République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna 2 – Mostefa Ben Boulaid -

Faculté de Mathématiques et informatique
Département de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de:

Doctorat en Sciences
Option: Mathématiques appliquées

Thème :

Étude théorique et analyse asymptotique de quelques problèmes aux limites

Présentée par :

BOUDERSA Mourad

Devant le jury composé de :

- M Mokhtari Zouhir | Professeur | Université de Batna 2 | Président
- M Dilmi Mourad | Professeur | Université de Sétif 1 | Rapporteur
- M Benseghir Aissa | MCA | Université de Sétif 1 | Examinateur
- M Houes Amran | MCA | Université de Biskra | Examinateur
- M Merahi Fateh | MCA | Université de Batna 2 | Examinateur

2021/2022

Table des matières

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et toute ma gratitude à monsieur Dilmi Mourad d'avoir assuré mon encadrement et de m'avoir fait profiter de ses connaissances scientifiques. Je le remercie pour sa patience et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Je remercie vivement monsieur Mokhtari Zouhir qui a accepté d'être le président de mon jury.

Je remercie également monsieur Benseghir Aissa, monsieur Houes Amran et monsieur Merahi Fateh qui m'ont honoré en acceptant d'examiner mon travail.

Enfin, je remercie toute personne ayant participé, de prés ou de loin pour réaliser ce travail.

Introduction

La déformation élastique est une déformation réversible, le milieu retourne à son état initial lorsqu'on supprime les sollicitations.

La déformation élastique est un domaine important de la mécanique des milieux continus et de la thermodynamique (compression des gaz).

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certaines matériaux. D'une façon générale, les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées.

L'un des buts de l'analyse asymptotique est d'obtenir et de décrire un problème bidimensionnel (2D) à partir d'un problème tri-dimensionnel (3D), en passant à la limite sur l'épaisseur du domaine (3D) supposé déjà mince.

Plusieurs études ont été faites sur l'analyse asymptotique de l'élasticité linéaire avec les conditions aux limites ([26], [27], [29], [34], [35]).
Dans [6], les auteurs ont étudié l'analyse asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité isotherme dans un domaine borné en dimension trois avec un frottement non linéaire de type Tresca. L'étude du problème non linéaire en régime stationnaire dans un domaine mince tridimensionnel avec frottement non linéaire de Tresca a été considéré dans [25]. Les auteurs dans [32] se sont intéressés à étudier l'analyse asymptotique d'un problème viscoélastique avec le terme dissipatif et le terme source dans un domaine mince tridimensionnel.

Des problèmes similaires pour un fluide dans un domaine mince avec les conditions aux limites de frottement ont été étudiés par nombreux auteurs, voir par exemple ([14]), [15], [20], [21], [22], [24], [33]).

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions sur les espaces de Sobolev et les espaces $L^p(0,T;X)$ qui sont fondamentaux pour l'étude des problèmes d'évolution, ainsi que quelques résultats qui nous permettent de mieux comprendre le contenu de ce travail. Ensuite, nous donnons un rappel des opérateurs maximaux monotones.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et la régularité de la solution du problème suivant

$$(P_1)\begin{cases} -\mathrm{div}(u)+\alpha^2 u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ P\,(u)-\sigma(u)n \in \beta(u) & \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ \left.\begin{array}{c} u.n = 0 \\ |\sigma_\tau| < k \Longrightarrow u_\tau = g \\ |\sigma_\tau| = k \Longrightarrow \exists\gamma \geq 0 \ : u_\tau = g-\gamma\sigma_\tau \end{array}\right\} & \text{sur} \quad \Gamma_3 \end{cases}$$

où Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ de classe C^2, la frontière de Ω sera notée $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, avec mesure $(\Gamma_1) > 0$. P un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients lipschitziens, β un graphe maximal monotone tel que $0 \in \beta(0)$, n le vecteur normal extérieur unitaire à Γ, $f \in L^2(\Omega)^3$, $k \in L^\infty(\Gamma_3)$, $k \geq 0$ et α un réel positif. Nous remplaçons β par l'approchant de Yosida β_ξ pour obtenir le problème approchè de P_1 et montrons l'existence de la solution de ce problème.

L'estimation à priori nous permet de passer à la limite lorsque ξ tend vers zéro, nous prouvons nos principaux résultats d'existence et régularité de la solution au problème P_1.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème élastique dans un domaine borné Ω^ε de $\mathbb{R}^3$ avec des conditions aux limites de Tresca et graphe maximal monotone. On donnera la formulation variationelle du problème en utilisant le changement d'échelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$, le domaine Ω^ε se transforme en un domaine Ω indépendant de ε. On établit des estimations sur le déplacement. Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous permet de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Ensuite, nous obtenons le problème limite. Enfin, nous montrons l'unicité de u^* solution du problème limite.

