K \cup \{-K\}.$$

Encore une fois, pour $|\delta|$ petit, $u - \delta v \in \text{int}K$ et il existe $\delta^* > 0$, maximal, tel que $u - \delta^* v \in K$, ainsi qu'un $\delta_* < 0$, minimal, tel que

$$u - \delta_* v \in K.$$

Maintenant,

$$L(u - \delta^* v) = \frac{1}{\lambda_0}(u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta^* v) \in K,$$

et

$$L(u - \delta_* v) = \frac{1}{\lambda_0}(u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta_* v) \in K.$$

Ainsi, si $\lambda > 0$, nous concluons que $\lambda_0 < \lambda$, tandis que si $\lambda < 0$, nous obtenons

$$\lambda_0\delta^* < \lambda\delta_*, \quad \text{et} \quad \lambda_0\delta_* > \lambda\delta^*, \quad \text{i.e } \lambda_0^2 < \lambda^2.$$

■

Rappelons, d'après la théorie de Riesz sur les opérateurs linéaires compacts [14], qu'il existe un entier minimal n tel que

$$\ker(id - \lambda_0 L)^n = \ker(id - \lambda_0 L)^{n+1} = \ker(id - \lambda_0 L)^{n+2} = ...$$

La dimension de l'espace propre généralisé $\ker(id - \lambda_0 L)^n$ est appelée la multiplicité algébrique de λ_0.
Avec cette terminologie, nous obtenons le Théorème suivant :

Théorème 2.4.3 *En supposant les conditions du Théorème 2.4.2, et soit λ_0 la valeur caractéristique de L, dont l'existence est établie par ce théorème. Alors, λ_0 est une valeur caractéristique de L de multiplicité algébrique égale à un.*

Preuve — Supposons le contraire. D'après le théorème 2.4.2, on a $\dim \ker(id - \lambda_0 L) = 1$, et il existe un entier minimal $n > 1$ tel que l'espace propre généralisé est donné par $\ker(id - \lambda_0 L)^n$. Par conséquent, il existe un vecteur non nul $v \in E$ tel que

$$(id - \lambda_0 L)nv = 0 \text{ et } (id - \lambda_0 L)n - 1v = w \neq 0.$$

D'après le Théorème 2.4.2 et sa démonstration, il existe un $k \geq 0$ tel que

$$w = ku.$$

Soit $z = (id - \lambda_0 L)^{n-2} v$, alors $z - \lambda_0 Lz = ku$, et donc, pour tout entier positif m, on a

$$\lambda_0^m L^m z = z - mku.$$

Par conséquent, $z \notin K$, car sinon $\frac{1}{m}z - ku \in K$ pour tout entier m, ce qui impliquerait que $-ku \in K$, conduisant ainsi à une contradiction.
En supposant que $u \in \text{int}K$, il existe $\alpha > 0$ et $y \in K$ tels que

$$z = \alpha u - y.$$

Ensuite,

$$\lambda_0^m L^m z = \alpha u - \lambda_0^m L^m y, \quad \text{où } \lambda_0^m L^m y = y + mku.$$

Prenons $\beta > 0$, avec $y \leq \beta u$, alors $\lambda_0^m L^m y \leq \beta u$, et donc on a $y + mku \leq \beta u$. En divisant cette inégalité par m et en faisant tendre m vers l'infini, on obtient $ku \in -K$, ce qui conduit à une contradiction. ■

2.5 Bifurcation locale

Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $F : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $\mathbb{R} \times \{0\}$, telle que

$$F(\lambda, 0) = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous nous intéressons à l'existence de solutions non triviales (c'est-à-dire $u \neq 0$) de l'équation

$$F(\lambda, u) = 0 \tag{2.7}$$

Définition 2.5.1 ***(Point de bifurcation)***
Un point $(\lambda_0, 0)$ de la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ est appelé un point de bifurcation pour l'équation (2.7) relativement à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ si tout voisinage de ce point contient des solutions de l'équation (2.7) extérieures à $\mathbb{R} \times \{0\}$.
Autrement dit, les solutions de l'équation (2.7) bifurquent de $(\lambda_0, 0)$ vers une solution $(\lambda, u_\lambda) \in \mathbb{R} \times E$, s'il existe une suite (λ_n, u_n) de solutions de (2.7) qui satisfait

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0 \ \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0.$$

Le problème de bifurcation de de l'équation (2.7) consiste à chercher une branche de solutions non triviales $(\lambda, u_\lambda) \neq (., 0)$ de (2.7) qui bifurque d'un certain point $(\lambda_0, 0)$. Cette branche doit satisfaire la condition $u_\lambda \to 0$ lorsque $\lambda \to \lambda_0$, conformément aux indications de la figure suivante.

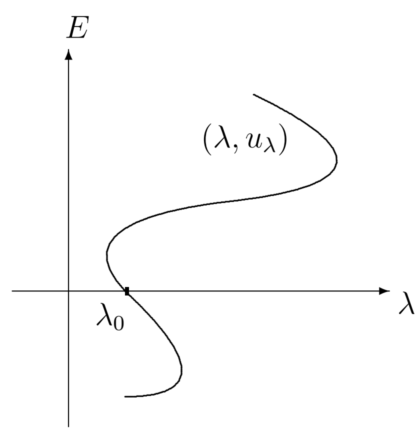

Fig. 2.1

Proposition 2.5.1 ***([16])***
Si $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation pour l'équation (2.7) relativement à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$, alors l'opérateur $d_u F(\lambda_0, 0)$ n'est pas un homéomorphisme.

Preuve —
Dans le cas contraire, le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe un voisinage V de λ_0 tel que les solution de (2.14) sont uniquement les points $\{(\lambda, 0); \quad \lambda \in V\}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation relativement à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$.
■

Les opérateurs linéaires de la forme $F_u(\lambda_0, 0)$ que nous allons considérer sont appelés des opérateurs de Fredholm.

Définition 2.5.2 *Un opérateur linéaire $L : X \to Y$ est appelé un opérateur de Fredholm s'il satisfait aux conditions suivantes :*

- *Le noyau de L, noté $\ker(L)$, est de dimension finie.*
- *L'image de L, notée $\mathrm{im}(L)$, est fermée dans Y.*
- *Le co-noyau de L, noté $\mathrm{coker}(L)$, est de dimension finie.*

Le lemme suivant, qui est un résultat fondamental en analyse fonctionnelle, est très important pour les résultats de bifurcation locale. On peut trouver sa démonstration dans plusieurs références, par exemple (voir [1]).

Lemme 2.5.1 *Soit $F_u(\lambda_0, 0) : X \to Y$ un opérateur de Fredholm avec un noyau V et un co-noyau Z. Alors, il existe un sous-espace fermé W de X et un sous-espace fermé T de Y tels que*

$$\begin{cases} X &= V \oplus W \\ Y &= Z \oplus T. \end{cases}$$

Le restreint de l'opérateur $F_u(\lambda_0, 0)$ à W, noté $F_u(\lambda_0, 0)\big|_W : W \to T$, est bijectif et, comme T est fermé, il possède une inverse continue. Ainsi, $F_u(\lambda_0, 0)\big|_W$ est un homéomorphisme linéaire de W sur T.

Rappelons que W et Z ne sont pas uniques.
En utilisant le Lemme 2.5.1, pour tout $u \in X$, on peut écrire de manière unique la décomposition suivante :

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in V, u_2 \in W,$$

$$F = F_1 + F_2, \quad F_1 : X \to Z, \quad F_2 : X \to T.$$

Donc l'équation (2.14) est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} F_1(\lambda, u_1, u_2) &= 0, \\ F_2(\lambda, u_1, u_2) &= 0. \end{cases}$$

