

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE BATNA 2 - Mostefa Ben Boulaid

Faculté DE Technologie
Département de Génie Mécanique

Thèse



Préparée au sein du LESEI, Laboratoire d'Etudes des Systèmes Energétiques Industriels

Présentée pour l'obtention du titre de :

Docteur en Sciences en Mécanique

Option : Energétique

Sous le Thème :

SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE
LAMINAIRE DANS UNE CAVITE POREUSE

Présenté par :

HASSINET Liamena

Soutenue publiquement le 28/06/2018 devant le jury composé de :

Président	Benmoussa Hocine	Pr., Université de Batna 2
Rapporteur	Si-Ameur Mohamed	Pr., Université de Batna 2
Examineur	Bouras Fethi	Pr., Université d'El Oued
Examineur	Brima Abdelhafid	Pr., Université de Biskra
Examineur	Si-Abdellah Mayouf	Pr., Université de Msila
Examineur	Mebarki Ghazali	MCA., Université de Batna 2

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse, Mr Mohamed Si-Ameur, Professeur à l'université de Batna 2, pour l'honneur qu'il m'a accordé en acceptant de suivre ce travail de thèse. Je lui suis très reconnaissante pour sa patience, sa disponibilité, sa rigueur scientifique, ses remarques objectives et constructives tout au long de ce travail et pour ses précieux conseils qui m'ont été et me seront très utiles.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à Mr Benmoussa Hocine, Professeur à l'université de Batna 2, qui m'a honoré en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements sont adressés également aux examinateurs ; Mr Si-Abdellah Mayouf, Professeur à l'université de Msila, Mr Brima Abdelhafid, Professeur à l'université de Biskra, Mr Bouras Fethi, Professeur à l'université de l'Oued et Mr Mebarki Ghazali, Docteur à l'université de Batna 2 pour avoir accepté de faire partie du jury et d'avoir consacré de leur précieux temps à la lecture et l'évaluation de mon travail de thèse.

*A la mémoire de mes très chers parents, qui pour moi, sont
un symbole de sacrifice et de dévouement, que Dieu les
accueille dans son vaste paradis.*

A mon mari

A mes enfants

A mes frères et sœurs

A toute ma famille

A toutes mes amies.

Table des matières

LISTE DES TABLES.....	VI
NOMENCLATURE	I
INTRODUCTION GENERALE.....	10
1 GENERALITES ET SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE.....	13
1.1 INTRODUCTION	13
1.2 ECOULEMENTS ET TRANSFERTS EN MILIEU POREUX.....	13
1.2.1 Milieu poreux.....	13
1.2.2 Caractérisation des écoulements en milieu poreux	14
1.2.3 Modélisation des transferts thermiques en milieu poreux	17
1.3 TRAVAUX ANTERIEURS	23
1.4 CONCLUSION	33
2 FORMULATION MATHEMATIQUE	35
2.1 INTRODUCTION	35
2.2 MODELE PHYSIQUE	35
2.3 HYPOTHESES.....	37
2.4 EQUATIONS SOUS FORME DIMENSIONNELLE	37
2.5 CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES SOUS FORME DIMENSIONNELLE	39
2.5.1 Cas 1 : Conditions de températures isothermes	39
2.5.2 Cas 2 : Conditions de températures non-isothermes	39
2.6 EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE	40
2.7 CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES SOUS FORME ADIMENSIONNELLE.....	41
2.7.1 Cas 1 : Conditions de températures isothermes	41
2.7.2 Cas 2 : Conditions de températures non-isothermes	42
2.8 LA FORME GENERALE DES EQUATIONS DE CONSERVATION	42
2.9 CALCUL DU NOMBRE DE NUSSELT	44
2.10 LIGNES DE COURANT.....	44
2.11 CONCLUSION.....	45
3 MODELE NUMERIQUE	46
3.1 INTRODUCTION	46
3.2 MAILLAGE	46
3.3 DISCRETISATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT	48
3.3.1 Intégration du flux total.....	48
3.3.2 Intégration du terme source.....	49
3.4 DISCRETISATION DE L'EQUATION DE CONTINUTE	50
3.5 DISCRETISATION FINALE DES EQUATIONS DE CONSERVATION.....	50
3.5.1 Schémas de discrétisation.....	52
3.5.2 Discrétisation des termes sources.....	52

Liste des tables

3.6	ALGORITHMES DE RESOLUTION	54
3.6.1	<i>Algorithme SIMPLE</i>	54
3.6.2	<i>Séquences de l'algorithme SIMPLE</i>	57
3.7	PARAMETRES DE CONTROLE DE LA CONVERGENCE.....	57
3.7.1	<i>La méthode de sous relaxation</i>	57
3.7.2	<i>Critère de Convergence</i>	59
3.8	METHODE DE RESOLUTION.....	59
3.8.1	<i>Méthode de Stone</i>	60
3.9	CONCLUSION	62
4	RESULTATS ET DISCUSSIONS.....	63
4.1	INTRODUCTION	63
4.2	EFFET DU MAILLAGE.....	63
4.3	VALIDATION DU CODE DE CALCUL.....	65
4.4	CAS 1 : CAVITE CHAUFFEE ET REFROIDIE PAR DES TEMPERATURES CONSTANTES	67
4.4.1	<i>Variation temporelle d'écoulement et du transfert thermique</i>	68
4.4.2	<i>Effet du nombre de Rayleigh</i>	73
4.4.3	<i>Effet du nombre de Darcy</i>	75
4.4.4	<i>Influence du rapport de la capacité thermique du matériau à la capacité calorifique convective</i>	77
4.4.5	<i>Influence du rapport de conductivités</i>	80
4.4.6	<i>Influence du rapport de forme de cavité Ar</i>	84
4.5	CONCLUSION	88
4.6	CAS 2 : CAVITE CHAUFFEE ET REFROIDIE PAR DES TEMPERATURES DE PROFILS SINUSOÏDAUX.....	89
4.6.1	<i>Influence du nombre de Rayleigh</i>	89
4.6.2	<i>Influence des amplitudes des profils de température</i>	97
4.6.3	<i>Influence du rapport d'aspect Ar</i>	103
4.7	CONCLUSION	112
	CONCLUSION GENERALE.....	114
	BIBLIOGRAPHIE	117

Liste des figures

Figure 1.1 : Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) [3].....	14
Figure 1.2 : Conductivité thermique effective pour des lits de particules, prédiction théorique et résultats expérimentaux [16].....	22
Figure 1.3 : Expérimentale de La cellule Hele-Shaw [40]	25
Figure 1.4 : La configuration étudiée ainsi que les conditions aux limites [40].....	25
Figure 1.5 : Variation du nombre moyen de Nusselt avec le nombre Rayleigh pour 28	
Figure 1.6 : Schéma du système physique Basaket al. [47].....	28
Figure 1.7 : Schéma du système.....	32
Figure 1.8 : Schéma du système	33
Figure 2.1 : Cas 1, cavité chauffée et refroidie par des températures T_H et T_C constantes.....	36
Figure 2.2 : Cas 2, cavité chauffée et refroidie par des températures sinusoïdales ...	36
Figure 3.1 : Discrétisation du domaine de calcul	47
Figure 3.2 : Stockage des variables scalaires et des composantes de vitesse suivant un maillage décalé.....	47
Figure 3.3 : Organigramme du code de calcul selon l'algorithme SIMPLE	61
Figure 4.1 : Effet du maillage pour ($Ra=10^5$, $Da=0.1$ et $\varepsilon=0.6$) sur la variation.....	64
Figure 4.2 : Comparaison entre nos résultats avec ceux de la littérature	66
Figure 4.3 : Fonction de courant et températures pour $Da= 10^{-4}$ et $Ra=10^5$	67
Figure 4.4 : Variation temporelle des lignes de courant et isothermes pour	70
Figure 4.5 : Variations du nombre de Nusselt moyen avec le temps pour différents nombres de Rayleigh ($Da = 0.1$ et $\varepsilon = 0.7$)	71
Figure 4.6 : Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps pour différents nombres de Darcy($Ra = 10^5$ et $\varepsilon = 0.7$)	72
Figure 4.7 : Les lignes de courant(gauche) et isothermes (droite) pour $Ar = 1$, et différentes valeurs des nombres de Rayleigh.....	74
Figure 4.8 : Effet du nombre de Rayleigh sur le taux moyen de transfert de chaleur	75

Figure 4.9 : Lignes de courant (gauche) et température (droite), pour $Ar=1$ (a) $Da =10^{-4}$, (b) $Da =10^{-3}$, (c) $Da =10^{-2}$, (d) $Da =10^{-1}$; $Ra=10^5$	76
Figure 4.10 : Effet du nombre de Darcy sur le taux moyen de transfert de chaleur...77	77
Figure 4.11 : Tracé des lignes de courant, température, pour $R_k=1$, $Ra=10^6$, $Da=10^{-3}$ etc=0.6a) $\sigma=1$, b) $\sigma=10$, c) $\sigma=100$	78
Figure 4.12 : Variation du nombre de Nusselt moyen avec différentes valeurs	79
Figure 4.13 : Variation de Nu en fonction du temps à $Ra=10^6$, $Da=10^{-3}$ et $\varepsilon= 0.6$	80
Figure 4.14 : Tracé des lignes de courant (gauche) et températures (droite), pour différents rapports R_k ; $Da = 0.1$ $Ra = 10^5$	82
Figure 4.15 : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Da et R_k pour $Ra=10^5$	83
Figure 4.16 : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra et R_k pour $Da=10^{-5}$	83
Figure 4.17 : Lignes de courant (gauche) et température (droite), pour $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-1}$, et : a) $Ar = 1$; b) $Ar = 2$; c) $Ar = 4$	85
Figure 4.18 : Variation du nombre de Nusselt local avec Y pour différentes valeurs de Ar ; $Ra=10^6$ et $Da=0.1$	86
Figure 4.19 : Variation du nombre moyen de Nusselt en fonction du nombre de Darcy pour différentes valeurs de Ar; $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$	86
Figure 4.20 : Variation du nombre moyen de Nusselt en fonction de Ra pour différentes valeurs de Ar; $Da=10^{-1}$	87
Figure 4.21 : Variation du nombre moyen de Nusselt en fonction de Ra pour différentes valeurs de Ar; $Da=10^{-5}$	87
Figure 4.22 : Lignes de courant (gauche), température (droite) pour $Ar=1$, $\lambda_H =0.5$, $\lambda_C =0$ et Ra; (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$, (c) $Ra=10^5$, (d) $Ra=10^6$	91
Figure 4.23 : Lignes de courant, température pour $Ar=1$, et Ra; (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$, (c) $Ra=10^5$, (d) $Ra=10^6$	93
Figure 4.24 : Variation du nombre de Nussel locale le long de la paroi chauffée, avec les différents nombre de Rayleigh $Ar=1$	94
Figure 4.25 : Variation temporelle du nombre de Nussel moyen, de $t = 0$ à l'état stable final pour différents nombres de Rayleigh ; et $\varepsilon = 0.7$	96
Figure 4.26 : Variation du nombre de Nusselt local avec Y pour différentes valeurs de λ_H avec (a) : $\lambda_C=0$ et (b) ; $\lambda_C=1$ à $Ra = 10^5$ et $Ar = 1$	98
Figure 4.27 : Nombre de Nusselt local le long de la moitié chauffée de la paroi pour différentes amplitudes de chauffage à $\lambda_C = 0$ et $Ra = 10^4$	99
Figure 4.28 : Nombre de Nusselt local le long de la moitié chauffée de la paroi.....	99
Figure 4.29 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes valeurs de λ_H ; $Ar =1$	100

Figure 4.30 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes amplitudes de refroidissement λ_C et $\varepsilon = 0.7$ 101

Figure 4.31 : Variation temporelle du nombre de Nusselt moyen, de $t = 0$ à l'état stable final, pour différents amplitudes d'échauffement λ_H à $Ra=10^4$ et $\varepsilon = 0.7$ 102

Figure 4.32 : Variation temporelle du nombre de Nusselt moyen, de $t = 0$ à l'état stable final pour différents amplitudes de refroidissement λ_C ; $\varepsilon = 0.7$ et $Ra=10^4$ 102

Figure 4.33 : Lignes de courant (haut), température (bas), **a)** $Ar = 2$, **b)** $Ar = 4$ 105

Figure 4.34 : Lignes de courant, température pour $Ar=4$ avec $\lambda_H=1$ et $\lambda_C=0$, 106

Figure 4.35 : Variation du nombre de Nusselt local en fonction de Y pour différentes valeurs de Ar, $\lambda_H = 0,50$ et $Ra = 10^5$ 108

Figure 4.36 : Variation du nombre de Nusselt local en fonction de Y pour différentes valeurs de Ar, $\lambda_H = 0,50$ et $Ra = 10^5$ 108

Figure 4.37 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour $\lambda_H = 0.5$ et différentes λ_C ; (a) $\lambda_C = 0$, (b) $\lambda_C = 0.5$ et (c) $\lambda_C = 1$ 109

Figure 4.38 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes valeurs Ar pour $\lambda_C=0$ 111

Figure 4.39 : Variation Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes valeurs Ar pour $\lambda_C = 1$ 111

Liste des tables

Tableau 1.1 : Quelques modèles de conductivité thermique effective en milieu poreux granulaire [16]	21
Tableau 2.1 : Présentation des différentes quantités transportées et leurs	43
Tableau 4.1 : Effet du maillage sur les valeurs de (Nu , ψ_{\max} et V_{\max}) pour $Ra=10^5$, $Da=0.1$ et $\varepsilon=0.6$	64
Tableau 4.2 : Comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature pour $Pr=1.0$ et $Da=0.01$	65
Tableau 4.3 : Comparaison des nombres de Nusselt entre les résultats	66
Tableau 4.4 : Variation de V_{\max} en fonction de σ à $Ra=10^6$ $Da=10^{-3}\varepsilon=0.6$	79

Nomenclature

Ar	Rapport de forme de la cavité, $Ar = H/L$	
cp	Capacité calorifique à pression constante,	[J kg ⁻¹ K ⁻¹]
Da	Constante de Darcy; $Da = K/L^2$	
g	Accélération de pesanteur	[m s ⁻²]
H	Hauteur de la cavité	[m]
k	Conductivité thermique	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
k _A	Moyenne arithmétique de la conductivité thermique	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
k _e	Conductivité thermique effective	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
k _f	Conductivité thermique de la phase fluide	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
k _G	Moyenne géométrique de la conductivité thermique	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
k _H	Moyenne harmonique de la conductivité thermique	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
k _s	Conductivité thermique de la phase solide	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
K	Perméabilité	[m ²]
L	Longueur de la cavité	[m]
Nul	Nombre de Nusselt local	
Nu	Nombre de Nusselt moyen	
p	Pression	[Pa]
P	Pression adimensionnée	
Pr	Nombre de Prandtl ; $Pr = \nu/\alpha$	
q _m ^{'''}	Production de la chaleur globale	J/m ³
Ra	Nombre de Rayleigh ; $Ra = g\beta\Delta TL^3 / \nu\alpha$	
R _k	Rapport de conductivités ; $R_k = k_e / k_f$	
t	Temps	[s]
T _{ref}	Température de référence	[K]
T	Température	[K]
T _C	Température de la paroi froide	[K]
T _H	Température de la paroi chaude	[K]
T _s	Température de la phase solide	[K]
T _f	Température de la phase fluide	[K]

ΔT	Différence de températures	[K]
\vec{V}	Vitesse de filtration = vitesse de Darcy	[m s ⁻¹]
u, v	Composante horizontale et verticale de la vitesse	[m s ⁻¹]
U, V	Composantes de la vitesse adimensionnée	
\vec{V}_p	Vitesse moyenne interstitielle de pore	[m s ⁻¹]
V_f	Volume occupé par le fluide	[m ³]
V_s	Volume occupé par le solide	[m ³]
x, y	Cordonnées cartésiennes dimensionnelles	[m]
X, Y	Cordonnées cartésiennes adimensionnées	

Lettres grecques

α	Diffusivité thermique du fluide	[m ² s ⁻¹]
β	Coefficient d'expansion thermique	[K ⁻¹]
λ	Amplitude de la distribution de température sinusoïdale	
μ	Viscosité dynamique du fluide	[Pa s]
ν	Viscosité cinématique du fluide	[Pa s]
ρ	Masse volumique	[kg m ⁻³]
θ	Temperature adimensionnée	
τ	Temps adimensionné	
σ	Rapport de la capacité thermique du matériau à la capacité calorifique convective	
ψ	Fonction de courant adimensionnée	
ε	Porosité	

Introduction générale

Les phénomènes de transfert de chaleur dans les milieux poreux saturés par un fluide représentent un sujet adéquat de recherche scientifique. L'intérêt pour le sujet provient de son rôle important dans une grande variété d'applications techniques et d'ingénierie. **Shenoy [1]** donne une liste de deux pages de ces applications, notamment dans beaucoup de procédés industriels, tels que les équipements électriques, les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires, collecteurs solaires et spécialement dans l'isolation thermique des constructions et dans les systèmes de refroidissement des appareils électroniques.

Dans l'ensemble des recherches traitées, le problème de transfert de chaleur par convection naturelle dans les espaces rectangulaires a été l'origine de nombreux travaux expérimentaux et numériques. La plupart de ces études portant sur ce phénomène ont attaché un intérêt particulier aux enceintes rectangulaires, dont les parois horizontales ou verticales sont soumises à des conditions de température isotherme ou à des conditions de flux de chaleurs uniformes. En revanche, peu de travaux ont été consacrés à la convection naturelle dans les enceintes poreuses partiellement chauffées et partiellement refroidies et notamment par des températures non isothermes, bien que celles-ci se trouvent dans des habitats et au centre de pas mal d'applications industrielles.

Les progrès scientifiques et l'amélioration de la conception, de l'efficacité et de la fiabilité des équipements de transfert thermique dans les industries mécaniques, chimiques et pétrolières sont directement liés à la compréhension de la convection naturelle dans ces systèmes et l'utilisation efficace des outils modernes et au contrôle de mesure du transfert thermique.

La présente thèse porte sur l'étude de la convection naturelle au sein d'une enceinte rectangulaire remplie par un milieu poreux saturé par un fluide. La cavité est soumise à des gradients de température différents aux demi-parois verticales. Diverses conditions aux frontières thermiques ont été appliquées (températures uniformes et températures de profil sinusoïdal avec différentes amplitudes). Bien entendu, et sans aucun doute, la configuration géométrique et les conditions aux limites peuvent avoir un impact spécifique sur la structure de

l'écoulement et sur les taux de transfert de chaleur, alors on peut obtenir des résultats nouveaux par rapport à ce qui est plus au moins bien connu dans le domaine.

En utilisant la variation spatiale de température sinusoïdale, les champs d'écoulement et les caractéristiques de transfert de chaleur peuvent être contrôlés à l'intérieur de l'enceinte. Les applications de ce cas se trouvent notamment dans des enceintes peu profondes où le contrôle des régimes d'écoulement ainsi que les caractéristiques de transfert de chaleur ont une certaine importance dans les procédés industriels.

Nous nous sommes intéressés essentiellement sur les effets des différents paramètres du problème sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que sur les transferts de chaleur résultants. L'étude traite particulièrement le contrôle des flux convectifs et des températures dans les enceintes de formes rectangulaires, qui ont de nombreuses applications dans l'ingénierie.

Dans ce contexte, la convection est étudiée avec l'objectif de l'améliorer, de l'éviter ou de la réduire.

Afin de présenter notre travail, le présent manuscrit est structuré en une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre, où nous reviendront sur les caractérisations des écoulements en milieu poreux et la modélisation des transferts thermiques. Nous y exposerons aussi les travaux antérieurs consacrés à une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques liés à la convection naturelle en cavité poreuse, pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

Le second chapitre est consacré à la modélisation mathématique, en présentant le problème physique mis en étude, suivi de la formulation mathématique. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les conditions aux limites imposées sont présentées en détail.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des volumes finis et son exécution pour la discrétisation des équations du problème, ainsi que l'algorithme SIMPLE choisi pour le couplage vitesse-pression.

Le quatrième chapitre constitue l'essentiel du travail, où nous présentons les effets des différents paramètres sur les caractéristiques des écoulements et le transfert convectif et nous commentons également les résultats ainsi obtenus. Deux cas d'études sont présentés. Le premier concerne une cavité poreuse partiellement chauffée et refroidie aux parois verticales par des températures uniformes, dans le deuxième cas, nous traitons une cavité chauffée et refroidie par des températures de profils sinusoïdaux avec des différentes amplitudes.

Enfin, une conclusion générale présentant les principaux résultats trouvés le long de cette étude ainsi que les perspectives futures seront présentées.

1 Généralités et synthèse bibliographique

1.1 Introduction

La convection naturelle est le mouvement qui résulte d'un gradient de température qui engendre un gradient de masse volumique dans un fluide (poussée d'Archimède).

Depuis les jours de **Darcy** [2], de nombreux raffinements ont été apportés aux équations utilisées pour modéliser le transfert de chaleur et l'écoulement de fluide monophasé par convection naturelle, dans un milieu poreux saturé, afin d'attribuer des effets fondamentaux tels que les effets inertiels, le frottement aux limites et la dissipation visqueuse, et d'autres effets additionnels comme le champ magnétique etc.

Dans ce chapitre, on a examiné les approches de la modélisation du flux dans le milieu poreux. Aussi nous avons dressé une revue de la littérature concernant les travaux les plus pertinents dans le domaine de la convection naturelle dans les cavités remplies de milieux poreux.

1.2 Ecoulements et transferts en milieu poreux

1.2.1 Milieu poreux

Un milieu poreux est généralement composé d'un empilement de particules solides dans lequel un fluide peut s'écouler librement dans les pores formés entre ces particules.

Un milieu poreux est caractérisé principalement par deux propriétés macroscopiques liées entre elles et qui sont la porosité et la perméabilité. Du fait que la disposition et la taille des pores sont irrégulières, la variation des paramètres régissant cet écoulement, elle sera aussi irrégulière. En pratique, ces paramètres sont mesurés à l'échelle macroscopique (moyenné). La technique utilisée est la méthode spatiale, définie comme étant une moyenne appropriée sur un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) suffisamment large, voir figure 1.1.

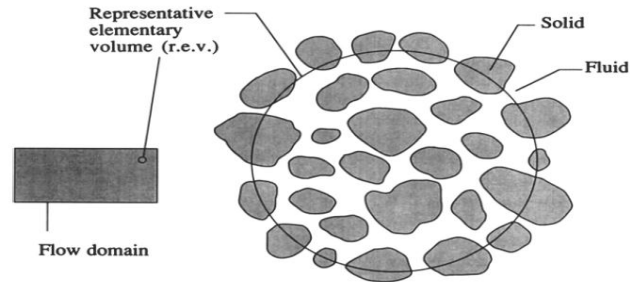


Figure 1.1 : Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) [3]

1.2.2 Caractérisation des écoulements en milieu poreux

Au milieu du 19^{ème} siècle, Darcy a montré expérimentalement que le débit d'un écoulement d'eau à travers une colonne de sable était proportionnel au gradient de pression appliqué entre deux sections de cette colonne. La première mise en équation du mouvement d'un fluide dans un milieu poreux saturé a été proposée par **Darcy [2]**.

Pour un milieu isotrope, l'équation de Darcy généralisée peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (1.1)$$

où $\vec{\nabla} p$ est le gradient de pression.

μ et ρ sont respectivement la viscosité et la masse volumique du fluide.

K est la perméabilité qui ne dépend que de la géométrie de la matrice solide,

\vec{v} est la vitesse de filtration ou la vitesse superficielle du fluide, définie comme le débit volumique du fluide par unité de section normale à l'écoulement (vitesse moyenne sur un volume élémentaire représentatif (V.E.R.)).

La vitesse de filtration \vec{V} est reliée avec la vitesse moyenne interstitielle de pore \vec{V}_P par la relation suivante :

$$\vec{V} = \varepsilon \vec{V}_P \quad (1.2)$$

où ε est la porosité définie par la relation :

$$\varepsilon = \frac{V_f}{V_f + V_s} \quad (1.3)$$

V_f est le volume occupé par le fluide et V_s est le volume occupé par le solide.

Dès le début du 20^{ème} siècle, Forchheimer a mis en évidence expérimentalement qu'il y a apparition de recirculations à l'échelle du pore lorsque le débit de l'écoulement est important. Ces recirculations produisent une chute supplémentaire de pression exprimée sous la forme d'une fonction quadratique de la vitesse de filtration. Selon **Joseph et al. [4]**, la modification appropriée à l'équation de Darcy est de remplacer l'équation. (1.1) par :

$$\vec{V}_P = -\frac{\mu}{K} \vec{v} + \rho \vec{g} - \frac{\rho_f C_F}{\sqrt{K}} |\vec{v}| \vec{v} \quad (1.4)$$

D'après **Ward [5]** C_F pourrait être une constante universelle, avec une valeur d'environ 0,55, mais plus tard, on a trouvé que C_F varie avec la nature du milieu poreux. **Beavers et al. [6]** ont montré que les parois de délimitation pourraient avoir un effet substantiel sur la valeur de C_F . Les calculs numériques de **Coulaud et al. [7]** ont montré que C_F est un coefficient empirique qui dépend de la porosité et de la microstructure du milieu poreux.

La transition de l'écoulement de Darcy (Eq.1.1) à l'écoulement de Darcy-Forchheimer (Eq. 1.4) se produit lorsque la vitesse d'écoulement est assez élevée. **Vafai and Tien [8]**, **Lauriat and Prasad [9]** et **Lage [10]** montrent dans leurs travaux, que la simple équation de Darcy était

insuffisante pour décrire un écoulement en milieu poreux, dans ce cas ils optent pour le terme de Forchheimer pour tenir compte des effets inertiels.

Dans le cadre du calcul de la force visqueuse exercée par un fluide sur des particules sphériques composant un milieu poreux, **Brinkman [11]** a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes.

Ce terme permet également de rendre compte des forces de frottement qui ont lieu au niveau des surfaces qui délimitent le milieu poreux (en présence de ce terme, on considère une condition aux limites d'adhérence à ces surfaces, alors qu'en l'absence de ce terme, on considère qu'il y a glissement sans frottement).

La loi modifiée de Darcy-Brinkman-Forchheimer (DBF) est alors représentée par l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \mathbf{p} = -\frac{\mu}{\mathbf{K}} \vec{\mathbf{v}} + \rho \vec{\mathbf{g}} - \frac{\rho_f c_F}{\sqrt{\mathbf{K}}} |\vec{\mathbf{v}}| \vec{\mathbf{v}} + \tilde{\mu} \nabla^2 \vec{\mathbf{v}} \quad (1.5)$$

Où $\tilde{\mu}$ est une viscosité effective qui dépend de la viscosité du fluide (μ) et de la porosité (ε) **Ochoa-Tapia et Whitaker [12]**.

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.6)$$

La forme la plus générale d'équation du mouvement qui tient compte de l'inertie macroscopique du fluide a été proposée, par **Hsu and Chang [13]** et **Vafai and Tien [8]**, citée par **Neild and Bejan [3]**. Ces chercheurs ont obtenu une équation qui peut être écrite par notre notation par :

$$(1.7)$$

$$\rho_f \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}}{\varepsilon} \right) \right]}_1 = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_2 + \underbrace{\rho \vec{g}}_3 + \underbrace{\frac{\mu}{\varepsilon \rho_f} \nabla^2 \vec{v}}_4 - \underbrace{\frac{\mu}{K} \vec{v}}_5 - \underbrace{\frac{\rho_f c_F}{\sqrt{K}} |\vec{v}| \vec{v}}_6$$

(1) terme exprimant les forces d'inertie macroscopiques (terme convectif)

(2) gradient de pression

(3) force de gravité

(4) cisaillement visqueux à l'échelle macroscopique, appelé terme visqueux de Brinkman

(5) cisaillement visqueux à l'échelle microscopique, appelé terme de Darcy

(6) terme exprimant les forces d'inertie microscopiques, appelé terme d'inertie d'Ergun ou encore terme de Forchheimer

1.2.3 Modélisation des transferts thermiques en milieu poreux

Les transferts de chaleur dans un milieu poreux résultent à la fois des propriétés thermiques et physiques des deux phases solide et fluide, ces transferts sont approchés par deux types de modèle : modèle à une température et modèle à deux températures. Dans ce qui suit nous nous concentrons sur le modèle à une température.

- **Modèle à une température**

Dans ce paragraphe on s'intéresse au cas d'un milieu poreux isotrope, où les dissipations visqueuses, les effets radiatifs et les variations d'énergie interne dues aux changements de pression sont négligés.

Dans le cas d'un modèle dit à une température, le milieu est cependant considéré comme homogène : tout se passe comme s'il y avait un équilibre thermique local entre les phases solide et fluide. En tenant compte des différents modes de transfert thermique qui interviennent, l'équation d'énergie sur un volume élémentaire du milieu, s'écrit pour la phase solide :

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-\varepsilon) \vec{\nabla} \cdot (k_s \vec{\nabla} T_s) + (1-\varepsilon) q_s''' \quad (1.8 a)$$

et pour la phase fluide :

$$\varepsilon(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_f = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (k_f \vec{\nabla} T_f) + \varepsilon q_f''' \quad (1.8 b)$$

En utilisant cette hypothèse d'équilibre local $T_s = T_f = T$, l'équation de bilan d'énergie (sur V.E.R. contenant les phases solide et fluide) peut être écrite :

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (k_e \vec{\nabla} T) + q_m''' \quad (1.9)$$

Où :

$(\rho c_p)_m$ est la capacité thermique globale par unité de volume définie par :

$$(\rho c_p)_m = (1 - \varepsilon)(\rho c)_s + \varepsilon(\rho c_p)_f \quad (1.10)$$

k_e est la conductivité thermique globale du milieu poreux :

$$k_e = (1 - \varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \quad (1.11)$$

q_m''' est la production de la chaleur globale par unité de volume du milieu.

$$q_m''' = (1 - \varepsilon)q_s''' + \varepsilon q_f''' \quad (1.12)$$

- Conductivité thermique effective

Un modèle simple est donné par **Kaviany [14]** qui suppose que les transferts de chaleur dans les deux phases solide et fluide se font en parallèle.

L'équation d'énergie s'écrit pour la phase solide :

$$(1 - \varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \varepsilon) \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{k}_s \vec{\nabla} T_s) \quad (1.13)$$

et pour la phase fluide :

$$\varepsilon(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_f = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{k}_f \vec{\nabla} T_f) \quad (1.14)$$

En remplaçant dans les deux équations précédentes, par $T_s = T_f = T$, on obtient :

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{k}_e \vec{\nabla} T) \quad (1.15)$$

K_e est la conductivité thermique globale du milieu poreux :

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_A = (1 - \varepsilon) \mathbf{k}_s + \varepsilon \mathbf{k}_f \quad (1.16)$$

Si le transfert de chaleur par conduction dans la phase solide et dans la phase liquide prend place en parallèle, la conductivité thermique effective k_e est alors la moyenne arithmétique (k_A) entre les conductivités k_s et k_f (Eq.1.16).

Si la conduction dans la phase solide et dans la phase fluide prend place en série, $1/k_e$ est alors la moyenne pondérée de $1/k_s$ et $1/k_f$. La conductivité thermique effective k_e est la moyenne harmonique des conductivités (k_H) de k_s et k_f (Eq. I-17).

$$\frac{1}{\mathbf{k}_e} = \frac{1}{\mathbf{k}_H} = \frac{(1 - \varepsilon)}{\mathbf{k}_s} + \frac{\varepsilon}{\mathbf{k}_f} \quad (1.17)$$

En général, la conductivité thermique effective est limitée par k_A et k_H (le plus souvent $k_H \leq k_A$ avec une égalité quand $k_f = k_s$).

Dans la pratique, k_e est souvent estimé comme la moyenne géométrique (k_G) de k_s et k_f (Eq. I-18).

$$k_e = k_G = k_s^{(1-\varepsilon)} \cdot k_f^\varepsilon \quad (1.18)$$

Toutes ces approches (moyennes arithmétique, harmonique ou géométrique) donnent une bonne estimation tant que k_s et k_f ne sont pas trop différents l'un de l'autre **Nield [15]**, et elles sont insuffisantes pour avoir des bonnes estimations lorsque k_s et k_f ne sont pas du même ordre de grandeur comme par exemple les alliages ($k_s \approx 10$ à $100 \text{ Wm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) et l'air ($k_f \approx 0.024$).

Dans le cas où la conductivité thermique de la phase solide est grande devant celle du fluide, la manière dont s'effectue l'interconnexion entre les particules influe fortement sur la conduction **Nield and Bejan [3]**.

Des corrélations plus compliquées pour le calcul de la conductivité thermique effective en fonction des conductivités thermiques des phases solide et fluide, et de la porosité en milieu poreux granulaire adapté de **Kaviany [14]**, cité dans **Ben Amara [16]** sont données dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1 : Quelques modèles de conductivité thermique effective en milieu poreux granulaire [16]

Modèle	Corrélation	Remarques
Krupiczka[17]	$\frac{k_e}{k_f} = \left(\frac{k_s}{k_f} \right)^{0.28 - 0.57 \log \varepsilon + 0.057 \log \left(\frac{k_s}{k_f} \right)}$	(pour $0.2 \leq \varepsilon \leq 0.6$)
Kunii and Smith[18]	$\frac{k_e}{k_f} = \varepsilon + \frac{(1 - \varepsilon)}{\phi_2 + 4.63(\varepsilon - 0.26)(\phi_1 - \phi_2) + 2/3 \frac{k_f}{k_s}}$	pour $0.26 \leq \varepsilon \leq 0.476$ Φ_1 et Φ_2 sont deux fonctions décroissantes de (k_f/k_s)
Zehnder and Schlunder[19]	$\frac{k_e}{k_f} = 1 - (1 - \varepsilon)^{1/2} + \frac{2(1 - \varepsilon)^{1/2}}{1 - (k_f/k_s)B} \left[\frac{\left[\frac{[1 - (k_f/k_s)]B}{[1 + (k_f/k_s)B]^2} \ln \frac{1}{(k_f/k_s)B} \right]}{\frac{B+1}{2} - \frac{B-1}{1 - (k_f/k_s)B}} \right]$	$B = 1.25 \left[\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right]^{10/9}$
Hadley [20]	$\frac{k_e}{k_f} = (1 - \alpha_0) \frac{\varepsilon f_0 + (k_s/k_f)(1 - \varepsilon f_0)}{1 - \varepsilon(1 - f_0) + (k_s/k_f)\varepsilon(1 - f_0)} + \alpha_0 \frac{2 \left((k_s/k_f)^2 (1 - \varepsilon) + (1 + 2\varepsilon)(k_s/k_f) \right)}{(2 + \varepsilon)(k_s/k_f) + 1 - \varepsilon}$	Fonction d'ajustement $f_0(\varepsilon)$: et une fonction de poids $\alpha_0(\varepsilon)$ (pour $0 \leq \varepsilon \leq 0.580$)
	$\log \alpha_0 = -4.898\varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon \leq 0.0827$ $\log \alpha_0 = -4.405 - 3.154(\varepsilon - 0.0827) \quad 0.0827 \leq \varepsilon \leq 0.298$ $\log \alpha_0 = -1.084 - 6.778(\varepsilon - 0.298) \quad 0.298 \leq \varepsilon \leq 0.580$ $f_0 = 0.8 + 0.1\varepsilon$	

Prasad et al. [21] ont montré par une étude expérimentale que les corrélations de Hadley, Kunii et Smith, Zehnder et Schlunder, et de Krupiczka donnaient des résultats précis pour des valeurs de $(k_s/k_f) \leq 10^3$. Pour des valeurs élevées de (k_s/k_f) , la conductivité k_e observée est correctement prédite uniquement par la corrélation de Hadley, Figure 1.2.

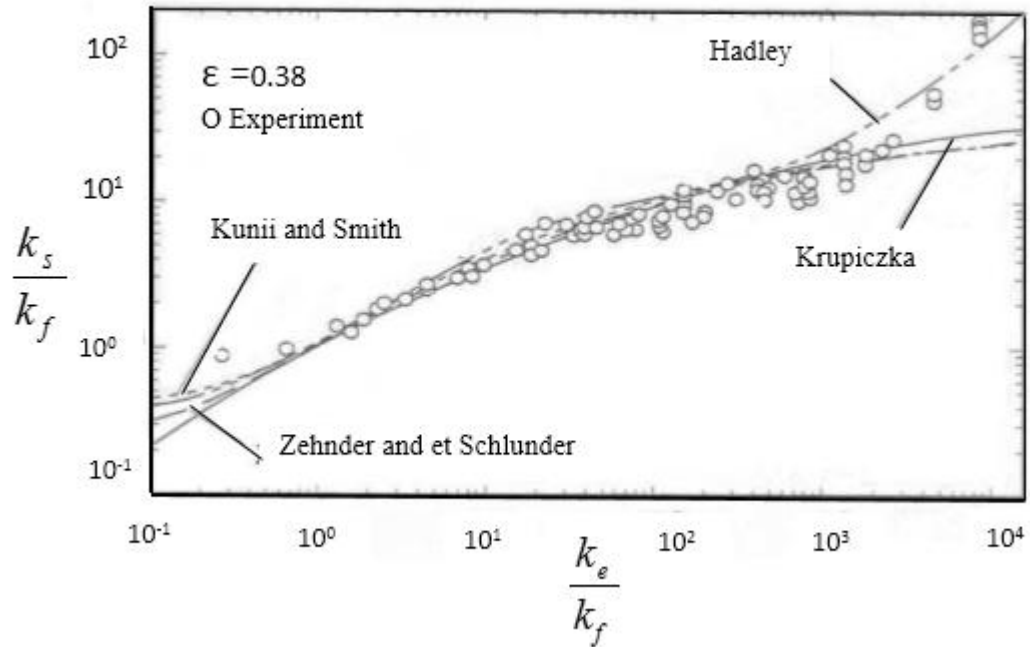


Figure 1.2 : Conductivité thermique effective pour des lits de particules, prédiction théorique et résultats expérimentaux [16]

Dans la suite de ce travail, dont la motivation principale est d'étudier les transferts et les structures d'écoulement dans un milieu poreux saturé par un fluide et compte tenu des gammes des paramètres choisis, nous retenons la formulation de Darcy–Brinkman pour les écoulements, en maintenant le terme convectif dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, avec une viscosité effective égale à la viscosité du fluide divisée par la porosité ($\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\epsilon}$). Et pour le transfert thermique nous retenons le modèle à une température.