Dans le quatrième chapitre, nous considérons un problème élastique avec le terme dissipatif $\left(1+\left|\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right|\right)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}$ et le terme source $|u^{\varepsilon}|u^{\varepsilon}$ dans un domaine mince Ω^{ε} avec la condition de frottement non linéaire de type Tresca sur une partie de la frontière et la condition de Dirichlet sur les deux autres parties.

Le problème complet dans Ω^{ε}, s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}-\operatorname{div}(\sigma^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}))+\alpha^{\varepsilon}\left(1+\left|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}=f^{\varepsilon}-|u^{\varepsilon}|u^{\varepsilon} \text{ dans } \Omega^{\varepsilon}\times\,]0,T[$$

$$\sigma^{\varepsilon}_{ij}(u^{\varepsilon})=2\mu d_{ij}(u^{\varepsilon})+\lambda d_{kk}(u^{\varepsilon})\,\delta_{ij},\quad i,j=1,2,3 \text{ dans } \Omega^{\varepsilon}\times\,]0,T[$$

$$u^{\varepsilon}=0 \text{ sur } \Gamma^{\varepsilon}_1\times\,]0,T[$$

$$u^{\varepsilon}=0 \text{ sur } \Gamma^{\varepsilon}_L\times\,]0,T[$$

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}.n=0 \text{ sur } \omega\times\,]0,T[$$

$$\left.\begin{array}{l}|\sigma^{\varepsilon}_{\tau}|<k^{\varepsilon}\implies\left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau}=0\\ |\sigma^{\varepsilon}_{\tau}|=k^{\varepsilon}\implies\exists\beta\geq 0 \text{ tel que }\left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau}=-\beta\sigma^{\varepsilon}_{\tau}\end{array}\right\}\text{ sur } \omega\times\,]0,T[$$

$$u^{\varepsilon}(x,0)=u_0(x)\quad\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(x,0)=u_1(x)\quad\forall x\in\Omega^{\varepsilon}$$

avec f^{ε} et k^{ε} sont des données du problème.

Nous étudions l'analyse asymptotique de ce problème, pour cela nous effectuons un changement d'échelle, par rapport à l'épaisseur du domaine. Ensuite, nous utilisons les différentes inégalités de Poincaré, Cauchy-Schwartz, Young, Hölder, Korn et Gronwall pour obtenir des estimations à priori. Ce qui nous permet de faire un passage à la limite afin d'obtenir le problème limite et équation de Reynolds faible.

Chapitre 1

Préliminaires

Résumé. Ce chapitre est consacré à quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, concernant les espaces de Sobolev et les espaces à valeurs vectorielles, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace.

Contenu

1.1 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.
L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On note $\langle T, \phi \rangle = T(\phi)$ le produit de dualité entre une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\displaystyle\int_\Omega T\phi dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω, alors on peut définir une distribution T_f par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi dx.$$

On peut aussi munir $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\lim_{n \to \infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle .$$

Définissons maintenant la dérivation au sens des distributions : si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace défini par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mesurable} : \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\dfrac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mesurable} : \sup ess_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess_{x \in \Omega} |u(x)|$$

où
$$\sup ess_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{M > 0,\ |u(x)| < M\ p.p\}.$$
Pour tout $p, 1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$ (l'inégalité de Hölder).

$L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable dans Ω, muni du produit scalaire
$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$
$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, est vérifiée i.e.
$$\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Définition 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*
$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, ..., d\}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\},$$
où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de u au sens des distributions.

Proposition 1.2 *L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*
$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x))\, dx$$
et de la norme
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
où $\nabla u(x)$ est le vecteur de composante $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ c'est un élément de l'espace $L^2(\Omega)^d$.
L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.3 *(Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur $\Gamma = \partial\Omega$).

Théorème 1.4 *(Traces des fonctions et formule de Green). Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma) \text{ est compact.}$$

On défnit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{\gamma(u);\ u \in H^1(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf\left\{\|u\|_{H^1(\Omega)};\ \gamma(u) = f\right\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles sont les suivantes :
1- Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est linéaire surjectif et

$$\|\gamma(u)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

2- Si Ω est borné régulier de classe C^1. Alors, pour toutes fonctions u et v de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x),$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq d}$ est la normale unité extérieure à Γ.

Définition 1.5 *Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$.*

Proposition 1.6 *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par*

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{f = v_0 + \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \text{ avec } v_0, v_1, ..., v_d \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Remarque 1.7 *Pour tout* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*, on a*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \subset H^{-1}(\Omega).$$

Théorème 1.8 *(Inégalité de Korn). Soit* Ω *un domaine régulier borné de* $\mathbb{R}^d$ *de classe* C^1*. Il existe une constante* $C > 0$ *ne dépendant que de* Ω *telle que, pour toute fonction* $v \in H^1(\Omega)^d$*, on a :*

$$\int_\Omega v_i v_i dx + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v) dx \geq C \|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

où $\varepsilon_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.