Ensuite, en utilisant un développement de Taylor, on obtient

$$F(\lambda, u) = F(\lambda_0, u) + F_u(\lambda_0, u)u + N(\lambda, u),$$

et en posant $L = F_u(\lambda_0, 0)$, nous pouvons reformuler l'équation (2.14) de la manière suivante :

$$Lu + N(\lambda, u) = 0, \tag{2.8}$$

où $N : \mathbb{R} \times X \to Y$.
En utilisant la décomposition de X, l'équation (2.8) peut également être écrite sous la forme

$$Lu_2 + N(\lambda, u_1 + u_2) = 0. \tag{2.9}$$

Soit $Q : Y \to Z$ et $I - Q : Y \to T$ des projections déterminées par la décomposition, alors on a

$$QN(\lambda, u) = 0. \tag{2.10}$$

L'opérateur restreint $L\backslash_W : W \to T$ possède un inverse $L^{-1} : T \to W$ d'après le Lemme 2.5.1. À partir de l'équation (2.9), on a le système équivalent suivant :

$$u_2 + L^{-1}(I - Q)N(\lambda, u_1 + u_2) = 0. \tag{2.11}$$

Comme $\dim(Z) < \infty$, l'équation (2.10) appartient à un espace de dimension finie. De plus, si u_2 est une fonction de u_1 et de λ, cette équation se réduit à un ensemble fini d'équations avec un nombre fini d'inconnues.
Concernant l'équation (2.10) nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.5.2 *Soit $F_u(\lambda_0, 0)$ un opérateur de Fredholm, et supposons que W est un sous-espace non trivial. Alors, il existe $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et une solution unique $u_2(\lambda, u_1)$ de l'équation (2.11) définie pour $|\lambda - \lambda_0| + |u_1| < \epsilon$, avec $|u_2(\lambda, u_1)| < \delta$. De plus, elle résout l'équation $F_2(\lambda, u_1, u_2(\lambda, u_1)) = 0$.*

Preuve — En applicant le théorème des fonctions implicites au point $(\lambda_0, 0)$ dans l'équation (2.11), on peut montrer que, à $u_1 = 0$ et $\lambda = \lambda_0$, l'équation (2.11) a une solution unique $u_2 = 0$. De plus, la dérivée de Fréchet en ce point par rapport à u_2 est simplement l'application identité sur W. ■ Par conséquent, en utilisant le Lemme 2.5.2, nous obtenons des solutions non triviales pour l'équation (2.7), une fois que nous avons résolu l'équation suivante

$$F_1(\lambda, u_1, u_2(\lambda, u_1)) = QF(\lambda, u_1 + u_2(\lambda, u_1)) = 0 \tag{2.12}$$

pour tout u_1, et quand $\|\lambda - \lambda_0| + \|u_1\| < \epsilon$. Le dernier ensemble d'équations, généralement désigné sous le nom d'ensemble des équations de bifurcation, représente, bien qu'il s'agisse d'un ensemble fini d'équations avec un nombre fini d'inconnues, la partie la plus difficile de la résolution de l'équation (2.7).

2.5.1 Bifurcation en une valeur propre simple

Dans cette partie, nous allons étudier l'équation de bifurcation (2.12) dans le cas particulier où le noyau V et le co-noyau Z de $F_u(\lambda_0, 0)$ ont la dimension un. En effet ; nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.5.1 *([3])*
On considère la notation de la section précédente, supposons que le noyau V et

le co-noyau Z de $F_u(\lambda_0, 0)$ sont de dimension un. Soit $V =$ span$\{\phi\}$, et soit Q la projection de Y sur Z. De plus, supposons que la dérivée seconde de Fréchet $F_{u\lambda}$ satisfait $QF_{u\lambda}(\lambda_0, 0)(1, \phi) \neq 0$. Alors, $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et dans un voisinage de 0, il existe une courbe unique $(\lambda, u) = (\lambda(\alpha), u(\alpha))$, telle que $u(0) = 0, u(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \neq 0, \lambda(0) = \lambda_0$ et $F(\lambda(\alpha), u(\alpha)) = 0$.

Preuve — Comme V est unidimensionnel, on a $u_1 = \alpha\phi$. Ainsi, pour $|\alpha|$ petit et λ proche de λ_0, il existe $u_2(\lambda, \alpha)$ unique tel que

$$F_2(\lambda, \alpha\phi, u_2(\lambda, \alpha)) = 0.$$

Nous devons donc résoudre l'équation

$$QF(\lambda, \alpha\phi + u_2(\lambda, \alpha)) = 0 \text{ pour } \lambda = \lambda(\alpha).$$

Posons $\mu = \lambda - \lambda_0$ et définissons

$$g(\mu, \alpha) = QF(\lambda, \alpha\phi + u_2(\lambda, \alpha)).$$

Alors, g envoie un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Le théorème de Taylor permet d'écrire

$$F(\lambda, u) = F_u u + F_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\{F_{uu}(u, u) + 2F_{u\lambda}(\lambda, u) + F_{\lambda\lambda}(\mu, \mu)\} + R, \tag{2.13}$$

où R représente les termes de reste d'ordre supérieur, et toutes les dérivées de Fréchet mentionnées ci-dessus sont évaluées en $(\lambda_0, 0)$.
Comme la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ représente une courbe de solutions triviales, on a que dans les expressions précédentes, F_λ et $F_{\lambda\lambda}$ sont des opérateurs nuls.
Ainsi, en appliquant l'opérateur Q à l'équation (2.13), on obtient

$$QF(\lambda, u) = \frac{1}{2}\{QF_{uu}(u, u) + 2QF_{u\lambda}(u, \mu)\} + QR,$$

et pour $\alpha \neq 0$, on a

$$\frac{g(\alpha, \mu)}{\alpha} = \frac{1}{2}\{QF_{uu}(\phi + \frac{u_2(\lambda, \alpha)}{\alpha}, \alpha\phi + u_2(\lambda, \alpha)) + 2QF_{u\lambda}(\phi + \frac{u_2(\lambda, \alpha)}{\alpha}, \mu) + \frac{1}{\alpha}QR.$$

D'après le Lemme 2.5.2, le terme $\frac{u_2(\lambda,\alpha)}{\alpha}$ est borné pour α dans un voisinage de 0. La formule du reste du théorème de Taylor donne un résultat similaire pour le terme $\frac{1}{\alpha}QR$.
De plus,

$$h(\alpha, \mu) = \frac{g(\alpha, \mu)}{\alpha} = O(\alpha), \text{ lorsque } \alpha \to 0.$$

Notons qu'en réalité $h(0, 0) = 0$, et $\frac{\partial h(0,0)}{\partial \mu} = QF_{u\lambda}(\lambda_0, 0)(\phi, 1) \neq 0$.
Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction unique $\mu = \mu(\alpha)$ définie dans un voisinage de 0 telle que

$$h(\alpha, \mu(\alpha)) = 0.$$

On définit également

$$u(\alpha) = \alpha\phi + u_2(\lambda_0, \alpha + \mu(\alpha)), \text{ avec } \lambda = \lambda_0 + \mu(\alpha).$$

Cela démontre le théorème. ■

2.6 Bifurcation globale

Soit E un espace de Banach, et soit $f : \mathbb{R} \times E \to E$ une application de la forme

$$f(\lambda, u) = u - F(\lambda, u), \tag{2.14}$$

où $F : \mathbb{R} \times E \to E$ est complètement continue et $F(\lambda, 0) \equiv 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il est clair que les points de la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ sont des solutions de l'équation (2.14). On les appelle **solutions triviales**.
Notre but dans cette section est d'étudier la bifurcation des solutions de l'équation (2.14) relativement à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ et de présenter quelques résultats concernant la bifurcation globale.
En fait, nous allons obtenir une extension du théorème de bifurcation locale, le Théorème 2.5.1, en utilisant les propriétés du degré de Leray-Schauder.

Théorème 2.6.1 ***(Schmitt et Thompson)[18]*** *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$, et aucun des deux n'est un point de bifurcation. Supposons que $(a, 0)$ et $(b, 0)$ sont deux solutions isolées de (2.14). De plus, supposons que*

$$deg\ (f(a, .), B_r(0), 0) \neq\ deg\ (f(b, .), B_r(0), 0), \tag{2.15}$$

où $B_r(0) = \{u \in E : \|u\| < r\}$ est un voisinage isolant de la solution triviale. Posons

$$\mathfrak{S} = \overline{\{(\lambda, u) : (\lambda, u)\ solution\ de\ (2.14) \quad avec\ u \neq 0\}} \cup [a, b] \times \{0\},$$

et soit $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{S}$ une composante connexe de $\mathfrak{S}$ qui contient $[a, b] \times \{0\}$. Alors, soit

(i) *$\mathfrak{C}$ est non borné dans $\mathbb{R} \times E$,*
ou
(ii) *$\mathfrak{C} \cap (\mathbb{R} \backslash [a, b]) \times \{0\} \neq \emptyset$.*

Preuve — Définissons une classe $\mathfrak{U}$ d'ensembles de $\mathbb{R} \times E$ par

$$\mathfrak{I} = \{\Omega \subset \mathbb{R} \times E : \quad \Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\infty\},$$

où $\Omega_0 = [a, b] \times B_r(0)$, et Ω_∞ est un sous-ensemble borné et ouvert de $\mathbb{R} \times (E \backslash \{0\})$. En premier lieu, démontrons que (2.14) possède une solution non triviale $(\lambda, u) \in \partial\Omega$ pour tout $\Omega \in \mathfrak{U}$. Pour cela, considérons les ensembles suivants :

$$\begin{cases} K &= f^{-1}(0) \cap \overline{\Omega} \\ A &= [a, b] \times \{0\}, \\ B &= f^{-1}(0) \cap (\partial\Omega \backslash (\{a\} \times B_r(0) \cup \{b\} \times B_r(0))). \end{cases}$$