1.3 Travaux antérieurs

La littérature de recherches publiées concernant le sujet de la convection naturelle dans les milieux poreux est abondante. Beaucoup de travaux sont cités dans les ouvrages de **Nield and Bejan [3]**, **Vafai [22]** et **Ingham and Pop [23]**. La plupart des travaux sur la convection naturelle dans les milieux poreux ont considéré des géométries simples et différentiellement chauffées. La configuration rectangulaire est l'une des plus étudiées, car elle est impliquée dans de nombreux processus thermiques. Elle sert de base pour la plupart des études à caractère fondamental, comme les études de **Cheng [24]**, **Tong and Subramanian [25]**, **Vafai and Tien [26]**, **Lauriat and Prasad [27]** et **Lage [28]**, **Poulikakos and Bejan [29]**, **Prasad and Tuntomo [30]** et **Beckermann et al. [31]**, qui ont traitées l'inclusion des effets de l'inertie et de la diffusion visqueuse dans les écoulements en convection naturelle dans les enceintes poreuses.

D'autres chercheurs ont consacré leurs études sur la convection naturelle soit à un flux thermique ou à une différence de température imposée aux parois latérales ou horizontales parmi eux :

Edimilson et al. [32] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire et turbulente dans une cavité carrée poreuse en utilisant le modèle macroscopique $k-\epsilon$. Les parois verticales de la cavité sont maintenues à des températures différentes, alors que les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont trouvé que pour les valeurs de Ra inférieures à 10^4 , les solutions de flux laminaire et turbulent se confondent, en indiquant que cette valeur critique de Ra a été atteinte. Les résultats indiquent en outre que lorsque les paramètres de porosité, nombre de Prandtl, rapport de conductivité du fluide et la matrice solide et le Ra sont maintenus fixes, et plus le nombre de Darcy est bas, plus le nombre de Nusselt est élevé à la paroi chaude.

Baytas and Pop [33] ont étudié numériquement la convection libre dans une cavité carrée poreuse dont les parois verticales sont isothermes, maintenues aux différentes températures et les parois horizontales sont adiabatiques. L'étude est faite en adoptant un modèle à deux températures. Ces auteurs confirment que la connaissance de ce comportement est importante pour la conception des systèmes d'isolation thermique et d'autres applications

pratiques. Ils constatent qu'un tel modèle (modèle à deux températures) modifie sensiblement le comportement des caractéristiques d'écoulement, en particulier ceux des coefficients locaux de transfert de chaleur.

Barletta and Lazzari [34] ont étudié numériquement la convection libre dans une cavité carrée verticale remplie de milieu poreux saturé par un fluide. La cavité est inclinée d'un angle et chauffée par une frontière circulaire concentrique interne soumise à un flux thermique uniforme. Ils ont étudié l'effet de l'angle d'inclinaison sur le nombre de Nusselt, sur les champs de température et de vitesse, et sur l'énergie cinétique.

Das [35] a étudié l'écoulement convectif dans une cavité carrée où les deux parois verticales sont chauffées d'une manière isotherme aux deux températures différentes, alors que les parois horizontales sont parfaitement adiabatiques. La loi Darcy-Brinkman est choisie pour justifier la condition d'adhérence aux frontières.

Varol et al. [36] ont analysé numériquement l'écoulement laminaire et le transfert de chaleur dans une cavité carrée diagonalement divisée par une plaque inclinée et remplie de milieu poreux. Les parois verticales sont maintenues aux conditions isothermes, alors que des parois horizontales sont adiabatiques. La loi de Darcy, le modèle à une température et l'équation d'énergie sont choisis pour cette étude. Des calculs ont été effectués pour examiner les effets du nombre de Rayleigh (Ra entre 100 et 1000), du rapport de conductivité thermique entre la plaque et le fluide et la position de la plaque (45° , et 135°). Ils ont constaté que le transfert de chaleur est atténué quand la plaque est placée à 45° , le transfert de chaleur est moins quand elle est à 135° .

Revnic et al. [37] ont présenté une étude étendue du problème classique de la convection libre dans une cavité carrée remplie de milieu poreux au cas d'un milieu poreux bidisperse (BDPM), en suivant le modèle récent proposé par **Nield and Kuznetsov [38]**. Ils ont trouvé que la conduction est le mode dominant du transfert de chaleur pour les valeurs de Ra allant de 10^2 à 10^3 et que les paramètres les plus importants influençant l'écoulement de

fluide et le transfert de chaleur sont le paramètre d'interphase de transfert de chaleur et le rapport de conductivité thermique modifié.

Alam et al. [39] ont étudié la convection naturelle dans une cavité carrée remplie de milieux poreux partiellement chauffés et refroidis aux parois verticales avec le reste des parois isolés. Ils ont trouvé que l'augmentation du nombre de Darcy Da de 10^{-7} à 10^{-4} fait augmenter la vitesse d'écoulement et les taux de transfert de chaleur. En outre, augmenter le nombre de Rayleigh Ra de 10^3 à 10^6 fait augmenter les pénétrations du flux.

Abdelkareem et al. [40] ont étudié expérimentalement le mouvement oscillatoire de la convection naturelle dans un milieu poreux en utilisant une technique de cellules Hele-Shaw. La cellule Hele-Shaw simule une cavité sous la forme d'enceinte rectangulaire, chauffée à la moitié inférieure et refroidie à la moitié supérieure le long de la même paroi verticale. Ils ont constaté que le nombre de Nusselt est proportionnel à la racine carrée du nombre de Rayleigh et que la fréquence d'oscillation est proportionnelle au nombre de Rayleigh.

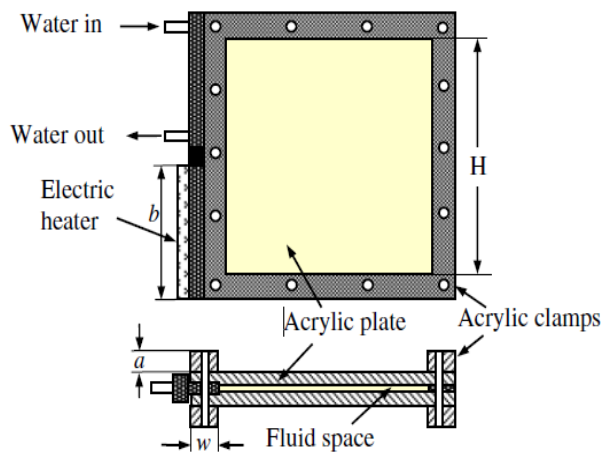


Figure 1.3 : Expérimentale de La cellule Hele-Shaw [40]

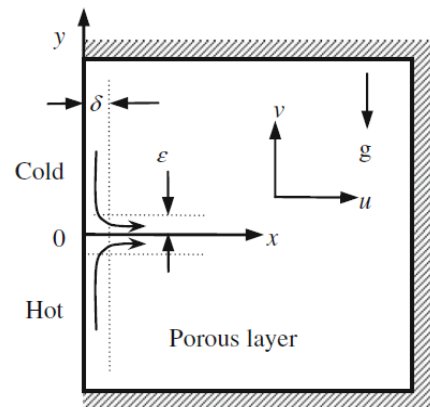


Figure 1.4 : La configuration étudiée et les conditions aux limites [40]

Ismael [41] a étudié numériquement l'effet de la position des parois partiellement actives, sur le transfert de chaleur par convection naturelle, dans une cavité carrée poreuse. Il a étudié neuf cas selon les positions des parties chaudes et froides des parois verticales et il a constaté

que le transfert de chaleur maximum est obtenu lorsque la position de la partie chaude est inférieure et que la partie supérieure est froide, tandis que le transfert de chaleur minimum se produit lorsque la partie supérieure est chaude et la partie inférieure est froide. Une corrélation entre le nombre de Rayleigh et le nombre de Nusselt est proposée pour chacun des neuf cas.

Molla et al. [42] ont présenté une étude numérique sur le comportement d'un écoulement laminaire dans une enceinte poreuse avec un chauffage isotherme localisé par le bas et un refroidissement symétrique aux côtés. Ils ont analysé la dépendance de l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur aux paramètres principaux, le nombre de Rayleigh et la longueur de la source de chaleur locale. Ils constatent que le champ d'écoulement et de températures sont symétriques en raison de la condition de limite symétrique. Et l'augmentation des deux paramètres considérés améliore le transfert de chaleur. Pour un nombre de Rayleigh inférieur, le mode de transfert dominé est la conduction, cependant, en augmentant ce dernier c'est la convection qui domine dans la cavité.

Le même problème est étudié par **Krishna et al. [43]** en remplaçant la source de chaleur isotherme par une source de chaleur à flux constant avec un milieu poreux anisotrope. Ils ont observé que les propriétés anisotropes et la longueur de la source de chaleur ont une influence significative sur le comportement du flux et le transfert de chaleur. Et ils ont présenté d'autres corrélations pour le nombre moyen de Nusselt et la température maximale à la surface de la source de chaleur pour une large gamme de paramètres $10^7 \leq Ra \leq 10^8$, $10^{-5} \leq Da \leq 10^{-3}$ et $0.2 \leq w \leq 0.8$ où w est la longueur de la source de chaleur.

Dans la plupart des études, les conditions thermiques appliquées aux parois latérales des enceintes rectangulaires ou carrées sont des conditions isothermes ou à flux constants. Toutefois, les études où les conditions aux limites appliquées ne sont pas isothermes ont été étudiées par plusieurs auteurs parmi lesquels :

Saeid [44] a présenté une étude numérique de l'écoulement bidimensionnel instationnaire de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux en utilisant le modèle de Darcy. Il a supposé qu'une des parois latérales est chaude et sa température oscille autour d'une valeur constante tandis que l'autre est tenue froide à une

température constante, et que les parois horizontales sont adiabatiques. L'auteur a étudié la variation temporelle des lignes de courants, des isothermes et du nombre de Nusselt. Il a trouvé que lorsque la température de la paroi chaude oscille avec une haute amplitude et une haute fréquence, le nombre de Nusselt devient négatif pour un nombre de Rayleigh égale à 10^3 . D'après ce même auteur ces valeurs négatives du nombre de Nusselt ont été trouvées parce qu'il n'y avait plus d'assez de temps pour transférer la chaleur de la paroi chaude à la paroi froide.

Varol et al. [45] ont étudié numériquement la convection naturelle à travers un milieu poreux saturé par un fluide dans une enceinte rectangulaire. Toutes les parois de l'enceinte sont isolées sauf la paroi inférieure qui est partiellement chauffée et refroidie par un profil de température de variation sinusoïdale. Le problème est analysé pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh $10 \leq Ra \leq 1000$, rapport d'aspect $0,25 \leq AR \leq 1.0$ et amplitude λ de la fonction de température sinusoïdale $0,25 \leq \lambda \leq 1.0$.

Les résultats de cette étude montrent que le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de l'amplitude λ et diminue avec l'augmentation du rapport d'aspect AR.

Des cellules multiples ont été observées dans la cavité pour toutes les valeurs des paramètres considérés.

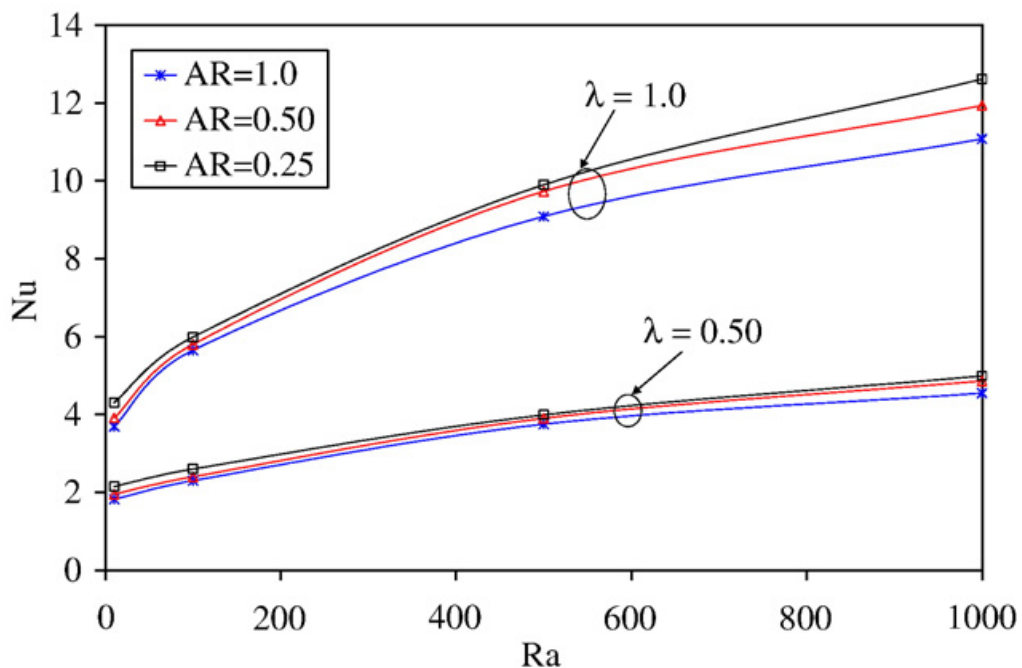


Figure 1.5 : Variation du nombre moyen de Nusselt avec le nombre Rayleigh pour différentes valeurs de AR pour $\lambda = 0,50$ et $1,0$ [45]

Saeid and Pop [46] ont étudié numériquement la convection libre transitoire dans une cavité carrée bidimensionnelle remplie de milieu poreux. La paroi verticale gauche est soudainement chauffée à une température constante, alors que la paroi droite est soudainement refroidie à une température constante et les deux parois horizontales sont adiabatiques. Les auteurs observent que le temps requis pour atteindre l'état stable est plus long pour des valeurs inférieures de Rayleigh et plus court pour des valeurs supérieures de Rayleigh.

Basaket al. [47] ont analysé les effets de diverses conditions thermiques sur la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux. La paroi inférieure de la cavité est chauffée par une température uniforme et non uniforme, la paroi supérieure est adiabatique et les parois verticales sont maintenues à une température froide constante.

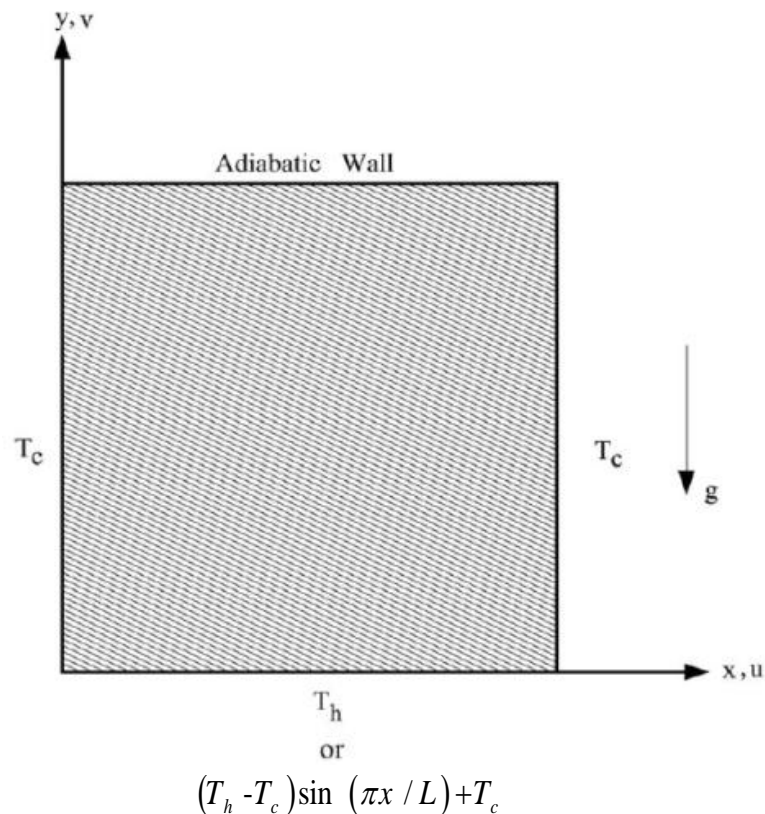


Figure 1.6 : Schéma du système physique Basaket al. [47]

Les auteurs montrent que le chauffage non uniforme de la paroi inférieure produit des taux de transfert de chaleur plus élevés au centre de la paroi inférieure que dans le cas du chauffage uniforme, pour tous les nombres de Rayleigh. Cependant, les taux de transfert de chaleur total (nombres moyens de Nusselt) sont plus faibles pour le cas du chauffage non uniforme.

Les corrélations suivantes sont obtenues pour les deux cas de chauffage :

- Cas du Chauffage uniforme ($Ra \geq 5000$) :

$$Nu_{inf} = 2Nu_{vert}$$

$$= 1.6219Ra^{0.145} \quad Pr = 0.7$$

$$= 1.2238Ra^{0.177} \quad Pr = 10$$

- Cas du Chauffage non uniforme ($Ra \geq 2 \times 10^4$) :

$$Nu_{inf} = 2Nu_{vert}$$

$$= 0.2939Ra^{0.249} \quad Pr = 0.7$$

$$= 0.2129Ra^{0.289} \quad Pr = 10$$

Khansila [48] a présenté une visualisation du transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire remplie de milieux poreux. L'enceinte est chauffée par une température de profil sinusoïdale sur la paroi verticale gauche, la partie inférieure de la paroi est chauffée tandis que la partie supérieure est refroidie. Le problème est étudié pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, rapport d'aspect $0.5 \leq AR \leq 2$ et du nombre de Darcy $10^{-1} \leq Da \leq 10^{-3}$. L'auteur a conclu qu'il y a deux circulations à l'intérieur de l'enceinte, et les valeurs des lignes de courant et lignes de chaleur augmentent avec l'augmentation des nombres de Rayleigh et de Darcy.

Bilgen and Yedder [49] ont effectué une étude numérique pour déterminer la pénétration thermique dans les enceintes et le transfert de chaleur en fonction du nombre de Rayleigh, du rapport d'aspect et de la position du chauffage latéral par rapport au refroidissement latéral. La paroi latérale active est chauffée et elle est refroidie avec des profils de température sinusoïdaux. Deux cas ont été considérés : le premier est la partie inférieure chauffée tandis que la partie supérieure est refroidie et le second, la partie supérieure est chauffée et la partie inférieure est refroidie. Les auteurs ont constaté que la pénétration s'approche de 100% pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh lorsque la partie inférieure est chauffée et la partie supérieure est refroidie. Dans le cas où la partie supérieure est chauffée et la partie inférieure est refroidie, la pénétration est limitée à 70%.

Saeid [50] a examiné numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle thermique, dans une cavité chauffée à la paroi inférieure par une température sinusoïdale, et la paroi supérieure a été maintenue à une température froide, en se basant sur le modèle de Darcy. L'auteur a constaté que le nombre moyen de Nusselt augmente lorsque la longueur de la source de chaleur où l'amplitude de la variation de température augmente et il a observé que le transfert de chaleur par unité de surface de la source de chaleur diminue en augmentant la longueur du segment chauffé.

Kaviany [51] a fait une étude théorique et expérimentale sur le début de la convection dans un milieu poreux saturé. Le milieu est chauffé à la surface supérieure avec une température non linéaire et dépendante du temps, ensuite il est refroidi en diminuant la température d'une manière linéaire en fonction du temps. L'auteur a montré qu'en régime permanent le nombre critique de Rayleigh ne dépend que du rapport de la porosité et la perméabilité et que lorsque ce rapport dépasse une valeur de 10^3 , le nombre critique de Rayleigh est directement proportionnel à ce rapport. Son deuxième article **Kaviany [52]** appliquait à la fois un refroidissement dépendant du temps à la surface supérieure et un chauffage interne uniforme. Un traitement alternatif de ce problème a été rapporté par **Yoon et al. [53]**. Ils ont prédit un temps de début de la convection τ_c donné par :

$$\tau_c = 6.55 (\text{DaRa})^{-2/3}$$

et ils ont trouvé que les données expérimentales de Kaviany (1984b) ont indiqué que la convection est détectable à l'instant $4\tau_c$.

Cheong et al. [54] ont étudié les effets de diverses conditions thermiques aux limites sur la convection naturelle dans les cavités poreuses. Des différents profils de température ont été imposés à la paroi gauche et une température froide de la paroi droite a été maintenu constante. Ils ont conclu que le transfert de chaleur de la cavité carrée est plus amélioré aux grands nombres de Darcy et de Rayleigh, pour toutes les conditions aux limites thermiques considérées.

Cheong et al. [55] ont étudié le flux convectif naturel et le transfert de chaleur dans une cavité carrée oblique remplie d'un milieu poreux absorbant ou générant de la chaleur. La température sinusoïdale est appliquée sur la paroi gauche de la cavité, tandis que la paroi droite est maintenue à une température froide, figure 1.8. Les auteurs ont utilisé le modèle de Darcy pour l'écoulement de fluide à travers le milieu poreux et ils ont montré que le taux de transfert de chaleur de la cavité oblique est plus élevé pour les nombres élevés de Darcy et de Rayleigh et que le taux de transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du paramètre de génération de chaleur interne.

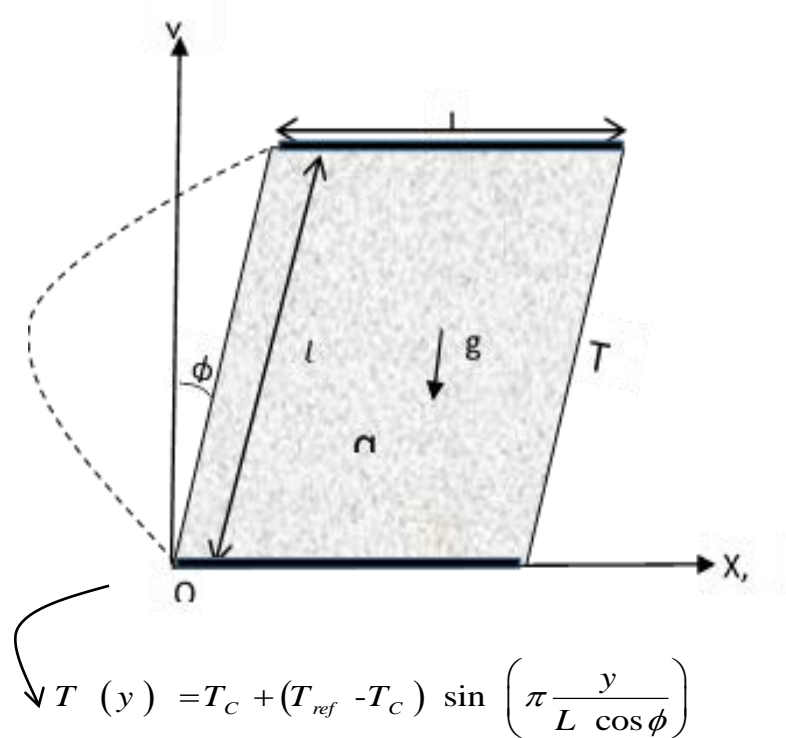
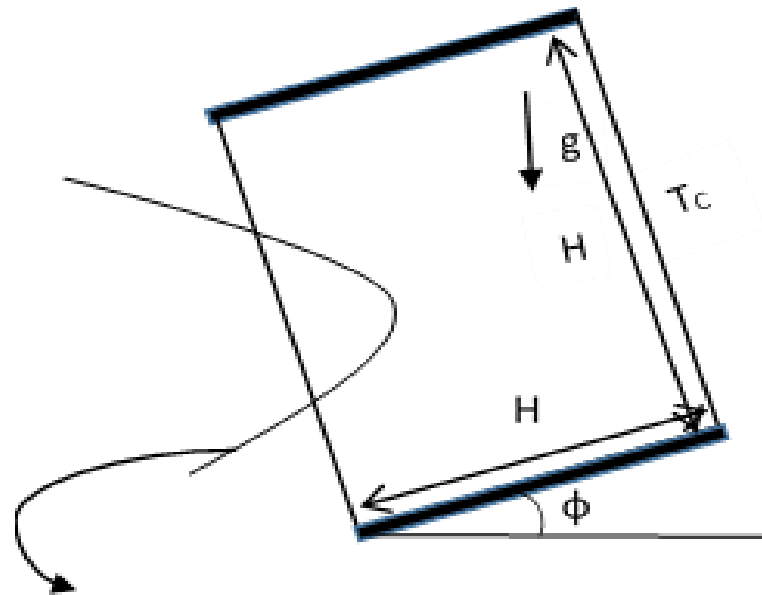


Figure 1.7 : Schéma du système physique [55]

Ces même auteurs **Cheong et al. [56]** ont étudié l'écoulement convectif naturel dans une cavité rectangulaire inclinée avec une température de profil sinusoïdal a été imposé à la paroi gauche et une température constante a été imposé à la paroi droite, figure 1.8. Ils confirment la dépendance de l'écoulement et le transfert de chaleur aux nombres de Rayleigh et aux angles d'inclinaison de l'enceinte.



$$T(y) = T_c + \left(T\left(\frac{\pi}{2}\right) - T_c \right) \cos\left(2\pi \frac{y}{H}\right)$$

Figure 1.8 : Schéma du système physique [56]

1.4 Conclusion

Compte tenu des études mentionnées et d'autres non mentionnées dans ce chapitre, il paraît que la convection naturelle dans une cavité rectangulaire saturée d'un milieu poreux, chauffée et refroidie sur deux côtés opposés en maintenant les parois restantes adiabatiques, a été largement étudiée pendant les dernières décennies. Malgré cet intérêt, le problème reste loin

d'être couvert si l'on considère le cas où les parois actives sont soumises aux gradients de température non uniformes, situation susceptible d'être rencontrée dans la pratique industrielle.

Malgré la simplicité de la géométrie considérée, les parties des parois actives avec la nature particulière des conditions aux limites thermiques, peuvent donner lieu à des phénomènes dynamiques et thermiques complexes qu'il convient de prédire afin de mieux comprendre la physique du problème pour d'éventuelles applications dans le domaine de l'ingénierie.

Les applications de ce type de conditions thermiques se trouvent notamment dans les enceintes peu profondes où le contrôle des lignes de courant, ainsi que les caractéristiques de transfert de chaleur ont une certaine importance dans les procédés industriels et les fours.

2 Formulation Mathématique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, deux cas d'études ont été retenus à savoir une cavité chauffée et refroidie par des températures constantes et une autre cavité chauffée et refroidie par des températures de profil sinusoïdal. Les géométries considérées et les conditions aux limites appropriées sont présentées, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans cette thèse.

Ces équations mettent en évidence le comportement des écoulements et des transferts dans les milieux poreux en convection libre. Elles sont basées selon les lois physiques de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-Stokes) et d'énergie.

2.2 Modèle physique

La recherche réalisée dans cette thèse porte de façon générale sur la modélisation des écoulements et des transferts dans les milieux poreux. Pour réaliser une formulation simple du modèle mathématique décrivant le phénomène, nous considérons un milieu poreux saturé et confiné dans une cavité bidimensionnelle de hauteur H et de largeur L . La cavité est soumise à un chauffage partiel à la moitié inférieure de la paroi verticale gauche et à un refroidissement partiel à la moitié supérieure de la paroi verticale droite avec le reste des parois est adiabatique.

Les configurations à étudier sont illustrées respectivement dans les deux Figures 2.1 et 2.2.

Les conditions aux limites appropriées au problème considéré sont de deux natures :

Cas 1 : Cavité chauffée et refroidie par des températures T_H et T_C constantes figure 2.1.

Cas 2 : Cavité chauffée et refroidie par des températures de profil sinusoïdal figure 2.2.

Et puisqu'il s'agit d'un problème de convection naturelle où la seule cause des mouvements convectifs, dans le champ de pesanteur, sont des gradients thermiques, c'est la condition d'adhérence aux parois rigides et imperméables.

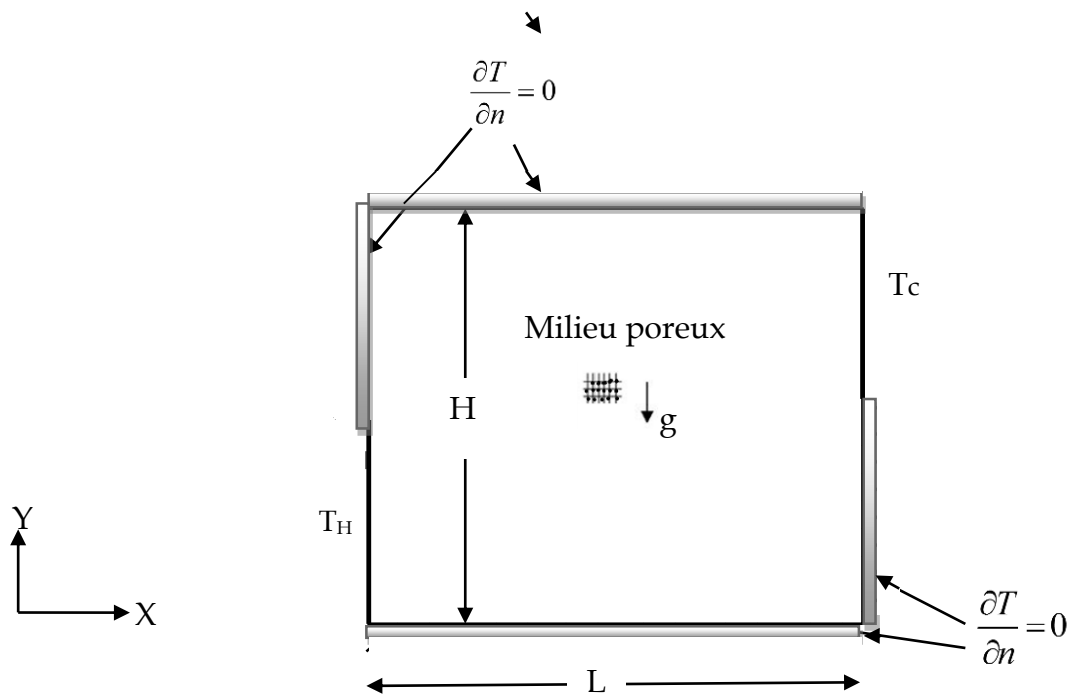


Figure 2.1 : Cas 1, cavité chauffée et refroidie par des températures T_H et T_C constantes

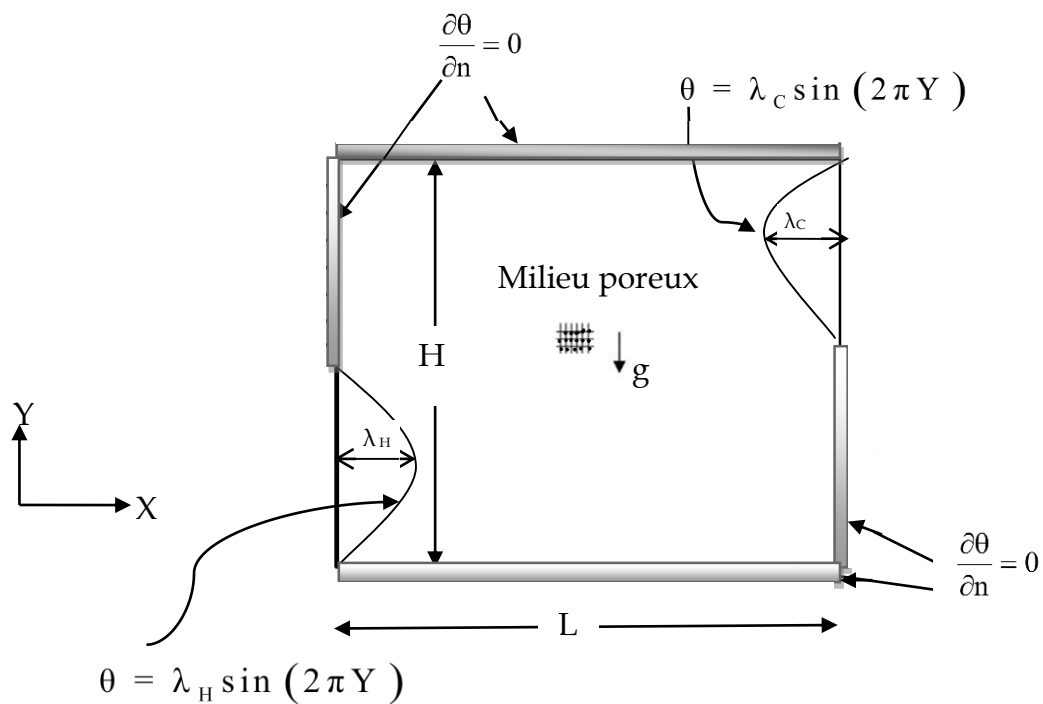


Figure 2.2 : Cas 2, cavité chauffée et refroidie par des températures sinusoïdales

2.3 Hypothèses

Afin de pouvoir résoudre les équations régissant l'écoulement, nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement est instationnaire.
- La matrice poreuse est isotrope et homogène.
- Le fluide saturant le milieu poreux est newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est laminaire et bidimensionnel.
- Les dissipations visqueuses et le transfert de chaleur par rayonnement sont négligeables.
- Les propriétés physiques du fluide, excepté la densité, sont supposées constantes et évaluées à une température de référence. La densité est considérée comme constante dans tous les termes des équations de transfert sauf dans le terme gravitationnel, elle varie linéairement avec la température selon l'approximation de Boussinesq.

$$(\rho - \rho_0) \mathbf{g} = -\rho_0 \mathbf{g} \beta (T - T_0)$$

Où ρ_0 est la masse volumique de référence et β représentent le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

2.4 Equations Sous forme Dimensionnelle

Après la considération des hypothèses de simplification les équations régissant l'écoulement et le transfert thermique dans l'enceinte représentée par la figure 2.1 et figure 2.2 rapportées à un système de coordonnées cartésiennes sont données par :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

• **Equation de la quantité de mouvement :**

Suivant x :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{v}{K} u \quad (2.2)$$

Suivant y :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{v}{K} v + g\beta(T - T_c) \quad (2.3)$$

• **Equation d'énergie :**

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

Avec

$$\sigma = \frac{(\rho c_p)_m}{(\rho c_p)_f} \quad (2.5)$$

σ est le Rapport de la capacité thermique du matériau à la capacité calorifique convective.

$$(\rho c_p)_m = (1 - \varepsilon)(\rho c_p)_s + \varepsilon(\rho c_p)_f \quad (2.6)$$

$$\alpha_m = \frac{k_e}{(\rho c_p)_f} \quad (2.7)$$

α_m est la diffusivité thermique moyenne et k_e est la conductivité thermique globale du milieu poreux :

$$k_e = (1 - \varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \quad (2.8)$$

2.5 Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme Dimensionnelle

2.5.1 Cas 1 : Conditions de températures isothermes

- **Conditions Initiales :**

$$\text{A } t = 0 \quad u = v = 0 \quad \text{et} \quad T = T_0 = T_C \quad (2.9)$$

- **Conditions aux limites**

Sur toutes les parois les vitesses sont nulles :

$$\left. \begin{array}{l} u = v = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \\ u = v = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = H \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Sur les parties actives des parois les températures sont constantes :

$$\begin{array}{l} x = 0, \quad 0 < y < H/2 : \quad T = T_H \\ x = 1, \quad H/2 < y < H : \quad T = T_C \end{array} \quad (2.11)$$

2.5.2 Cas 2 : Conditions de températures non-isothermes

- **Conditions Initiales**

$$\text{A } t = 0 \quad u = v = 0 \quad \text{et} \quad T = T_0 = T_C \quad (2.12)$$

- **Conditions aux limites**

Sur toutes les parois les vitesses sont nulles :

$$\left. \begin{array}{l} u = v = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \\ u = v = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = H \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Sur les parties actives des parois les températures sont non-isothermes :

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad 0 < y < H/2 : T(y) &= T_{\text{ref}} + \lambda_H \Delta T \sin(2\pi y/H) \\ x = 1, \quad H/2 < y < H : T(y) &= T_{\text{ref}} + \lambda_C \Delta T \sin(2\pi y/H) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Pour les deux cas, le reste des parois sont adiabatiques :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (2.15)$$

2.6 Equations Sous forme Adimensionnelle

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes respectivement pour la longueur, la vitesse, la pression, le temps, la température, le nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy et le nombre de Prandtl.

$$\mathbf{X} = \frac{x}{L}, \quad \mathbf{Y} = \frac{y}{L}, \quad (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{(u, v)L}{\alpha}, \quad \mathbf{P} = \frac{\varepsilon^2 p L^2}{\rho_f \alpha^2}, \quad \tau = \frac{t\alpha}{L^2}, \quad (2.16)$$

$$\theta = \frac{T - T_{\text{ref}}}{\Delta T}, \quad \text{Da} = \frac{K}{L^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}.$$

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{Y}} = 0 \quad (2.17)$$

- **Equation de la quantité du mouvement :**

Suivant x

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \left(\mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Y}} \right) = - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{X}} + \varepsilon \frac{\text{Pr}}{\text{R}_k} \nabla^2 \mathbf{U} - \varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{\text{R}_k \text{Da}} \mathbf{U} \quad (2.18)$$

Suivant Y

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} + \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\text{Pr}}{\text{R}_k} \nabla^2 V - \varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{\text{R}_k \text{Da}} V + \frac{\varepsilon^2}{\text{R}_k^2} \text{Pr Ra} \theta \quad (2.19)$$

$$\text{R}_k = \frac{k_e}{k_f} \quad (2.20)$$

R_k est le rapport de conductivité du milieu poreux et celle du fluide et

$\text{Ra} = \frac{g\beta(T_H - T_C)H^3}{\nu\alpha}$ est le nombre de Rayleigh.