1.2 Les espaces $L^p(0,T;X)$

Soit $T > 0$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. On définit les espaces suivants :

$$C(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \ continue\},$$

$$L^p(0,T;X) = \left\{u : [0,T] \to X \ mesurable; \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \leq \infty\right\}, 1 \leq p < \infty,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\dfrac{1}{p}},$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \ mesurable; \ \exists C > 0 \ \ \|u(t)\|_X \leq C \ p.p.t\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0; \ \|u(t)\|_X \leq C \ p.p.t\}.$$

Remarque 1.9 *Pour tout* $1 \leq p < \infty$*,* $L^p(0,T;X)$ *est un espace de Banach et* $C(0,T;X)$ *est dense dans* $L^p(0,T;X)$*. Si* $1 \leq p < \infty$ *et si* X *est réflexif, alors* $L^p(0,T;X)$ *est réflexif (H. Brézis [31]).*

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 1.10 *1- Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)_X$ alors $L^p(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

2- $L^r(0,T;X) \subset L^q(0,T;X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
3- Si X un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X), \text{ si } 1 < p,q < \infty \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X),$$

où $L^p(0,T;X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.11 *Soit $(X,(.,.)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u : [0,T] \to X$ une fonction telle que u, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Alors*
1- la fonction $t \to \dfrac{1}{2}\|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0,T[$,
2- $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(t),u(t)\right)_X$ p.p.$t \in]0,T[$,
3- $\dfrac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \dfrac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \displaystyle\int_0^t \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(s),u(s)\right)_X ds \quad$ pour tout $t \in [0,T]$.

1.3 Lemmes de type Gronwall

Nous passons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.12 *Soient m et $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante, $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$*
1- Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors
$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T] .$$
2- Si
$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T] ,$$
alors
$$\int_0^t \phi(s)ds \leq \exp(aT) \int_0^t m(s)ds.$$
Dans le cas particulier $m = 0$, la partie de (1) de ce lemme devient :

Corollaire 1.13 *Soit* $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ *telle que* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in]0, T[$*, et soit* $a \geq 0$*. Si* $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ *est une fonction telle que*
$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T] ,$$
alors
$$\phi(t) \leq a + \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T] .$$

Lemme 1.14 *Soient* m *et* $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ *telles que* $m(t) \geq 0$*,* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in]0, T[$*,* $a \geq 0$ *une constante. Soit également* $\phi : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*
$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds + \int_0^t n(s)\phi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T] ,$$
alors
$$|\phi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T] .$$
Dans le cas particulier $n = 0$ le lemme 1.14 devient :

Corollaire 1.15 *Soit* $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ *telle que* $m(t) \geq 0$*, pour tout* $t \in]0, T[$*,* $a > 0$ *une constante. Soit également* $\phi : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*
$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T] ,$$
alors
$$|\phi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T] .$$

1.4 Inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par quelques propriétés des formes bilinéaires dans un espace de Hilbert. Donc, on considère un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(.,.)_X$ et la norme associée $\|.\|_X$ et X' l'espace dual de X en notant par$\langle .,. \rangle_{X' \times X}$ pour le produit de dualité entre X et X'.
On dit qu'une forme bilinéaire $a : X \times X \to \mathbb{R}$ est :
1- continue, s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$a(u,v) \leq C \|u\|_X \|v\|_X , \quad \forall u, v \in X,$$

2- coercive, s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_X^2 , \quad \forall v \in X.$$

Théorème 1.16 *(Représentation des formes bilinéaires). Soit $a : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue sur $X \times X$. Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $A \in L(X, X')$ tel que*

$$\forall u, v \in X : a(u,v) = \langle Au, v \rangle_{X' \times X} .$$

De plus

$$\|a\|_X = \|A\|_{L(X,X')} .$$

Nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de $2^{\text{ème}}$ espèce.