On peut considérer K comme un espace métrique compact, et donc A et B sont des sous-ensembles compacts de K. Par conséquent, d'après le lemme de Whyburn, il existe soit une composante connexe dans K reliant A à B, soit une separation

K_A, K_B de K, telle que $A \subset K_A$ et $B \subset K_B$.
Si cette dernière condition est vérifiée, il existe des ensembles ouverts U et V dans $\mathbb{R} \times E$ tels que $K_A \subset U, K_B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
Posons $\Omega^* = \Omega \cap (U \cup V)$, et donc $\Omega^* \in \mathfrak{U}$. Par construction, il en résulte qu'il n'existe pas de solutions non triviales de (2.14) dans $\partial\Omega^*$. Cependant, c'est impossible, car dans ce cas, en appliquant la propriété d'excision du degré de Leray-Schauder,, on obtient

$$\deg\ (f(a,.), B_r(0), 0) = \ \deg\ (f(b,.), B_r(0), 0),$$

ce qui contredit (2.15).
De plus, pour chaque $\Omega \in \mathfrak{U}$, il existe une composante connexe $\mathfrak{C}$ de solutions de (2.14) qui intersecte $\partial\Omega$ en une solution non triviale.
Supposons maintenant qu'aucune des alternatives du théorème n'est vérifiée, c'est-à-dire que la composante $\mathfrak{C}$ est borné et que $\mathfrak{C} \cap (\mathbb{R} \backslash [a,b]) \times \{0\} = \emptyset$. Dans ce cas, en utilisant la bornitude de $\mathfrak{C}$ et en construisant un ensemble $\Omega \in \mathfrak{U}$ dont la frontière ne contient aucune solution non triviale, nous induisons une contradiction. ■

Théorème 2.6.2 ***(Schmitt)[18]*** *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $F : \mathbb{R} \times E \to E$ une appliaction complètement continue, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ tels que la solution de (2.14) soit, a priori, bornée dans E pour $\lambda = a$ et $\lambda = b$; c'est-à-dire, il existe un $R > 0$ tel que*

$$F(a,u) \neq u \neq F(b,u) \tag{2.16}$$

pour tout u avec $|u| \geq R$.
De plus, supposons que $deg(I - F(a,.), B_R(0), 0) \neq deg(I - F(b,.), B_R(0), 0)$, pour un R suffisamment grand.
Alors, il existe un ensemble fermé et connexe $\mathcal{C}$ de solutions à (2.14) qui est non borné dans $[a,b] \times E$, et soit :

(i) $\mathcal{C}$ est non borné dans la direction de λ, ou

(ii) il existe un intervalle $[c,d]$ tel que $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$ et $\mathcal{C}$ bifurque à partir de l'infini dans $[c,d] \times E$.

Lemme 2.6.1 ***[2]*** *Soit Ω un ensemble ouvert borné de l'espace de Banach réel E, θ désignant l'élément nul de E, et $G : \overline{\Omega} \to E$ une application complètement continue. S'il existe un $y_0 \in E$ avec $y_0 \neq \theta$ tel que*

$$x \in \partial\Omega, \quad \tau \geq 0 \Rightarrow x - Gx \neq \tau y_0,$$

alors

$$deg(I - G, \Omega, \theta) = 0.$$

Chapitre 3

Bifurcation de solutions positives pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons pour objectif d'étudier le problème aux limites d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) + \eta f(t,u(t)) = 0 & 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \beta \int_0^1 u(s)ds, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $2 < \alpha < 3$, $0 < \beta < 2$, ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $\eta > 0$ est une constante donnée, et $f : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est une fonction continue.
Nous formulons les hypothèses suivantes :
(H1) $\exists(\overline{r}, \overline{R}) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \overline{r} < \overline{R}$, et il existe des fonctions $a_0, a^0, b_\infty, b^\infty \in C(J,\mathbb{R}^+)$ et $\zeta_1, \xi_1, \zeta_2, \xi_2 \in C(J,\mathbb{R}^+)$ telles que $a_0(.), a^0(.), b_\infty(.), b^\infty(.) \not\equiv 0$ dans tout sous-intervalle de $J := [0,1]$ et qui satisfont

$$a_0(t)(v - \xi_1(t,v)) \leq f(t,v) \leq a^0(t)(v + \xi_2(t,v)) \forall (t,v) \in J \times [0,\overline{r}],$$

et

$$b_\infty(t)(v - \zeta_1(t,v)) \leq f(t,v) \leq b^\infty(t)(v + \zeta_2(t,v)) \forall (t,v) \in J \times [\overline{R},+\infty),$$

et pour $i \in \{1,2\}$ et uniformément par rapport à t nous avons

$$\xi_i(t,v) = o(v) \text{ si } v \to 0 \text{ et } \zeta_i(t,v) = o(v) \text{ au voisinage de } \infty.$$

Nous utilisons des techniques de bifurcation ainsi que les propriétés du degré topologique, sous la condition **(H1)** et d'autres conditions, pour étudier le problème (3.1) et obtenir des solutions positives.
Certains cas particuliers de (3.1) ont été étudiés. Par exemple, pour $\eta = 1$ et en

utilisant le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii, Cabada et Wang [5] ont examiné l'existence de solutions positives de (3.1) et ont démontré le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *[5] Supposons que l'une des deux conditions suivantes est remplie :*

(i) (Cas sous-linéaire) $f_0 = \infty$ *et* $f_\infty = 0$.

(ii) (Cas superlinéaire) $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$ *et il existe* $\mu > 0$ *et* $\theta > 0$ *tels que*

$$f(t, \kappa x) \geq \mu \kappa^\theta f(t,x) \text{ pour tout } \kappa \in (0,1].$$

Alors, pour $\eta = 1$ *le problème (3.1) admet au moins une solution dans le cône* P *où*

$$P = \{u \in C([0,1]) : u(t) \geq \frac{t\beta(\alpha-2)}{2\alpha}\|u\|, \quad \forall t, s \in [0,1]\}.$$

et $f_0 := \lim\limits_{u \to 0^+} \{ \min\limits_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \}$, $f_\infty := \lim\limits_{u \to \infty} \{ \max\limits_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \}$.

Remarque 3.1.1 *On doit préciser clairement que la condition **(H1)** signifie que l'on peut percevoir la non-linéarité* $f(.,.)$ *comme asymptotiquement linéaire en* 0 *et à* ∞*, sans nécessairement être sur-linéaire ou sous-linéaire, voire même linéarisable. De plus, les conditions du Théorème 3.1.1 diffèrent de la condition **(H1)**, et dans ce cas, la méthode utilisée dans [1] n'est plus pertinente.*

3.2 Quelques Résultats de Calculs Fractionnaires

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats bien connus sur le calcul fractionnaire. Pour plus de détails, veuillez vous référer à [6], [7], [8] et aux références citées dans ces travaux.

Définition 3.2.1 *La dérivée de Caputo d'ordre fractionnaire* α *d'une fonction* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$*, est définie par*

$${}^cD^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad n = [\alpha]+1,$$

où $[\alpha]$ *représente la partie entière du nombre réel* α.

Définition 3.2.2 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *pour une fonction* f *est définie par*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad \alpha > 0,$$

pour autant que cette intégrale existe.

Définition 3.2.3 *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α pour une fonction f est définie par*

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dt})^{n}\int_{0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds, \quad n=[\alpha]+1,$$

à condition que le côté droit de cette équation soit défini ponctuellement sur $(0,\infty)$.

Lemme 3.2.1 *Pour $\alpha>0$, la solution unique de l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^{c}D^{\alpha}u(t)=0$$

est donnée par

$$u(t)=\sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{u^{(j)}(0)}{j!}t^{j}.$$

Lemme 3.2.2 *Soit $\alpha>0$, alors*

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}u(t)=u(t)-\sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{u^{(j)}(0)}{j!}t^{j}.$$

3.3 Quelques propriétés de la fonction de Green

Dans ce chapitre, nous considérons l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|u\| = \max_{x\in[0,1]}|u(x)|$. Soit $g\in C([0,1])$, nous rappelons quelques propriétés utiles de fonction de Green pour le problèmes aux limites linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}u(t)+g(t)=0 & 0<t<1, \\ u(0)=u''(0)=0, & u(1)=\beta\int_{0}^{1}u(s)ds. \end{cases} \tag{3.2}$$

La citation des deux lemmes suivants est basée sur la référence [5].