• **Equation d'énergie :**

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \nabla^2 \theta \quad (2.21)$$

Avec

$$\sigma = \frac{(1-\varepsilon)(\rho c_p)_s + \varepsilon(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_f} \quad (2.22)$$

2.7 Conditions Initiales et aux Limites Sous Forme adimensionnelle

2.7.1 Cas 1 : Conditions de températures isothermes

- **Conditions Initiales**

$$\text{A } \tau = 0 \quad U = V = 0 \quad \text{et} \quad \theta = 0 \quad (2.23)$$

- **Conditions aux limites**

Sur tous les murs les vitesses sont nulles :

$$\left. \begin{array}{l} U = V = 0 \text{ pour } X=0 \text{ et } X=1 \\ U = V = 0 \text{ pour } Y=0 \text{ et } y=Ar \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } X=0, \quad 0 < Y < Ar/2 : \theta = 1 \\ \text{à } X=1, \quad Ar/2 < Y < Ar : \theta = 0 \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

Sur le reste des parois :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (2.26)$$

2.7.2 Cas 2 : Conditions de températures non-isothermes

- **Conditions Initiales**

$$\text{A } \tau=0, U = V = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad (2.27)$$

- **Conditions aux limites**

Sur toutes les parois solides :

$$U = V = 0 \quad (2.28)$$

$$\text{à } X=0, \quad 0 < Y < Ar/2 : \quad \theta = \lambda_H \sin(2\pi Y) \quad (2.29)$$

$$\text{A } X=1, \quad Ar/2 < Y < Ar : \quad \theta = \lambda_C \sin(2\pi Y) \quad (2.30)$$

Sur le reste des parois :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (2.31)$$

2.8 La Forme Générale des Equations de Conservation

Toutes les équations qui gouvernent notre problème peuvent s'écrire sous la forme conservative suivante :

$$A_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X}(U\Phi) + \frac{\partial}{\partial Y}(V\Phi) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right) + S_\phi \quad (2.32)$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$: représente le terme transitoire.

$\frac{\partial}{\partial X}(U\Phi) + \frac{\partial}{\partial Y}(V\Phi)$: représente le terme de transport de Φ par convection.

$\frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right)$: représente la diffusion de Φ .

S_ϕ : représente le terme source.

Le tableau suivant rassemble les expressions de la variable dépendante Φ , du coefficient de diffusion Γ et du terme source S_ϕ .

Tableau 2.1 : Présentation des différentes quantités transportées et leurs termes de transport

Equation	Φ	Γ	A_ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant OX	U	$\epsilon Pr / R_k$	ϵ	$-\frac{\partial P}{\partial X} - \epsilon^2 \frac{Pr}{R_k Da} U$
Quantité de mouvement suivant OY	V	$\epsilon Pr / R_k$	ϵ	$-\frac{\partial P}{\partial Y} - \epsilon^2 \frac{Pr}{R_k Da} V + \frac{\epsilon^2}{R_k^2} Pr Ra \theta$
Energie	θ	1	σ	0

2.9 Calcul du nombre de Nusselt

Dans le domaine de l'ingénierie, la connaissance des quantités de chaleur, échangées ou transférées, est d'un intérêt évident pour le dimensionnement des systèmes sièges d'échanges thermiques. Le groupement adimensionnel traduisant ces échanges est le nombre de Nusselt.

Le nombre de Nusselt est utilisé comme outil pour déterminer le rapport du transfert de chaleur par convection au transfert de chaleur par conduction dans l'enceinte poreuse.

Alors les quantités physiques d'intérêt dans ce problème sont les nombres locaux et moyens de Nusselt, qui sont donnés par

$$\text{Nu}_L = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\text{paroi}} \quad (2.33)$$

Nu_L est le nombre local de Nusselt

$$\text{Nu} = \int_0^{Ar/2} \text{Nu}_L \times dY \quad (2.34)$$

Nu est le nombre de Nusselt moyen.

2.10 Lignes de courant

La formulation en variable ψ permet le traçage direct des courbes caractérisées par ψ égale à une constante. Cette dernière caractérise les lignes de courant qui apportent de précieuses informations quant à la structure de l'écoulement.

Les composantes de la vitesse adimensionnelle sont liées à la fonction de courant par :

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \mathbf{V} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.35)$$

2.11 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le modèle physique considéré ainsi que les équations qui régissent le phénomène de la convection naturelle en régime laminaire et instationnaire, dans un milieu poreux saturé et confiné dans une cavité rectangulaire, avec des conditions aux limites thermiques appropriées au problème considéré. Les conditions aux limites thermiques sont de deux natures : une de distribution de températures constantes et une autre de distribution de températures de profil sinusoïdal.

Après avoir présenté les équations dynamiques et thermiques, qui sont issues de la thermodynamique et de la mécanique des fluides ainsi que les conditions aux limites associées, nous présenterons dans le chapitre suivant la modélisation du problème étudié. La méthode des volumes finis utilisée pour la discrétisation des équations gouvernantes ainsi que les méthodes relatives à la technique de résolution seront aussi présentées.

3 Modèle numérique

3.1 Introduction

Les équations de la convection qui régissent la convection naturelle dans les cavités poreuses, présentés dans le chapitre 2, sont tellement couplées et non linéaires qu'il est pratiquement impossible de les résoudre analytiquement. Ces équations peuvent être résolues numériquement tout en les transformant par une méthode de discrétisation, en un système d'équations algébriques linéaires. Par la suite ce dernier sera résolu en utilisant soit des méthodes directes ou itératives. La méthode choisie pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles est celle des volumes finis.

La méthode des volumes finis introduite par Patankar [57], est une méthode de discrétisation qui rend les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Elle consiste à intégrer les équations de transport sur un ensemble de volumes finis adjacents balayant le domaine physique étudié. Les équations de conservation sont appliquées à chaque volume de contrôle (VC). Les quantités variables doivent être calculées au centre de chaque VC (nœud) et cela en utilisant un schéma d'approximation convenable pour les valeurs variables à la surface du VC.

Les équations algébriques produites satisfont les principes de conservation. L'analyse mathématique impliquée dans cette méthode est simple, précise pour les géométries simples et interprétables physiquement.

3.2 Maillage

Le domaine physique est discrétisé en un domaine de calcul suivant un maillage intercalé, dans les deux directions, horizontale et verticale, figure 3.1.

Le maillage dit intercalé (staggered grid) consiste à stocker les variables dépendantes scalaires pression et température aux nœuds centrales 'P' du maillage, et les variables dépendantes vectorielles (composantes de vitesse U , V) aux faces des volumes de contrôle, c'est à dire aux milieux des segments reliant les nœuds, figure 3.2. Ce type de maillage permet une meilleure estimation des flux convectifs, et une bonne estimation de la force de pression

dans l'équation de quantité de mouvement. Les frontières du domaine coïncident avec les faces des volumes de contrôle, ce qui facilite l'incorporation des conditions aux limites.

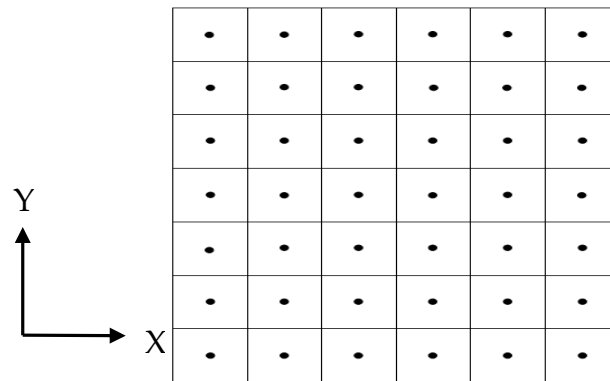


Figure 3.1 : Discretisation du domaine de calcul

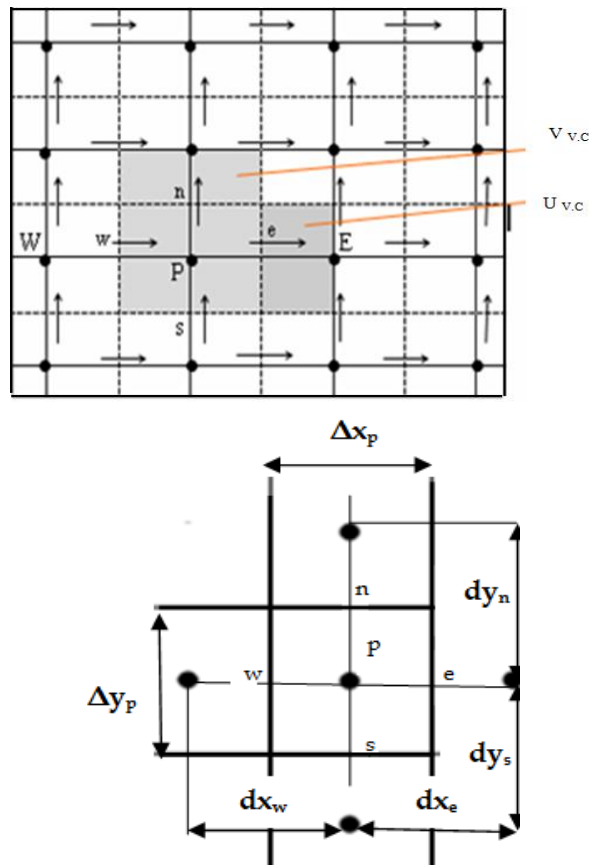


Figure 3.2 : Stockage des variables scalaires et des composantes de vitesse suivant un maillage décalé

- : La variable scalaire P stockée aux nœuds du maillage.
- : La vitesse U stockée sur la face est du volume de contrôle associée à la variable scalaire.
- ↑ : La vitesse stockée sur la face nord du volume de contrôle associée à la variable scalaire.

3.3 Discrétisation des équations de transport

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, toutes les équations qui gouvernent notre problème peuvent s'écrire selon la forme conservative suivante de l'équation généralisée de transport d'une variable indépendante Φ .

L'équation (2.31) peut être écrite de la manière suivante

$$A_{\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} \left(U\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(V\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) = S_{\phi} \quad (3.1)$$

La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle de transport en un système d'équations algébriques. L'équation (3.1) est d'abord intégrée sur le volume de contrôle.

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w \left(A_{\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} \left(U\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(V\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) \right) dx dy dt}_{\text{I}} = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w S_{\phi} dx dy dt}_{\text{II}} \quad (3.2)$$

Pour pouvoir approximer l'équation (3.2) sous forme algébrique, on considère les hypothèses suivantes :

- La variation de la variable généralisée Φ est linéaire entre les nœuds principaux dans les deux directions.
- Les composantes de vitesse U et V dans les deux directions sont évaluées sur chaque face du volume de contrôle.

3.3.1 Intégration du flux total

L'intégration du terme convectif et diffusif (terme I) de l'équation (3.2) pour tout le volume de contrôle est sous la forme :

$$I = (\Phi_p^{n+1} - \Phi_p^n) A_{\phi} \Delta v + (J_e \cdot a_e - J_w \cdot a_w) \Delta t + (J_n \cdot a_n - J_s \cdot a_s) \Delta t \quad (3.3)$$

Sachant que les grandeurs, a_e , a_w , a_n , a_s représentent respectivement les aires est, ouest, nord et sud des faces du volume de contrôle associé à la variable généralisée Φ .

$$\left. \begin{aligned} a_e &= \int_s^n (dy)_e \\ a_w &= \int_s^n (dy)_w \\ a_n &= \int_w^e (dX)_n \\ a_s &= \int_w^e (dX)_s \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Les termes J_e , J_w , J_n , J_s sont les flux traversant les faces est, ouest, nord, et sud de volume de contrôle. Ces flux s'expriment comme suit :

$$\left. \begin{aligned} J_e &= (U\Phi)_e - \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_e \\ J_w &= (U\Phi)_w - \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_w \\ J_n &= (V\Phi)_n - \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_n \\ J_s &= (V\Phi)_s - \left(\Gamma_\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_s \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

3.3.2 Intégration du terme source

L'intégration du terme source (terme II) de l'équation (3.2) pour tout le volume de contrôle est donné par la relation suivante :

$$\Pi = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S_\Phi dx dy dt = \bar{S}_\Phi \Delta V \Delta t \quad (3.6)$$

Le terme source dépend de la variable dépendante, pour linéarisé ce terme, la formule de linéarisation peut s'écrire comme suit :

$$\bar{S}_\Phi = \left(S_C + S_P \Phi_p \right) \quad (3.7)$$

Où S_C est la partie constante qui ne dépend pas de Φ_p .

S_P est le coefficient de Φ_p .

Alors l'équation (3.2) peut s'écrire sous cette forme :

$$(\Phi_p^{n+1} - \Phi_p^n) A_\Phi \Delta v + (J_e \cdot a_e - J_w \cdot a_w) \Delta t + (J_n \cdot a_n - J_s \cdot a_s) \Delta t = \bar{S}_\Phi \Delta V \Delta t \quad (3.8)$$

3.4 Discrétisation de l'équation de continuité

Pour $\Phi_p = 1$ et $\bar{S}_\Phi = 0$ l'équation (3.6) devient :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (3.9)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} F_e &= (ua)_e \\ F_w &= (ua)_w \\ F_n &= (va)_n \\ F_s &= (va)_s \end{aligned} \right\}$$

F_e , F_w , F_n et F_s sont les flux convectifs à travers les faces e, w, n et s du volume de contrôle.

3.5 Discrétisation finale des équations de conservation

En multipliant l'équation (3.9) par Φ_p^{n+1} et en la soustrayant de l'équation (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{A_\Phi \Delta v}{\Delta t} (\Phi_p^{n+1} - \Phi_p^n) + \left(J_e \cdot a_e - F_e \Phi_p^{n+1} \right) - \left(J_w \cdot a_w - F_w \Phi_p^{n+1} \right) + \\ & \left(J_n \cdot a_n - F_n \Phi_p^{n+1} \right) - \left(J_s \cdot a_s - F_s \Phi_p^{n+1} \right) = \bar{S}_\Phi \Delta V \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir de l'équation (3.10) toutes les équations de conservation peuvent être mise sous la forme :

$$A_P \Phi_P^{n+1} = A_E \Phi_E^{n+1} + A_W \Phi_W^{n+1} + A_N \Phi_N^{n+1} + A_S \Phi_S^{n+1} + S \quad (3.11)$$

Où l'exposant (n+1) désigne l'instant (t+Δt).

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^n - S_P \Delta V \quad (3.12)$$

$$A_P^n = \frac{A_\Phi \Delta V}{\Delta t}$$

Avec A_P , A_E , A_W , A_N et A_S sont respectivement les coefficients correspondants aux nœuds : Central (point P), Est, Ouest, Nord et Sud du volume de contrôle.

Les coefficients de diffusion D_i (e, w, n, s) sont donnés sous cette forme :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \Gamma_e \frac{a_e}{(\delta x)_e} \\ D_n &= \Gamma_n \frac{a_n}{(\delta y)_n} \\ D_w &= \Gamma_w \frac{a_w}{(\delta x)_w} \\ D_s &= \Gamma_s \frac{a_s}{(\delta y)_s} \end{aligned} \right\}$$

Les nombres de Peclet P_i (i = e, w, n, s) sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

3.5.1 Schémas de discrétisation

Après intégration des équations, un schéma de discrétisation doit être choisi pour approximer la variable généralisée Φ sur les interfaces du volume de contrôle. Notons que pour le terme transitoire, le schéma implicite est choisi (avec un pas de temps égale 10^{-4}).

Il existe différents schémas de discrétisation proposés par **Patankar [57]** permettant d'exprimer la fonction $A(|P_i|)$.

Les schémas les plus utilisés sont :

- Schéma aux différences centrées $A(|P_i|) = 1 - 0.5|P_i|$ (3.14)
- Schéma Upwind $A(|P_i|) = 1$
- Schéma Hybrid $A(|P_i|) = \max(0.1 - 0.5|P_i|)$
- Schéma Power-law $A(|P_i|) = \max\left[0, (1 - 0.1|P_i|)^5\right]$
- Schéma exponentiel $A(|P_i|) = \frac{|P_i|}{\exp|P_i| - 1}$

Notre choix a été fixé sur le schéma Upwind qui est appliqué pour les écoulements convectifs suivant le sens d'écoulement, le schéma Upwind affecte à la variable Φ sur la face du volume de contrôle sa valeur sur le nœud en amont. Il est inconditionnellement stable Ferziger [58].

3.5.2 Discrétisation des termes sources

- **Le terme source pour la composante U de la vitesse**

La composante non discrétise le terme source s'écrit comme suit :

$$\left. \begin{aligned} S^U &= S_C^U + S_P^U U_p \\ S_P^U &= -\varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{R_k \text{Da}} \\ S_C^U &= -\frac{\partial P}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

L'intégration du terme source dans le volume de contrôle correspondant est :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^{s+n} \int_w^w \left[-\frac{\partial P}{\partial X} - \varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{R_k \text{Da}} U \right] dx dy dt = \left[\frac{(P_p - P_e)}{\Delta y_p} - \varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{R_k \text{Da}} U \right] \Delta V \Delta t \quad (3.16)$$

- **Le terme source pour la composante v de la vitesse**

$$\left. \begin{aligned} S^V &= S_C^V + S_P^V V_p \\ S_P^V &= -\varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{R_k \text{Da}} \\ S_C^V &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\varepsilon^2}{R_k^2} \text{Pr Ra} \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

L'intégration du terme source dans le volume de contrôle correspondant est :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^{s+n} \int_w^w \left[-\frac{\partial P}{\partial Y} - \varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{R_k \text{Da}} V + \frac{\varepsilon^2}{R_k^2} \text{Pr Ra} \theta \right] dx dy dt = \left[\frac{(P_p - P_n)}{\Delta x_p} - \varepsilon^2 \frac{\text{Pr}}{R_k \text{Da}} V + \frac{\varepsilon^2}{R_k^2} \text{Pr Ra} \theta \right] \Delta V \Delta t \quad (3.18)$$

3.6 Algorithmes de résolution

Les équations de la convection forment un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées, les vitesses ne peuvent être obtenues directement par la résolution des équations du mouvement. L'apparition du gradient de pression dans ces équations qui est un terme source important n'est pas exprimé en termes de vitesse ou d'autres. Cependant, la pression est indirectement spécifiée à travers l'équation de continuité.

Ces difficultés font que seule la méthode itérative avec un calcul qui doit être fait d'une manière séquentielle permet la résolution de ce genre de systèmes couplés. L'algorithme SIMPLE développé par **Patankar and Spalding [57]** est utilisé pour résoudre les systèmes couplés entre la pression et la vitesse.

3.6.1 Algorithme SIMPLE

Algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) a été adopté dans cette étude pour sa simplicité et son efficacité sur la stabilité de la solution.

L'idée générale de cet algorithme est de corriger la pression ainsi que les composantes de la vitesse afin que ces variables vérifiant les équations de quantité de mouvement et vérifiant également l'équation de continuité. Il en résulte un processus itératif qui est intégré au sein de la résolution générale des équations discrétisées.

Ceci est corrigé d'une manière continue en se référant aux résiduels de masses locales qui sont employés pour orienter le champ de pression vers le niveau correct. La stabilité de cet ordre itératif se base largement sur la rétention d'un couplage fort entre les perturbations dans le gradient de pression et les perturbations de vitesse, **Versteeg [59]**.

L'équation de mouvements discrétisée :

$$\left. \begin{aligned}
 A_n U_n^* &= \sum A_i U_i^* + (P_P^* - P_N^*) a_n + b \\
 A_s U_s^* &= \sum A_i U_i^* + (P_S^* - P_P^*) a_s + b \\
 A_e V_e^* &= \sum A_i V_i^* + (P_P^* - P_E^*) a_e + b \\
 A_w V_w^* &= \sum A_i V_i^* + (P_W^* - P_P^*) a_w + b
 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

b : contient tous les termes sources sauf ceux de la pression

i : représente l'indice des points autour n, s, e, w.

L'indice * sur U, V et P désigne que ces derniers sont obtenus en utilisant des champs estimés de vitesses et de pression.

Comme les vitesses obtenues des équations (3.19) ne satisfont pas l'équation de continuité pour chaque volume de contrôle, des corrections de pression P' et des vitesses, U', V' sont ensuite apportées à ces champs afin que les nouveaux champs P, U, V, soient les champs qui vérifient à la fois les équations de la quantité de mouvement et l'équation de continuité.

$$P = P^* + P' \quad , \quad U = U^* + U' \quad \text{et} \quad V = V^* + V' \quad (3.20)$$

Donc :

$$\left. \begin{aligned} U_n &= U_n^* + U'_n \\ U_s &= U_s^* + U'_s \\ V_e &= V_e^* + V'_e \\ V_w &= V_w^* + V'_w \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Ces nouvelles valeurs P, U, V, sont alors réintégréés dans les équations de la quantité de mouvement (3.19), ce qui permet d'obtenir :

$$\left. \begin{aligned} A_n (U_n^* + U'_n) &= \sum A_i (U_i^* + U'_i) + (P_p^* + P'_p - P_n^* - P'_n) a_n + b \\ A_s (U_s^* + U'_s) &= \sum A_i (U_i^* + U'_i) + (P_s^* + P'_s - P_p^* - P'_p) a_s + b \\ A_e (V_e^* + V'_e) &= \sum A_i (V_i^* + V'_i) + (P_p^* + P'_p - P_e^* - P'_e) a_e + b \\ A_w (V_w^* + V'_w) &= \sum A_i (V_i^* + V'_i) + (P_w^* + P'_w - P_p^* - P'_p) a_w + b \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

La soustraction des équations des valeurs estimées (3.19) de celles des valeurs corrigées (3.22) donne :

$$\left. \begin{aligned}
 A_n U'_n &= \sum A_i U'_i + (P'_p - P'_N) a_n \\
 A_s U'_s &= \sum A_i U'_i + (P'_S - P'_p) a_s \\
 A_e V'_e &= \sum A_i V'_i + (P'_p - P'_E) a_e \\
 A_w V'_w &= \sum A_i V'_i + (P'_W - P'_p) a_w
 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

En négligeant les termes $\sum A_i U'_i$ et $\sum A_i V'_i$, on obtient :

$$\left. \begin{aligned}
 A_n U'_n &= (P'_p - P'_N) a_n \\
 A_s U'_s &= (P'_S - P'_p) a_s \\
 A_e V'_e &= (P'_p - P'_E) a_e \\
 A_w V'_w &= (P'_W - P'_p) a_w
 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Posons

$$d_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad d_s = \frac{a_s}{A_s}, \quad d_e = \frac{a_e}{A_e} \quad \text{et} \quad d_w = \frac{a_w}{A_w} \quad (3.25)$$

D'où les champs des vitesses seront corrigés par les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 U_n &= U_n^* + d_n (P'_p - P'_N) \\
 U_s &= U_s^* + d_s (P'_S - P'_p) \\
 V_e &= V_e^* + d_e (P'_p - P'_E) \\
 V_w &= V_w^* + d_w (P'_W - P'_p)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

On introduit les expressions (3. 26) dans l'équation de continuité discrétisée, on aboutit à l'équation de correction de pression suivante :

$$A_P P'_P = A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S + b_{P'} \quad (3. 27)$$

$$\left. \begin{aligned} A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S \\ A_E &= d_e \Delta Y & A_W &= d_w \Delta Y \\ A_N &= d_n \Delta X & A_S &= d_s \Delta X \\ b_{P'} &= (U_w^* - U_e^*) \Delta Y + (V_s^* - V_n^*) \Delta X \end{aligned} \right\} \quad (3. 28)$$

3.6.2 Séquences de l'algorithme SIMPLE

1. Estimer tous les champs, les composantes de vitesse U^* et V^* , la pression P^* .
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement et fournir les composantes de vitesse U^* et V^* .
3. Résoudre l'équation de correction de pression P' .
4. Corriger la pression $P = P^* + P'$
5. Corriger les champs de vitesses U et V en utilisant les formules de correction.
6. Résoudre les autres équations du problème, telle que l'équation de la température.
7. Remplacer les anciens champs de vitesses et de pression par les nouveaux et revenir à l'étape 2.
8. Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

L'ensemble de ces étapes est récapitulé dans l'organigramme illustré dans la figure (3.5).

3.7 Paramètres de contrôle de la convergence

3.7.1 La méthode de sous relaxation

Vu le couplage et la non linéarité des équations, la sous relaxation est utilisée dans notre programme pour éviter la divergence du processus itératif décrit précédemment. Elle consiste

à diminuer la rapidité des changements d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α .

Toutes les équations de transport discrétisées, peuvent être mises sous la forme générale suivante :

$$A_p \Phi_p = \sum_{nb} A_{nb} \Phi_{nb} + S \quad (3.29)$$

Si nous notons Φ^* la valeur de Φ à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \left(\frac{\sum_{nb} A_{nb} \Phi_{nb} + S_u}{A_p} - \Phi_p^* \right) \quad (3.30)$$

où le terme entre parenthèses représente le changement survenu à Φ_p pendant une itération.

Cette variation peut alors être amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α_Φ de la manière suivante :

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \alpha_\Phi \left(\frac{\sum_{nb} A_{nb} \Phi_{nb} + S_u}{A_p} - \Phi_p^* \right) \quad (3.31)$$

Cette sous relaxation est donc appliquée à toutes les variables, sauf la pression, La pression demande également à être sous relaxée afin que l'équation de continuité soit résolue sans problème de divergence. La sous relaxation s'effectue d'une manière un peu différente compte tenu de l'existence de l'algorithme de couplage vitesse-pression. Elle est simplement introduite dans la correction de pression P' sous la forme suivante :

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (3.32)$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre les valeurs 0 et 1. Le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure itérative.

3.7.2 Critère de Convergence

Atteindre la convergence d'un processus itératif veut dire approcher au mieux la solution stable des systèmes d'équations en un nombre optimal d'itérations, lorsque l'augmentation des itérations ne produit aucune influence significative sur les valeurs des variables dépendantes Φ . En Pratique, cette convergence est exprimée par un test d'arrêt du processus itératif, appelé critère de convergence. Ce test est quantifié par l'intermédiaire du concept de résidu de quantité de mouvement, de la masse et de la température.

Ces résidus sont définis par :

$$\mathbf{R}_{\Phi} = \sum \mathbf{A}_{nb} \Phi_{nb} + \mathbf{b} - \mathbf{a}_p \Phi_p \quad (3.33)$$

Lorsque \mathbf{R}_{Φ} tend vers zéro, les équations discrétisées sont considérées comme convergées c'est-à-dire que pour chaque variable Φ calculée, les résidus normalisés ne doivent pas dépasser la valeur fixée pour chaque itération, on traduit ça par l'inégalité suivante :

$$\sum_d |\mathbf{R}_{\Phi}| \leq \epsilon_{\Phi} \quad (3.34)$$

Où

d : domaine de calcul

ϵ_{Φ} : valeur fixée infiniment petite caractérisant l'erreur sur la solution, dans cette étude elle est fixée à 10^{-5} .

3.8 Méthode de résolution

Une fois les équations algébriques décrivant l'évolution des variables de l'écoulement dans le domaine de calcul sont établies, une méthode numérique de résolution est choisie en fonction du type de ces équations.

Considérons la notation indicielle, utilisées en raison de faciliter la programmation des étapes de calcul. La forme de l'équation de discrétisation de l'équation générale de transport sous la nouvelle notation est :

$$\mathbf{A}_P(i,j) \Phi_{ij} = \mathbf{A}_E(i,j) \Phi_{i+1,j} + \mathbf{A}_W(i,j) \Phi_{i-1,j} + \mathbf{A}_N(i,j) \Phi_{i,j+1} + \mathbf{A}_S(i,j) \Phi_{i,j-1} + \mathbf{S}(i,j) \quad (3.35)$$

Tels que : $1 \leq i \leq n_i$ et $1 \leq j \leq n_j$

Les coefficients de cette équation sont fonction des variables de transport Φ une méthode de résolution itérative doit être utilisée à cause de la non linéarité.

Le système (3.35) est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{A\} [\Phi] = [S] \quad (3.36)$$

La matrice $\{A\}$ est une matrice à bande diagonale et la largeur de la bande dépend de la dimension de l'espace. Dans notre cas qui est bidimensionnel ou la fonction du transport sur chaque nœud est liée aux valeurs de cette fonction sur quatre nœuds adjacents la matrice $\{A\}$ est penta diagonale.

3.8.1 Méthode de Stone

La méthode de Stone proposée en 1968, or SIP (Strongly Implicit Procedure), est utilisée pour résoudre les systèmes d'équations correspondants aux variables U, V, P' et P. Cette méthode est un algorithme conçu spécialement pour résoudre les matrices linéaires creuses, elle utilise une approximation de la décomposition LU pour obtenir une solution itérative du problème **Ferziger [58]**.

La décomposition LU est une excellente méthode de résolution de systèmes linéaires mais n'exploite pas la structure des matrices creuses. Dans une méthode itérative, elle peut exiger une quantité prohibitive de mémoire et des opérations arithmétiques.

Si M est une bonne approximation de A, il y a une convergence rapide. Ces observations nous amènent à utiliser une approximation de la factorisation LU de A comme matrice d'itération M :

$$M = LU = A + N \quad (3.37)$$

La méthode, aussi appelée fortement implicite (SIP), est conçue spécialement pour des équations algébriques résultants de la discrétisation des équations aux dérivées partielles.

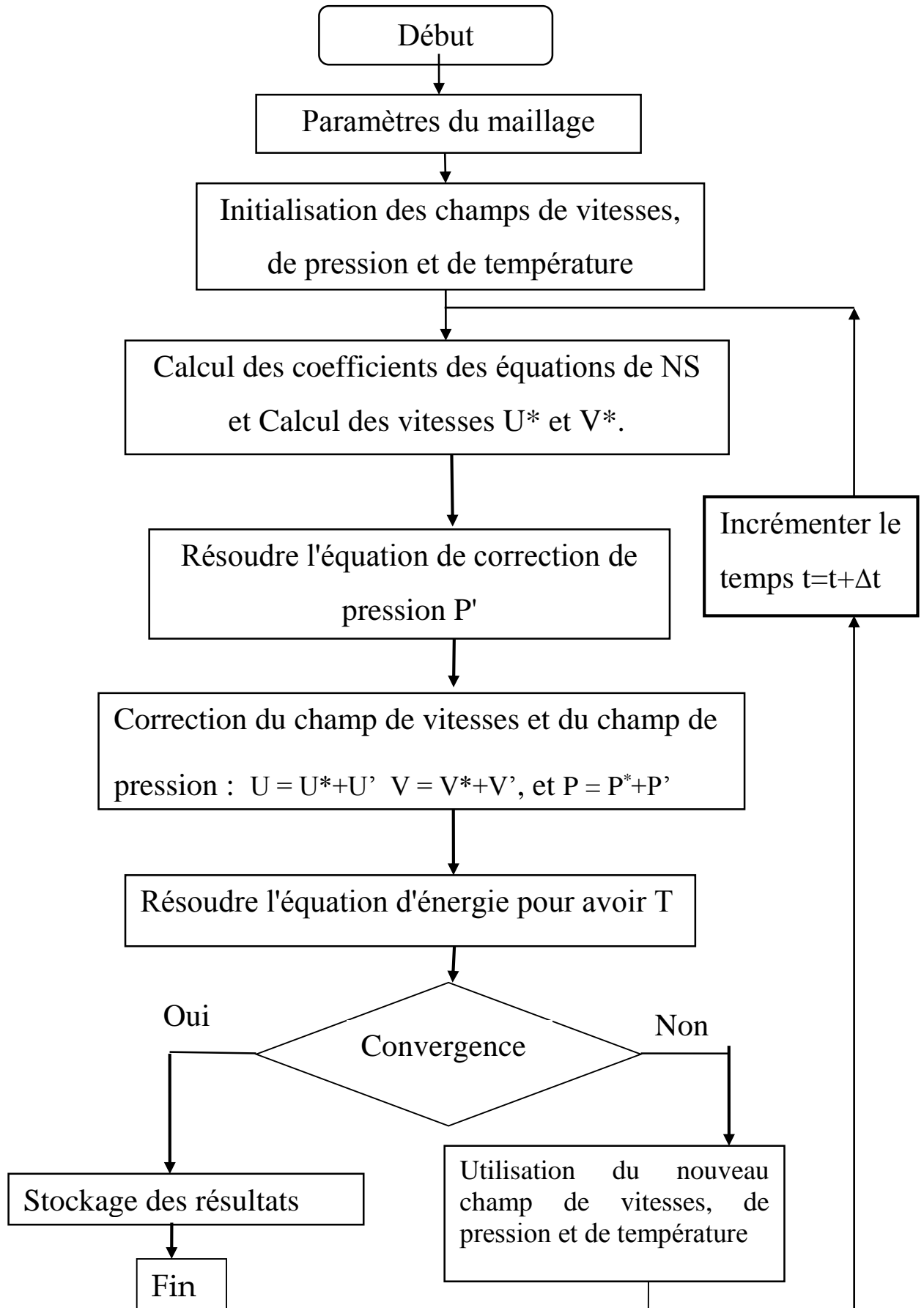


Figure 3.3 : Organigramme du code de calcul selon l'algorithme SIMPLE

3.9 Conclusion

La méthode des volumes finis est adoptée pour discrétiser les équations gouvernantes modélisant ainsi numériquement l'écoulement et le transfert de chaleur dans les cavités en étude. Nous avons présenté les étapes du code de calcul réalisé en Fortran selon l'algorithme SIMPLE, les paramètres de contrôle de la convergence et ainsi que la méthode de résolution des équations algébriques. La validation du code de calcul ainsi que les résultats effectués par ce programme sont présentés dans le chapitre suivant.

4 Résultats et discussions

4.1 Introduction

Les résultats obtenus au cours de cette étude sont présentés dans ce chapitre. Dans un premier temps, on traite le cas d'une cavité poreuse partiellement chauffée et refroidie par des températures constantes. Dans un second temps, on considère le cas d'une cavité partiellement chauffée et refroidie par des températures non uniformes et de profils sinusoïdaux. Dans le premier cas, où les températures sont constantes, on examine l'influence des paramètres contrôlant la convection à savoir le temps t , le rapport de la capacité thermique du matériau à la capacité calorifique convective σ , le rapport de conductivité R_k , le rapport d'aspect Ar , le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Darcy Da , sur l'écoulement et le transfert de chaleur. Les effets des paramètres de contrôle à savoir le nombre de Rayleigh Ra , le rapport de forme Ar et les amplitudes des profils de températures d'échauffement λ_H et de refroidissement λ_C sont discutés pour le deuxième cas où les températures sont non uniformes.

4.2 Effet du maillage

La précision des résultats et leurs temps de calcul ont une forte relation avec le choix du maillage. Un maillage non uniforme dans les deux directions est adopté. Il est plus raffiné dans les régions où les variations de températures sont relativement importantes. Dans le but d'examiner l'effet du maillage sur la solution numérique, quatre maillages ont été considérés : 82x82 nœuds, 104 x 104 nœuds, 111x111 nœuds et 121x121 nœuds. En augmentant la taille du maillage de 104x104 nœuds à 121x121 nœuds, le changement enregistré dans les valeurs calculées est inférieur à 0.6% (voir figure 4.1 et tableau 4.1). Après avoir exécuté les tests de l'indépendance entre la solution numérique et le maillage, le troisième maillage 111x111 nœuds a été choisi pour achever tous les calculs. Ce maillage donne également le meilleur compromis entre le temps de calcul et la précision des calculs.