Théorème 1.17 *Soit K un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert X, muni de la norme $\|.\|_X$, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive de $K \times K$ dans $\mathbb{R}$ et J une fonctionnelle de K dans $\bar{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre, alors pour toute forme linéaire $\mathcal{L}$ défnie sur X, il existe un unique u dans X solution de l'inéquation variationnelle :*

$$a(u, v-u) + J(v) - J(u) \geq \mathcal{L}(v-u).$$

1.5 Propriétés de semi-continuité inférieure

Nous rappelons dans cette section quelques notions d'analyse convexe. Nous considérons des fonctions ϕ définies sur un espace vectoriel réel X et à

valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.
- Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identique à $+\infty$ c'est-à-dire s'il existe $v_0 \in X$ tel que $\phi(v_0) < +\infty$.
- La fonction ϕ est dite convexe si

$$\phi\left(tu + (1-t)v\right) \leq t\phi(u) + (1-t)\phi(v)$$

pour $u, v \in X$ et $t \in [0,1]$.
- La fonction ϕ est dite strictement convexe si

$$\phi\left(tu + (1-t)v\right) < t\phi(u) + (1-t)\phi(v)$$

pour $u, v \in X$ et $u \neq v$.
- Une fonction $\phi : X \to]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement si et seulement si

$$\liminf_{n} \phi(v_n) \geq \phi(v)$$

pour tout $v \in X$ et v_n converge vers v dans X.

Lemme 1.18 *Soit $K \subset X$, la fonction $\psi : X \to]-\infty, +\infty]$ définie par :*

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u \in K \\ +\infty & si \quad u \notin K \end{cases}$$

K est un ensemble convexe, fermé et non vide de X si et seulement si la fonction ψ_K est convexe et semi-continue inférieurement et propre.

1.6 Les opérateurs maximaux monotones

De H. Brézis [31] on a :

Définition 1.19 *Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On appelle opérateur linéaire non-borné de H_1 dans H_2 toute application linéaire $A : D(A) \subset H_1 \to H_2$. $D(A)$ est le domaine de A. On note par*

$$G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} (u, Au).$$

$G(A)$ s'appelle le graphe de A et est un sous espace de l'espace vectoriel produit $H_1 \times H_2$.
On dit qu'un opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans l'espace produit $H_1 \times H_2$.

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert, I l'identité dans H et $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur linéaire non-borné.

Définition 1.20 *On dit que A est monotone si*

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A).$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$, c'est-à-dire

$$\forall f \in H,\ \exists u \in D(A) \ \text{ tel que } u + Au = f.$$

Proposition 1.21 *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*
1- $D(A)$ est dense dans H.
2- A est fermé.
3- Pour tout λ, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H, $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$.

Définition 1.22 *Soit A un opérateur maximal monotone. On pose, pour tout $\lambda > 0$,*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad \text{et} \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

J_λ est la résolvante de A et A_λ est la régularisée Yosida de A.

Proposition 1.23 *Soit A un opérateur maximal monotone, on a*
1- $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$
2- $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$
3- $|A_\lambda v| \leq |Av| \quad \forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$
4- $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in H$
5- $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A)$
6- $(A_\lambda v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$
7- $|A_\lambda v| \leq \dfrac{1}{\lambda}|v| \quad \forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$.

Chapitre 2

Résultats d'existence et de régularité pour le système d'élasticité avec conditions de Tresca et graphe maximal monotone

Résumé. Dans ce chapitre, nous considérons le problème aux limites non linéaire gouverné par un système d'élasticité avec conditions aux limites mixtes (Dirichlet-Tresca- graphe maximal monotone) dans un domaine régulier. Nous montrons l'existence et la régularité de la solution faible de ce problème. Nous utilisons l'approche du graphe maximal monotone par sa régularisation Yosida et la méthode de contraction de Brézis [31].

Contenu

2.1 Introduction et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de classe C^2, la frontière de Ω sera notée $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, avec mesure $(\Gamma_1) > 0$.
Il sagit de résoudre le problème suivant dans $H^2(\Omega)^3$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -\mathrm{div}(u) + \alpha^2 u = f & \text{dans} & \Omega \\ u = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \\ P(u) - \sigma(u)n \in \beta(u) & \text{sur} & \Gamma_2 \\ \left. \begin{array}{c} u.n = 0 \\ |\sigma_\tau| < k \Longrightarrow u_\tau = g \\ |\sigma_\tau| = k \Longrightarrow \exists \gamma \geq 0 \ : u_\tau = g - \gamma \sigma_\tau \end{array} \right\} & \text{sur} & \Gamma_3 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où u est le champ de déplacement, P un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients lipschitziens, β un graphe maximal monotone tel que $0 \in \beta(0)$, n le vecteur normal extérieur unitaire à Γ, $f \in L^2(\Omega)^3$, $k \in L^\infty(\Gamma_3)$, $k \geq 0$ et α un réel positif sur lequel nous apporterons des précisions plus loin. σ désigne le tenseur des contraintes, avec $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$. Les éléments σ_{ij} est donnés par la loi de Hooke

$$\sigma_{ij}(u) = 2\mu d_{ij}(u) + \lambda tr\left(d(u)\right)\delta_{ij}$$

où

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

le tenseur des taux de déformations, λ et μ sont les coefficients de Lamé avec $\lambda > 0$ et $\lambda + \mu \geq 0$ et δ_{ij} est le symbole de Krönecker.