Lemme 3.3.1 *Pour toute fonction $g\in C([0,1])$, la solution u du problème (3.2) s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$u(t)=\int_{0}^{1}G(t,s)g(s)ds,$$

où G ne dépend pas de g, et est appelée fonction de Green, telle que

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{2t(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-\beta+\beta s)-(2-\beta)\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{(2-\beta)\Gamma(\alpha+1)}, & 0\le s\le t\le 1, \\ \frac{2t(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-\beta+\beta s)}{(2-\beta)\Gamma(\alpha+1)}, & 0\le t\le s\le 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Lemme 3.3.2 *Soient $2 < \alpha < 3$ et $0 < \beta < 2$. Pour tous les $t, s \in [0,1]$, la fonction $G(t,s)$ définie par (3.3) possède les propriétés suivantes :*

$$\underbrace{\frac{t\beta(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-2+2s)}{(2-\beta)\Gamma(\alpha+1)}}_{=tG(1,s)} \leq G(t,s) \leq \underbrace{\frac{2\alpha(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-2+2s)}{(\alpha-2)(2-\beta)\Gamma(\alpha+1)}}_{=\frac{2\alpha}{\beta(\alpha-2)}G(1,s)}, \tag{3.4}$$

et

$$G(t,s) > 0 \text{ pour tous les } t, s \in (0,1) \text{ si et seulement si } \beta \in [0,2). \tag{3.5}$$

3.4 Résultats Principaux

Les principaux résultats de la présente thèse sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.4.1 *On considère l'hypothèse **(H1)** et on suppose que l'une des deux conditions suivantes est remplie :*
(i) $\lambda_1(a_0) < \eta < \lambda_1(b^\infty)$, *ou*
(ii) $\lambda_1(b_\infty) < \eta < \lambda_1(a^0)$
Alors, le problème aux limites (3.1 a au moins une solution positive.

Théorème 3.4.2 *On considère l'hypothèse suivante :*
(H2) Il existe $R > 0$ et $h \in L(J, \mathbb{R}^+)$ tels que

$$\forall t \in J, \forall v \in [0,R] \quad f(t,v) \leq h(t)v$$

et

$$\max\{\lambda_1(a_0), \lambda_1(b_\infty)\} < \eta < \frac{(\alpha-2)(2-\beta)\Gamma(\alpha+1)}{6\int_0^1 (2s+1)(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds}.$$

Alors, le problème aux limites (3.1) a au moins deux solutions positives.

3.5 Démonstration des résultats principaux

Afin de démontrer les résultats principaux, nous choisissons l'espace de base

$$E := \{v \in C(J, \mathbb{R}^+) : v(0) = v''(0) = 0, v(1) = \beta \int_0^1 v(s)ds\}.$$

De toute évidence, E est un espace de Banach et est muni de la norme $\|v\| = \max_{t\in J} |v(t)|$ (pour tout $v \in E$). Let

$$Q := \{v \in E : v(t) \geq \frac{t\beta}{2\alpha}(\alpha-2)v(s) \geq 0, \quad \forall t, s \in J\}. \tag{3.6}$$

On peut facilement voir que Q est un cône de E. De plus, à partir de (3.6), nous avons

$$v(t) \geq \frac{t\beta}{2\alpha}(\alpha-2)||v||, \forall v \in Q, \quad \forall t \in J. \tag{3.7}$$

Afin d'utiliser la technique de bifurcation pour étudier le problème aux limites (3.1), nous considérons le problème aux limites d'ordre fractionnaire suivant en introduisant le paramètre λ :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) + \lambda f(t, u(t)) = 0 & 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \beta \int_0^1 u(s)ds. \end{cases} \tag{3.8}$$

On dit que (λ, u) est une solution positive du problème aux limites fractionnaires (3.8) s'il satisfait (3.8) et pour $\lambda > 0$ et $t \in (0, 1)$, on a

$$u(t) > 0.$$

Il est évident que si $\lambda > 0$ et $u \in Q \setminus \theta$ tels que (λ, u) est une solution du problème (3.8), alors (λ, u) est une solution positive de ce dernier problème, où θ représente le zéro de E.

On pose

$$\overline{f}(t, v) = \begin{cases} f(t, v), & (t, v) \in J \times \mathbb{R}^+, \\ f(t, 0), & (t, v) \in J \times (-\infty, 0). \end{cases}$$

Alors, $\overline{f}(t, v) \geq 0$ dans $J \times \mathbb{R}$.

Lemme 3.5.1 *Soit $A_\lambda : Q \to C([0, 1])$ un opérateur défini par*

$$A_\lambda v(t) := \lambda \int_0^1 G(t, s)\overline{f}(s, v(s))ds. \tag{3.9}$$

Alors, sous l'hypothèse ***(H1)*** *l'opérateur A_λ est complètement continu de Q dans Q.*

Preuve — On considère l'hypothèse **(H1)**, et en utilisant le même processus que celui de la démonstration du lemme 1000 dans la référence 2000, on peut montrer que l'opérateur A_λ est complètement continu de Q dans Q.

On pose

$$\Sigma := \overline{\{(\lambda, v) \in \mathbb{R}^+ \times C([0, 1]) : v = A_\lambda v, v \neq \theta\}}, \tag{3.10}$$

où θ représente le zéro de $C(J, \mathbb{R}^+)$. À partir du Lemme 3.5.1 et les définitions de $\overline{f}$ et du cône Q, si $(\lambda, u) \in \Sigma$, alors $u \in Q$.

De plus, nous avons le Lemme suivant.

Lemme 3.5.2 *D'après le Lemme 3.3.1, si $u \in E$ est un point fixe de l'opérateur A_λ, alors (λ, u) est une solution de*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha v(t) + \lambda \overline{f}(t, v(t)) = 0 & t \in (0, 1), \\ v(0) = v''(0) = 0, & v(1) = \beta \int_0^1 v(s)ds. \end{cases} \tag{3.11}$$

De plus, (λ, u) est une solution positive du problème (3.11) si et seulement si elle est une solution positive du problème (3.8).

Soit $a \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^+)$, on définit l'opérateur linéaire $L_a : C(J) \to C(J)$ par

$$L_a v(t) = \int_0^1 G(t,s)a(s)v(s)ds, \tag{3.12}$$

où $a(t) \not\equiv 0$ dans tout sous-intervalle de J, et $G(t,s)$ la fonction de Green définie dans le Lemme 3.3.1. À partir des Lemmes 6.3.1 et 6.3.2 ainsi que du Théorème de Krein-Rutman, on a le lemme suivant.

Lemme 3.5.3 *L'opérateur L_a défini par (3.12) est complètement continu et possède une valeur caractéristique unique $\lambda_1(a)$, qui est positive, réelle et simple.*
De plus,
la fonction propre correspondante $\phi(t)$ est du même signe dans l'intervalle $(0,1)$. *i.e.*

$$\phi(t) = \lambda_1(a)L_a(\phi(t)), \text{ pour tout } t \in J.$$

Il est facile de montrer que l'opérateur L_a est bien défini sur $L^2[0,1]$ dans $L^2[0,1]$, et la valeur caractéristique $\lambda_1(a)$ de l'opérateur L_a, définie dans le Lemme 3.5.3, est également une valeur caractéristique de L_a^*, où L_a^* est l'opérateur conjugué de L_a. De plus, la fonction propre φ^* de L_a^* correspondante à $\lambda_1(a)$ est positive dans l'intervalle $(0,1)$. i.e.

$$\varphi^*(t) = \lambda_1(a)L_a^*(\varphi^*(t)), \text{ pour tout } t \in J.$$

■

Pour démontrer les Théorèmes 3.4.1 et 3.4.2, nous commençons d'abord par les lemmes et les théorèmes suivants.