Tableau 4.1 : Effet du maillage sur les valeurs de (Nu , ψ_{\max} et V_{\max}) pour $Ra=10^5$, $Da=0.1$ et $\varepsilon=0.6$

Maillage(nœuds)	82x82	104x104	111x111	121x121	Différence %
$ \psi_{\max} $	11.8214	11.7751	11.7848	11.7955	< 0.4
V_{\max}	67.295490	66.984890	66.952930	66.937100	< 0.6
Nu	2.778316	2.717265	2.722747	2.729843	<0.5 A part colonne 1

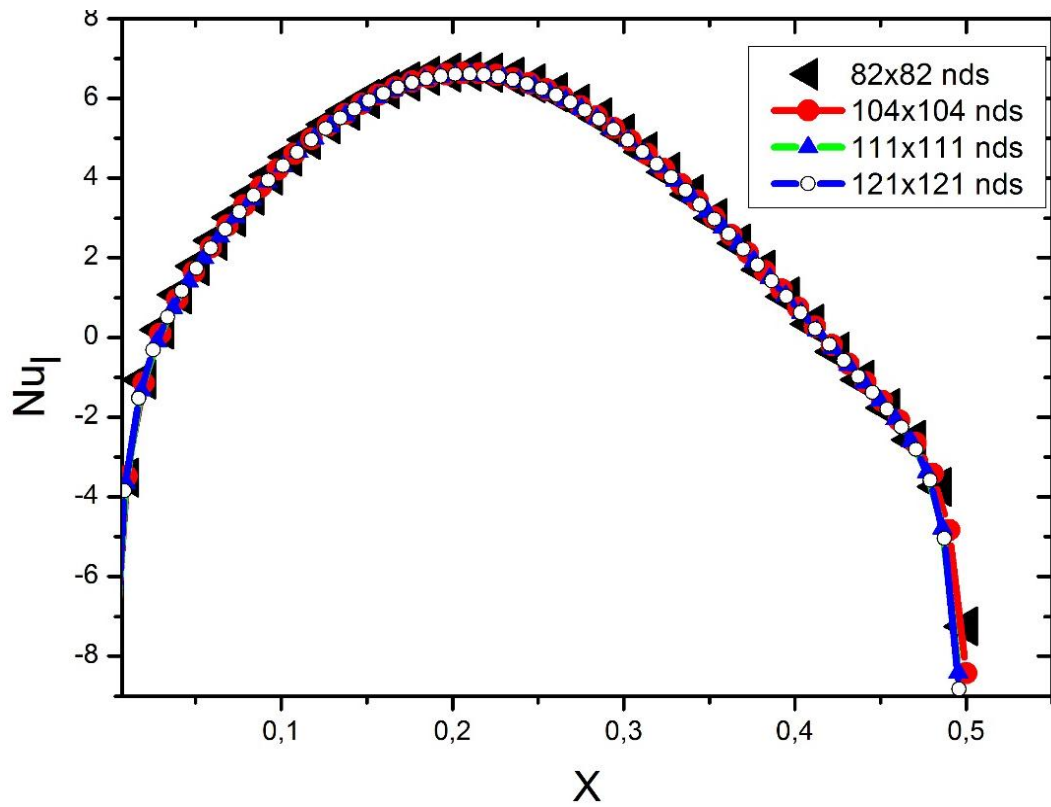


Figure 4.1 : Effet du maillage pour ($Ra=10^5$, $Da=0.1$ et $\varepsilon=0.6$) sur la variation du nombre de Nusselt local

4.3 Validation du code de calcul

Une validation de notre simulation numérique a été faite par une comparaison quantitative entre nos résultats obtenus et des différentes solutions de références disponibles dans la littérature. Le tableau 4.2 montre les comparaisons du nombre de Nusselt moyen avec les résultats de **Haghshenas et al. [60]**, **Nithiarasu et al. [61]** et **Seta et al. [62]** pour un écoulement laminaire dans une cavité poreuse dont les parois verticales sont soumises à des températures différentes et constantes.

Les comparaisons ont été faites pour un rapport d'aspect $Ar = 1$, le milieu poreux a un nombre de Darcy $Da = 0.01$ et le fluide circulant a un nombre de Prandtl $Pr = 1$. Nos résultats ont été effectués pour des nombres de Rayleigh $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et pour des différentes porosités $\varepsilon = 0.4, 0.6, 0.9$.

D'après les tableaux 4.2 et 4.3 et les figures 4.2 et 4.3, on peut également observer l'accord presque parfait entre les résultats obtenus et ceux de la littérature consultée.

Tableau 4.2 : Comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature pour $Pr=1.0$ et $Da=0.01$

Nombre Rayleigh		Moyenne Nusselt Nombre Nu		
		$\varepsilon=0.4$	$\varepsilon=0.6$	$\varepsilon=0.9$
10^3	Haghshenas et al. [60]	1.017	1.022	1.027
	Nithiarasu et al. [61]	1.01	1.015	1.023
	Takeshi Seta et al. [62]	1.007	1.012	1.017
	Résultats obtenus	1.01	1.021	1.026
10^4	Haghshenas et al.	1.372	1.502	1.640
	Nithiarasu et al.	1.408	1.530	1.640
	Takeshi Seta et al.	1.362	1.493	1.633
	Résultats obtenus	1.402	1.53	1.65
10^5	Haghshenas et al.	3.006	3.445	3.91
	Nithiarasu et al.	2.983	3.555	3.91
	Takeshi Seta et al.	2.992	3.433	3.902
	Résultats obtenus	3.08	3.51	3.95

Résultats obtenus

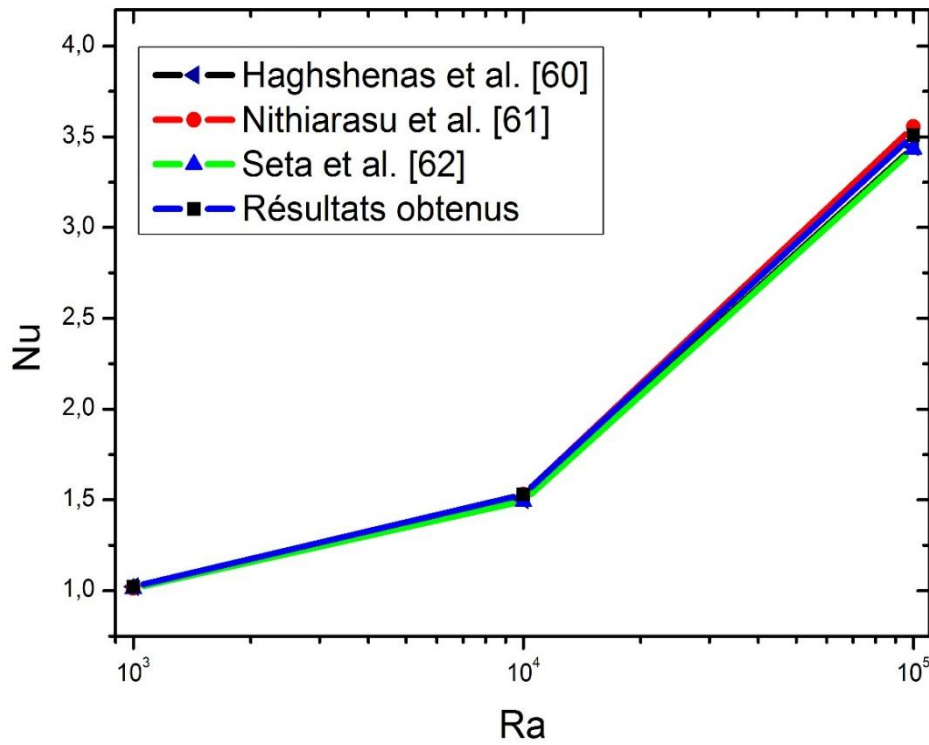


Figure 4.2 : Comparaison entre nos résultats avec ceux de la littérature pour $Da=0.01$ et $\varepsilon=0.6$

Tableau 4.3 : Comparaison des nombres de Nusselt entre les résultats obtenus et les résultats déjà publiés

	RaDa			
	50	100	200	500
Prasad et Kulacki[63]	≈2.0	≈3.2	≈5.3	≈9.3
Beckermann et al.[64]	1.981	3.113	5.038	9.308
Shiralkar et al.[65]	–	3.115	4.976	8.944
Walker et Homsey[66]	1.98	3.097	4.89	8.66
Résultats obtenus	1.997	3.139	4.980	8.680

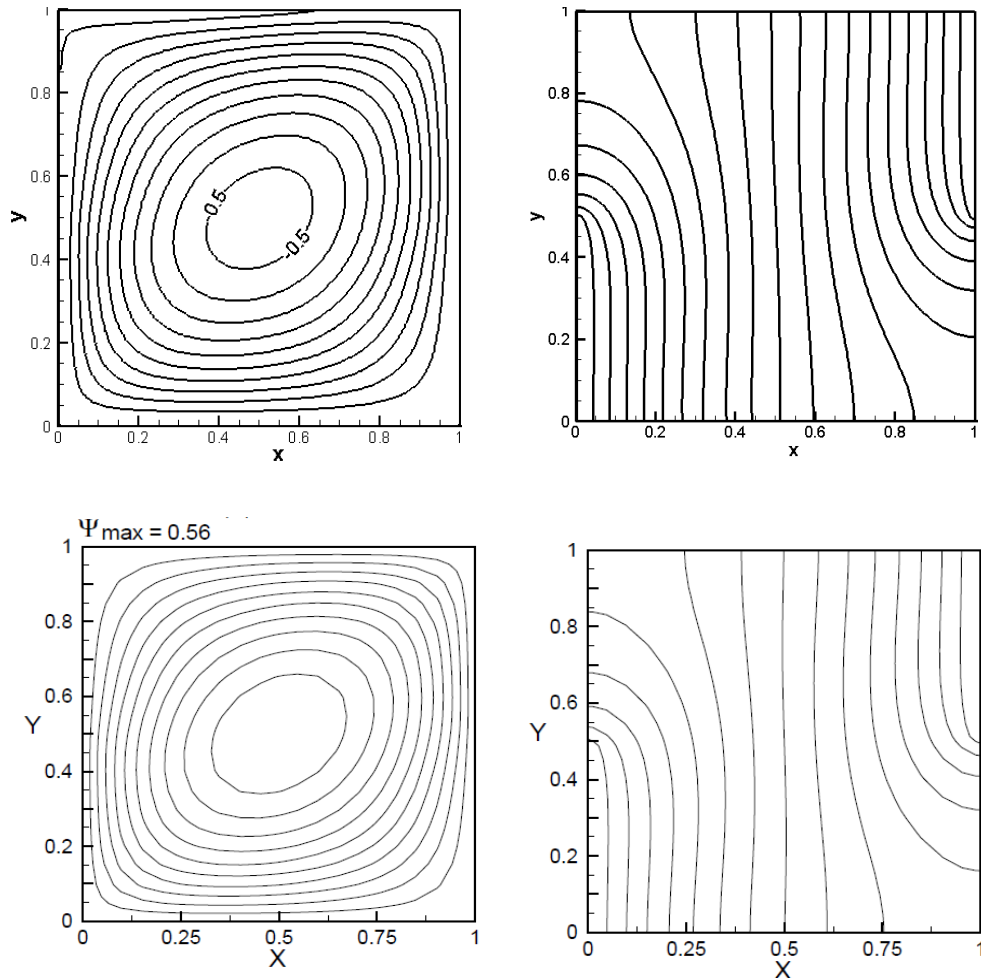


Figure 4.3 : Fonction de courant et températures pour $Da=10^{-4}$ et $Ra=10^5$
 Nos résultats (haut) avec [18] (bas)

4.4 Cas 1 : Cavité chauffée et refroidie par des températures constantes

Dans ce premier cas, on a étudié la convection naturelle instationnaire dans une cavité poreuse rectangulaire. Le flux est provoqué par le chauffage partiel constant, à la moitié inférieure de la paroi verticale gauche et le refroidissement partiel à la moitié supérieure de la paroi verticale droite.

Les paramètres gouvernant le problème sont le nombre de Rayleigh Ra , le nombre de Darcy Da , le rapport de capacité calorifique σ et le rapport de conductivités R_k .

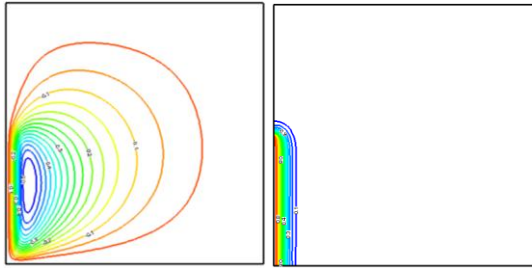
4.4.1 Variation temporelle d'écoulement et du transfert thermique

La figure 4.4 montre le résultat transitoire du champ d'écoulement et de température pour $Ra = 10^5$. Initialement, à $t = 0$, il n'y a pas de mouvement dans l'enceinte. À $t = 0,001$, une cellule tournant dans le sens des aiguilles d'une montre est apparue près de la moitié chaude de la paroi.

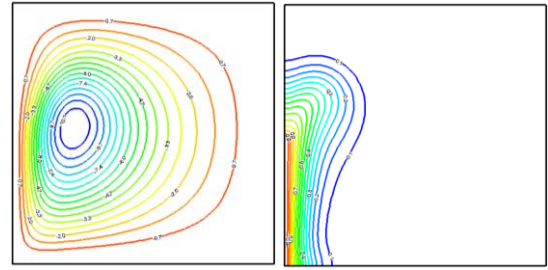
À ce moment, le mouvement convectif ne s'est pas développé. Donc les isothermes s'entassent et forment une couche limite parallèle à la paroi isotherme, impliquant que la conduction est le mode de transfert de chaleur dominant à cet instant. Après un court de temps, l'écoulement a augmenté de magnitude à son état d'équilibre. Comme le temps a augmenté à $\tau = 0.25$, la température est répartie de la gauche vers la droite, donc l'intensité des lignes de courant augmente et le centre de la cellule s'est déplacé vers le centre de l'enceinte. Pendant ce temps, les isothermes forment une couche limite thermique le long des moitiés actives de la paroi. Ceci indique que la convection s'est produite et domine le transfert de chaleur dans l'enceinte. Quand le temps progresse plus longtemps (à $\tau > 0.8$), aucune différence significative ne peut être observée dans les champs d'écoulement et de température, ce qui indique que l'écoulement a atteint le régime permanent.

La figure 4.5 illustre les variations temporelles du nombre de Nusselt moyen Nu de $t = 0$ à $t = 1$, sur la paroi chaude pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Initialement, la valeur de Nu diminue rapidement pour tous les nombres de Rayleigh à cause de la réduction rapide des gradients de température. Dans le cas de faibles nombres de Rayleigh $Ra = 10^2$ et 10^3 , la valeur de Nu diminue progressivement avec le temps jusqu'à ce qu'elle converge vers une valeur stable en régime permanent. Alors que pour des valeurs de Ra plus élevées $Ra = 10^4$ et 10^5 , la valeur de Nu devient plus élevée, notons que cette valeur diminue en premier temps, puis augmente continuellement jusqu'à une valeur fixe en régime permanent.

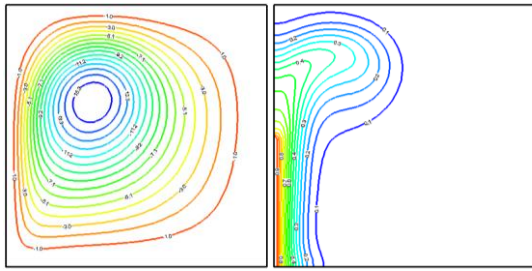
Pour mieux comprendre les effets du nombre de Darcy sur le comportement de transfert de chaleur, les variations temporelles de Nu pour différents nombres de Darcy sont montrées dans la figure 4.6. Les graphes résultants montrent que pour les faibles valeurs de Darcy $Da = 10^{-4}$ et 10^{-5} , la valeur de Nu diminue au cours du temps jusqu'à ce qu'elle converge vers une valeur en régime permanent. Cependant, pour les valeurs élevées de Da , les variations de Nu sont plus importantes, un Da plus élevé donne un Nu plus élevé et le pic de profil est atteint plus rapidement pour un Da plus élevé.



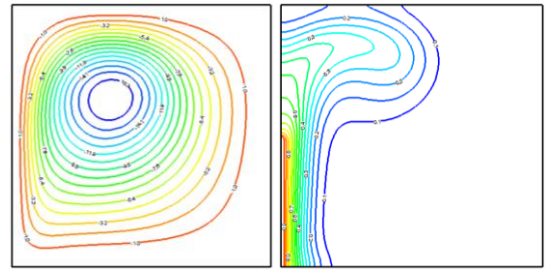
(a) $\tau=0.001$



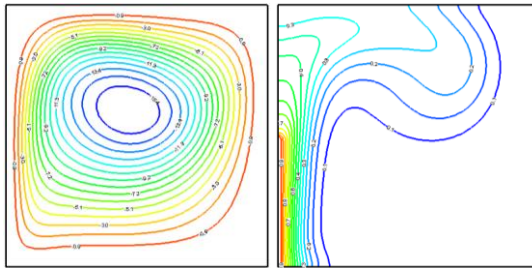
(b) $\tau=0.01$



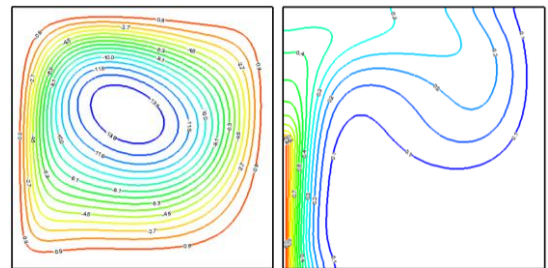
(c) $\tau=0.015$



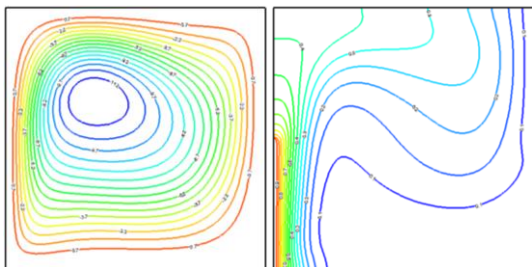
(d) $\tau=0.018$



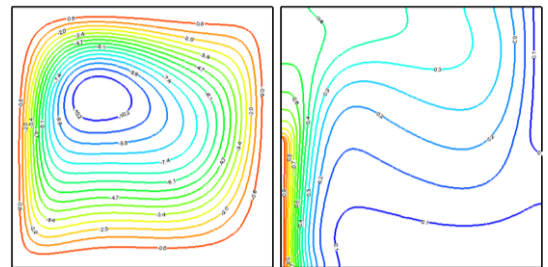
(e) $\tau=0.025$



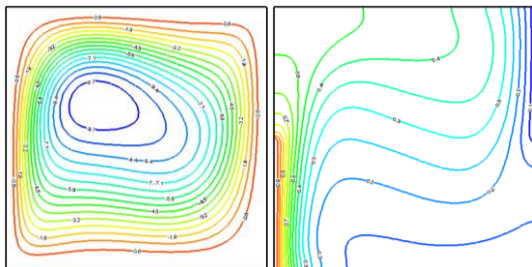
(f) $\tau=0.03$



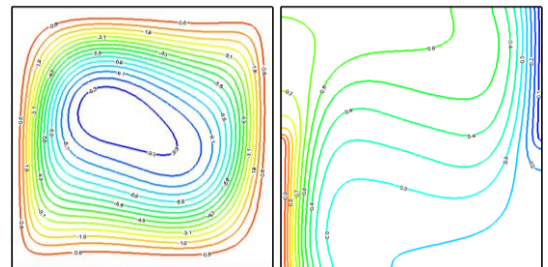
(g) $\tau=0.04$



(h) $\tau=0.05$



(i) $\tau=0.085$



(j) $\tau=0.16$

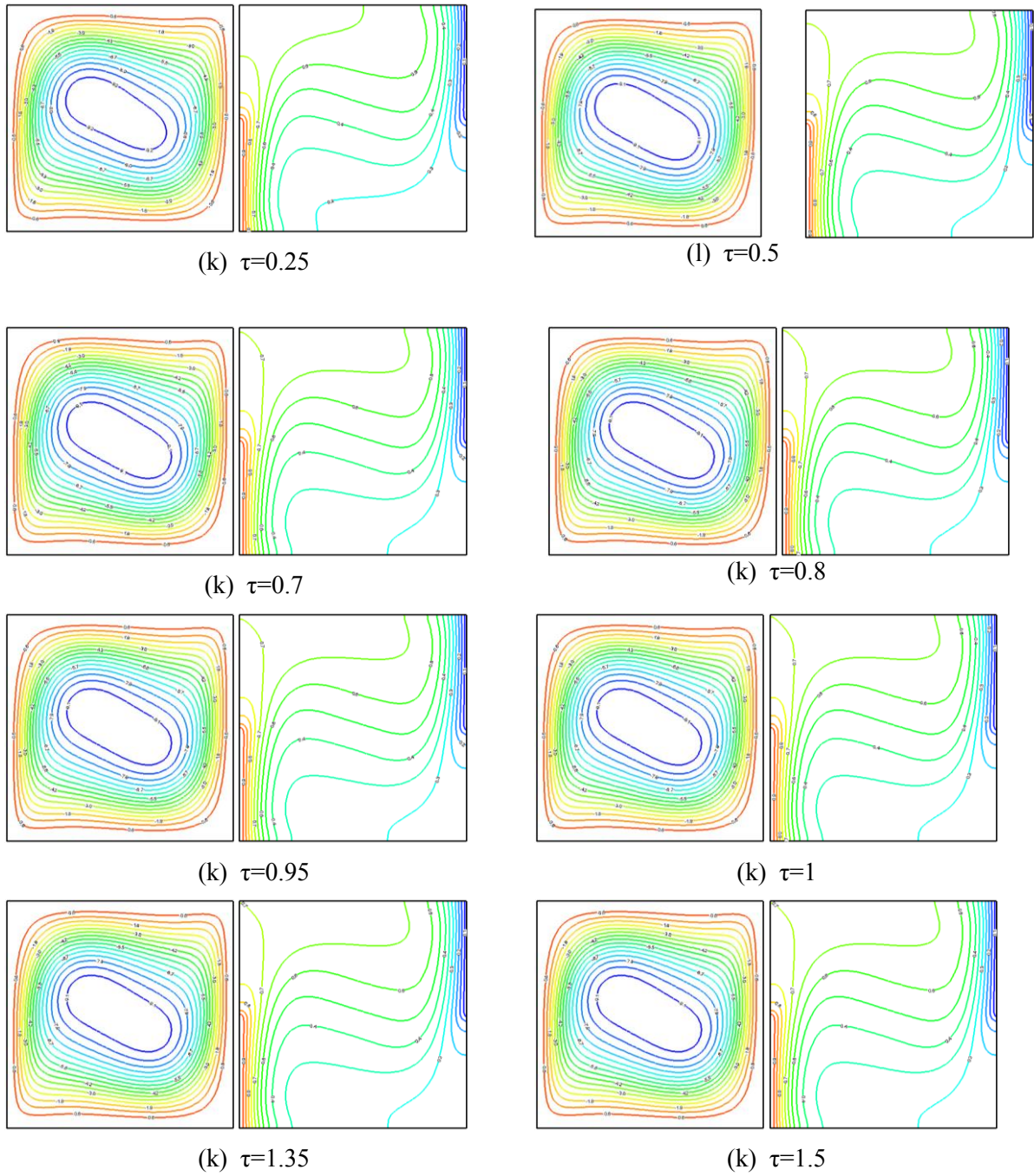


Figure 4.4 : Variation temporelle des lignes de courant et isothermes pour $Ra = 10^5$, $Da = 0.1$ et $\varepsilon = 0.7$

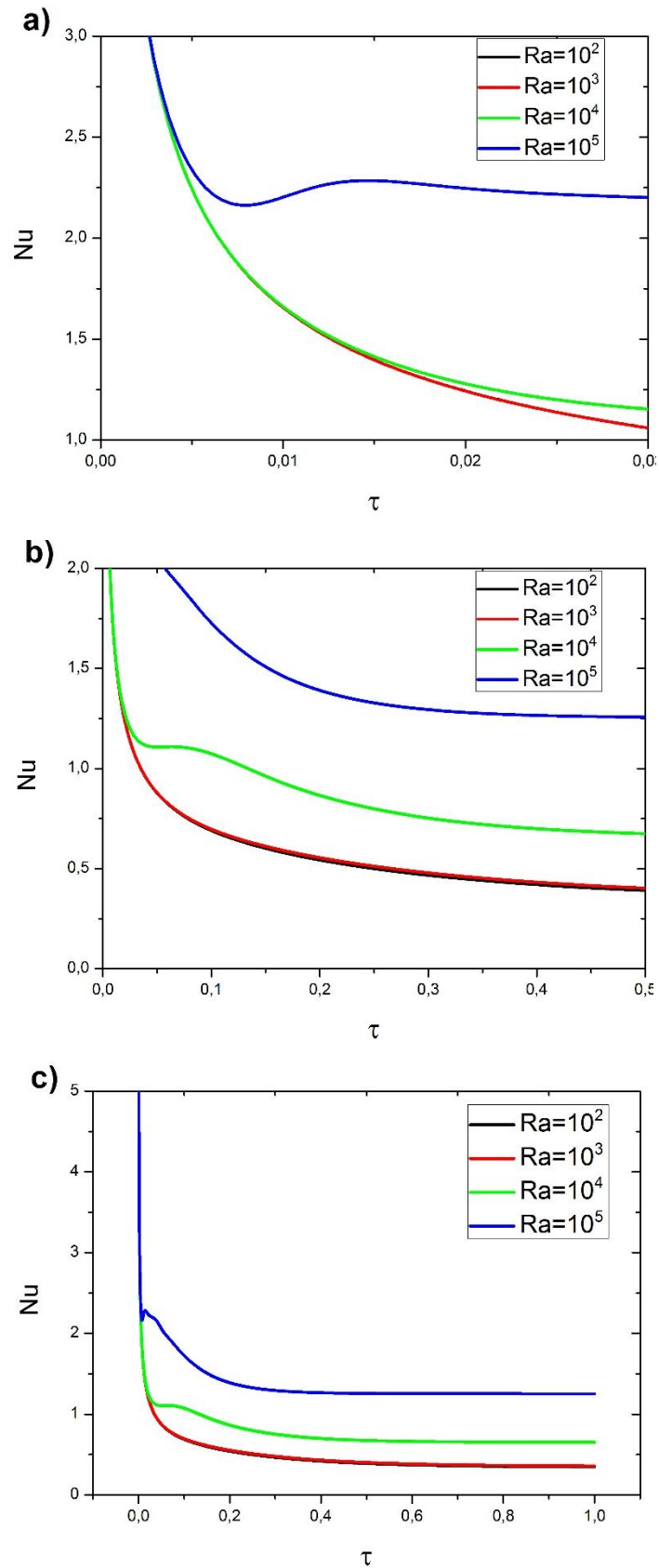


Figure 4.5 : Variations du nombre de Nusselt moyen avec le temps pour différents nombres de Rayleigh ($Da = 0.1$ et $\varepsilon = 0.7$)

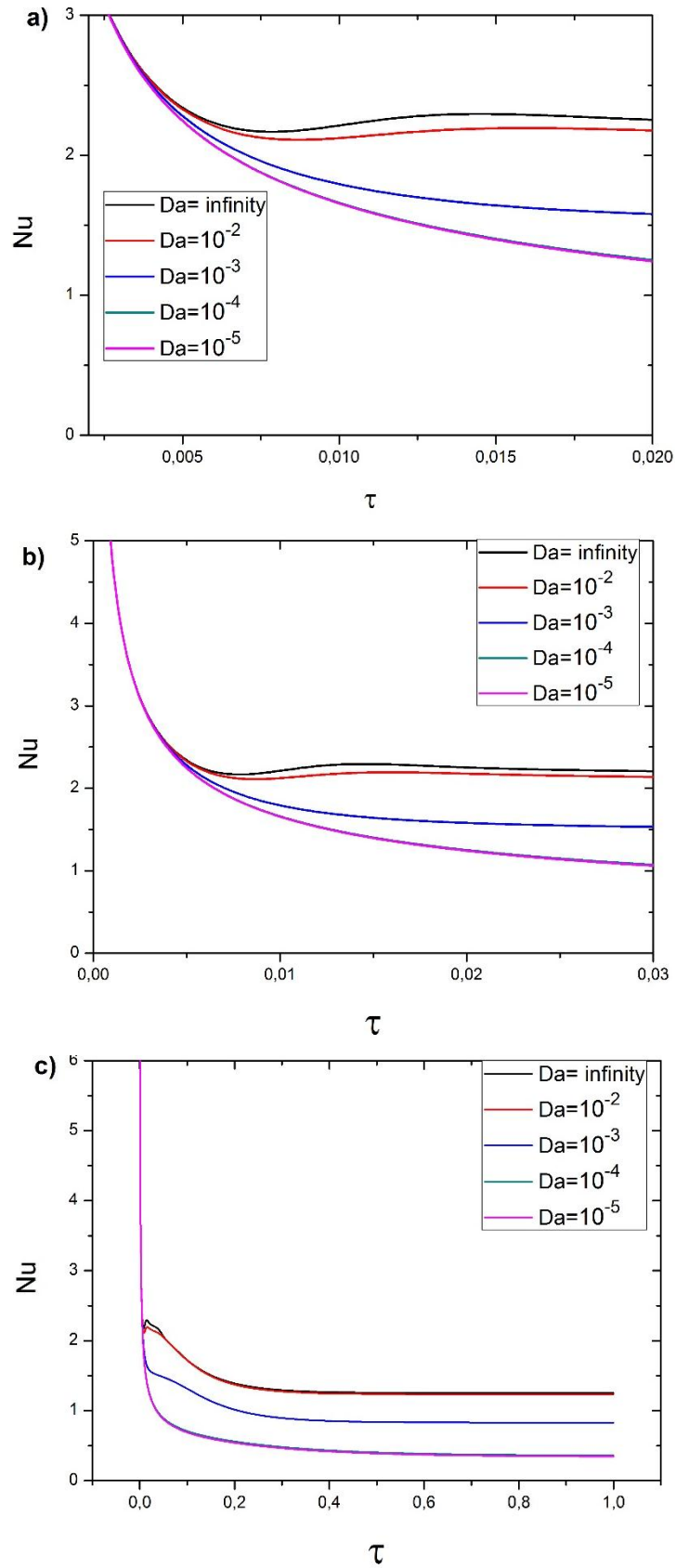


Figure 4.6 : Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps pour différents nombres de Darcy ($Ra = 10^5$ et $\varepsilon = 0.7$)

4.4.2 Effet du nombre de Rayleigh

Les résultats de la figure 4.7 illustrent l'effet du nombre de Rayleigh sur la structure de l'écoulement. L'évolution des lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh montre que pour les faibles valeurs de Ra , la force de circulation est faible (figure 4.7 a et b) à cause de la domination de la conduction dans la cavité. En augmentant le nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^6 , la circulation entraînée par la flottabilité à l'intérieur de la cavité augmente (figure 4.7 c et d), l'écoulement est monocellulaire dont le sens est horaire.

Les isothermes montrent une distribution presque symétrique pour le faible nombre de Rayleigh en raison de la domination du mode de conduction et le gradient de température au niveau du plan de symétrie est très faible. La couche limite thermique devient plus mince avec l'augmentation du nombre de Rayleigh comme il est indiqué sur les figures 4.7 c et d.

La Figure 4.8 montre l'effet de nombre de Rayleigh sur le transfert thermique pour différents nombres de Darcy $Da = 10^{-1}$ à 10^{-5} . D'après cette figure, nous constatons que l'augmentation du nombre de Rayleigh a pour effet d'augmenter le nombre de Nusselt et on remarque aussi qu'aucun mouvement convectif (le fluide reste immobile) n'est possible au dessous du nombre de Rayleigh critique $Ra = 10^6$ pour $Da=10^{-5}$. Par contre pour un nombre de Rayleigh Ra supérieur à 10^4 , les mouvements convectifs s'amorcent pour un nombre de Darcy plus élevé ($Da=0.1$).

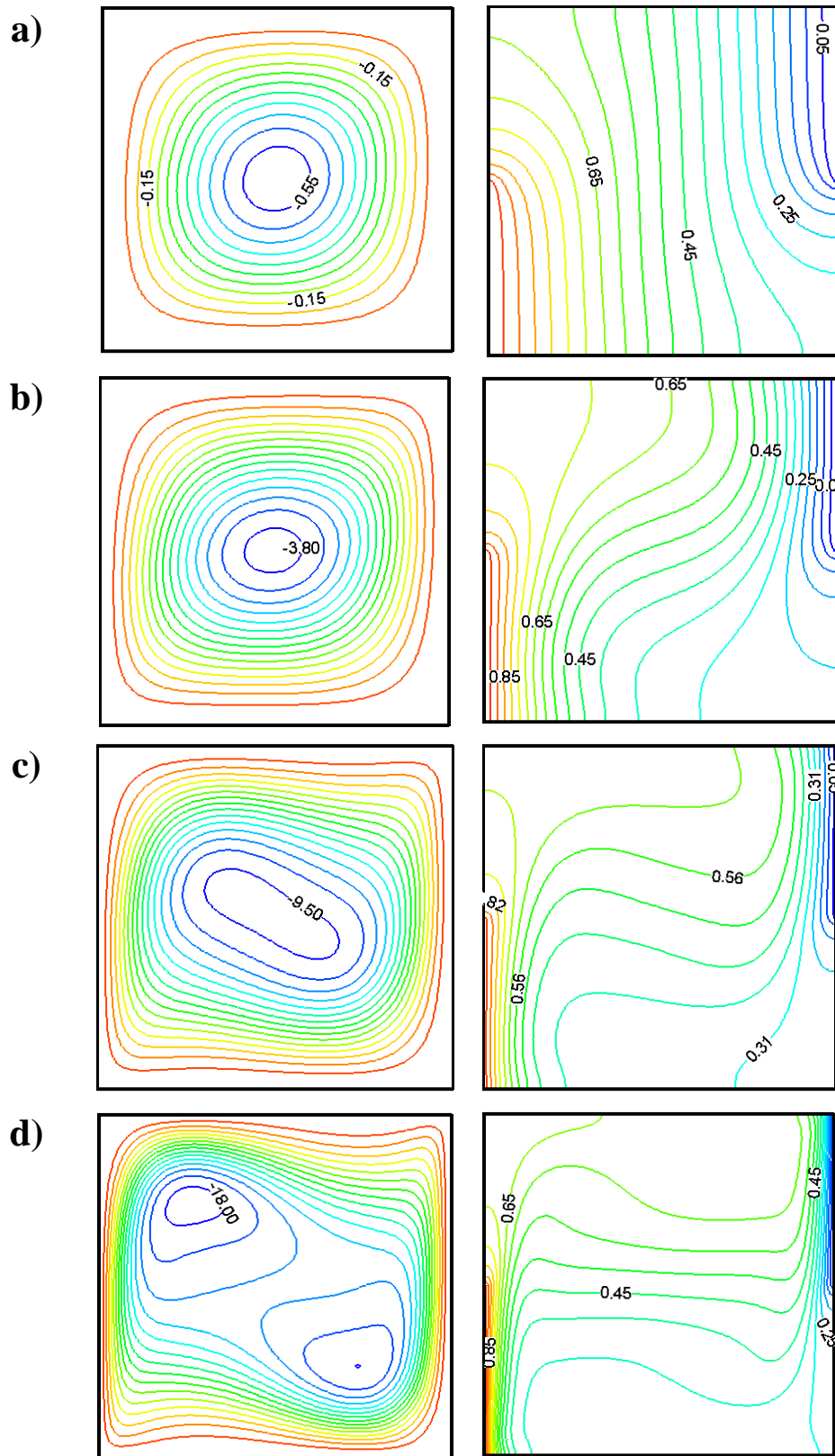


Figure 4.7 : Les lignes de courant(gauche) et isothermes (droite) pour $Ar = 1$, et différentes valeurs des nombres de Rayleigh

(a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$, (c) $Ra=10^5$, (d) $Ra=10^6$, $Da=0.1$

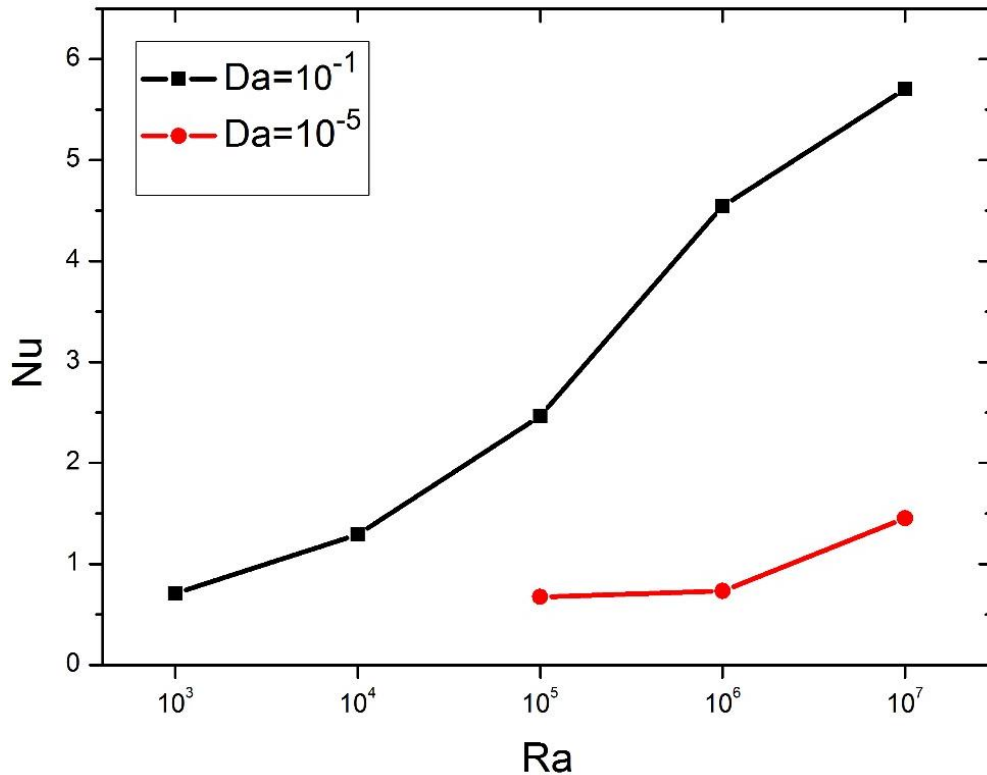


Figure 4.8 : Effet du nombre de Rayleigh sur le taux moyen de transfert de chaleur à $Da = 10^{-1}$ et 10^{-5}

4.4.3 Effet du nombre de Darcy

Les résultats de la figure 4.9 montrent l'effet de nombre de Darcy sur la structure de l'écoulement. Les lignes de courant représentées par les différentes valeurs du nombre de Darcy indiquent une forte influence sur la structure de l'écoulement. L'intensité de l'écoulement augmente avec le nombre de Darcy et cette croissance est d'autant plus élevée que Ra est élevé. Pour les différentes valeurs de Da, nous avons obtenu un écoulement monocellulaire dont le sens est horaire avec une stratification thermique.