On définit les composantes normales et tangentielles de u par

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & u.n \\ u_\tau & = & u - (u_n)n \end{array}$$

De même, les composantes normales et tangentielles de σ par

$$\begin{array}{rcl} \sigma_n & = & (\sigma.n).n \\ \sigma_\tau & = & \sigma.n - (\sigma_n)n \end{array}$$

La condition de Tresca est

$$\left. \begin{array}{rl} |\sigma_\tau| < k & \Longrightarrow \ u_\tau = g \\ |\sigma_\tau| = k & \Longrightarrow \ \exists \gamma \geq 0 \text{ tel que } u_\tau = g - \gamma \sigma_\tau \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma_3$$

2.2 Préliminaire

Dans cette section, nous donnons quelques résultats de [5] qui seront utiles dans la suite.

Lemme 2.1 *Soit Ω un ouvert de classe C^2, P un opérateur tangentiel du premier ordre, quel que soit $\varphi \in L^1(\Gamma)^n$ tel que $P(\varphi) \in L^1(\Gamma)^n$ on a*

$$\left| \int_\Gamma P(\varphi) ds \right| \leq c_1 \int_\Gamma |\varphi| ds \tag{2.2}$$

où $c_1 = c_1(\Omega, P)$ est une constante.

Lemme 2.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Γ Lipschitzienne, si $u \in H^1(\Omega)^n$ et si β est une fonction uniformément Lipschitzienne alors $\beta(u)$ appartient à $H^1(\Gamma)^n$.*

Théorème 2.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $c_2(\varepsilon)$ tel que :*

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)^n} \leq \varepsilon \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} + c_2(\varepsilon) \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)^n} \quad , \forall \varphi \in H^1(\Omega)^n \tag{2.3}$$

$$\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)^{n\times n}} \leq \varepsilon \|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)^n} + c_2(\varepsilon) \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)^n} \quad , \forall \varphi \in H^2(\Omega)^n. \tag{2.4}$$

Lemme 2.4 *La condition de Tresca est équivalente à (voir[17])*

$$(u_\tau - g)\, \sigma_\tau + k|u_\tau - g| = 0 \ \ sur\ \Gamma_3. \tag{2.5}$$

2.3 Résolution du problème approché

Pour l'étude du problème (2.1), on a considéré le problème approché où l'on a remplacé β par l'approchant de Yosida β_ξ défini par $\beta_\xi = \xi^{-1}(I + J_\xi)$, avec $J_\xi = -(I+\xi\beta)^{-1}$ est la résolvante de β et on a rèsolu ce dernier problème en s'inspirant d'une méthode de contraction de Brézis.

Dans un premier temps, on considère le problème approché suivant

$$\left\{ \begin{array}{cc} -\mathrm{div}(u_\xi) + \alpha^2 u_\xi = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u_\xi = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ P(u_\xi) - \sigma(u_\xi) n = \beta_\xi(u_\xi) & \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ \left. \begin{array}{c} u_\xi . n = 0 \\ |\sigma_\tau(u_\xi)| < k \Longrightarrow (u_\xi)_\tau = g \\ |\sigma_\tau(u_\xi)| = k \Longrightarrow \exists \gamma \geq 0 \ : (u_\xi)_\tau = g - \gamma \sigma_\tau(u_\xi) \end{array} \right\} & \text{sur} \quad \Gamma_3 \end{array} \right. \tag{2.6}$$

2.3.1 Résolution du problème intermédiaire

Considérons le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -\mathrm{div}(v)+\alpha^2 v = f & \text{dans} & \Omega \\ v=0 & \text{sur} & \Gamma_1 \\ P\left(v\right)-\sigma(v)n-\dfrac{v}{\xi}=\dfrac{J_\xi(u)}{\xi} & \text{sur} & \Gamma_2 \\ \left.\begin{array}{c} v.n=0 \\ \left|\sigma_\tau\left(v\right)\right|<k \Longrightarrow v_\tau=g \\ \left|\sigma_\tau\left(v\right)\right|=k \Longrightarrow \exists\gamma\geq 0\ : v_\tau=g-\gamma\sigma_\tau\left(v\right) \end{array}\right\} & \text{sur} & \Gamma_3 \end{array}\right. \tag{2.7}$$

où $u\in L^2(\Gamma_2)^3$. On remarquera qu'un point fixe de (2.7) (i.e si on trouve une solution v tel que $v_{\diagup\Gamma_2}=u$) donnera une solution de (2.6).