Lemme 3.5.4 *Considérant l'hypothèse* ***(H1)***. *Soient $\lambda_1(a_0)$ et $\lambda_1(a^0)$ les valeurs caractéristiques uniques de L_{a_0} et L_{a^0}, respectivement. Alors, nous avons*

(i) Soit $[c,d] \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle compact avec $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \cap [c,d] = \emptyset$. Alors, il existe $\delta_1 \in (0, \overline{r})$ tel que

$$v \neq A_\lambda v, \quad \forall \lambda \in [c,d], \quad \forall v \in E \text{ et } 0 < \|v\| \leq \delta_1,$$

(ii) Pour $\mu \in (0, \lambda_1(a^0))$, il existe $\delta_1 \in (0, \overline{r})$ tel que

$$deg(I - A_\mu, B_\delta, 0) = 1, \quad \forall \delta \in (0, \delta_1],$$

(iii) Pour $\lambda > \lambda_1(a_0)$, il existe $\delta_2 \in (0, \overline{r})$ tel que

$$deg(I - A_\lambda, B_\delta, 0) = 0, \quad \forall \delta \in (0, \delta_2].$$

Preuve —

- Dans un premier temps, nous prouvons la conclusion (i) en supposant que ce n'est pas le cas. Alors

$$\exists\{(\mu_n, v_n)\} \subset [c,d] \times \mathcal{C}([0,1]) : \lim_{n\to+\infty} \|v_n\| = 0 \text{ et } v_n = A_{\mu_n} v_n. \tag{3.13}$$

Sans perte de généralité, supposons que $\mu_n \to \mu \in [c,d]$ et pour tout n on a

$$|v_n| < \overline{r}.$$

Remarquons que $v_n \in Q$, et donc $v_n(t) > 0$ sur $(0,1)$. On pose $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$. Alors $w_n = \frac{A_{\mu_n} v_n}{\|v_n\|}$, et Par definition de $\overline{f}$, la suite $\{w_n\}$ est relativement compacte dans $C([0,1])$. En prenant une sous-suite et en renumérotant si nécessaire, alors

$$w_n \to w \text{ dans } C([0,1]), \|w\| = 1 \text{ et } w \in Q.$$

D'autre part, en utilisant (3.13) et la première partie de l'hypothèse **(H1)**, nous obtenons, pour tout s dans J :

$$a_0(s)(v_n(s) - \xi_1(s, v_n(s))) \leq \overline{f}(s, v_n(s)) \leq a^0(s)(v_n(s) + \xi_2(s, v_n(s))). \tag{3.14}$$

Par conséquent, à partir de (3.5) et (3.9), nous avons

$$w_n(t) \leq \mu_n \int_0^1 G(t,s)a^0(s)[w_n(s) + \frac{\xi_2(s, v_n(s))}{\|v_n\|}]ds \tag{3.15}$$

et

$$w_n(t) \geq \mu_n \int_0^1 G(t,s)a_0(s)[w_n(s) - \frac{\xi_1(s, v_n(s))}{\|v_n\|}]ds. \tag{3.16}$$

Soient ψ^* et ψ_* les fonctions propres positives de $L^*_{a^0}$ et $L^*_{a_0}$ correspondant respectivement à $\lambda_1(a^0)$ et $\lambda_1(a_0)$. Alors, à partir de (3.15), on a :

$$\langle w_n, \psi^* \rangle \leq \mu_n \langle L_{a^0} w_n, \psi^* \rangle + \mu_n \int_0^1 \psi^*(t)[\int_0^1 G(t,s)a^0(s)\frac{\xi_2(s, v_n(s))}{\|v_n\|}ds]dt.$$

En faisant $n \to +\infty$ et en utilisant à nouveau la condition **(H1)**, nous avons

$$\langle w, \psi^* \rangle \leq \mu \langle L_{a^0} w, \psi^* \rangle = \mu \langle w, L^*_{a^0}\psi^* \rangle = \mu \langle w, \frac{\psi^*}{\lambda_1(a^0)} \rangle,$$

de sorte que $\mu \geq \lambda_1(a^0)$. D'une manière similaire, on déduit de (3.16) que $\mu \leq \lambda_1(a_0)$. En résumé, on a

$$\lambda_1(a^0) \leq \mu \leq \lambda_1(a_0),$$

ce qui est en contradiction avec $\mu \in [c,d]$. Par conséquent, il existe $\delta_1 \in (0, \overline{r})$ tel que

$$v \neq A_\lambda v, \quad \forall \lambda \in [c,d], \quad \forall v \in E \text{ with } 0 < \|v\| \leq \delta_1.$$

- Deuxièmement, nous prouvons la conclusion (ii). Remarquons que

$$[0,\mu]\cap[\lambda_1(a^0),\lambda_1(a_0)]=\emptyset.$$

À partir de (i), il existe $\delta_1\in(0,\overline{r})$ tel que

$$v\neq A_\lambda v,\forall\lambda\in[0,\mu],\forall v\in C([0,1])\text{ et }0<\|v\|\leq\delta_1.$$

On pose $\tau=\frac{\lambda}{\mu}$. On a

$$v\neq\tau A_\mu v,\forall\tau\in[0,1],\forall v\in C([0,1]),\text{ et }0<\|v\|\leq\delta_1.$$

On déduit de l'invariance par homotopie du degré topologique que

$$\deg(I-A_\mu,B_\delta,0)=\deg(I,B_\delta,0)=1,\forall\delta\in(0,\delta_1].$$

- Enfin, nous prouvons la conclusion (iii). À partir du Lemme 2.6.1, on doit démontrer que pour $\lambda>\lambda_1(a_0)$, il existe $\delta_2\in(0,\overline{r})$ tel que

$$v-A_\lambda v\neq\tau\varphi_0,\quad\forall\tau\geq0,\quad\forall v\in C([0,1]),\text{ with }\|v\|=\delta_2,\tag{3.17}$$

où φ_0 est la fonction propre positive de L_{a_0} correspondant à $\lambda_1(a_0)$. Supposons, au contraire, qu'il existe $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathcal{C}([0,1])$ avec $\lim_{n\to+\infty}|v_n|=0$ et une suite positive $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ tels que

$$v_n-A_\lambda v_n=\tau_n\varphi_0.$$

On pose $w_n=\frac{v_n}{\|v_n\|}$. Alors

$$w_n=\frac{A_\lambda v_n}{\|v_n\|}+\frac{\tau_n}{\|v_n\|}\varphi_0.\tag{3.18}$$

Comme $A_\lambda v_n\in Q$, on a $w_n\geq\frac{\tau_n}{\|v_n\|}\varphi_0$, ce qui implique que la suite $\{\frac{\tau_n}{|v_n|}\}_{n=0}^{\infty}$ est bornée. D'autre part, en utilisant la définition de A_λ, la condition **(H1)**, et le théorème d'Ascoli-Arzela, la suite de fonctions $\{\frac{A_\lambda v_n}{\|v_n\|}\}_{n=0}^{\infty}$ est relativement compacte. D'après l'égalité (3.18), la suite $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ est également relativement compacte. Sans perte de généralité, supposons que $\lim_{n\to+\infty}w_n=w$. En utilisant l'inégalité (3.14) et la définition de A_λ, on a

$$w_n(t)\geq\lambda\int_0^1G(t,s)a_0(s)[w_n(s)-\frac{\xi_1(s,v_n(s))}{\|v_n\|}]ds.\tag{3.19}$$

Soit ψ_* la fonction propre positive de $L_{a_0}^*$ correspondant à $\lambda_1(a_0)$. D'après l'équation (3.19), nous avons

$$\begin{aligned}\langle w_n,\psi_*\rangle&\geq\lambda\langle L_{a_0}w_n,\psi_*\rangle-\lambda\int_0^1\psi_*(t)[\int_0^1G(t,s)a_0(s)\frac{\xi_1(s,v_n(s))}{\|v_n\|}ds]dt\\&=\lambda\langle w_n,L_{a_0}^*\psi_*\rangle-\lambda\int_0^1\psi_*(t)[\int_0^1G(t,s)a_0(s)\frac{\xi_1(s,v_n(s))}{\|v_n\|}ds]dt.\end{aligned}$$

De façon analogue à la démonstration de la conclusion (i), nous avons

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\xi_1(s, v_n(s))}{\|v_n\|} = 0 \text{ uniformément par rapport à } s \in (0,1).$$

Donc, on a

$$\langle w, \psi_* \rangle \geq \lambda \langle w, L^*_{a_0} \psi_* \rangle = \lambda \langle w, \frac{\psi_*}{\lambda(a_0)} \rangle.$$

De sorte que $\lambda \leq \lambda_1(a_0)$, ce qui constitue une contradiction. Par conséquent, l'hypothèse du Lemme (2.6.1) est vérifiée et donc pour chaque $\lambda > \lambda_1(a_0)$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$\deg(I - A_\lambda, B_\delta, 0) = 0, \forall \delta \in (0, \delta_2].$$

■

Théorème 3.5.1 $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)]$ *est un intervalle de bifurcation pour les solutions positives du problème aux limites (3.8) à partir de la solution triviale* $u \equiv 0$ *; C'est-à-dire, il existe une composante connexe* $\mathcal{C}_0$ *non bornée de solutions positives du problème (3.8) qui rejoint* $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \times \{0\}$.
De plus, il n'existe aucun intervalle de bifurcation des solutions positives à partir de la solution triviale qui soit disjoint de $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)]$*, comme illustré dans la figure suivante.*