Afin d'analyser l'effet du nombre de Darcy sur le transfert thermique nous avons représenté sur la figure 4.10 l'évolution des nombres de Nusselt moyens en fonction de Da pour $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$. Aux faibles valeurs de la perméabilité ($Da \leq 10^{-5}$), les nombres de Nusselt demeurent pratiquement constants avec la domination de la conduction. Et pour les valeurs élevées de la perméabilité ($Da > 10^{-5}$), les transferts thermiques sont plus importants avec l'accroissement du nombre de Rayleigh. L'accroissement des transferts thermiques est donc d'autant plus marqué que le nombre de Rayleigh augmente.

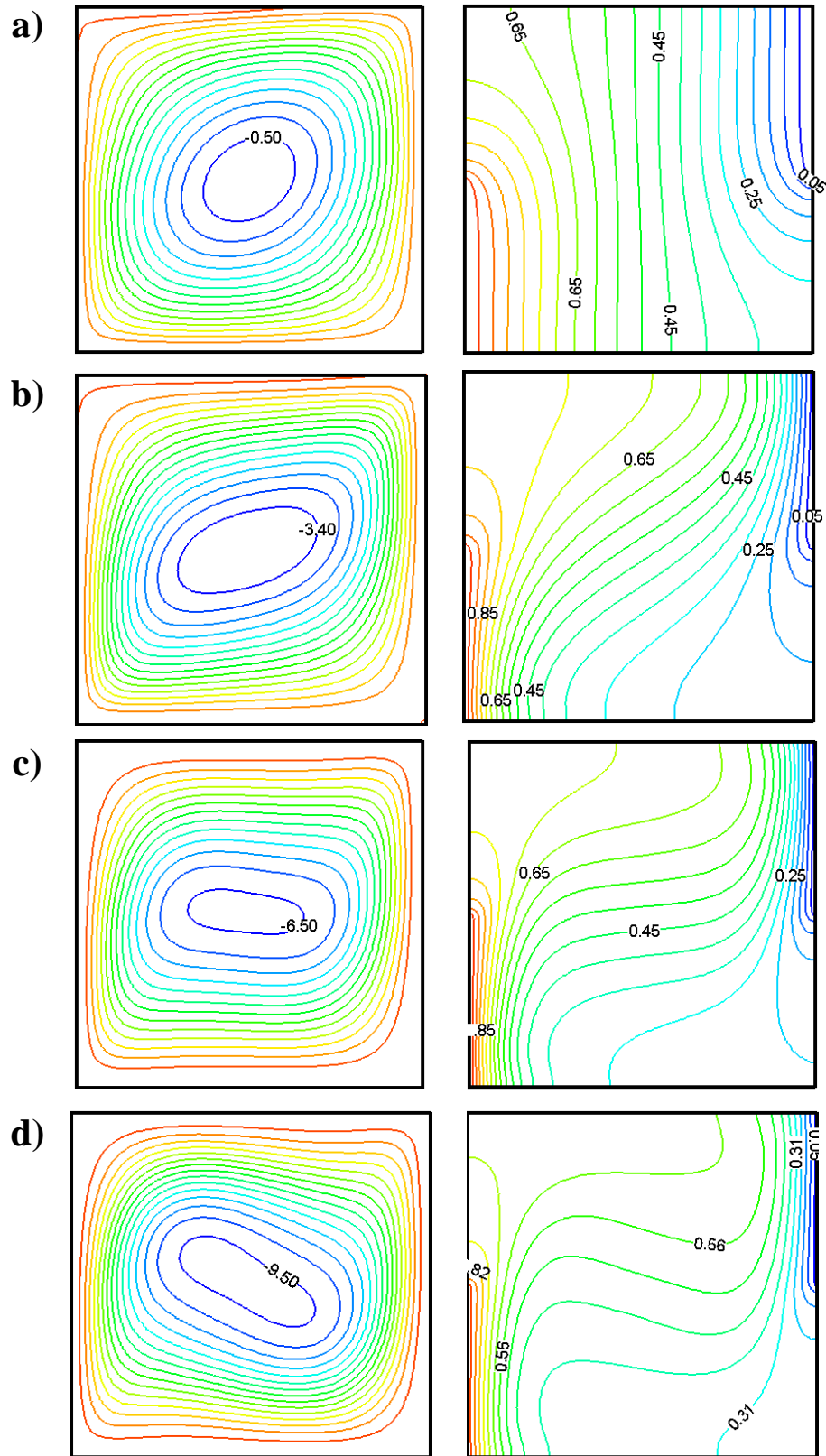


Figure 4.9 : Lignes de courant (gauche) et température (droite), pour $Ar=1$ (a) $Da = 10^{-4}$, (b) $Da = 10^{-3}$, (c) $Da = 10^{-2}$, (d) $Da = 10^{-1}$; $Ra=10^5$

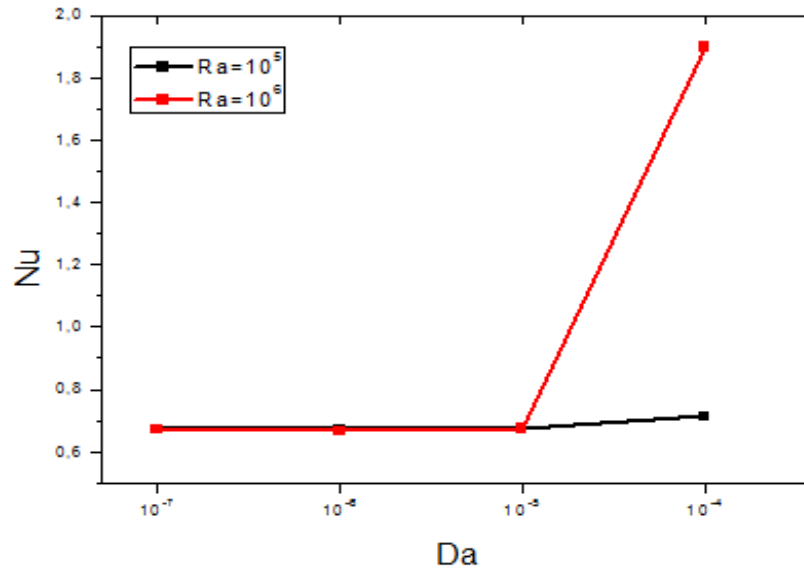


Figure 4.10 : Effet du nombre de Darcy sur le taux moyen de transfert de chaleur pour $Ra = 10^5$ et 10^6

4.4.4 Influence du rapport de la capacité thermique du matériau à la capacité calorifique convective

Les figures 4.11 et 4.12 montrent les résultats obtenus avec les différentes valeurs du rapport de la capacité calorifique σ . **Bergman et al. [67], Khanafer and Vafai [68]** ont considéré ce rapport σ égale à 1, un accord raisonnable est observé par nos calculs prouvant cette considération. Les calculs des champs de fonction de courant et température montrent que les isothermes et les isocourants sont similaires quelle que soit la valeur de σ figure 4.11, ainsi que les calculs du nombre de Nusselt moyen, n'ont pas été pratiquement changés pour les différentes valeurs du rapport de capacité thermique σ figure 4.12.

De même, la variation de la vitesse verticale V_{max} en fonction de σ est d'environ 0,6%, tableau 4.4. Bien que la stabilité du calcul du nombre de Nusselt mette plus de temps à chaque fois que la valeur de σ est grande, figure 4.13. Et on a également remarqué que la valeur optimale de σ est égale à 1. Les résultats de la présente étude concernant le rapport de capacité thermique σ confirme la validation de la valeur proposée par **Bergman et al. [67], Khanafer et Vafai [68]**. En conséquence, σ est maintenu égal à 1 pour tous les calculs.

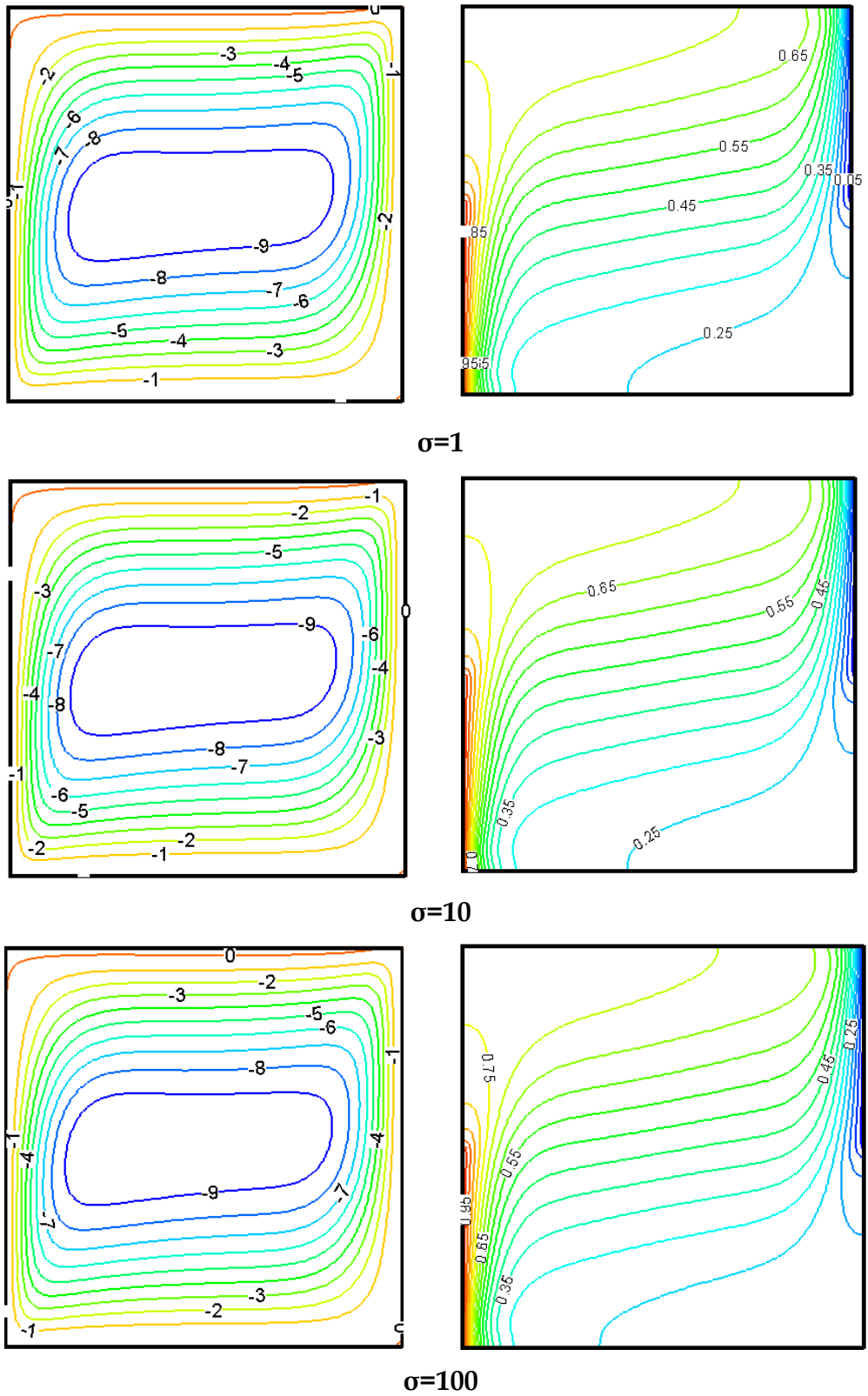


Figure 4.11 : Tracé des lignes de courant, température, pour $R_k=1$, $Ra=10^6$, $Da=10^{-3}$ et $\epsilon=0.6$ a) $\sigma=1$, b) $\sigma=10$, c) $\sigma=100$

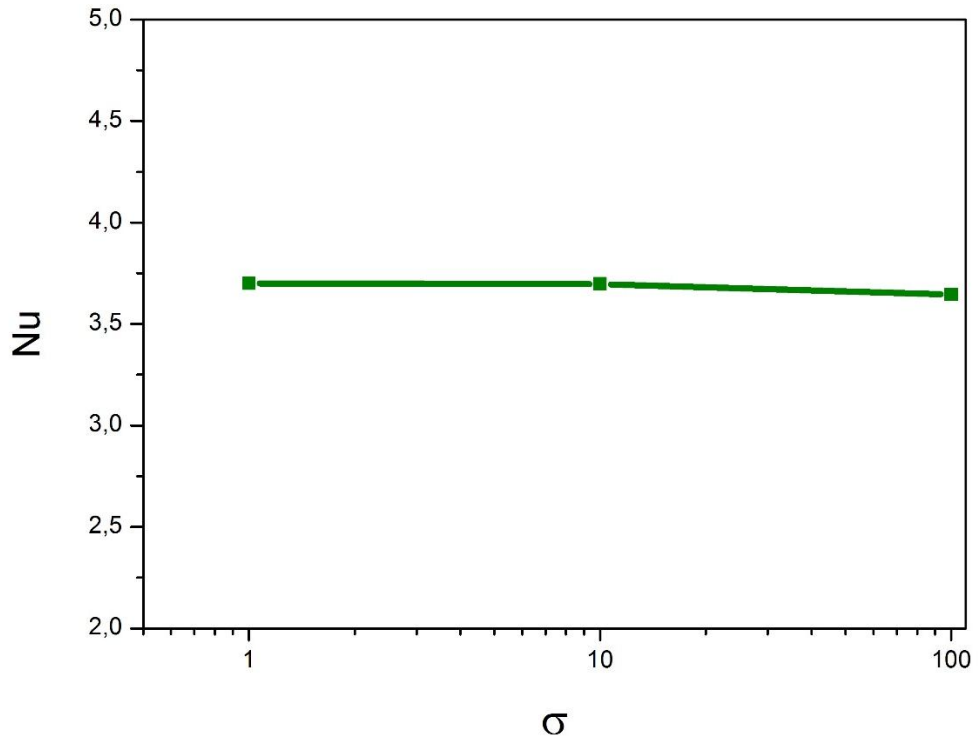


Figure 4.12 : Variation du nombre de Nusselt moyen avec différentes valeurs de σ à $Ra=10^6$, $Da=10^{-3}$ et $\varepsilon=0.6$

Tableau 4.4 : Variation de V_{max} en fonction de σ à $Ra=10^6$ $Da=10^{-3}$ $\varepsilon=0.6$

(σ)	V_{max}	Différence max %
1	91.689	0.6
10	91.730	
100	92.246	

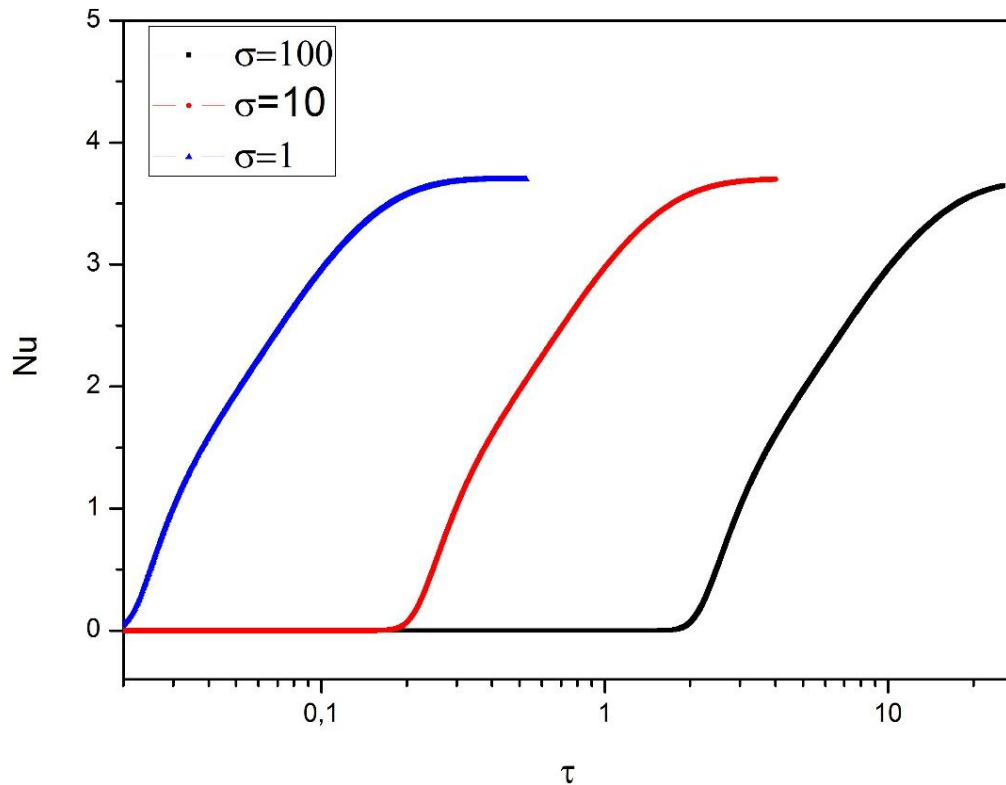


Figure 4.13 : Variation de Nu en fonction du temps à $Ra=10^6$, $Da=10^{-3}$ et $\varepsilon=0.6$

4.4.5 Influence du rapport de conductivités

Dans cette partie l'effet du rapport des conductivités thermiques R_k qui est égale à k_e / k_f sur la structure de l'écoulement et les caractéristiques du transfert de chaleur, a été également étudiée. Des différentes valeurs du rapport R_k ont été prises en considération.

La figure 4.14, montre l'effet du rapport des conductivités thermiques R_k sur les champs de lignes de courant et de température. La figure montre que la poussée d'Archimède est importante pour des valeurs élevées de R_k . Pour un rapport $R_k=1$, l'écoulement se réalise par une boucle occupant toute la cavité, en augmentant ce rapport, une grande boucle de recirculation se forme très proche des parois et pas de circulation au centre de la cavité.

De même, la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy Da , présentée dans la figure 4.15 pour les différents rapports de conductivités R_k , montre que le transfert de chaleur par convection est dominant pour les valeurs élevées de R_k . Pour un rapport de conductivité plus petit ($R_k = 1$) le taux de transfert de chaleur est moins important par rapport aux autres rapports qui correspondent à un même nombre de Darcy. Les courbes de la figure

montrent que le rapport de conductivité thermique R_k a une grande influence sur le mode du transfert de chaleur.

La figure 4.16 montre la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction des rapports de conductivités R_k pour les différents nombres de Rayleigh. La figure montre que le transfert de chaleur par convection est dominant pour les valeurs élevées du rapport R_k . Le taux de transfert de chaleur est moins important pour un rapport de conductivité plus petit par rapport aux autres rapports qui correspondent à un même nombre de Rayleigh, ce qui confirme l'importante influence du rapport de conductivité R_k sur le mode du transfert de chaleur.

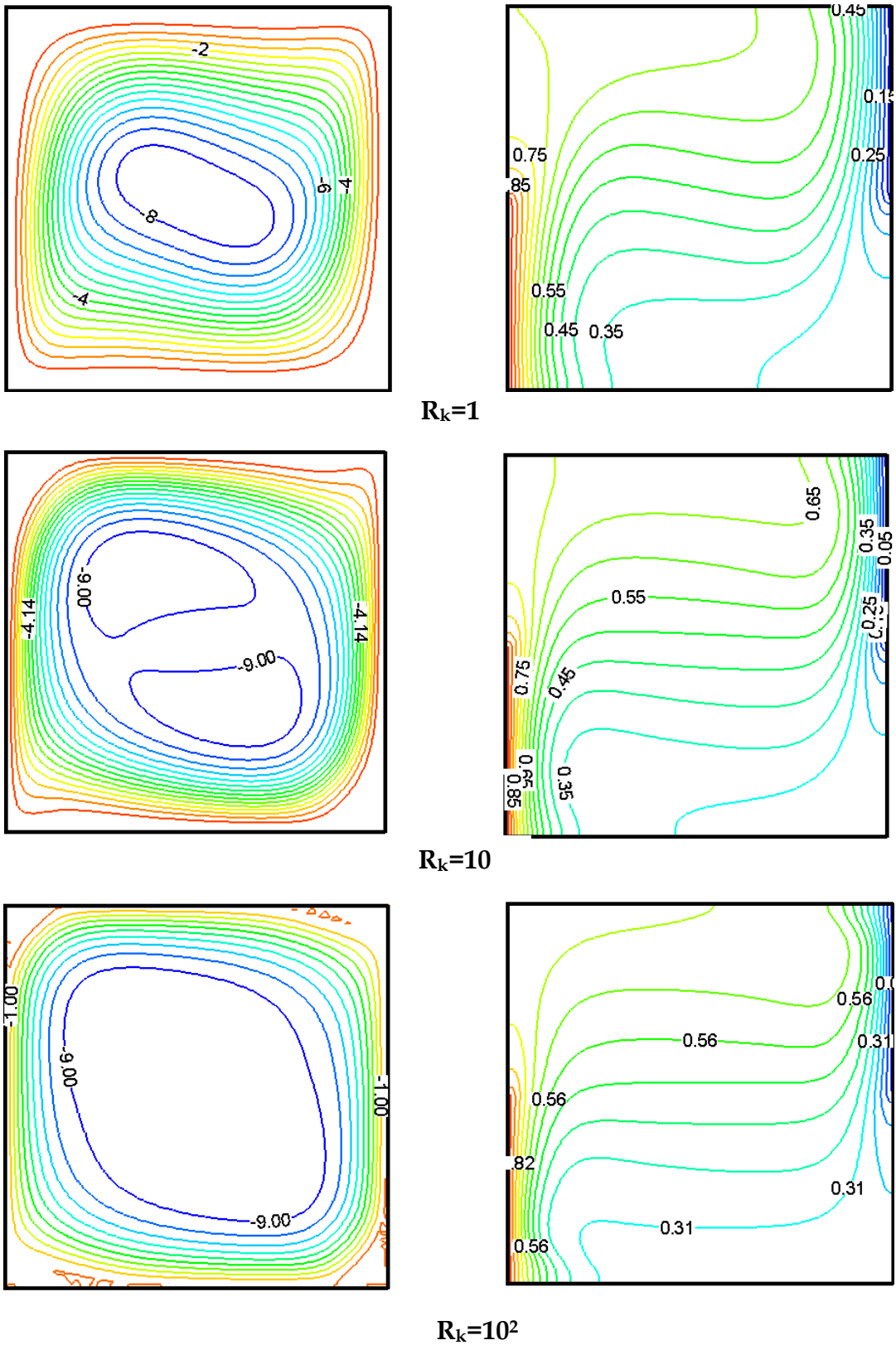


Figure 4.14 : Tracé des lignes de courant (gauche) et températures (droite), pour différents rapports R_k ; $Da = 0.1$ $Ra = 10^5$.

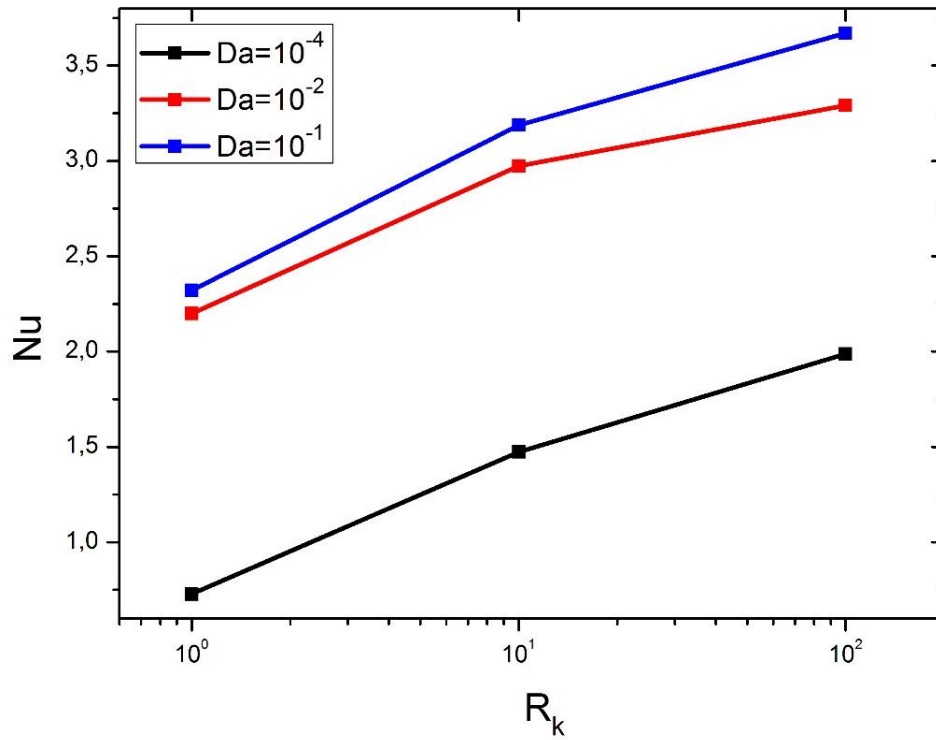


Figure 4.15 : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Da et R_k pour $Ra=10^5$

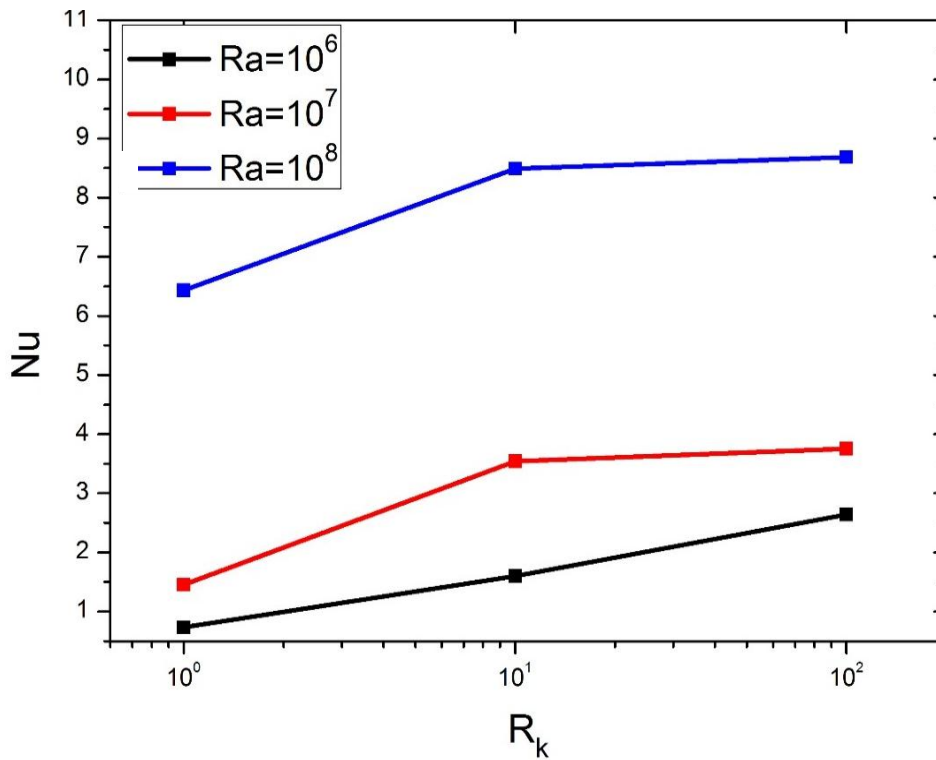


Figure 4.16 : Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra et R_k pour $Da=10^{-5}$

4.4.6 Influence du rapport de forme de cavité Ar

La figure 4.17 montre l'effet du rapport de forme sur le champ d'écoulement et la distribution de température à différentes valeurs de Ar pour $Ra = 10^6$. Les lignes de courant (à gauche) et les isothermes (à droite) correspondent à $Ar = 1, 2$ et 4 . On peut voir que l'écoulement est multicellulaire et dans le sens des horaires pour $Ar=1$. Et il est monocellulaire dans le même sens des horaires dont la cellule principale est diminuée pour les cavités de facteur de forme $Ar=2$ et 4 . La force d'écoulement devient forte pour les facteurs de forme $Ar = 2$ et 4 , ce qui donne une meilleure convection dans les cavités de ces facteurs. On peut voir aussi que pour les isothermes la couche limite thermique est plus mince à cause de la domination de la convection dans toutes les cavités.

Figure 4.18 montre l'effet de Ar sur la variation du nombre local de Nusselt sur la moitié active de la paroi pour $Ra = 10^6$ et $Da = 10^{-1}$. A partir de cette figure, on remarque que l'augmentation de Ar de 1 à 4 accroît les taux de transfert de chaleur locaux Nu_l , cette accroissement est dû à la diminution du volume de la cavité et à la valeur élevée de Ra.

L'influence de Ar sur le taux du transfert de chaleur Nu en fonction du nombre de Darcy pour $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$, est présentée sur la figure 4.19. Nous constatons que Nu augmente avec l'augmentation de Da et que le régime de convection devient dominant en menant le produit $RaDa \geq 10^2$. A un nombre de Rayleigh $Ra \geq 10^5$, le régime de convection s'améliore à $Ar = 2$. En augmentant ce paramètre au nombre de Rayleigh $Ra = 10^6$, le régime de convection est amélioré au rapport d'aspect $Ar = 4$.

La figure 4.20 et 4.21 montrent l'influence de Ar sur le taux du transfert de chaleur Nu en fonction du nombre de Rayleigh Ra pour Darcy $Da = 10^{-1}$ et 10^{-5} respectivement. On observe que Nu augmente avec l'augmentation de Ra, et le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction aux faibles nombres de Rayleigh $Ra \leq 10^4$. Pour un nombre élevé de Rayleigh $Ra \geq 10^5$ et un produit $RaDa \geq 10^2$, le régime dominant dans la cavité est la convection et il est amélioré à $Ar=2$. Cependant pour un $Ra \geq 10^6$ et en maintenant le produit $RaDa \geq 10^2$, le taux du transfert de chaleur Nu est plus grand et le régime de convection est amélioré, dans la cavité de rapport de forme $Ar = 4$.