Théorème 2.5 *Le problème* (2.7) *admet une solution unique* $v\in K$*, où*

$$K=\left\{\varphi\in H^1(\Omega)^3 : \varphi=0 \ sur\ \Gamma_1\ \ et\ \varphi.n=0\ sur\ \Gamma_3\right\}$$

Preuve. On multiplie l'équation

$$-\mathrm{div}(v)+\alpha^2 v=f$$

par $\varphi-v$ où $\varphi\in K$ et on intègre, on obtient

$$\int_\Omega -\frac{\partial\sigma_{ij}(v)}{\partial x_j}(\varphi_i-v_i)dx+\alpha^2\int_\Omega v_i(\varphi_i-v_i)dx=\int_\Omega f_i(\varphi_i-v_i)dx$$

En utilisant la formule de Green, on en déduit :

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(v)\frac{\partial(\varphi_i-v_i)}{\partial x_j}dx-\int_\Gamma\left(\sigma_{ij}(v)n_j\right)(\varphi_i-v_i)ds+\alpha^2\int_\Omega v_i(\varphi_i-v_i)dx=\int_\Omega f_i(\varphi_i-v_i)dx$$

donc

$$2\mu\int_\Omega d(v)d(\varphi-v)dx+\lambda\int_\Omega divvdiv(\varphi-v)dx-\int_{\Gamma_2}\sigma(v)n(\varphi-v)ds$$

$$-\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau(\varphi-v)ds+\alpha^2\int_\Omega v(\varphi-v)dx=\int_\Omega f(\varphi-v)dx$$

en utilisant le lemme 2.4, on obtient

$$\sigma_\tau(\varphi-g)+k\left|\varphi-g\right|\geq-\left|\sigma_\tau\right|\left|\varphi-g\right|+k\left|\varphi-g\right|\geq 0$$

alors

$$2\mu \int_\Omega d(v)d(\varphi - v)dx + \lambda \int_\Omega divvdiv(\varphi - v)dx + \alpha^2 \int_\Omega v(\varphi - v)dx - \langle P(v), \varphi - v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}$$
$$+ \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} v(\varphi - v)ds + j(\varphi) - j(v) \geq \int_\Omega f(\varphi - v)dx - \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} J_\xi(u)(\varphi - v)ds$$

où

$$j(\varphi) = \int_{\Gamma_3} k\left|\varphi_\tau - g\right| ds$$

On pose

$$a(v,\varphi) = 2\mu \int_\Omega d(v)d(\varphi)dx + \lambda \int_\Omega divvdiv\varphi dx + \alpha^2 \int_\Omega v\varphi dx - \int_{\Gamma_2} P(v)\varphi ds + \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} v\varphi ds$$

$$l(\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx - \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} J_\xi(u)\varphi ds$$

La forme $a(.,.)$ est bilinéaire et continue.

Pour $\varphi \in H^2(\Omega)^3 \cap K$, on a :

$$a(\varphi,\varphi) = 2\mu \left\|d(\varphi)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + \lambda \left\|div\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \alpha^2 \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} - \int_{\Gamma_2} P(\varphi)\varphi ds + \frac{1}{\xi}\left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)^3}$$

Considérant l'intégrale de bord $\int_{\Gamma_2} P(\varphi)\varphi ds$, d'aprés le lemme 2.1 on a

$$\int_{\Gamma_2} P(\varphi)\varphi ds = \int_{\Gamma_2} P(\frac{\varphi^2}{2})ds \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} P(\varphi)\varphi ds \leq c_1 \int_{\Gamma_2} \varphi^2 ds$$

par conséquent

$$a(\varphi,\varphi) \geq 2\mu \left\|d(\varphi)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + \alpha^2 \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} - c_1 \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)^3}$$

d'aprés l'inégalité de Korn, il vient

$$a(\varphi,\varphi) \geq 2\mu \left\|\varphi\right\|^2_{H^1(\Omega)^3} + \alpha^2 \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} - c_1 \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)^3}$$

En utilisant le théorème 2.3, on trouve

$$a(\varphi,\varphi) \geq (2\mu c_3 - \varepsilon c_1)\left\|\nabla\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + (\alpha^2 - c_1 c_2(\varepsilon))\left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

si on choisit ε et α tel que

$$\varepsilon < \frac{2\mu c_3}{c_1}\ ,\ \alpha \geq \sqrt{c_1 c_2(\varepsilon)} = \alpha_1 \text{ et } m = \min\left(2\mu c_3 - \varepsilon c_1\ ,\ \alpha^2 - c_1 c_2(\varepsilon)\right) \tag{2.8}$$

on obtient

$$a(\varphi,\varphi) \geq m \left\|\varphi\right\|^2_{H^1(\Omega)^3} \ \ , \ \forall\varphi \in H^2(\Omega)^3 \cap K$$

comme $\mathrm{H}^2(\Omega)^3 \cap K$ est dense dans K on a

$$a(\varphi,\varphi) \geq m \left\|\varphi\right\|^2_{H^1(\Omega)^3} \ \ , \ \forall\varphi \in K$$

ce qui montre la coercivité de la forme $a(.,.)$.
La forme l est linéaire et continue, et la fonctionnelle j est convexe, semi-continue inférieurement et propre sur K.