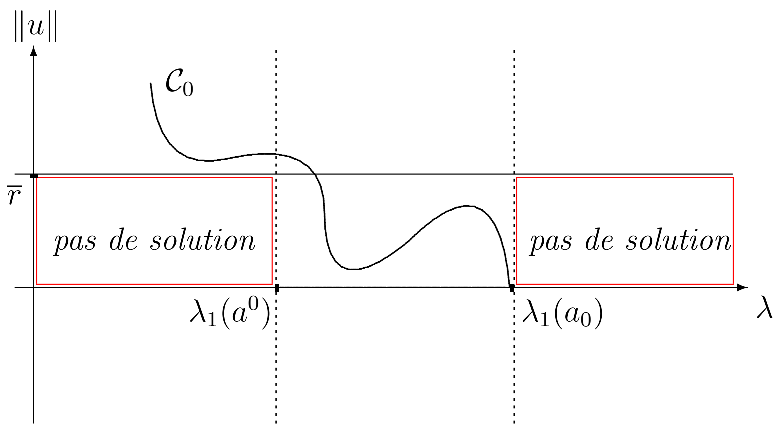

Fig. 2.5

Preuve — D'après la définition de Σ et du Lemme 3.5.2, on doit seulement démontrer qu'il existe une composante connexe $\mathcal{C}_0$ non bornée de Σ, qui rencontre l'intervalle $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \times \{0\}$, et qu'il n'existe aucun intervalle de bifurcation de Σ à partir de $u \equiv 0$ qui soit disjoint de $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)]$.
Pour un n fixé dans $\mathbb{N}$ avec $\lambda_1(a^0) - \frac{1}{n} > 0$, les assertions (ii) et (iii) du Lemme 3.5.4 vérifient les conditions du théorème 2.6.1 avec

$$N(\lambda, u) = A_\lambda u, a = \lambda_1(a^0) - \frac{1}{n}, \text{ et } b = \lambda_1(a_0) + \frac{1}{n},$$

et donc il existe une composante connexe $\mathcal{C}_n$ de Σ dans $\mathbb{R}^+ \times C([0,1])$ contenant $[\lambda_1(a^0) - \frac{1}{n}, \lambda_1(a_0) + \frac{1}{n}] \times \{0\}$. D'après l'assertion (i) du Lemme 3.5.4, le cas (ii) du Théorème 2.6.1 ne peut pas etre produire. Ainsi, $\mathcal{C}_n$ bifurque de $[\lambda_1(a^0) - \frac{1}{n}, \lambda_1(a_0) + \frac{1}{n}] \times \{0\}$ et est non bornée dans $\mathbb{R}^+ \times C([0,1])$. De plus, pour tout intervalle fermé $[c,d] \subset [\lambda_1(a^0) - \frac{1}{n}, \lambda_1(a_0) + \frac{1}{n}] \backslash [\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)]$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\{v \in C([0,1]) : (\lambda, v) \in \Sigma, 0 < \|v\| < \delta_1, \lambda \in [c,d]\} = \emptyset.$$

Par conséquent, si on pose $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_n$, alors la composante $\mathcal{C}_0$ doit bifurquer de $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \times 0$. De plus, en utilisant à nouveau l'assertion (i) du Lemme 3.5.4, il n'existe aucun intervalle de bifurcation de solutions positives à partir de la solution triviale qui soit disjoint de $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)]$. ■

En utilisant un processus similaire à celui décrit précédemment, on peut déduire les conclusions suivantes.

Lemme 3.5.5 *Considérant l'hypothèse* ***(H1)****. Soient $\lambda_1(b_\infty)$ et $\lambda_1(b^\infty)$ les valeurs caractéristiques uniques de $L_{b_\infty}, L_{b^\infty}$, respectivement. Alors, nous avons*

(i) Soit $[c,d] \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle compact avec $[\lambda_1(b^\infty), \lambda_1(b_\infty)] \cap [c,d] = \emptyset$. Alors, il existe $R_1 > \overline{R}$ tel que

$$u \neq A_\lambda u, \quad \forall \lambda \in [c,d], \quad \forall u \in C([0,1]) \text{ et } \|u\| \geq R_1,$$

(ii) pour $\mu \in (0, \lambda_1(b^\infty))$, il existe $R_1 > \overline{R}$ tel que

$$deg(I - A_\mu, B_R, 0) = 1, \quad \forall R \geq R_1;$$

(iii) pour $\lambda > \lambda_1(b_\infty)$, il existe $R_2 > \overline{R}$ tel que

$$deg(I - A_\lambda, B_R, 0) = 0, \quad \forall R \geq R_2.$$

Théorème 3.5.2 *$[\lambda_1(b^\infty), \lambda_1(b_\infty)]$ est un intervalle de bifurcation pour les solutions positives du problème aux limites (3.8), plus précisément, il existe une composante connexe $\mathcal{C}_\infty$ de solutions positives du problème (3.8), qui est non bornée dans la direction de λ qui rejoint $[\lambda_1(b^\infty), \lambda_1(b_\infty)] \times \infty$.*
De plus, il n'existe aucun intervalle de bifurcation des solutions positives à partir de l'infini qui soit disjoint de $[\lambda_1(b^\infty), \lambda_1(b_\infty)]$, comme illustré dans la figure suivante.

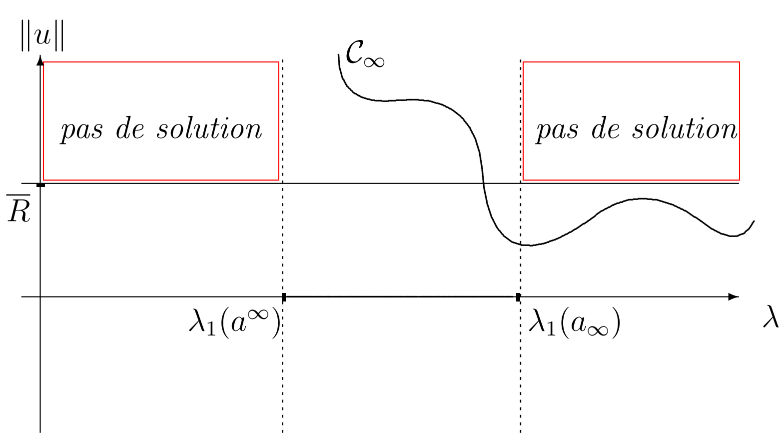

Fig. 2.5

Maintenant, nous sommes dans une position qui nous permet de prouver les Théorèmes 3.4.1 et 3.4.2.

3.5.1 Démonstration du théorème 3.4.1

Certainement, la solution de (3.8) de la forme $(\eta, u); (u \neq \theta)$ est une solution positive du problème aux limites (3.1). Donc, d'après le Lemme 3.5.2, il suffit de montrer qu'il existe une composante connexe $\mathcal{C}$ de Σ qui croise l'hyperplan $\{\eta\} \times C([0,1])$, où $\Sigma \subset \mathbb{R}^+ \times C([0,1])$ est défini par (3.10).

Cas (i). $\lambda_1(a_0) < \eta < \lambda_1(b^\infty)$

À partir du Théorème 3.5.1 il existe une composante connexe $\mathcal{C}_0$ non bornée de solutions positives au problème aux limites (3.8), qui bifurque de l'intervalle $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \times \{\theta\}$. Par conséquent, il existe $(\mu_n, v_n) \in \mathcal{C}_0$ tel que

$$\mu_n + \|v_n\| \to +\infty \quad (n \to +\infty). \tag{3.20}$$

Si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_n \geq \eta$, alors $(\eta, u) \in \mathcal{C}_0$, où u est une solutions du problème (3.8). Dans le cas contraire, nous avons $\mu_n < \eta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la seule solution du problème (3.8) est (λ, θ) avec $\lambda = 0$.

En utilisant l'assertion (i) du Lemme 3.5.4 et la conclusion (i) du Lemme 3.5.5, nous avons

$$\mathcal{C}_0 \cap (\{0\} \times C([0,1]) = \emptyset.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu_n \in (0, \eta)$. En considérant une sous-suite et en renumérotant si nécessaire, supposons que $\lim_{n\to+\infty} \mu_n \to \mu^*$. Alors, $\mu^* \in [0, \eta]$, et donc $\|v_n\| \to +\infty$, selon 3.20.

Pour $m \in \mathbb{N}$, nous choisissons $[c, d] = [0, \lambda_1(b^\infty) - \frac{1}{m}]$. En utilisant l'assertion (i) du Lemme 3.5.5, on déduit que $\mu^* > \lambda_1(b^\infty) - \frac{1}{m}$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$, ce qui implique $\eta < \lambda_1(b^\infty) \leq \mu^*$. Cela conduit à une contradiction. Par conséquent, le problème aux limites (3.1) possède une solution positive u avec $(\eta, u) \in \mathcal{C}_0$, comme illustré dans la figure suivante.