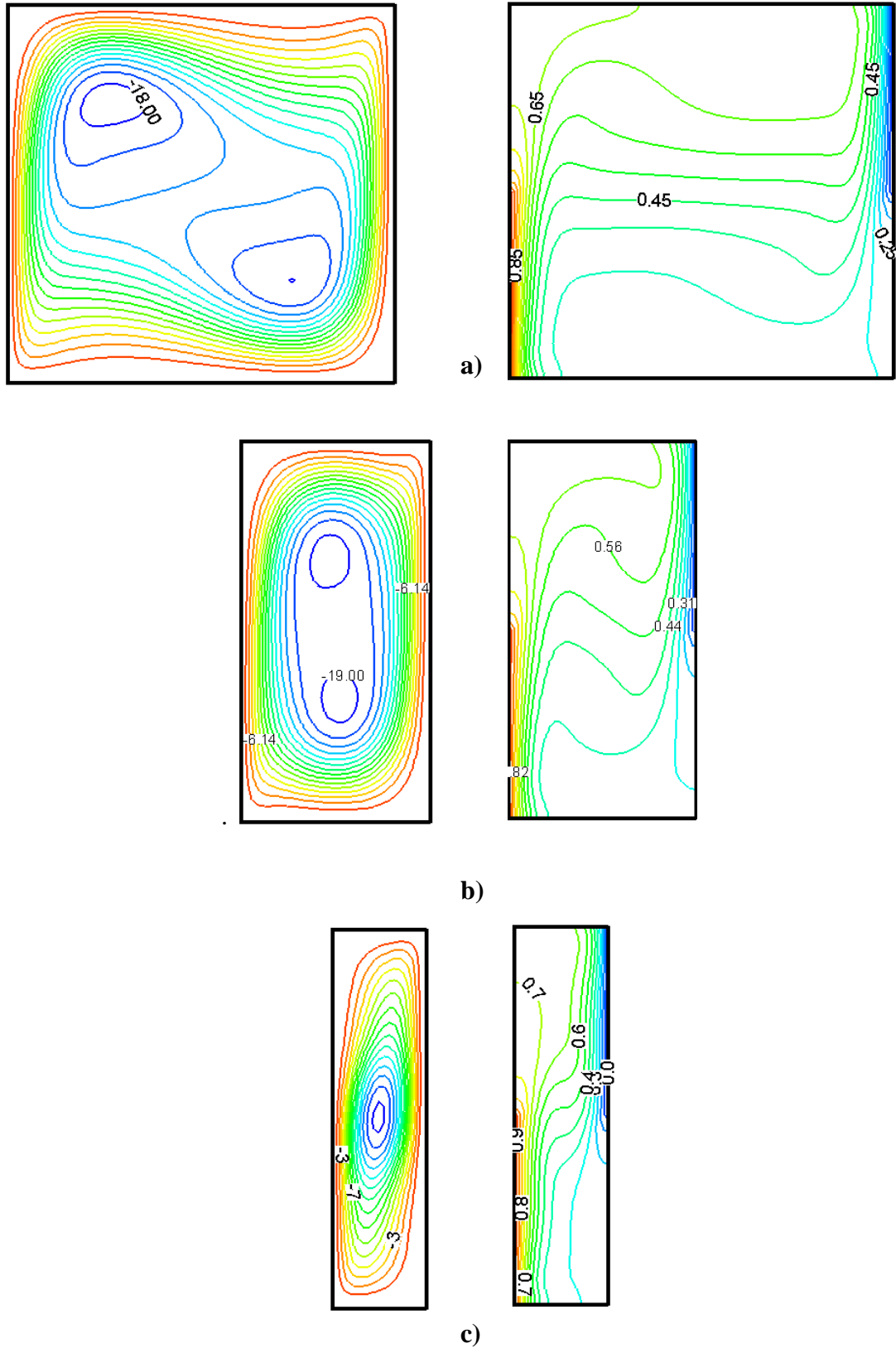


Figure 4.17 : Lignes de courant (gauche) et température (droite), pour $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-1}$, et : a) $Ar = 1$; b) $Ar = 2$; c) $Ar = 4$

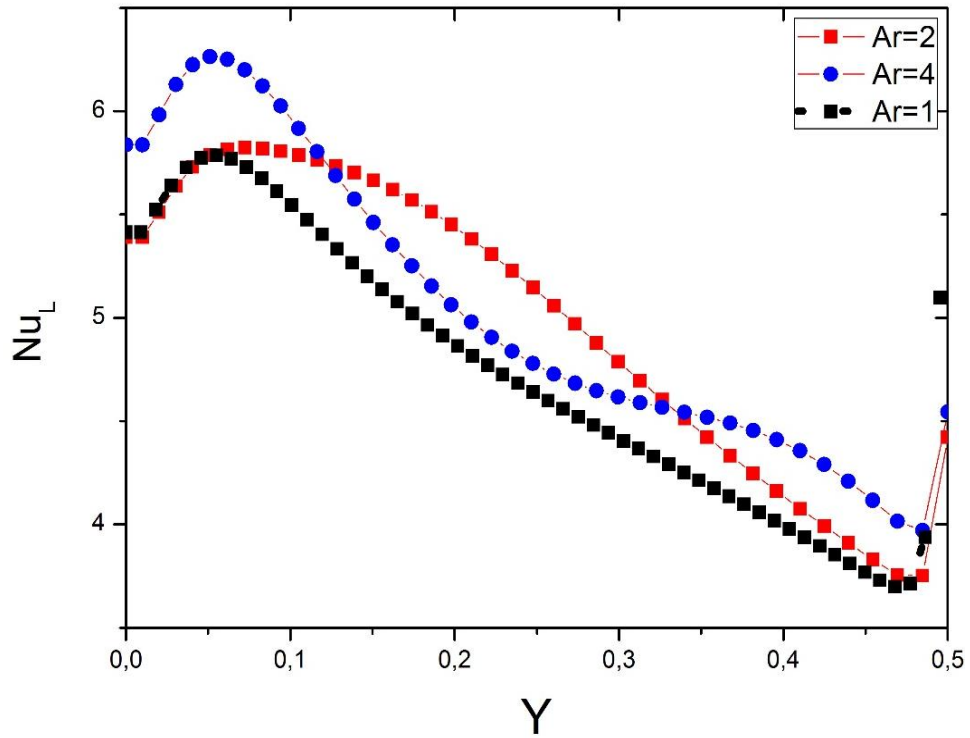


Figure 4.18 : Variation du nombre de Nusselt local avec Y pour différentes valeurs de Ar ; $Ra=10^6$ et $Da=0.1$

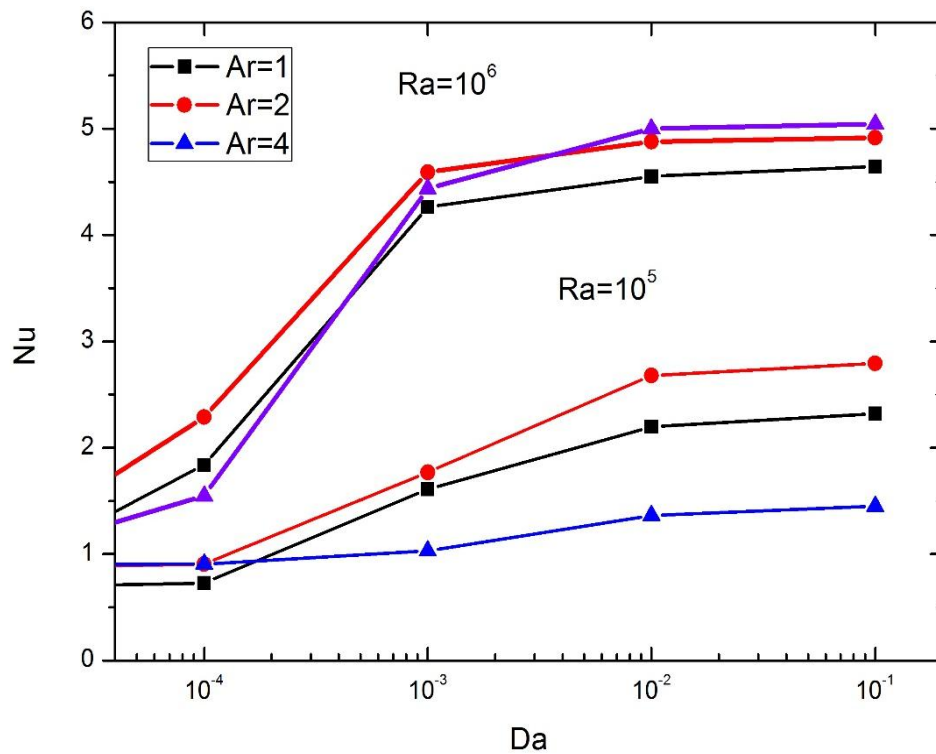


Figure 4.19 : Variation du nombre moyen de Nusselt en fonction du nombre de Darcy pour différentes valeurs de Ar ; $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$

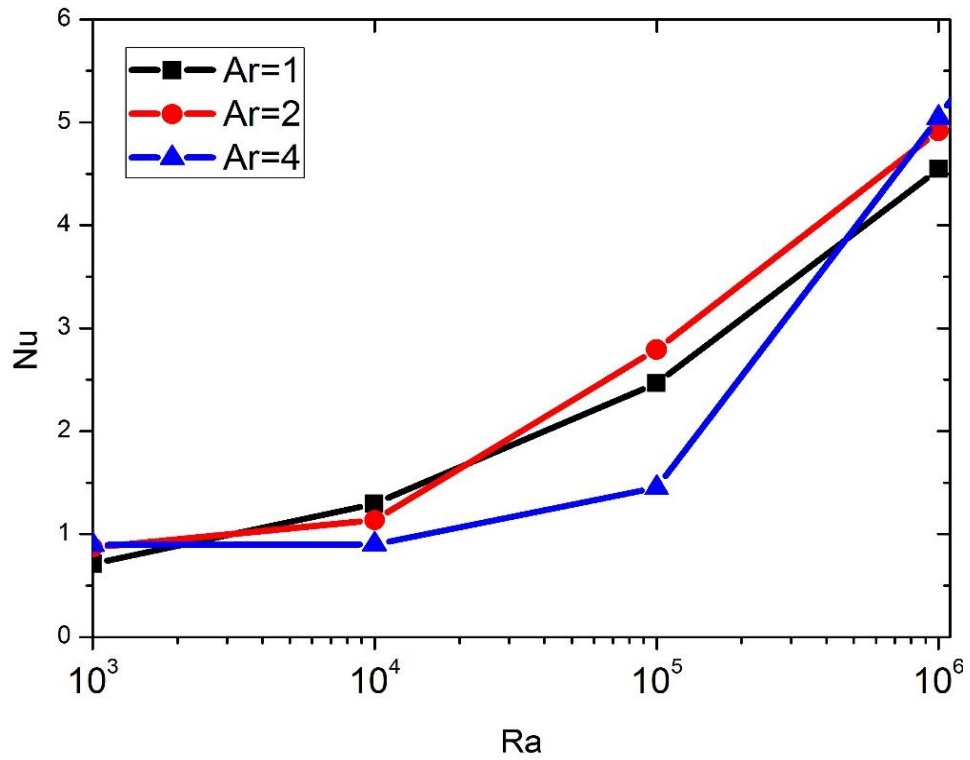


Figure 4.20 : Variation du nombre moyen de Nusselt en fonction de Ra pour différentes valeurs de Ar; $Da=10^{-1}$

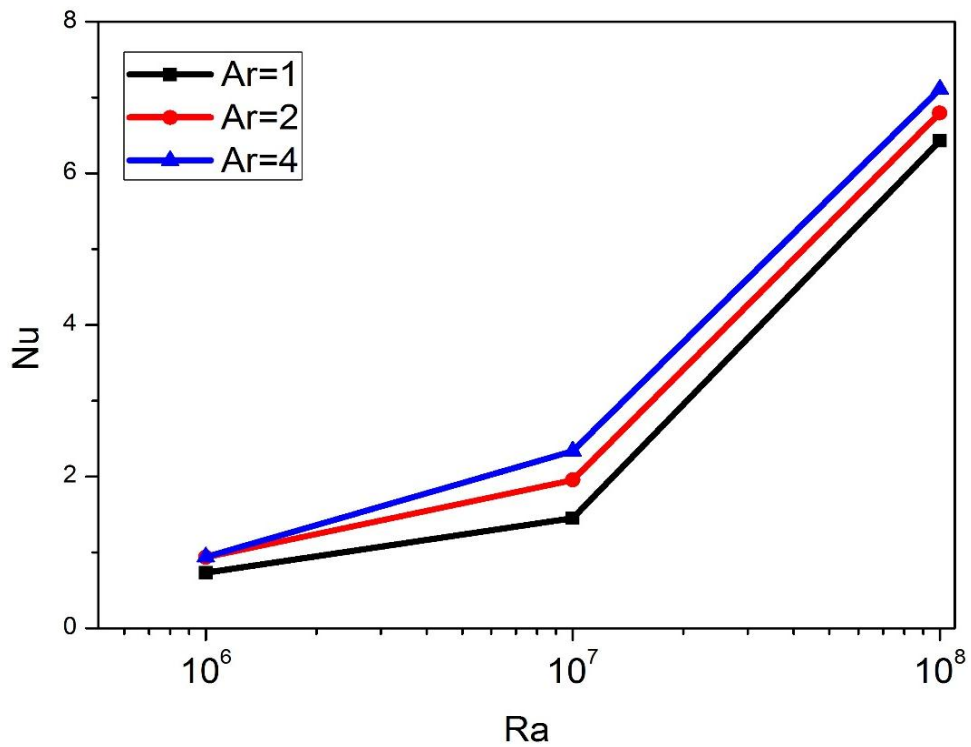


Figure 4.21 : Variation du nombre moyen de Nusselt en fonction de Ra pour différentes valeurs de Ar; $Da=10^{-5}$

4.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié la convection naturelle bidimensionnelle dans une enceinte rectangulaire poreuse, chauffée et refroidie par des températures uniformes sur les moitiés, gauche et droite des côtés verticaux. L'objectif est d'étudier les effets des conditions aux limites, le rapport de la conductivité thermique sur le transfert de chaleur dans les cavités rectangulaires de différents rapports de formes.

Compte tenu des résultats présentés, les principales conclusions suivantes ont été tirées comme suit.

- Les résultats de la présente étude concernant le rapport de capacité thermique σ confirme la validation de la valeur proposée par **Bergman et al. [70], Khanafer and Vafai [71]**.
- Le transfert de chaleur par convection est dominant pour les valeurs élevées de R_k . Pour un rapport de conductivité plus petit ($R_k = 1$) le taux de transfert de chaleur est moins important par rapport aux autres rapports qui correspondent à un même nombre de Darcy et à un même nombre de Rayleigh.
- Pour un nombre de Rayleigh $Ra \leq 10^4$ le transfert de chaleur est réalisé par le mode de conduction pour toutes les différentes valeurs du nombre de Darcy, et pour tous les différents rapports d'aspect Ar .
- La force d'écoulement et le transfert de chaleur augmentent avec l'augmentation des nombres de Rayleigh Ra et Darcy Da .
- Lorsque le paramètre du produit $Ra Da \geq 10^2$ le mode de convection devient dominant à $Ra \geq 10^5$.
- En augmentant le paramètre du produit $RaDa$, avec un nombre de Rayleigh croissant jusqu'à $Ra = 10^6$, le régime de convection est amélioré au rapport d'aspect $Ar = 2$.
- Cependant, le nombre de Rayleigh Ra au-delà de 10^6 , le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect Ar , c'est à dire avec la diminution du volume de l'enceinte.

4.6 Cas 2 : Cavité chauff e et refroidie par des températures de profils sinusoïdaux

La configuration  tudi e est une enceinte rectangulaire remplie d'un milieu poreux satur e par un fluide, chauff e et refroidie par des distributions de température sinusoïdales sur les moitiés, gauche et droite des côtés verticaux. Nos simulations ont été faites pour des nombres de Rayleigh $Ra = 10^3$ à 10^6 , des rapports d'aspect $Ar = 1$ à 5 , et des amplitudes des profils de températures sinusoïdaux $\lambda_H = 0,25, 0,5$ et 1 et $\lambda_C = 0, 0,25, 0,5$ et 1 . Le nombre de Prandtl et Darcy sont maintenus, $Pr = 1$ et $Da = 0,1$ respectivement.

Cette partie a pour but d'étudier l'effet du nombre de Rayleigh, rapport d'aspect, et des amplitudes des profils de températures d'échauffement et de refroidissement sur le comportement de l'écoulement et le transfert de chaleur.

4.6.1 Influence du nombre de Rayleigh

La figure 4.22 montre l'effet du nombre de Rayleigh de $Ra=10^3$ à 10^6 sur les lignes de courant et les lignes des isothermes pour une enceinte carr e ($Ar = 1$) chauff e par une température d'amplitude $\lambda_H = 0.5$ et refroidie par une température uniforme ($\lambda_C = 0$). Les courbes pr esent es pour les différentes valeurs du nombre de Rayleigh indiquent une forte influence sur la structure de l'écoulement, l'intensité de l'écoulement augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Pour les différentes valeurs de Ra , nous avons obtenu un écoulement monocellulaire dont le sens est horaire. On remarque aussi par cette figure que la conduction est le mode de transfert de chaleur dominant dans l'enceinte à cause de la faible force de circulation. Les isothermes parall es aux profils de distribution de température aux parois verticales viennent confirmer cette remarque.

La figure 4.23 montre l'effet du nombre de Rayleigh sur les lignes de courant et les lignes des isothermes pour une enceinte carr e ($Ar = 1$) et à des amplitudes de températures ($\lambda_H = 1$ et $\lambda_C = 0.5$) et ($\lambda_H = 1$ et $\lambda_C = 1$). La figure 4.23 a montré que la force de circulation est très faible, à cause du faible nombre de Rayleigh $Ra=10^3$ et de la domination de la conduction.

D'après la figure, la force de l'écoulement augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh Ra . Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente de 10^3 à 10^6 , la circulation entra n e par la flottabilité à l'intérieur de la cavité est également augment e, comme le montre la plus grande valeur des fonctions de courant $|\psi_{ext}| = 20.26$. On peut voir aussi que le mode de

convection du transfert de chaleur est dominant à la conduction pour les grandes valeurs de Ra. Les isothermes montrent une distribution presque symétrique pour des faibles nombres de Rayleigh en raison de la domination de la conduction et le gradient de température très faible au niveau du plan de symétrie. La couche limite thermique devient plus mince en augmentant le nombre de Rayleigh comme il est indiqué dans la figure 4.23c et d.

Afin d'analyser l'effet de Ra sur les transferts thermiques, nous avons représenté sur la figure 4.24 l'évolution du nombre de Nusselt local en fonction de Ra pour des différentes amplitudes λ_H et λ_C . Nous nous y attendions que le nombre de Nusselt local, avec un profil de température sinusoïdal sur la paroi, ait une variation différente de celle d'un cas isotherme. Le nombre de Nusselt local sur la partie chauffée de la paroi active est indiqué sur la figure pour $Ra=10^3$ à 10^6 . Nous constatons que l'augmentation de Ra a pour effet d'augmenter la valeur maximale du nombre de Nusselt local, cette croissance est d'autant plus élevée que les amplitudes de chauffage et de refroidissement λ_H et λ_C sont élevées. On observe aussi que dans la moitié inférieure de l'enceinte, les profils locaux de Nusselt sont symétriques à $Y = 0,25$.

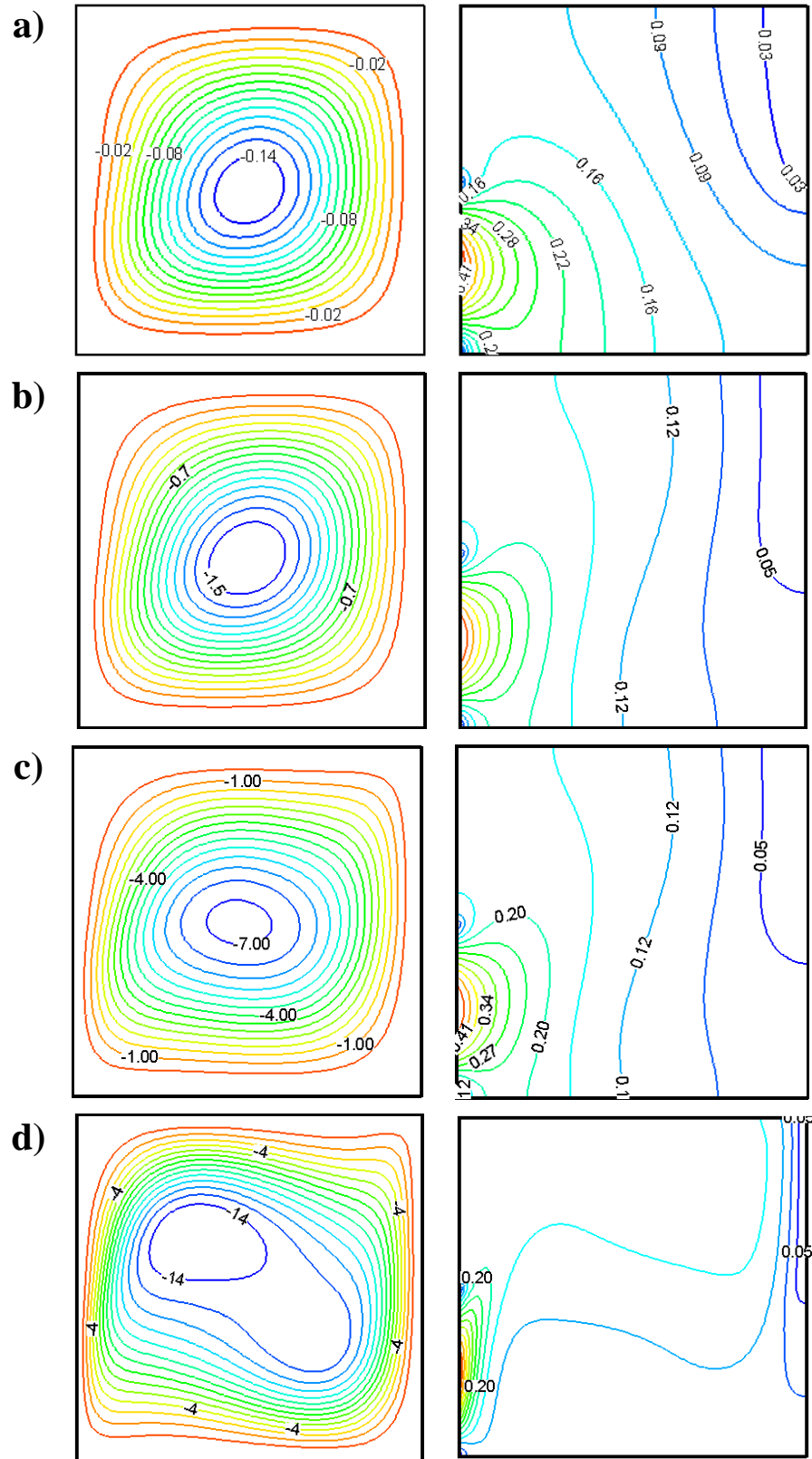
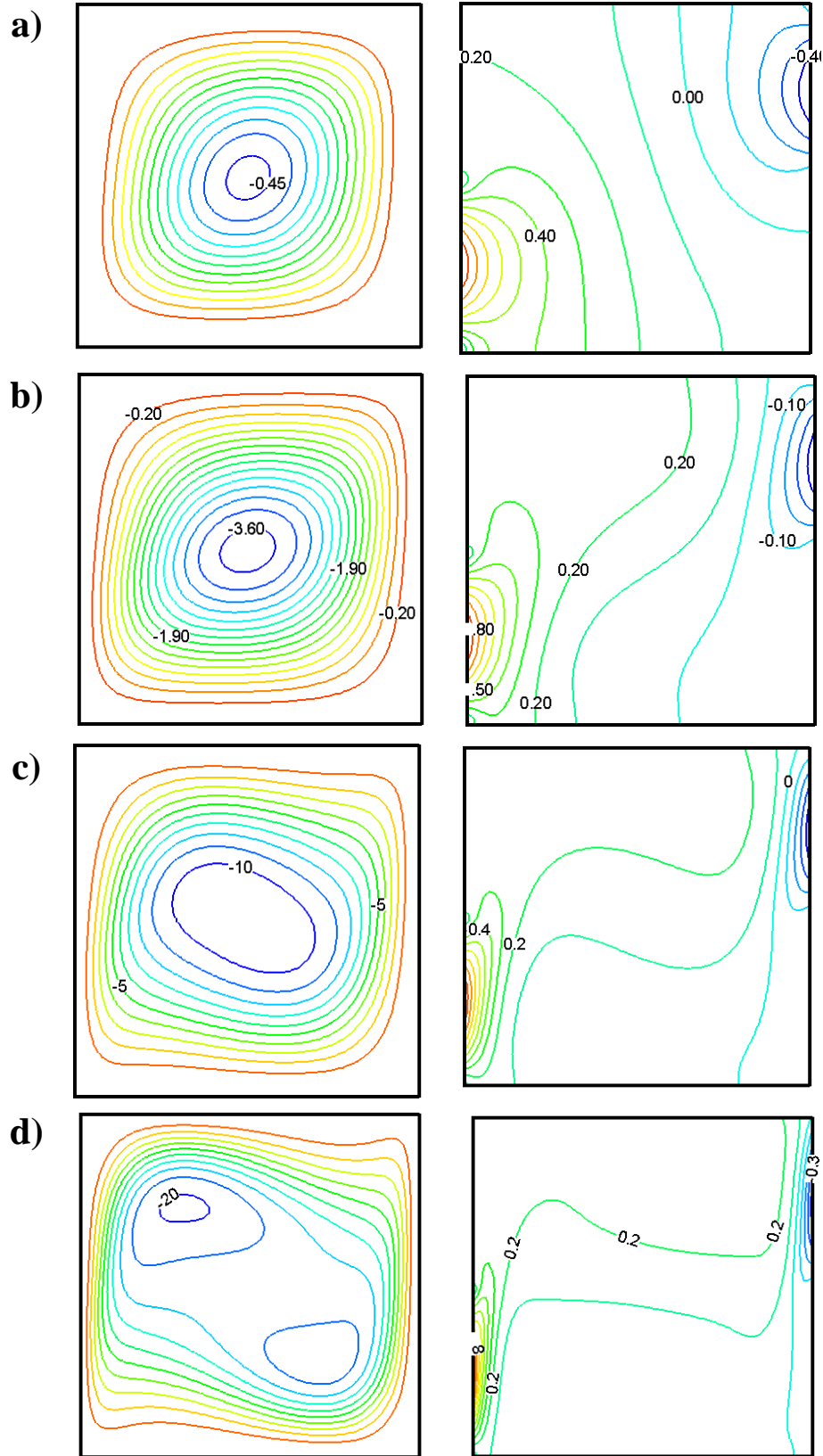
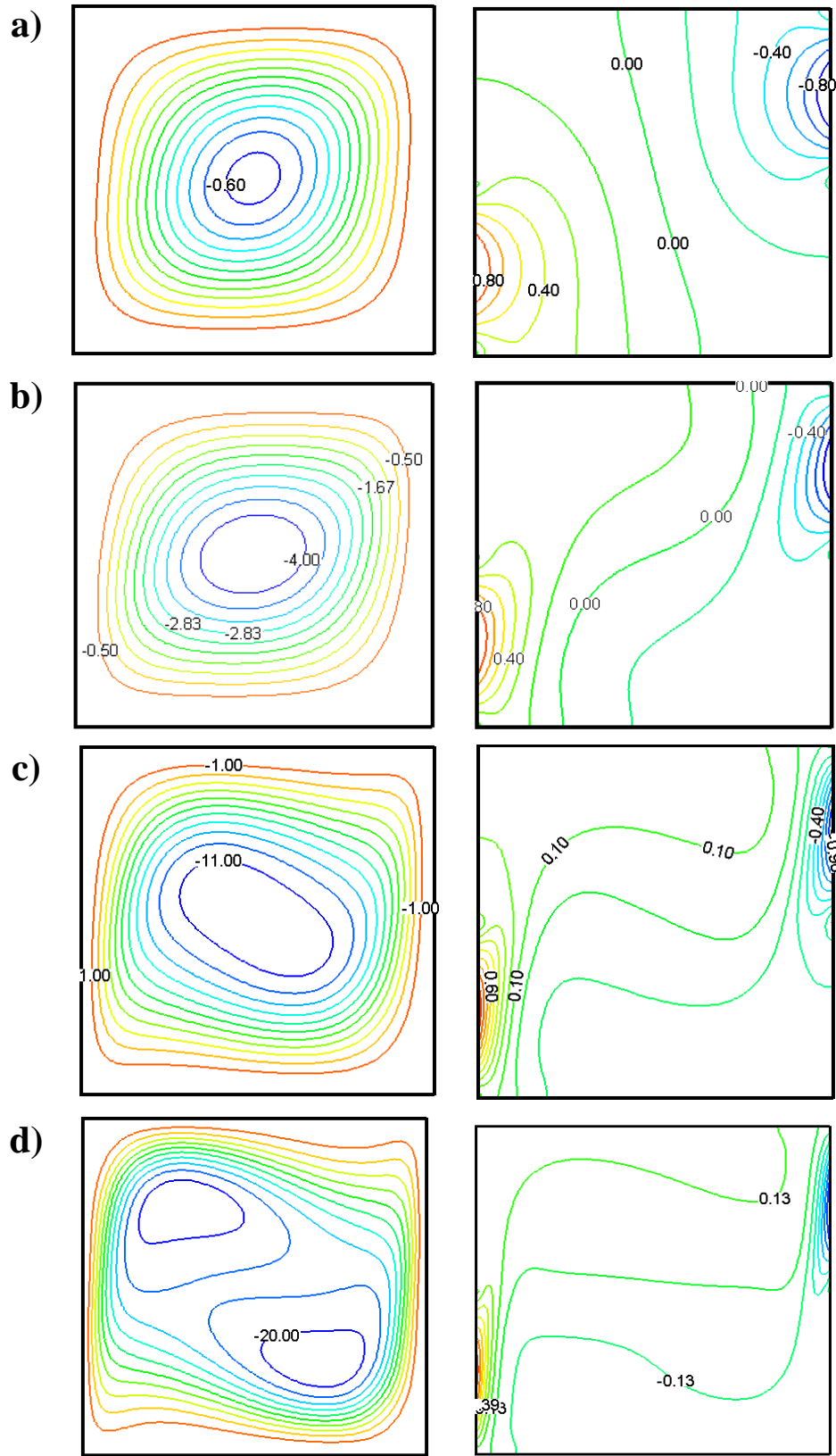


Figure 4.22 : Lignes de courant (gauche), température (droite) pour $Ar=1$, $\lambda_H=0.5$, $\lambda_c=0$ et Ra ; (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$, (c) $Ra=10^5$, (d) $Ra=10^6$



I. $\lambda_H = 1, \lambda_C = 0.5$



II. $\lambda_H=1, \lambda_C=1$

Figure 4.23 : Lignes de courant, température pour $Ar=1$, et Ra ; (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$, (c) $Ra=10^5$, (d) $Ra=10^6$

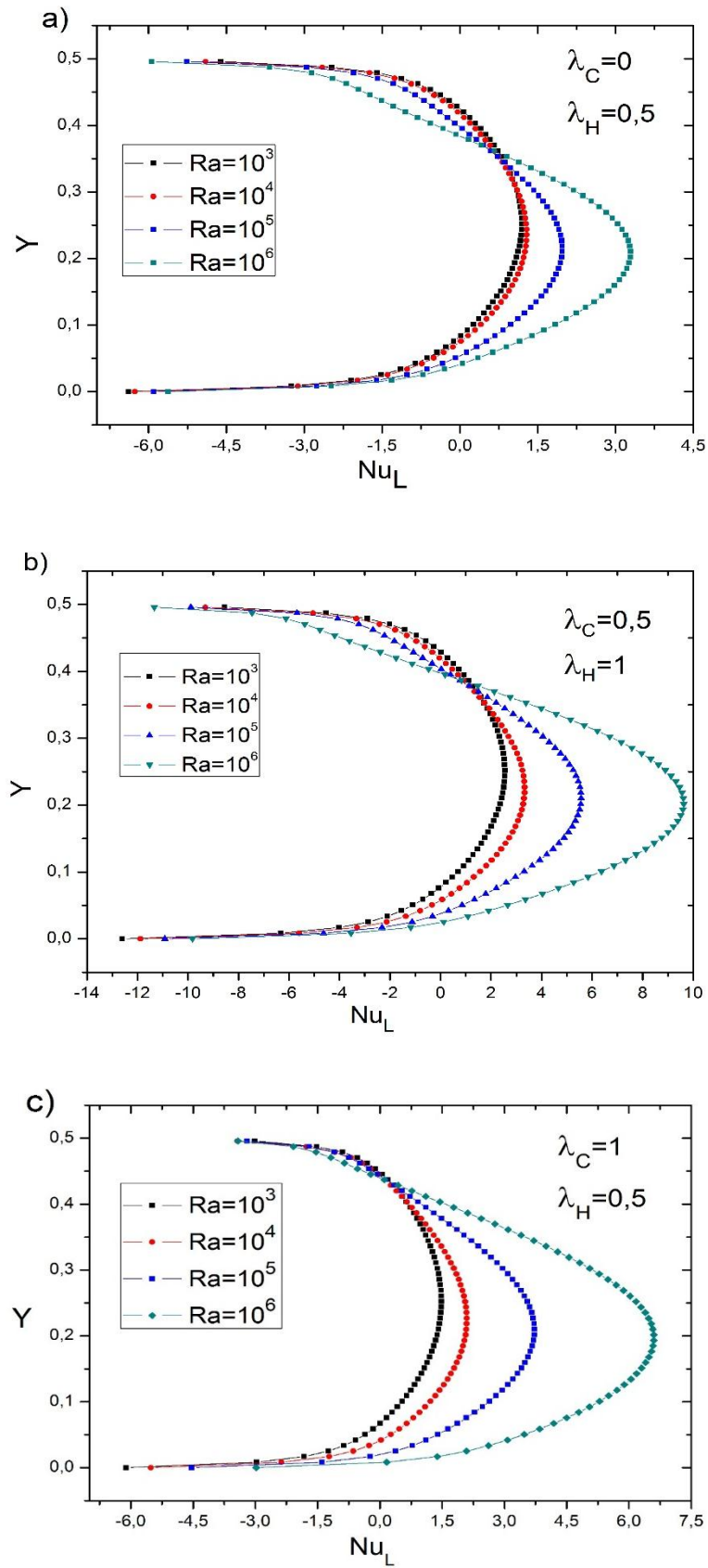


Figure 4.24 : Variation du nombre de Nussel locale le long de la paroi chauffée, avec les différents nombre de Rayleigh $Ar=1$

Sur la figure 4.25, nous avons montré l'évolution transitoire du nombre de Nusselt qui caractérise le transfert thermique en fonction du nombre de Rayleigh pour $\lambda_H = 1$ et $\lambda_C = 0.25$. A partir de cette figure on peut distinguer que :

Pour la valeur élevée de Rayleigh, $Ra = 10^6$, la valeur de Nu est grande au début, à cause du gradient élevé de température près de la paroi chaude. Ensuite, Nu chute à une valeur minimale en premier temps, puis augmente continuellement jusqu'à une valeur stable. Un comportement presque similaire a pu être observé pour $Ra = 10^5$, Nu commence par une valeur moindre au début et diminue à une valeur minimale, puis elle augmente jusqu'à ce qu'elle converge vers une valeur maximale en régime permanent. Cependant pour $Ra = 10^3$ et 10^4 , la valeur de Nu commence par des valeurs minimales et augmente continuellement à des valeurs stables. Ce comportement est lié à la conduction qui est le mode de transfert de chaleur dominant pour des faibles valeurs de Ra.

A partir de cette figure, on a distingué aussi que l'état stable du transfert thermique est atteint plus rapidement avec l'augmentation de Ra. C'est une conséquence de l'augmentation du mouvement convectif avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

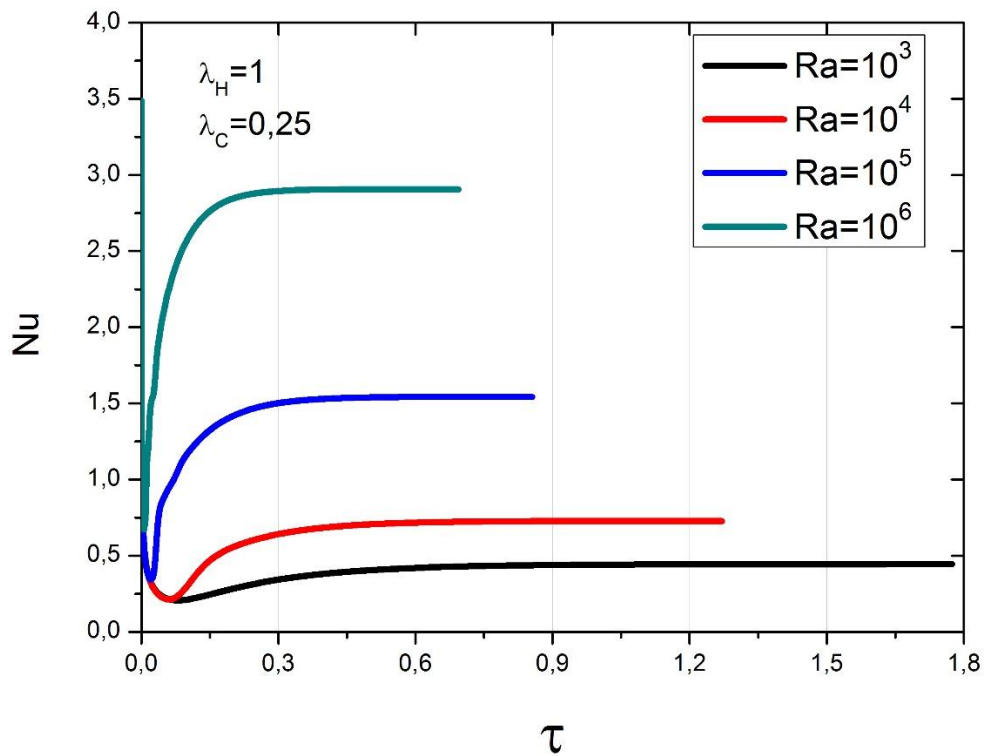
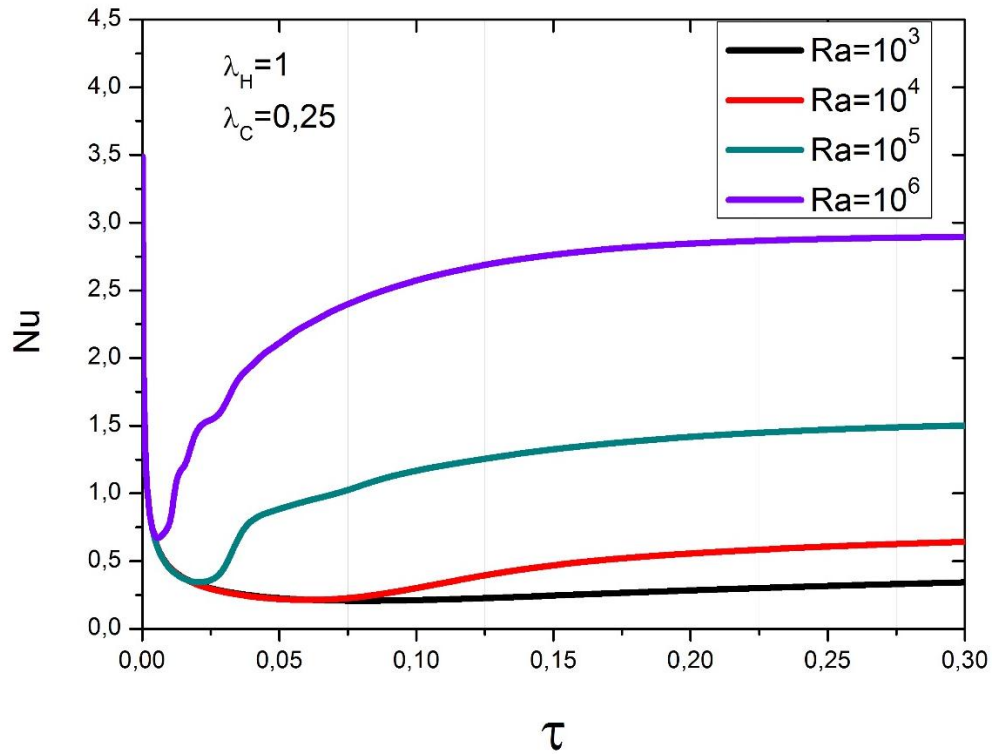


Figure 4.25 : Variation temporelle du nombre de Nussel moyen, de $t = 0$ à l'état stable final pour différents nombres de Rayleigh ; et $\varepsilon = 0.7$

4.6.2 Influence des amplitudes des profils de température

Pour bien illustrer l'effet d'amplitude de la fonction sinusoïdale de la température chaude sur le nombre de Nusselt, nous avons montré sur la figure 4.26, la variation du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs d'amplitude λ_H avec $Ar=1$ et $Ra = 10^5$. Puisque la valeur de l'amplitude λ_H est directement liée à la distribution de la température sur la moitié inférieure de la paroi, nous remarquons que l'augmentation des valeurs d'amplitude λ_H de cette distribution affecte une augmentation du taux de transfert de chaleur à l'intérieur de l'enceinte.

L'augmentation du taux de transfert de chaleur à l'intérieur de l'enceinte devient plus importante pour un refroidissement d'amplitude $\lambda_C = 1$ que pour un refroidissement uniforme d'amplitude $\lambda_C = 0$.

La figure 4.27 montre la variation du nombre de Nusselt local Nul pour un refroidissement d'amplitude $\lambda_C = 0$ pour différentes valeurs d'amplitude à un nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$. Il est clairement observé que les courbes de cette figure sont symétriques dans la moitié inférieure de l'enceinte à $Y = 0,25$ et que les valeurs maximales de Nul augmentent en augmentant les valeurs d'amplitude d'échauffement λ_H . Cette augmentation des taux locaux de transfert de chaleur est affectée par la diminution du nombre de Rayleigh.