D'aprés la théorie des inéquations variationnelles, alors il existe une solution unique $v \in K$ de

$$a(v,\varphi-v) + j(\varphi) - j(v) \geq l(\varphi-v) \ ,\forall\varphi \in K \tag{2.9}$$

Il reste à voir que (2.7) et (2.9) sont équivalents, l'implication (2.7) $\Rightarrow$ (2.9) est facilement vérifiable, a-t-on (2.9) $\Rightarrow$ (2.7).

Si v est une solution de (2.9), on prend $\varphi = v \pm w$ avec $w \in \mathcal{D}(\Omega)^3$, on obtient

$$a\left(v,w\right) = l\left(w\right)$$

$$\Rightarrow 2\mu \int_\Omega d(v)d(w)dx + \lambda \int_\Omega \mathrm{div} v \mathrm{div} w dx + \alpha^2 \int_\Omega vwdx = \int_\Omega fwdx$$

$$\Rightarrow -\mathrm{div}(v) + \alpha^2 v = f \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)^3$$

On multiplie l'équation

$$-\mathrm{div}(v) + \alpha^2 v = f$$

par $\varphi - v$ et on utilise la formule de Green, on obtient

$$2\mu \int_\Omega d(v)d(\varphi-v)dx + \lambda \int_\Omega divvdiv(\varphi-v)dx$$

$$-\int_\Gamma \sum_{ij} \sigma_{ij}(v)n_i(\varphi_j - v_j)ds + \alpha^2 \int_\Omega v(\varphi-v)dx = \int_\Omega f(\varphi-v)dx$$

De (2.9), il vient

$$\int_\Gamma \sum_{ij} \sigma_{ij}(v)n_i(\varphi_j - v_j)ds \geq \int_{\Gamma_2} P(v)(\varphi-v)ds - \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} v(\varphi-v)ds$$

$$-j(\varphi) + j(v) - \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} J_\xi(u)(\varphi - v)ds$$

on prend $\varphi = v \pm w$ où $w \in \mathcal{D}(\Gamma)^3$ et $supp(w) \subset \Gamma_2$, on déduit que

$$\int_{\Gamma_2}\sum_{ij}\sigma_{ij}(v)n_i w_j ds =< P(v), w >_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^3} - \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} vwds - \frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} J_\xi(u)wds$$

$$\Rightarrow \sigma(v)n - P(v) + \frac{v}{\xi} = -\frac{J_\xi(u)}{\xi}$$

si on prend $\varphi = v + w$ où $w \in \mathcal{D}(\Gamma)^3$ et $supp(w) \subset \Gamma_3$, on déduit que

$$\int_{\Gamma_3}\sum_{ij}\sigma_{ij}(v)n_i(\varphi_j - v_j)ds + j(v+w) - j(v) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} k\left(|v_\tau + w - g| - |v_\tau - g|\right)ds + \int_{\Gamma_3}\sigma_\tau wds \geq 0 \tag{2.10}$$

on prend $w = \pm(v_\tau - g)$ dans (2.10), il vient

$$\int_{\Gamma_3}\left[\sigma_\tau(v_\tau - g) + k(v_\tau - g)\right]ds = 0$$

ainsi

$$(v_\tau - g)\,\sigma_\tau + k|v_\tau - g| = 0 \text{ sur } \Gamma_3.$$

cette égalité implique que v vérifie la condition de Tresca.
Alors il existe une solution $v \in H^1(\Omega)^3$ de (2.7). ■

Théorème 2.6 *Le problème* (2.6) *admet une solution* $u_\xi \in K$.

Preuve. On utilise le théorème du point fixe de Banach. Pour cela, on considère l'application suivante

$$\begin{aligned} &T : L^2(\Gamma_2)^3 \to L^2(\Gamma_2)^3 \\ &u \to T(u) = v_{/\Gamma_2} \end{aligned}$$

où v solution de (2.7).