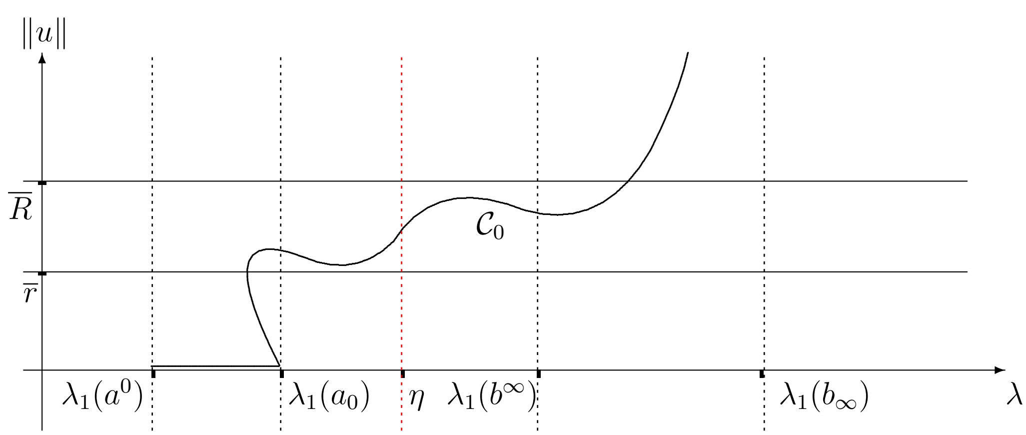

Fig. 2.5

Case (ii). $\lambda_1(b_\infty) < \eta < \lambda_1(a^0)$

À partir du Théorème 3.5.2 il existe une composante connexe $\mathcal{C}_\infty$ non bornée

de solutions du problème (3.8) qui bifurque de l'ensemble $[\lambda_1(b^\infty), \lambda_1(b_\infty)] \times \infty$, et qui est non bornée dans la direction de λ.
Si $\mathcal{C}_\infty \cap (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) = \emptyset$, en utilisant le fait que $\mathcal{C}_\infty \cap (\{0\} \times C([0,1]) = \emptyset$ et que $\mathcal{C}_\infty$ est non bornée dans la direction de λ, alors $\mathcal{C}_\infty$ doit croiser l'hyperplan $\{\eta\} \times C([0,1])$.
Dans le cas où $\mathcal{C}_\infty \cap (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) \neq \phi$, en utilisant le Théorème 3.5.1 et le fait que $\mathcal{C}_\infty \cap (\{0\} \times C([0,1]) = \emptyset$, alors

$$\mathcal{C}_\infty \cap (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) \in [\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \times \{0\}.$$

Donc, $\mathcal{C}_\infty$ relie $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \times \{0\}$ à $[\lambda_1(b^\infty), \lambda_1(b_\infty)] \times \infty$, mais $\lambda_1(b_\infty) < \eta < \lambda_1(a^0)$, alors la composante $\mathcal{C}_\infty$ croise l'hyperplan $\{\eta\} \times C([0,1])$.
Par conséquent, le problème aux limites (3.1) a une solution positive u avec $(\eta, u) \in \mathcal{C}_\infty$, comme illustré dans la figure suivante.

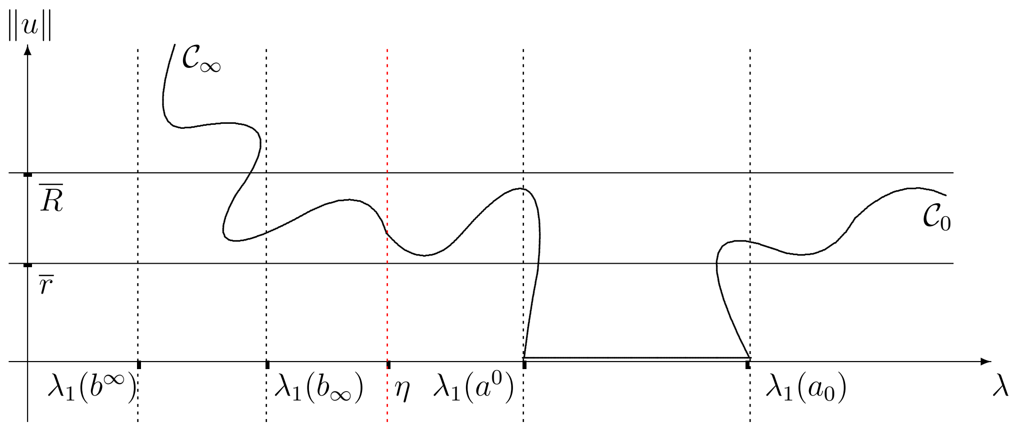

Fig. 2.5

3.5.2 Démonstration du théorème 3.4.2

Tout d'abord, nous montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Sigma \cap ([0, \eta + \varepsilon] \times \partial B_R) = \emptyset, \tag{3.21}$$

où $B_R = \{v \in C([0,1]) : \|v\| < R\}$, et $\Sigma \subset \mathbb{R}^+ \times C([0,1])$ est définie par (3.10). En fait, à partir de l'hypothèse (H2), il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{6(\eta + \varepsilon)}{(\alpha - 2)(2 - \beta)\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 (2s + 1)(1 - s)^{\alpha - 1} h(s) ds < 1.$$

Si (λ, u) est une solution de $u = A_\lambda v$ telle que $0 \leq \lambda \leq \eta + \varepsilon$ et $\|v\| = R$, alors, pour tout $t \in J$, on a

$$0 \leq u(t) \leq \|v\| = R.$$

D'après la définition de A_λ et du lemme 3.3.2, nous avons

$$\begin{aligned}
R = \|v\| &= \max_{t\in J} \lambda \int_0^1 G(t,s)\overline{f}(s,u(s))ds \\
&\leq (\eta+\varepsilon)R \max_{t\in J} \int_0^1 G(t,s)h(s)ds \\
&\leq \frac{6(\eta+\varepsilon)R}{(\alpha-2)(2-\beta)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (2s+1)(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&< R.
\end{aligned}$$

D'où la contradiction. Par conséquent, $\Sigma \cap ([0,\eta+\varepsilon]\times \partial B_R) = \emptyset$.
À partir du théorème 3.5.1, on déduit l'existence d'une composante $\mathcal{C}_0$ non bornée de solutions de l'équation (3.8) qui rencontre $[\lambda_1(a^0), \lambda_1(a_0)] \times \{0\}$. En vertu de (3.21), on a

$$\mathcal{C}_0 \cap ([0,+\varepsilon]\times \partial B_R) = \emptyset.$$

Le fait que $\mathcal{C}_0$ soit non bornée, que $\lambda_1(a_0) < \eta$, et que $\mathcal{C}_0 \cap (\{0\}\times C([0,1])) = \emptyset$ affirme que $\mathcal{C}_0$ croise l'hyperplan $\{\eta\}\times C([0,1]$. Donc, le problème aux limites (3.1 a une solution positive u_1 avec

$$(\eta, u_1) \in \mathcal{C}_0 \text{ et } \|u_1\| < R.$$

D'une manière similaire, selon les Théorèmes 3.5.2 et 3.21 le problème aux limites (3.1) possède une solution positive $u_2(t)$ telle que

$$(\eta, u_2) \in \mathcal{C}_\infty \text{ et } \|u_2\| > R.$$

Par conséquent, le problème aux limites (3.1 possède au moins deux solutions positives.

Immédiatement après avoir établi la preuve du Théorème 3.4.2, nous déduisons le Corollaire suivant.

Corollaire 3.5.1 *Considérons l'hypothèse (H2) et supposons que l'une des deux conditions suivantes est remplie :*
(i) $\lambda_1(a_0) < \eta$; *ou*
(ii) $\lambda_1(b_\infty) < \eta$.
Alors le problème aux limites (3.1 possède au moins une solution positive.