La variation du nombre de Nusselt local pour différents amplitude λ_C de refroidissement pour un chauffage d'amplitude $\lambda_H = 1$ et $Ra=10^4$ est illustrée par la figure 4.28. Comme prévu, le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la valeur d'amplitude λ_C . L'augmentation des valeurs locales de Nusselt sont grandes autant que λ_C est augmentée à un nombre de Ra plus élevé. Les profils de nombre de Nusselt sont symétriques sur la moitié inférieure de l'enceinte à $Y = 0,25$.

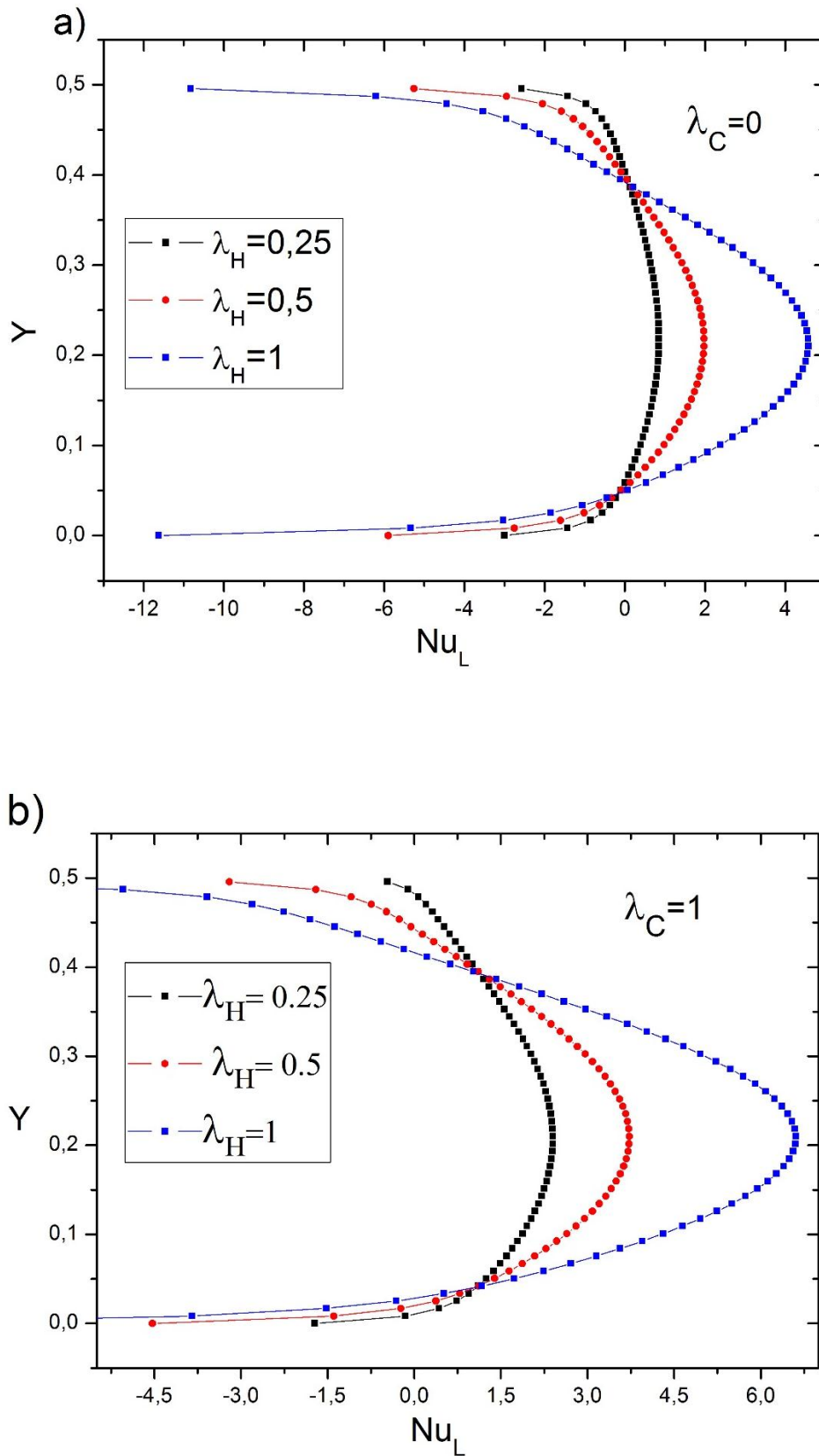


Figure 4.26 : Variation du nombre de Nusselt local avec Y pour différentes valeurs de λ_H avec (a) : $\lambda_C=0$ et (b) ; $\lambda_C=1$ à $Ra = 10^5$ et $Ar = 1$

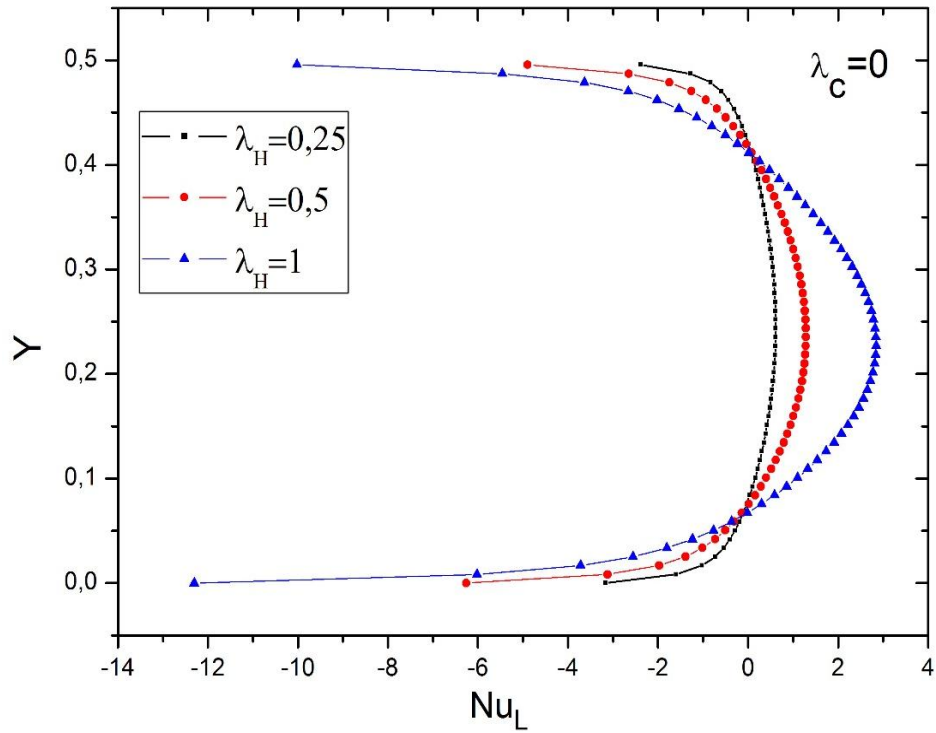


Figure 4.27 : Nombre de Nusselt local le long de la moitié chauffée de la paroi pour différentes amplitudes de chauffage à $\lambda_c = 0$ et $Ra = 10^4$

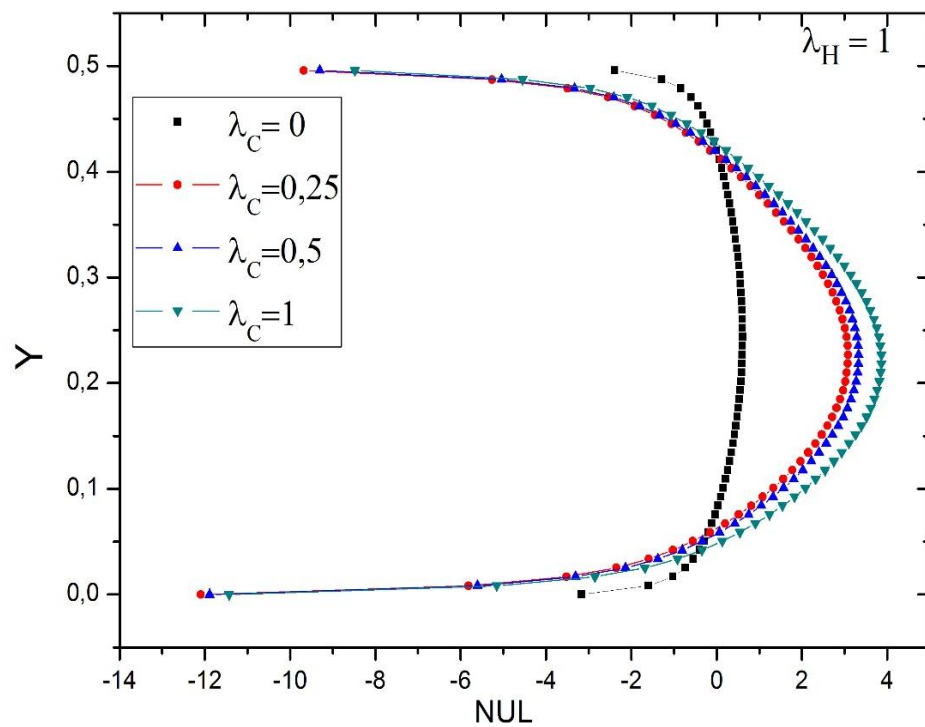


Figure 4.28 : Nombre de Nusselt local le long de la moitié chauffée de la paroi pour différentes amplitudes de refroidissement; $\lambda_H = 1$ et $Ra = 10^4$

La figure 4.29 résume l'effet du refroidissement uniforme ($\lambda_C = 0$) et non uniforme sur la variation du nombre de Nusselt moyen Nu , dans une enceinte carrée ($Ar = 1$) et pour les valeurs du nombre de Rayleigh variant de 10^3 à 10^6 . D'après cette figure, on observe que Nu augmente avec l'augmentation d'amplitude de refroidissement λ_C , d'amplitude λ_H d'échauffement ainsi du nombre de Rayleigh Ra .

La variation du nombre de Nusselt moyen à l'état d'équilibre avec différentes valeurs de Ra pour différentes valeurs d'amplitude de température de refroidissement λ_C est illustrée sur la figure 4.30. Sur cette figure on observe que pour une même valeur de λ_H , Nu augmente avec l'augmentation d'amplitude de refroidissement λ_C .

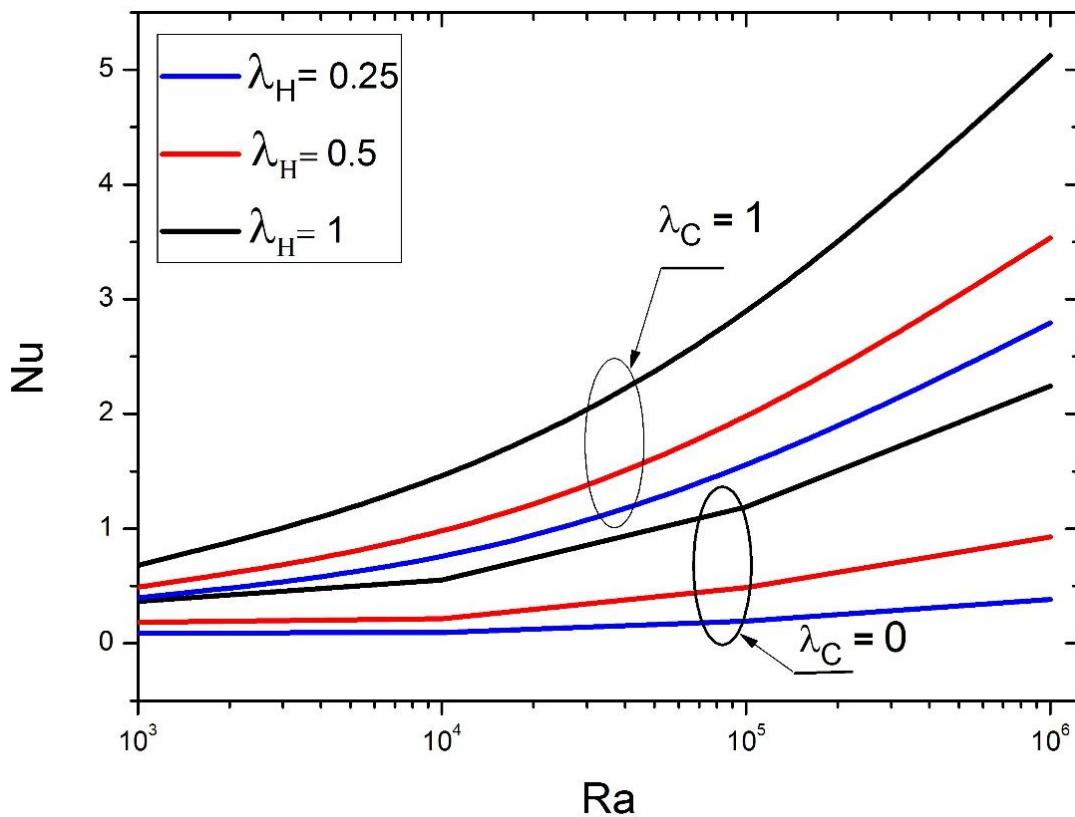


Figure 4.29 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes valeurs de λ_H ; $Ar = 1$

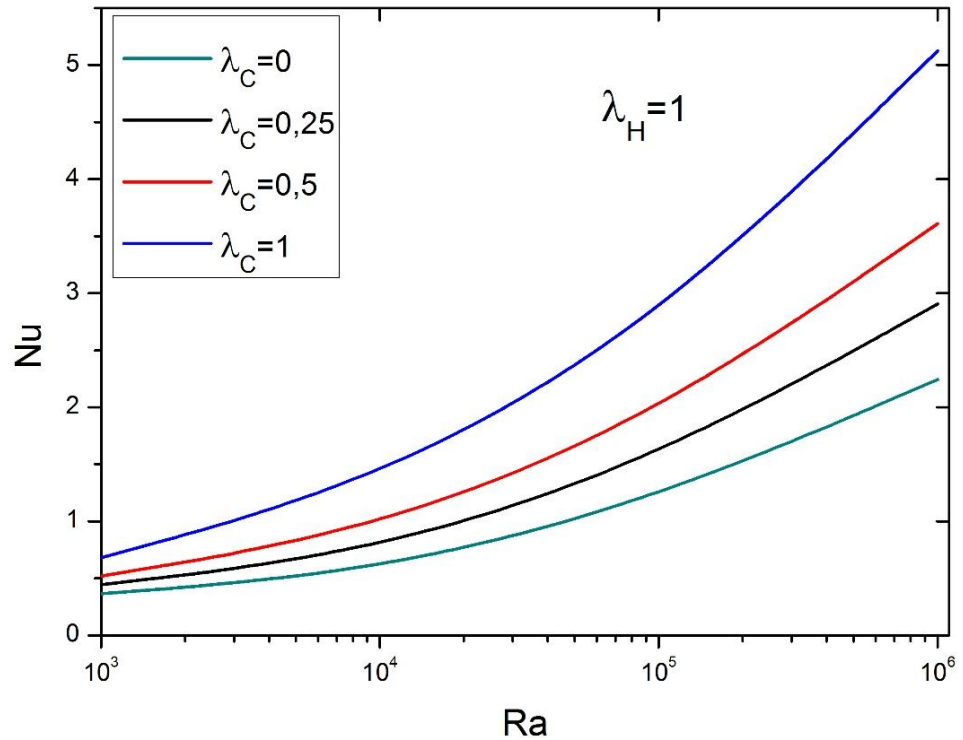


Figure 4.30 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes amplitudes de refroidissement λ_C et $\varepsilon = 0.7$

La figure 4.31 illustre les variations transitoires du nombre de Nusselt moyen, Nu, sur la paroi chaude pour différentes valeurs d'amplitudes de température d'échauffement λ_H , à un refroidissement d'amplitude $\lambda_C = 0$ et à une valeur de $Ra=10^4$. Initialement, les valeurs du nombre de Nusselt sont minimales puis elles sont augmentées continuellement jusqu'à une valeur constante à l'état stable. Ce comportement est lié à la conduction qui est le mode de transfert de chaleur dominant dans la cavité pour une faible valeur du nombre de Rayleigh Ra.

La valeur en régime permanent a été atteinte plus rapidement en augmentant l'amplitude de température d'échauffement λ_H .

La figure 4.32 montre les variations transitoires du nombre de Nusselt moyen, Nu, sur la paroi chaude pour différentes valeurs d'amplitude de température de refroidissement λ_C à un échauffement d'amplitude $\lambda_H= 1$ et à $Ra=10^4$. Pour les amplitudes $\lambda_C>0$, la valeur de Nu est grande au début du temps, et elle diminue à une valeur minimale puis elle augmente avec le temps jusqu'à ce qu'elle converge vers une valeur constante en régime permanent. La valeur en régime permanent est atteinte plus rapidement avec l'augmentation d'amplitude de température de refroidissement λ_C .

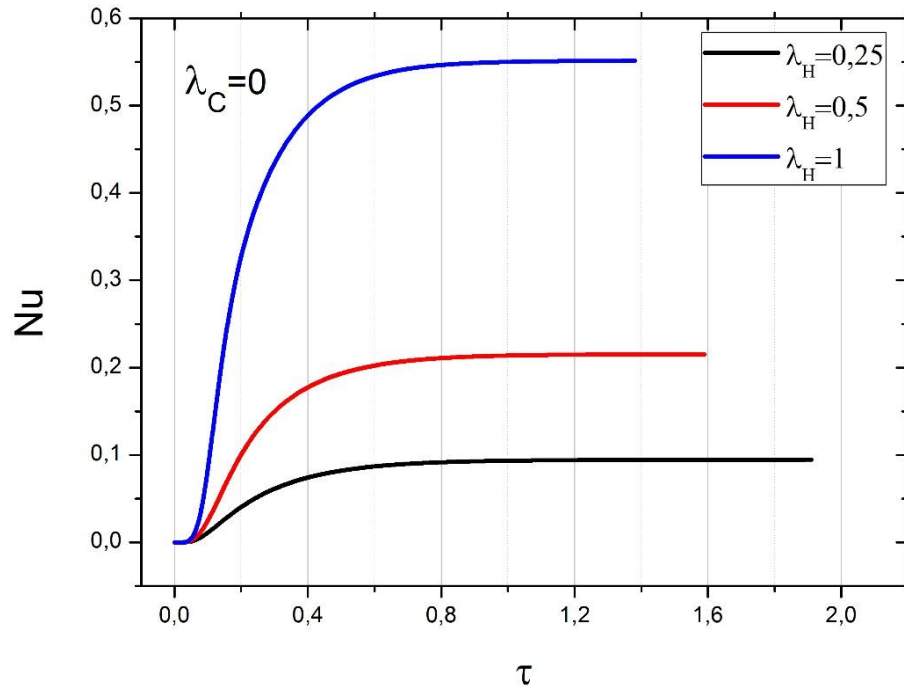


Figure 4.31 : Variation temporelle du nombre de Nusselt moyen, de $t = 0$ à l'état stable final, pour différents amplitudes d'échauffement λ_H à $Ra=10^4$ et $\varepsilon = 0.7$

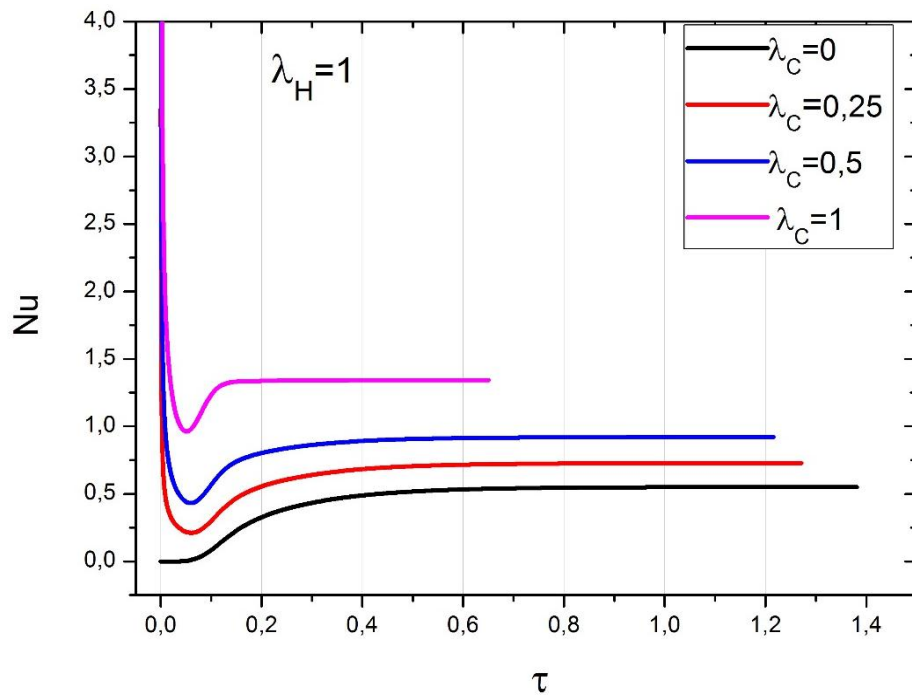
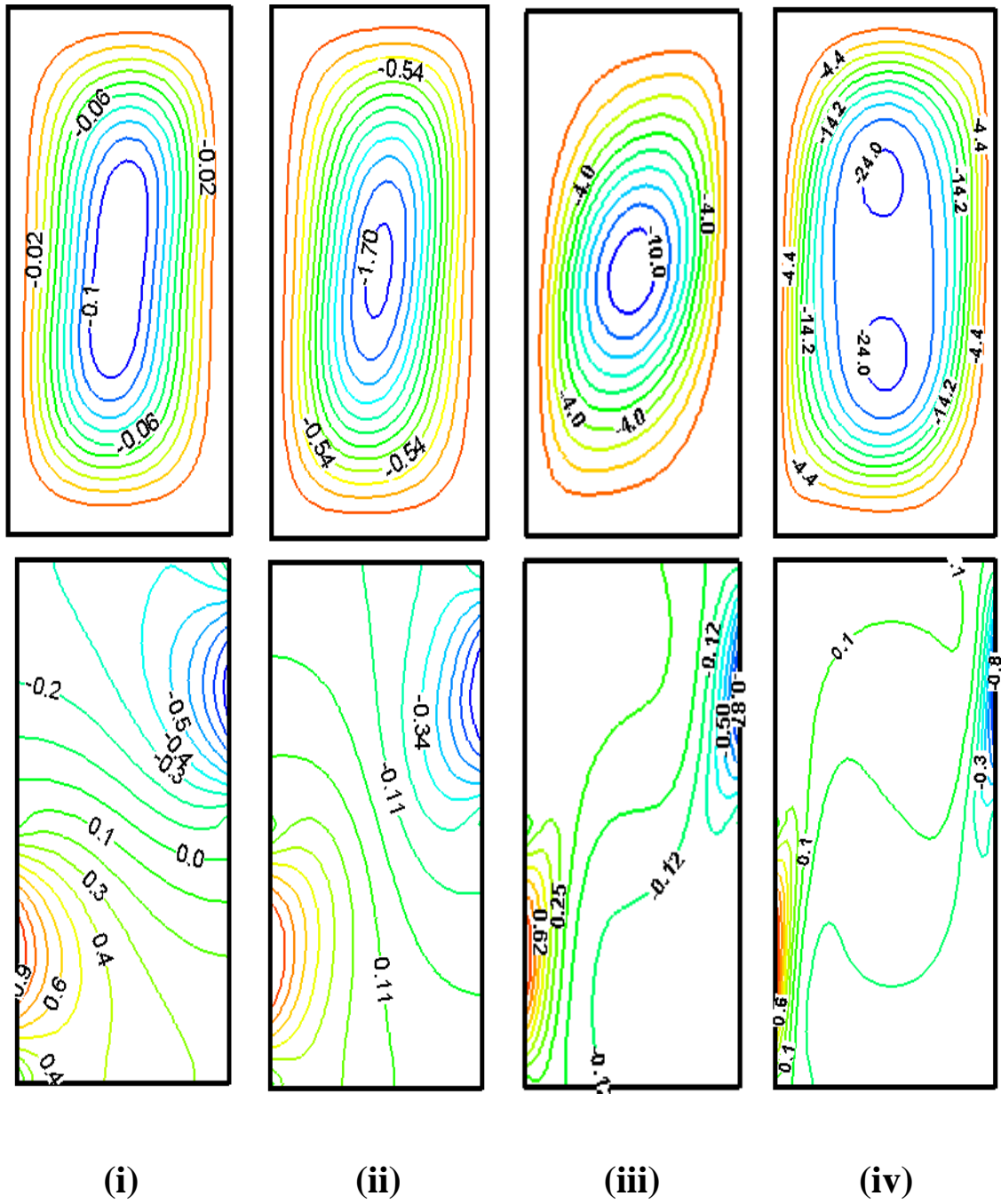


Figure 4.32 : Variation temporelle du nombre de Nusselt moyen, de $t = 0$ à l'état stable final pour différents amplitudes de refroidissement λ_C ; $\varepsilon = 0.7$ et $Ra=10^4$

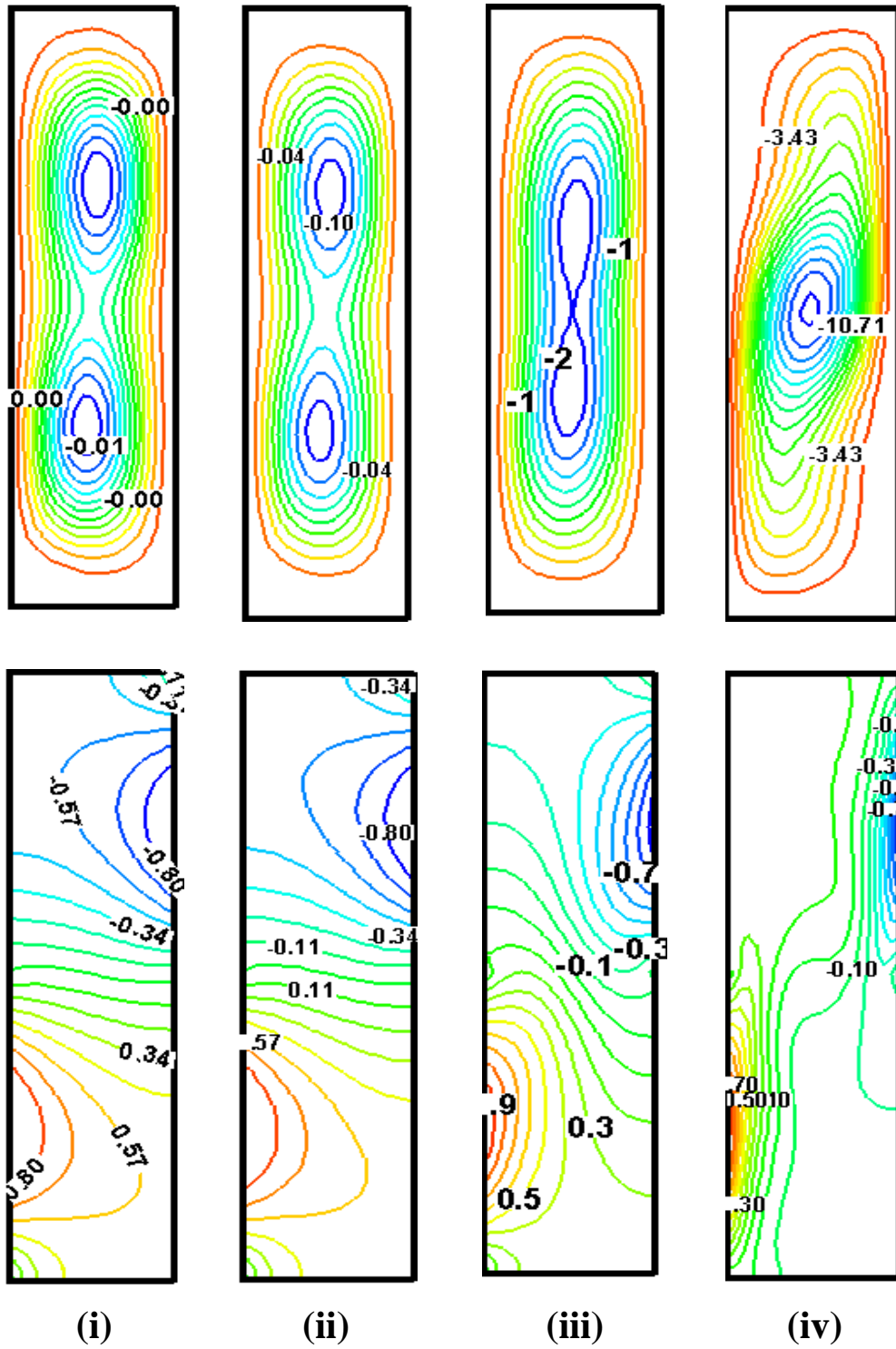
4.6.3 Influence du rapport d'aspect Ar

Les deux figures 4.23 et 4.33, montrent l'effet du rapport d'aspect sur les lignes de courant et les isothermes pour différentes valeurs de Ra avec les amplitudes $\lambda_H = 1$ $\lambda_C = 1$. Ces deux figures indiquent une forte influence sur la structure de l'écoulement ; l'intensité de l'écoulement augmente avec la diminution du rapport d'aspect Ar. Cependant cette croissance est plus élevée dans la cavité de Ar = 2 pour une valeur de Ra élevée. Pour les valeurs de Ar = 1 et 2, nous avons obtenu un écoulement monocellulaire dont le sens est horaire avec une stratification thermique, en outre pour un Ar = 4 deux cellules ont été formées au centre des deux parties dans le plan de symétrie à Y = 0,5 tournant dans le sens horaire. En augmentant Ra à 10^6 , une seule cellule tournant dans le sens horaire est formée. On peut voir aussi que la force d'écoulement devient forte à $Ra \geq 10^5$ pour Ar = 1 et 2, et que le mode de convection est le mécanisme du transfert de chaleur dominant dans les cavités pour tels rapports d'aspect. Pour Ar = 4, la force de circulation est faible et la convection domine à un nombre de Ra très élevé.

La figure 4.34 montre un effet différent de Ar sur la structure de l'écoulement, la cavité de rapport d'aspect Ar = 4 est uniformément refroidie ($\lambda_C = 0$), la force de circulation est faible et la distribution de la température est similaire à celle d'un fluide stationnaire et le transfert de chaleur est dû à la pure conduction pour des nombres de Rayleigh $Ra \leq 10^5$. En augmentant le nombre de Rayleigh de Ra = 10^3 à 10^6 , $|\psi_{ext}|$ a évidemment augmenté de 0,008 à 12.



a) $Ar = 2$



b) Ar = 4

Figure 4.33 : Lignes de courant (haut), température (bas), **a) Ar = 2, b) Ar = 4**

(i) $Ra=10^3$, (ii) $Ra =10^4$, (iii) $Ra = 10^5$ et (iv) $Ra = 10^6$

pour, $\lambda_H=1$ et $\lambda_C=1$

Les figures 4.35 et 4.36 sont tracées pour obtenir l'effet du rapport d'aspect Ar sur le nombre de Nusselt local pour différentes amplitudes de refroidissement $\lambda_C = 1$ et $\lambda_C = 0$ respectivement, à une valeur de $Ra = 10^5$. D'après ces deux figures, on remarque que les profils de nombre de Nusselt demeurent symétriques sur la moitié inférieure de l'enceinte pour tous les facteurs de forme Ar et que la valeur maximale du nombre de Nusselt local augmente en diminuant ce rapport.

Ceci s'explique par le fait de la diminution du volume de l'enceinte.

Les transferts thermiques augmentent avec λ_C quel que soit la valeur de Ar .

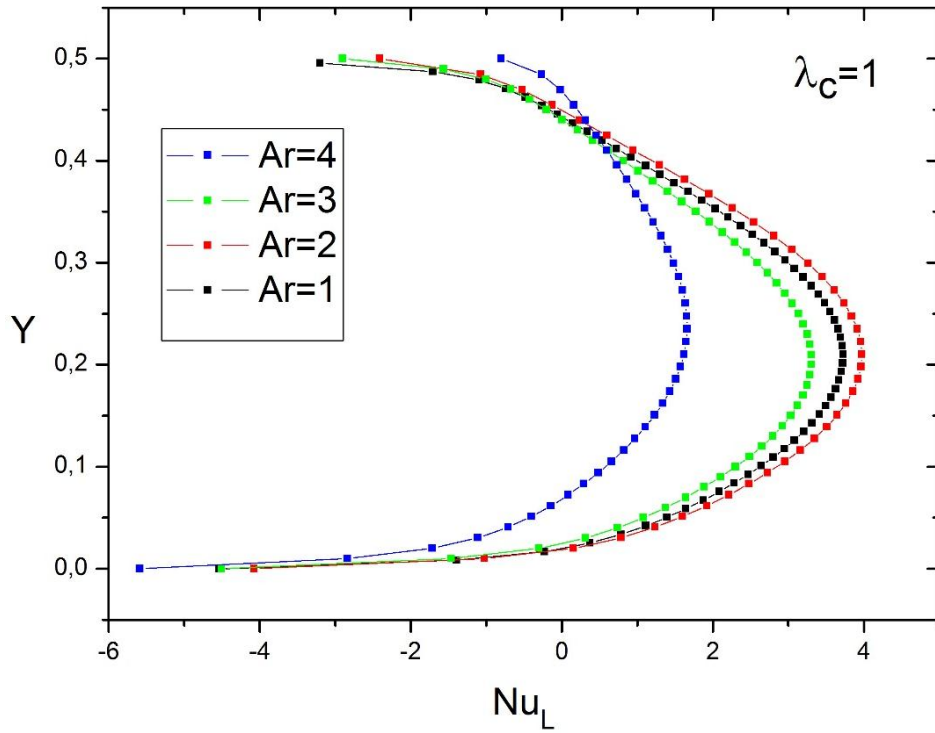


Figure 4.35 : Variation du nombre de Nusselt local en fonction de Y pour différentes valeurs de $Ar, \lambda_H = 0,50$ et $Ra = 10^5$

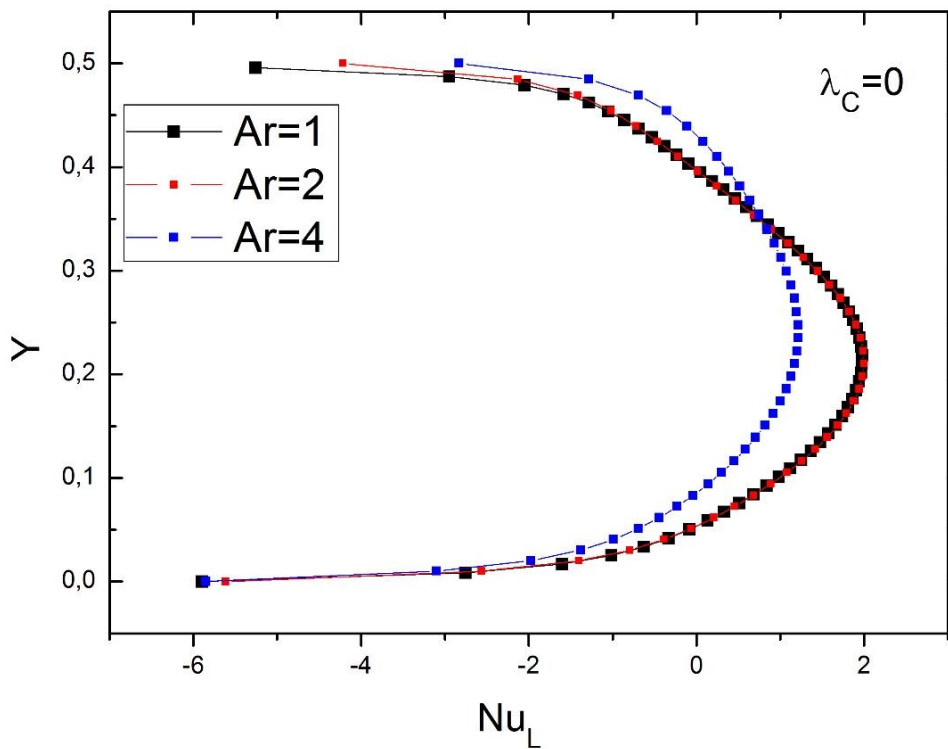


Figure 4.36 : Variation du nombre de Nusselt local en fonction de Y pour différentes valeurs de $Ar, \lambda_H = 0,50$ et $Ra = 10^5$

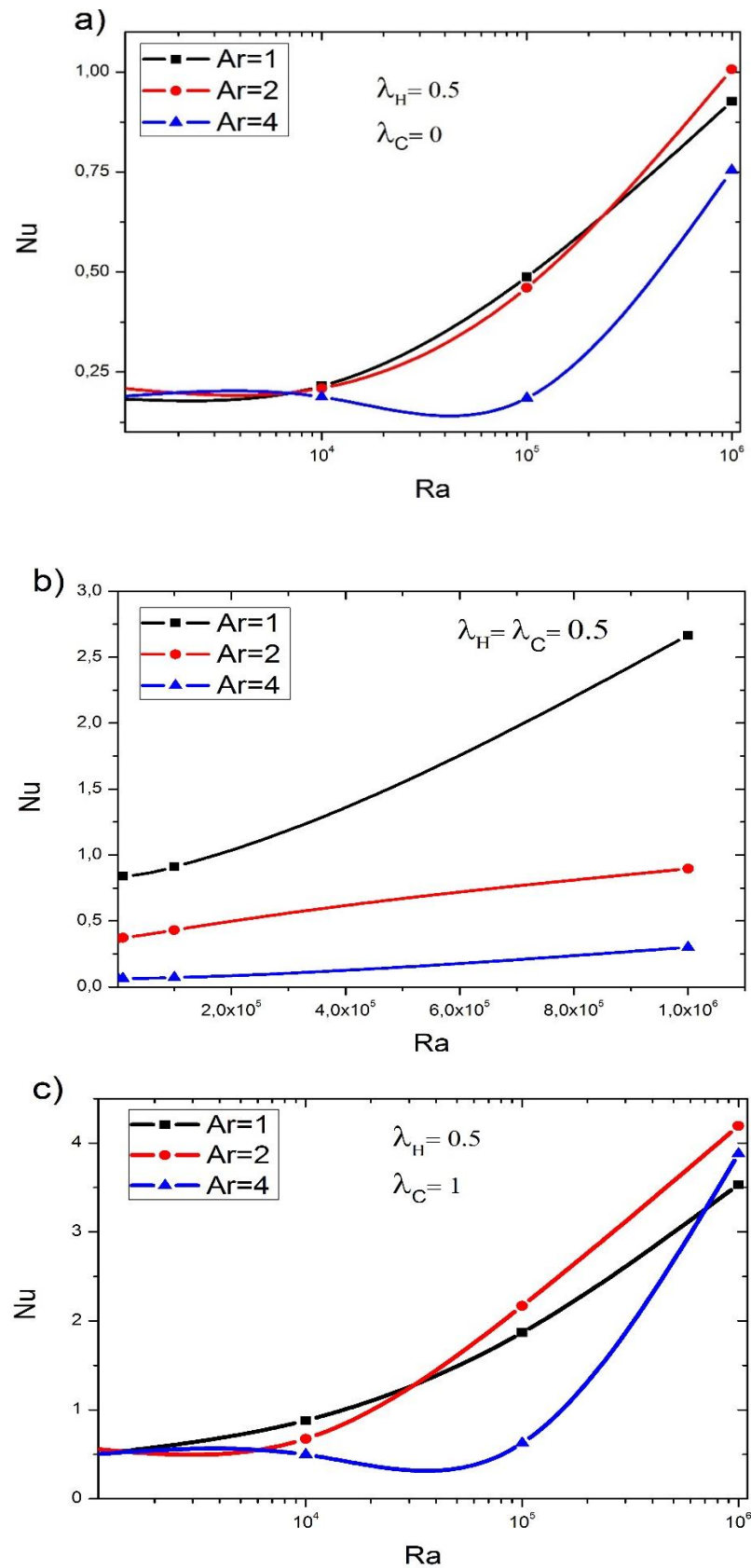


Figure 4.37 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour $\lambda_H = 0.5$ et différentes λ_C ; (a) $\lambda_C = 0$, (b) $\lambda_C = 0.5$ et (c) $\lambda_C = 1$

La figure 4.37 représente la variation du nombre moyen de Nusselt avec le nombre de Rayleigh pour différentes valeurs du rapport d'aspect Ar et amplitude de chauffage $\lambda_H = 0,5$. On constate que le transfert de chaleur est dû à la pure conduction dans le cas du refroidissement $\lambda_C = 0$, pour tous les nombres de Rayleigh et quelque soit la valeur de Ar . Pour les valeurs d'amplitude de refroidissement $\lambda_C \leq 0,5$, la conduction reste dominer dans les cavités de rapport d'aspect $Ar \geq 2$ pour toutes les valeurs des nombres de Rayleigh. Tandis que la convection devient dominante dans les cavités carrées ($Ar = 1$) pour des nombres élevés de Rayleigh ($Ra \geq 5 \times 10^5$). En augmentant encore λ_C à 1, la convection devient dominante dans les cavités de $Ar=1$ et 2, et améliorée à $Ar = 2$.

Les figures 4.38, 4.39 résument l'effet du rapport d'aspect Ar sur le nombre de Nusselt Nu en fonction de Ra pour les valeurs de $\lambda_C = 0$ et 1. On observe que la conduction est le mécanisme de transfert de chaleur dominant dans la cavité jusqu'à un Ra allant à environ 10^5 , pour un refroidissement uniforme ($\lambda_C = 0$). Tandis que pour un refroidissement plus élevé ($\lambda_C = 1$), ce mode de transfert domine dans la cavité jusqu'à environ 10^4 . A partir de ces valeurs du nombre de Rayleigh, les transferts thermiques augmentent et la convection devient graduellement dominante en diminuant le rapport d'aspect vers $Ar = 1$. Ensuite pour des nombres plus élevé de Ra , Nu augmente avec la diminution de Ar à cause du faible volume de l'enceinte, la convection devient dominante et elle est améliorée au rapport d'aspect $Ar = 2$. La pente des transferts est d'autant plus faible que λ_C diminue.

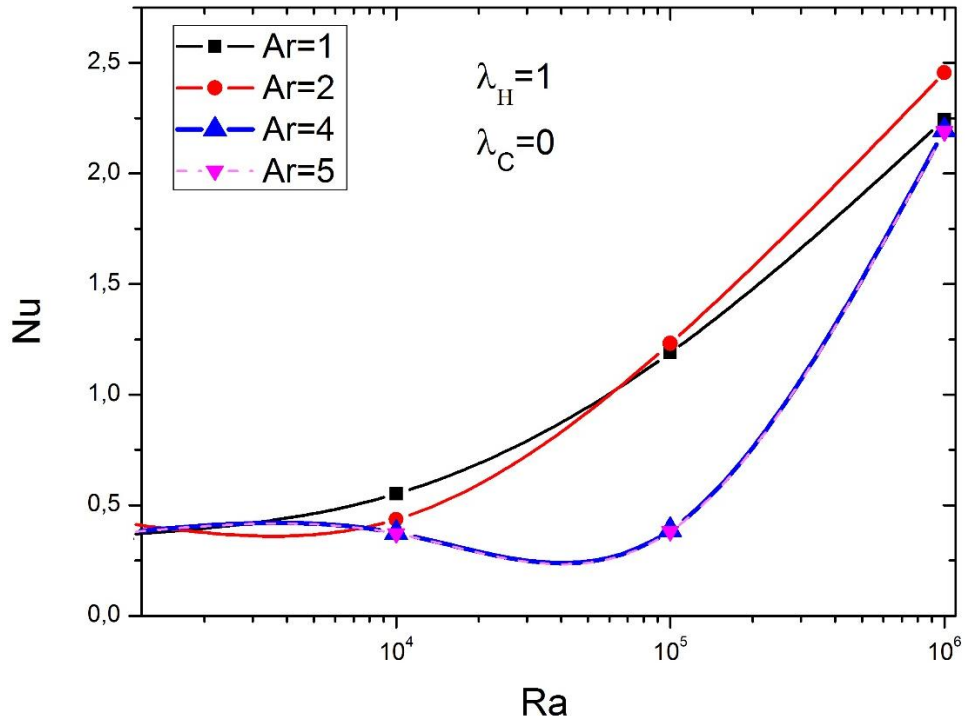


Figure 4.38 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes valeurs Ar pour $\lambda_C=0$

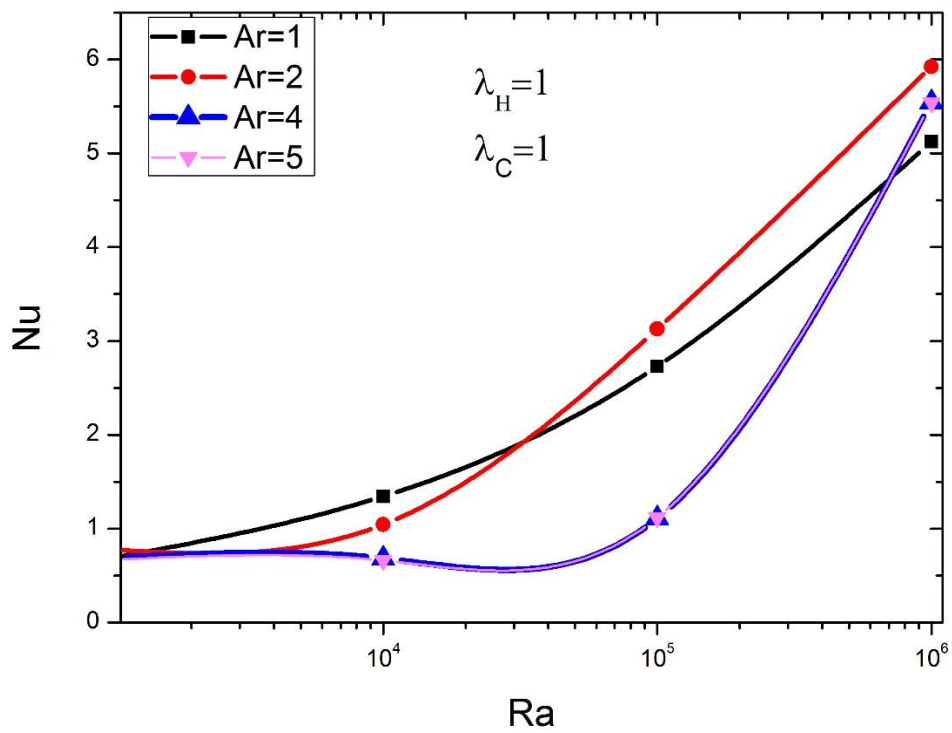


Figure 4.39 : Variation Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différentes valeurs Ar pour $\lambda_C = 1$

4.7 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié la convection naturelle bidimensionnelle dans une enceinte rectangulaire poreuse, chauffée et refroidie par des distributions de température de profils sinusoïdaux avec des différentes amplitudes sur les moitiés, gauche et droite des côtés verticaux.

L'objectif est d'étudier les effets des conditions aux limites (partielles et non uniformes) sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans les cavités rectangulaires de différents rapports d'aspect.

Compte tenu des résultats présentés, les principales conclusions suivantes ont été tirées comme suit.

- Pour un nombre de Rayleigh $Ra < 10^4$, le mode de transfert de chaleur qui domine dans la cavité est la conduction, pour toutes les différentes amplitudes des fonctions sinusoïdales des températures λ_H et λ_C correspondant au chauffage et au refroidissement non isothermes et pour tous les différents rapports de forme Ar .
- Pour un échauffement inférieur ($\lambda_H \leq 0,5$) et un refroidissement uniforme ($\lambda_C = 0$), la conduction domine dans toutes les cavités de n'importe quel rapport d'aspect Ar et pour n'importe quelle valeur du nombre de Rayleigh Ra . Et pour un refroidissement non uniforme d'amplitude $\lambda_C = 0,5$ le mode de conduction domine dans les cavités les plus long $Ar \geq 2$, indépendamment de la valeur du nombre de Rayleigh Ra .
- Le régime de conduction dominant, devient plus court en augmentant les amplitudes des températures λ_H , et λ_C et les valeurs du nombre de Rayleigh Ra , et la convection devient dominante graduellement lorsque le rapport de forme diminue vers $Ar = 1$.
- Pour une amplitude de température d'échauffement $\lambda_H = 1$, la convection débute à dominer à une valeur du nombre de Rayleigh d'environ 104 pour des valeurs supérieures d'amplitude de refroidissement ($\lambda_C = 1$), alors que pour un refroidissement uniforme ($\lambda_C = 0$), la convection débute à dominer à une valeur de Ra d'environ 105, correspondant à des cavités carrées.
- La valeur du nombre moyen de Nusselt augmente avec l'augmentation des amplitudes des fonctions sinusoïdales des températures. Les effets de l'amplitude de refroidissement

λC deviennent significatifs surtout pour des valeurs supérieures de l'amplitude de chauffage λH .

- La force d'écoulement et le transfert de chaleur augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et ils sont améliorés dans les cavités de rapport de forme $Ar = 2$ après la domination du régime de convection dans ces cavités.

Conclusion générale

Dans cette thèse, la simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans une cavité poreuse a été traitée. On s'est intéressé particulièrement à l'étude des écoulements et de transfert de chaleur, engendrés par la convection naturelle au sein d'une cavité rectangulaire rempli d'un milieu poreux confinant un fluide Newtonien. Diverses conditions aux frontières thermiques ont été appliquées, à savoir des températures uniformes et des températures de profil sinusoïdal avec différentes amplitudes.

L'objectif est d'étudier l'efficacité des conditions aux limites thermiques sur les caractéristiques de flux et sur le rapport et les modes de transfert de chaleur.

La résolution mathématique du problème est modélisée en utilisant la formulation de Darcy-Brinkman et l'approximation de Boussinesq pour le terme de poussée d'Archimède.

La convection a été initiée en imposant des températures aux frontières rigides et imperméables de l'enceinte. A ce titre, deux cas ont été examinés suivant que ces températures sont uniformes ou non uniformes.

Dans le but de résoudre numériquement les équations adimensionnelles gouvernantes et pour assurer le couplage vitesse pression, un programme de calcul en langage Fortran s'appuyant sur la méthode des volumes finis et utilisant l'algorithme SIMPLE, a été élaboré. La validation du programme de calcul est effectuée en se basant sur des résultats de publications antérieures.

L'écoulement et le transfert de chaleur sont analysés en fonction des valeurs des paramètres de contrôle du problème à savoir le nombre de Rayleigh Ra , de Darcy Da et les amplitudes des températures d'échauffement et de refroidissement λ_H et λ_C .

Dans le premier cas de la présente investigation, on a étudié la convection naturelle instationnaire dans une cavité poreuse rectangulaire. Le flux est provoqué par le chauffage partiel constant, à la moitié inférieure de la paroi verticale gauche et le refroidissement partiel à la moitié supérieure de la paroi verticale droite.

Les principaux résultats obtenus peuvent être résumés comme suit :

- Le rapport de capacité thermique σ confirme la validation de la valeur proposée par Bergman et al. [70], Khanafer et Vafai [71].
- La variation du rapport de conductivité thermique R_k et ses influences sur les structures de l'écoulement et les transferts thermiques ont été mises en évidence. Pour la gamme de paramètres envisagée, l'aspect inattendu concerne le minimum de transfert de chaleur trouvé à une valeur de $R_k = 1$. Ce minimum correspond à une restructuration de l'écoulement ; le transfert de chaleur par convection est plus dominant pour les valeurs élevées de R_k .
- Dans une autre étape nous avons analysé l'influence de la perméabilité du milieu poreux à travers le nombre de Darcy, sur la structure de l'écoulement ainsi que sur les transferts thermiques. Pour de faibles valeurs de perméabilité ont pour conséquence une chute brusque du taux de transfert de chaleur. Cette décroissance est d'autant plus faible que la perméabilité augmente.
- L'effet du nombre de Rayleigh qui caractérise l'intensité de la convection naturelle a été aussi mis en évidence. Le transfert thermique augmente avec le nombre de Rayleigh, et cet accroissement est d'autant plus important que la perméabilité augmente. A un nombre de Rayleigh $Ra \leq 10^4$, l'écoulement est monocellulaire et le transfert de chaleur est caractérisé par la dominance de la conduction thermique. La convection est dominante pour un nombre de Rayleigh $Ra \geq 10^5$ et un produit de $Ra Da \geq 10^2$.
- En augmentant le produit $Ra Da$ avec un nombre de Rayleigh croissant jusqu'à $Ra = 10^6$, le régime de convection est amélioré au rapport d'aspect $Ar = 2$. Cependant, le nombre de Rayleigh Ra au-delà de 10^6 , le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect Ar ; c'est à dire avec la diminution du volume de l'enceinte.
- Dans le deuxième cas de cette investigation, nous avons étudié la convection naturelle bidimensionnelle instationnaire dans une enceinte rectangulaire poreuse, chauffée et refroidie par des distributions de température de profils sinusoidaux avec des différentes amplitudes sur les moitiés gauche et droite des côtés verticaux.

Les principaux résultats obtenus peuvent être résumés comme suit :

- Pour un nombre de Rayleigh $Ra < 10^4$, le transfert de chaleur est dominé par la conduction dans toutes les cavités indépendamment du rapport de forme Ar , et des amplitudes d'échauffement λ_H et de refroidissement λ_C .
- La conduction domine aussi pour un échauffement faible ($\lambda_H \leq 0,5$) et un refroidissement uniforme ($\lambda_C = 0$) dans toutes les cavités de n'importe quel rapport d'aspect Ar et pour n'importe quelle valeur du nombre de Rayleigh Ra . Ce mode de transfert de chaleur reste dominant dans les cavités les plus longues ($Ar \geq 2$) pour un refroidissement d'amplitude $\lambda_C = 0,5$.
- Le régime de conduction devient plus court en augmentant les amplitudes des températures λ_H , et λ_C et les valeurs du nombre de Rayleigh Ra . La convection devient dominante graduellement dans les cavités en augmentant le rapport de forme.
- Pour une amplitude de température d'échauffement $\lambda_H = 1$, la convection dans des cavités carrées ($Ar = 1$) commence à dominer à une valeur du nombre de Rayleigh d'environ 10^4 pour une amplitude de refroidissement $\lambda_C = 1$, alors que pour une valeur inférieure $\lambda_C = 0$ la convection domine à un Ra allant jusqu'à 10^5 .
- La valeur du nombre moyen de Nusselt augmente avec l'augmentation des amplitudes des fonctions des températures sinusoïdales. Les effets d'amplitude de refroidissement λ_C deviennent significatifs surtout pour des valeurs supérieures d'amplitude de chauffage λ_H .
- La force d'écoulement et le transfert de chaleur augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et ils sont améliorés dans les cavités de rapport de forme $Ar = 2$ après la domination du régime de convection.

A l'issue de ce travail, de nombreuses perspectives apparaissent. Nous espérons poursuivre l'étude entamée sur les effets tridimensionnels et généraliser le modèle par une approche qui tient compte des géométries complexes ainsi que la variation des propriétés physiques du fluide telles que l'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique. Il serait souhaitable aussi d'accomplir des mesures expérimentales.

Bibliographie

- [1] **A.V. Shenoy**, Non-Newtonian fluid heat transfer in porous media. *Adv. Heat Transfer*, Vol. 24, pp. 101-190,1994.
- [2] **H. Darcy**, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dalmont, Paris,1856.
- [3] **D. Nield and A. Bejan**, *Convection in Porous Media*, Third ed. Springer, USA, 2006.
- [4] **D.D. Joseph, D.A.Nield, and G. Papanicolaou**, Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium, *Water Resources Res.*, Vol.18, pp.1049-1052, 1982.
- [5] **J.C. Ward**, Turbulent flow in porous media, *ASCE J. Hydraul. Div.* 90(HY5), pp.1-12, 1964.
- [6] **G.S. Beavers, E.M. Sparrow and D.E. Rodenz**, Influence of bed size on the flow characteristics and porosity of randomly packed beds of spheres. *J. Appl. Mech.* Vol. 40, pp. 655-660, 1973.
- [7] **O. Coulaud, P.Morel, and J.P. Caltagirone**, Numerical modelling of nonlinear effects in laminar flow through a porous medium,*J. Fluid Mech.*Vol. 190, pp. 393-407, 1988.
- [8] **K. Vafai and C. L. Tien**, Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 195-203, 1981.
- [9] **G. Lauriat and V. Prasad**, Natural convection in vertical porous cavity : Numerical study for Brinkman – extended Darcy formulation, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 688-696, 1987.
- [10] **J.L. Lage**, Effect of the convective inertia term on Bénard convection in a porous medium, *Num. Heat Transfer*, Vol. 22, pp. 469-485, 1992.
- [11] **H.C. Brinkman**, A calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particules, *Appl. Sci. Res.*, A1, pp. 27-34,1947.
- [12] **J.A. Ochoa-Tapia and S. Whitaker**, a Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous Fluid-I. Theoretical development. *Int. J. Heat Mass Transfer*Vol.38, pp. 2635–2646, 1995.
- [13] **C.T. Hsu**, A closure model for transient heat conduction in porous media, *ASME J.Heat Transfer*,Vol. 121, pp. 733–739, 1999.

- [14] **Kaviany M.**, Principles of Heat Transfer in Porous Media, Mechanical Engineering Series, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [15] **D.A. Nield**, Estimation of the stagnant thermal conductivity of saturated porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 34, pp.1575–1576, 1991.
- [16] **S.Ben Amara**, Ecoulements et transferts thermiques en convection naturelle dans les milieux macro-poreux alimentaires, Thèse de Docteur de l'Institut National Agronomique Paris-Grignon, 2005.
- [17] **R.Krupiczka**, Analysis of Thermal Conductivity in Granular Materials, *Int. Chem. Engng.*, Vol. 7, pp.122-144, 1967.
- [18] **D.Kunii and J.M.Smith**, Heat Transfer Characteristics of Porous Rocks, *AIChE J.*, Vol 6, pp. 71- 78, 1960.
- [19] **P.Zehnder and E.U. Schlunder**, Thermal Conductivity of Granular Materials at Moderate Temperatures, *Chemie. Ingr.Tech.*, Vol. 42, pp. 933-941, 1970.
- [20] **G.R. Hadley**, Thermal Conductivity of Packed Metal Powders, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 1793-1796, 1986.
- [21] **V.Prasad, N.Kladas, A.Bandyopadhaya and Q.Tian**, Evaluation of Correlations for Stagnant Thermal Conductivity of Liquid-Saturated Porous Beds of Spheres, *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 32, pp.1793-1796, 1989.
- [22] **K. Vafai (Ed.)**, Handbook of Porous Media, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [23] **D.B. Ingham, I. Pop (Eds.)**, Transport Phenomena in Porous Media, Pergamon, Vol. II, Oxford : Pergamon; 2002.
- [24] **P. Cheng**, Heat transfer in geothermal systems, *Adv. Heat Transfer*, Vol. 14, pp. 1-105, 1978.
- [25] **T.W. Tong and E.Subramanian**, A boundary layer analysis for natural convection in porous enclosure : use of the Brinkman-extended Darcy model, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 28, pp. 557-570, 1985.
- [26] **K. Vafai and C. L. Tien**, Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 195-203, 1981.
- [27] **G. Lauriat and V. Prasad**, Natural convection in vertical porous cavity : Numerical study for Brinkman – extended Darcy formulation, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 688-696, 1987.
- [28] **J.L. Lage**, Effect of the convective inertia term on Bénard convection in a porous medium, *Num. Heat Transfer*, Vol. 22, pp. 469-485, 1992.

- [29] **D.Poulikakos and A. Bejan**, The departure from Darcy flow in natural convection in a vertical porous layer, *Physics Fluids*, Vol. 28, pp. 3477-3484, 1985.
- [30] **V. Prasad and A. Tuntomo**, Inertia effects on natural convection in a vertical porous cavity, *Numer.Heat Transfer*, Vol. 11, pp. 295-320, 1987.
- [31] **C. Beckermann, RR. Viskanta and S. Ramadhyani**, A numerical study of non-Darcian natural convection in a vertical enclosure filled with a porous medium, *Numer.Heat Transfer* Vol. 10, pp. 557-570, 1986.
- [32] **J.B. Edimilson and J.S.,Marcelo de Lemos**, Turbulent natural convection in a porous square cavity computed with a macroscopic K- ϵ model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp.5639-5650, 2004.
- [33] **A.C. Baytas and I. Pop**, Free convection in a square porous cavity using a thermal nonequilibrium model, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 41, pp.861-870, 2002.
- [34] **A. Barletta and S. Lazzari**, 2D free convection in a porous cavity heated by an internal circular boundary, Excerpt from the Proceedings of the COMSOL Multiphysics User's Conference Stockholm, 2005.
- [35] **S. Das**, effect of darcy, fluid rayleigh and heat generation parameters on natural convection in a porous square enclosure : a brinkman-extended darcy model, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, n°. 4 569-578, 1999.
- [36] **Y. Varol, H.F. Oztop and I. Pop**, Natural convection in a diagonally divided square cavity filled with a porous medium, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 48, pp. 1405–1415, 2009.
- [37] **C. Revnic, T. Grosan, I. Pop and D.B. Ingham**, Free convection in a square cavity filled with a bidisperse porous medium, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, pp. 1876-1883, 2009.
- [38] **Nield, D. A. and A.V.Kuznetsov**, Heat transfer in bidisperse porous media. In *Transport Phenomena in Porous Media III*, (eds. D. B. Ingham and I. Pop), Elsevier, Oxford, pp. 34–59, 2005.
- [39] **P. Alam, S. R. Ansari, R. Kumar**, Numerical study on Natural Convection in a Porous Cavity due to Partial Heating and Colling at Vertical Walls, *Int. J. of Appl. Math. and Mech*, Vol. 7, pp. 1-21, 2011.

- [40] **A.H. Abdelkareem, S. Kimura, T. Kiwata and N. Komatsu**, Experimental Study on Oscillatory Natural Convection in a Hele-Shaw Cell due to Unstably Heated Side, *J. of trans. in porous media*, Springer, Vol. 76 Issue 3, pp. 363-375, 2009.
- [41] **M.E. Ismaeel**, Heat Transfer in a Square Porous Cavity With Partial Heating and Cooling for Opposite Vertical Walls, *Al-Rafidain Engineering*, Vol.19 Issue 5, 2011.
- [42] **Md.M. Molla, S.C. Saha and M.A.I. Khan**, Natural Convection Flow in a Porous Enclosure with Localized Heating from Below, *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 6, issue 1, pp. 1-16, 2012.
- [43] **D. J. Krishna, T. Basak and S. K. Das**, Natural convection in a non-Darcy anisotropic porous cavity with a finite heat source at the bottom wall, *Int. J. of Thermal Sciences*, Vol. 48 pp. 1279-1293, 2009.
- [44] **N.H. Saeid**, Natural Convection in a Square Porous Cavity with an Oscillating Wall Temperature, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 31, Issue 39, pp. 35-46, 2006.
- [45] **Y. Varol, H. Oztop and I. Pop**, Numerical analysis of natural convection for a porous rectangular enclosure with sinusoidally varying temperature profile on the bottom wall, *Int. Com. Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 56-64, 2008.
- [46] **N.H. Saeid, I. Pop**, Transient free convection in a square cavity filled with a porous medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 1917-1924, 2004.
- [47] **T. Basak, S. Roy, T. Paul, I. Pop**, Natural convection in a square cavity filled with a porous medium : Effects of various thermal boundary conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 49, pp. 1430-1441, 2006.
- [48] **P. Khansila**, Visualization of Natural Convection in Enclosure Filled with Porous Medium by Sinusoidally Temperature on the One Side, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, no. 97, pp. 4801 - 4812, 2012.
- [49] **E. Bilgen and R.B. Yedder**, Natural convection in enclosure with heating and cooling by sinusoidal temperature profiles on one side, *Int J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, Issues 1-2, pp. 139-150, 2007.

- [50] **N.H.Saeid**, Natural convection in porous cavity with sinusoidal bottom wall temperature variation, International communication Heat Mass Transfer, Vol. 32, Issues 3-4, pp. 454-463, 2005.
- [51] **M. Kaviany**, Thermal convective instabilities in a porous medium. ASME J. HeatTransfer Vol. 106, Issue 1, pp. 137-142, 1984.
- [52] **M. Kaviany**, Onset of thermal convection in a saturated porous medium : experimentand analysis. Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 27, Issue 11, pp. 2101-2110,1984.
- [53] **D.Y. Yoon, C.K. Choi and J.S. Yoo**, Analysis of thermal instability in a horizontal porous layer heated from below,Int. Chem. Engng. Vol. 32, pp. 181-191, 1992.
- [54] **H. T. Cheong, S. Sivasankaran, M. Bhuvaneswari and Z. Siri**,Effects of various thermal boundary conditions on natural convection in porous cavities, AIP Conference proceedings 1682, Issue 1, 2015.https :
[//doi.org/10.1063/1.4932416](https://doi.org/10.1063/1.4932416).
- [55] **H. T. Cheonga, S. Sivasankaranb and Z. Siric**, Natural convection in an oblique porous cavity with non-uniform heating,AIP Conference proceedings,Vol.1750, issue 1, 2016. https : [//doi.org/10.1063/1.4954546](https://doi.org/10.1063/1.4954546).
- [56] **H. T. Cheong, Z. Siri and S. Sivasankaran**, Natural convection in an inclined square enclosure subject to sinusoidal temperature profile, AIP Conference Proceedings Vol. 1522, Issue 1,2013. https : [//doi.org/10.1063/1.4801106](https://doi.org/10.1063/1.4801106).
- [57] **Patankar, S. V**, Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1980.
- [58] **J.H. Ferziger, M. Peric**, Computational Methods for Fluid Dynamic, 3rd Edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [59] **H.K. Versteeg, W. Malalasekera**, An Introduction to computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method, Addison-wesley logman,New York,1995.
- [60] **A. Haghshenas, M. Rafati Nasr, M.H. Rahimian**, Numerical simulation of natural convection in an open-ended square cavity filled with porous medium by lattice Boltzmann method, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 37, Issue 10, pp. 1513-1519, 2010.

- [61] **P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu and T. Sundararajan**, Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.40, Issue 16, pp.3955-3967, 1997.
- [62] **T. Seta, E. Takegoshi and K. Okui**, Lattice Boltzmann simulation of natural convection in porous media, *Math. Comput. Simul.*, Vol.72, Issues2-6, pp. 195-200, 2006.
- [63] **V.Prasad and F.Kulacki**, Natural Convection in Vertical Porous Annulus, *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol. 27, Issue 2, pp. 207-219, 1984.
- [64] **C.Beckermann, S.Ramadhani and R. Viskanta**, Natural Convection Flow and Heat Transfer Between a Fluid Layer and a Porous Layer Inside a Rectangular Enclosure, *J. Heat Transfer*, Vol.109, Issue 2, pp. 363-370, 1987.
- [65] **G.S. Shiralkar, M. Haajizadeh, and C. L. Tien**, Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure, *Numer. Heat Transfer*, Vol.6, Issue 2, pp. 223-234, 1983.
- [66] **K.L. Walker and G.M. Homsey**, Convection in a porous Cavity, *J. Fluid Mech.*, Vol. 87, Issue 3, pp. 449-474, 1978.
- [67] **T.L. Bergman, F.P. Incropera and R. Viskanta**, Correlation of Mixed Layers Growth in Double-Diffusive, Salt-Stratified System Heated from Below, *Journal of Heat Transfer*, Vol.108, Issue 1, pp. 206-211, 1986.
- [68] **K. Khanafer and K. Vafai**, Double-Diffusive Mixed Convection in a Lid-Driven Enclosure Filled with a Fluid-Saturated Porous Medium, *Numerical Heat Transfer Part A*, Vol.42, Issue 5, pp.465-486, 2002.

Résumé

Cette thèse présente l'étude numérique de la convection naturelle instationnaire dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux en deux dimensions, en utilisant le modèle Darcy Brinkman. La cavité est chauffée à la moitié inférieure de la paroi verticale gauche et refroidie à la moitié supérieure de la paroi verticale droite. Les parois horizontales et le reste des parois sont isolés. La méthode du volume finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations de conservation de masse, de mouvement et d'énergie. La convection a été initiée en imposant des températures aux limites de l'enceinte rigides et imperméables. Deux cas ont été examinés selon ces températures. Le premier cas a étudié l'écoulement dans la cavité avec des températures uniformes. L'effet du nombre de Rayleigh Ra , du nombre de Darcy Da et le rapport de conductivité sur la structure et le taux de transfert de chaleur ont été examinés. Le second cas a étudié la même configuration, mais les températures varient selon les profils sinusoïdaux avec différentes amplitudes λ_H pour le chauffage et λ_C pour le refroidissement. Le problème est analysé pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra , le paramètre de forme Ar et les amplitudes des fonctions de températures sinusoïdales ($0,25 \leq \lambda_H \leq 1,0$ et $0 \leq \lambda_C \leq 1,0$). Les résultats numériques obtenus montrent que le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction au faible nombre de Rayleigh $Ra \leq 10^4$. Le régime de transfert de chaleur de conduction a également été indiqué pour de faibles amplitudes des fonctions sinusoïdales des températures (λ_H et $\lambda_C \leq 0,5$). La conduction est amoindrie avec l'augmentation des amplitudes, et la convection devient graduellement dominante en augmentant le nombre de Rayleigh et en diminuant le rapport de forme Ar . Le transfert de chaleur augmente en augmentant le nombre de Rayleigh Ra et les amplitudes des fonctions de températures sinusoïdales λ_H et λ_C . Après la domination du mode de convection le transfert de chaleur est augmenté et la convection est améliorée dans les cavités de rapport de forme $Ar = 2$.

Mots clés : Convection naturelle, milieu poreux, chauffage partiel, refroidissement partiel, profils de température sinusoïdaux.

Abstract

This thesis presents the numerical study of unsteady natural convection flow in a rectangular cavity filled with a porous media in a two-dimension, using Brinkman–extended Darcy model. The cavity is heated at lower half of the left vertical wall and cooled at upper half of the right vertical wall. The horizontal and rest of walls are insulated. The finite control volume method has been used to solve numerically the governing conservative equations of mass, momentum and energy. Convection was initiated by imposing temperatures at the rigid and impermeable boundaries of the enclosure. Two cases were examined according to these temperatures. The first case studied the flow in the cavity with uniform temperatures. The effect of Rayleigh number Ra and Darcy number Da and the rapport of conductivity on the structure and the heat transfer rate were examined. The second case studied the same configuration, but the temperatures were varying by sinusoidal profiles with different amplitudes λ_H for heating and λ_C for cooling. The problem is analyzed for different values of the Rayleigh number Ra , aspect ratio parameter Ar and the sinusoidal temperatures functions amplitudes ($0.25 \leq \lambda_H \leq 1.0$ and $0 \leq \lambda_C \leq 1.0$). The numerical results show that the heat transfer is mainly due to the conduction at low Rayleigh number $Ra \leq 10^4$. The conduction heat transfer regime has also indicated for low amplitudes of sinusoidal functions of temperatures (λ_H and $\lambda_C \leq 0.5$). The conduction is shortened with increasing amplitudes, and the convection becomes gradually dominant as the Rayleigh number increases and as the aspect ratio decreases. Heat transfer increases with increasing both Rayleigh number Ra and amplitudes of temperature sinusoidal functions and enhanced at aspect ratio $Ar = 2$, when the convection regime is dominated.

Keywords: Natural Convection, Porous Medium, Partial Heating, Partial Cooling, Sinusoidal Temperatures Profiles.

ملخص

في هذه الاطروحة، تقدم الدراسة العددية للحمل الحراري غير المستقر في حيز مستطيل مليء بوسط مسامي. تتم الدراسة في بعدين 2D باستعمال نموذج دارسي بريكمان Darcy Brinkman. يتم تسخين الحيز من النصف السفلي للمدار العمودي الأيمن ويتم تبريده من النصف العلوي للمدار العمودي الأيسر. الجدارين الأفقيين وبقيّة الجدارين العموديين معزولة تماما.

طريقة الحجوم المنتهية إستعملت للحل العددي لمعادلات إنحفاظ المادة، الحركة والطاقة.

اثير الحمل الحراري بتطبيق الحرارة على حدود الحيز الصلبة وغير المسامية. تم دراسة حالتين للحمل الطبيعي حسب نوع حرارة التسخين والتبريد المطبقتان على الاجزاء الفعالة للجدران.

في الحالة الاولى يتم فيها دراسة التدفق بفرض ان حرارة التسخين T_h وحرارة التبريد T_c ثابتتان، وفي هذه الحالة تم دراسة تأثير عدد رايلي Ra Rayleigh وعدد دارسي Da Darcy ونسبة التوصيل الحراري R_k على تركيبات الإنسياب وعدد Nusselt.

وفي الحالة الثانية تمت الدراسة في نفس الشكل لكن بتطبيق درجات حرارة ودرجات تبريد متغيرة حسب دوال جيبية مع امتدادات التسخين λ_H وامتدادات التبريد λ_C . يتم دراسة الحمل الحراري الطبيعي من اجل مختلف قيم عدد رايلي Ra Rayleigh ومعامل نسبة الشكل Ar وامتدادات التسخين و التبريد λ_H, λ_C حيث $(0 \leq \lambda_C \leq 1$ و $0.25 \leq \lambda_H \leq 1)$.

النتائج العددية المتحصل عليها تبين انه من اجل عدد رايلي $Ra \leq 10^4$ نقل الحرارة يكون بالتوصيل بزيادة عدد رايلي وبانقاص معامل نسبة الشكل Ar النقل الحراري يزداد بزيادة λ_C و λ_H للدوال الجيبية للحرارة.

وحد هيمنة الحمل (la convection) في الحيز يزداد نقل الحرارة وتكون احسن في العلبة التي نسبة شكلها $Ar = 2$.

كلمات أساسية : الحمل الحراري الطبيعي، الوسط مسامي، التدفئة الجزئية، التبريد الجزئي، بيانات الحرارة الجيبية.