Remarque 3.5.1 *Le corollaire 3.5.1 est différent du théorème 3.4.2 bien que leurs résultats soient similaires.*

3.6 Examples

Exemple 3.7 *Soit ρ la valeur caractéristique unique de L correspondant à la fonction propre positive $a(t) \equiv \frac{3}{2}$ dans (3.12).*

À partir du Lemme 3.5.3, ρ existe, et on a

$$\exists \phi : \phi(t) = \rho \int_0^1 G(t,s)\frac{3}{2}\phi(s)ds, \text{ for all } t \in J.$$

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{5}{2}}u(t) + \eta f(t,u(t)) = 0 & 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \beta \int_0^1 u(s)ds, \end{cases} \tag{3.22}$$

où $\beta \in (0,2)$ et

$$f(t,u) = \begin{cases} \rho(u + tu^2), t \in J, u \in [0,1], \\ \rho(4u - 3 + t), t \in J, u \in [1,3], \\ \rho(3u + t\sqrt{\frac{u}{3}}), \quad t \in J, u \in [3,+\infty). \end{cases} \tag{3.23}$$

Alors, le problème (3.22) possède au moins une solution positive.

Preuve — Il est indéniable que $f_0, f_\infty \notin \{0,\infty\}$. Ainsi, on ne peut pas affirmer que le problème (3.22) admet une solution pour $(\eta,\beta) = (1,1)$, d'après le théorème 3.1.1. Par contre, ce dérnier problème satisfait la condition **(H1)** du théorème 3.4.1 avec

$$a_0(t) = a^0(t) = \rho, \quad b_\infty(t) = b^\infty(t) = 3\rho$$

et

$$\xi_1(t,u) = \xi_2(t,u) = tu^2, \zeta_1(t,u) = \zeta_2(t,u) = \frac{t}{3}\sqrt{\frac{u}{3}}.$$

Par la définition de ρ, il est facile de montrer que

$$\underbrace{\lambda_1(b_\infty)}_{=\frac{1}{2}} < \underbrace{1}_{=\eta} < \underbrace{\lambda_1(a^0)}_{=\frac{3}{2}}.$$

Par conséquent, le problème (3.22) possède au moins une solution positive. ■

Exemple 3.8 *Soit ρ la valeur caractéristique unique de L correspondant à la fonction propre positive $a(t) \equiv \frac{1}{2}$ dans (3.12).*
À partir du Lemme 3.5.3, ρ existe, et on a

$$\exists \phi : \phi(t) = \rho \int_0^1 G(t,s)\frac{1}{2}\phi(s)ds, \text{ for all } t \in J.$$

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{5}{2}}u(t) + \eta f(t,u(t)) = 0 & 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \beta \int_0^1 u(s)ds, \end{cases} \tag{3.24}$$

où $\beta \in (0,2)$ et

$$f(t,u) = \rho u(3 + \sin(tu) + \sin(\frac{t}{u}))$$

Alors, le problème (3.24) possède au moins deux solutions positives.

Preuve — Le problème (3.22) satisfait les conditions **(H1)** et **(H2)** du théorème 3.4.2 ; en effet, pour la condition **(H1)** on prend

$$a_0(t) = b_\infty(t) = 2\rho, \quad a^0(t) = b^\infty(t) = 4\rho$$

et

$$\xi_1(t,u) = -\frac{1}{2}u\sin(tu), \xi_2(t,u) = \frac{1}{4}u\sin(tu), \quad \zeta_1(t,u) = -\frac{1}{2}u\sin(\frac{t}{u}), \zeta_2(t,u) = \frac{1}{4}u\sin(\frac{t}{u}),$$

et pour la condition **(H2)** on prend $h(t) = 5\rho$.
Alors, le problème (3.24) possède au moins deux solutions positives.
Par contre, il est indéniable que $f_0, f_\infty \notin \{0,\infty\}$. Ainsi, on ne peut pas affirmer que le problème (3.22) admet une solution pour $(\eta,\beta) = (1,1)$, d'après le théorème 3.1.1. ■

3.9 Conclusion

En conclusion, cette thèse s'est concentrée sur l'étude de la bifurcation de solutions positives pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire non linéaires avec conditions intégrales. En s'appuyant sur la théorie de bifurcation, le travail a détaillé les démonstrations présentées dans l'article [1], publié par M. Halaoua et E. Djeffal en 2023.

Les préliminaires contiennent le théorème des fonctions implicites, accompagné de propriétés du degré topologique en dimension finie et en dimension infinie. En fait, ils fournissent les bases nécessaires pour les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie des bifurcations, en mettant l'accent sur les phénomènes de bifurcation et les méthodes associées, notamment la méthode de Liapunov-Schmidt pour la bifurcation locale. Il a également été montré que la bifurcation a des implications non seulement locales, mais aussi globales, avec des composantes connexes non bornées ou atteignant des points spécifiques.

Le dernier chapitre a appliqué ces concepts à un problème concret, celui des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales. Un cas particulier de ce problème avait déjà été étudié, mais sous des hypothèses différentes de celles énoncées dans cette thèse.

Enfin, cette thèse s'est conclue en fournissant une liste de références bibliographiques pour permettre aux lecteurs intéressés d'approfondir leurs connaissances sur les sujets abordés. L'ensemble du travail a contribué à une meilleure compréhension des problèmes aux limites non linéaires d'ordre fractionnaire avec conditions intégrales, en utilisant la théorie de bifurcation comme outil principal d'investigation.

Bibliographie

[1] M. Halaoua, E. Djeffal, *Bifurcation from interval and multiple positive solutions for a nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions*, Studies in Education Sciences**(4)**(2023)243-265.

[2] Y. Liu and H. Yu, Bifurcation of Positive Solutions for a Class of Boundary Value Problems of Fractional Differential Inclusions, J. Diff. Equat. 2013 (2013), Article ID 942831, 8 pages.

[3] D. Guo, Nonlinear Functional Analysis, Shandong Science and Technology Press, Jinan. (2001).

[4] P. Rabinowitz, On bifurcation from infinity, J. Diff. Equat. 14 (1973), 462–475.

[5] A. Cabada, G. Wang, *Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions*, J.Math. Anal.Appl. **(389)** (2012)403-411.

[6] J. T. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Math. Stud., vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[7] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Math. Sci. Eng., Academic Press, New York, (1999).

[8] S. G. Samko, A. A. Kilbas, andO. I.Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications), Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, 1993.

[9] A. S. c. M.P. Lazarevi c., Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems : GronwallŠs approach, Math. Comput. Modelling. 49 (2009), 475Ű-481.

[10] A. V. V. Lakshmikantham, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Anal. 69 (2008), 2677-Ű2682.

[11] D. Jiang and C. Yuan, The positive properties of the Green function for Dirichlet-type boundary value problems of nonlinearfractional differential equations and its application, Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications. vol. 72, no. 2, pp. (2010), 710Ű-719.

[12] F. J. Y. Zhou, Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations, Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010), 4465Ű-4475.

[13] G. Whyburn, Analytic Topolgy, Amer. Math. Soc., Providence, (1942).

[14] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications ; Masson, Paris, 1983.

[15] J. C. W.Z. Li, Q.D. Li, Initial value problems for fractional differential equations involving RiemannŰLiouville sequential fractional derivative, J. Math. Anal. Appl. 367 (1) (2010), 260-Ű272.

[16] J. T. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Math. Stud., vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam. (2006).

[17] K. Schmitt, Positive solutions of semilinear elliptic boundary value problems, in Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. vol. 472 (1995), 447–500.

[18] K. Schmitt and R. C. Thompson, Nonlinear Analysis and Differential Equations: An Introduction, University of Utah Lecture Note, Salt Lake City, Utah, USA, (2004).

[19] H. Salem, Fractional order boundary value problem with integral boundary conditions involving Pettis integral, Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed. vol 31 (2) (2011), 661–672.

[20] L. Yansheng, Bifurcation techniques for a class of boundary value problems of fractional impulsive differential equations, Journal of nonlinear Science and Appl. 8 (2015), 340–353.

[21] P. Li and Z. Yong, Bifurcation from interval and positive solutions of the three-point boundary value problem for fractional differential equations, Applied Mathematics and Computation. 257 (2015), 458-Ű466.

[22] P. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Funct. Anal. 7 (1971), 487–513.

[23] T. Q. Z.B. Bai, Existence of positive solution for singular fractional differential equation, Appl. Math. Comput. 215 (7) (2009), 2761Ű-2767.

[24] Y. Liu, Positive Solutions Using Bifurcation Techniques for Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations, Abstract and Applied Analysis. 2013 (2013), Article ID 162418, 7 pages.

[25] Y. L. C.C. Tian, Multiple positive solutions for a class of fractional singular boundary value problems, Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 56 (2012), 115Ű-131.

[26] Z. X. G. W. Feng, M, New existence results for higher-order nonlinear fractional differential equation with integral boundary conditions, Bound. Value Probl. 2011 (2011), Article ID 720702.

[27] Z. M. Sun, Y, Positive solutions for a class of fractional differential equations with integral boundary conditions, Appl. Math. Lett. 34 (2012), 17–21.