On va montrer que T est une contraction stricte, on peut prendre $\Gamma \in C^{0,1}$ seulement. Soit v_1 et v_2 solutions des problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{lr}\begin{array}{c}-\mathrm{div}(v_i)+\alpha^2 v_i=f \\ v_i=0 \\ P\left(v_i\right)-\sigma(v_i)n-\dfrac{v_i}{\xi}=\dfrac{J_\xi(u_i)}{\xi}\end{array} & \begin{array}{ll}\text{dans} & \Omega \\ \text{sur} & \Gamma_1 \\ \text{sur} & \Gamma_2\end{array} \\ \left.\begin{array}{c} v_i.n=0 \\ \left|\sigma_\tau\left(v_i\right)\right|<k \Longrightarrow v_{i\tau}=g \\ \left|\sigma_\tau\left(v_i\right)\right|=k \Longrightarrow \exists\gamma\geq 0\ : v_{i\tau}=g-\gamma\sigma_\tau\left(v_i\right)\end{array}\right\} & \begin{array}{ll}\text{sur} & \Gamma_3\end{array}\end{array}\right.$$

ceci implique

$$\begin{array}{rcl} a(v_1,v_2-v_1)+j(v_2)-j(v_1) & \geq & \displaystyle\int_\Omega f(v_2-v_1)dx-\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} J_\xi(u_1)(v_2-v_1)ds \\ a(v_2,v_1-v_2)+j(v_1)-j(v_2) & \geq & \displaystyle\int_\Omega f(v_1-v_2)dx-\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} J_\xi(u_2)(v_1-v_2)ds \end{array}$$

en additionnant les deux inégalités, on obtient

$$a(v_2-v_1,v_2-v_1)\leq\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2}\left(J_\xi(u_1)-J_\xi(u_2)\right)(v_2-v_1)ds$$

On pose $w=v_2-v_1$ et d'aprés l'inégalité de Young, on déduit que

$$a(w,w)\leq\frac{1}{2\xi}\int_{\Gamma_2}\left(J_\xi(u_1)-J_\xi(u_2)\right)^2 ds+\frac{1}{2\xi}\int_{\Gamma_2} w^2 ds$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} a(w,w) &= 2\mu\int_\Omega |d(w)|^2 dx+\lambda\int_\Omega |divw|^2 dx+\alpha^2\int_\Omega |w|^2 dx-\int_{\Gamma_2} P(w)wds+\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2}|w|^2 ds \\ &\geq 2\mu\int_\Omega |d(w)|^2 dx+\alpha^2\int_\Omega |w|^2 dx-\varepsilon c_1\int_\Omega |\bigtriangledown w|^2 dx-c_1c_2(\varepsilon)\int_\Omega |w|^2 dx+\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2}|w|^2 ds \\ &\geq (2\mu c_3-\varepsilon c_1)\int_\Omega |\bigtriangledown w|^2 dx+\left(\alpha^2-c_1c_2(\varepsilon)\right)\int_\Omega |w|^2 dx+\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2}|w|^2 ds \\ &\geq m\left\|w\right\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{\xi}\int_{\Gamma_2} w^2 ds \end{aligned}$$

alors

$$2\xi m\left\|w\right\|^2_{H^1(\Omega)}+2\int_{\Gamma_2} w^2 ds\leq\int_{\Gamma_2}\left(J_\xi(u_1)-J_\xi(u_2)\right)^2 ds+\int_{\Gamma_2} w^2 ds$$

puisque J_ξ est un contractant et si ε et m vérifient (2.8) alors

$$2\xi m \|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_{\Gamma_2} w^2 ds \leq \int_{\Gamma_2} (J_\xi(u_1) - J_\xi(u_2))^2 ds \leq \int_{\Gamma_2} |u_2 - u_1|^2 ds$$

et d'aprés les théorèmes de traces on déduit que

$$(c_4 + 1) \|w\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \leq \|u_2 - u_1\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

cette inégalité implique que

$$\|w\|_{L^2(\Gamma_2)} = \|v_2 - v_1\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq \frac{1}{\sqrt{c_4 + 1}} \|u_2 - u_1\|_{L^2(\Gamma_2)}$$

et comme $\dfrac{1}{\sqrt{c_4 + 1}} < 1$, T est une contraction stricte. Donc il existe un et un seul $u \in L^2(\Gamma_2)^3$ tel que $T(u) = u = v_{\diagup \Gamma_2}$ et v est solution de (2.7). Finalement, on vient de prouver l'existence de $v \in K$ solution de (2.6). ■

Remarque 2.7 *On a* $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^3$ *car* $v_{\diagup \Gamma_2} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^3$.

2.3.2 Régularité de la solution du problème approché

De (2.7), où le u intervenant dans les conditions aux limites, sera le u réalisant le point fixe de T.

Théorème 2.8 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^3$ *de classe* C^2, *si* $f \in L^2(\Omega)^3$, $h \in H^1(\Omega)^3$, P *un opérateur tangentiel du premier ordre à coefficients Lipschtziens et* α *vérifiant* (2.8) *alors il existe une unique* $v \in H^2(\Omega)^3$ *solution de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(v) + \alpha^2 v = f & dans \quad \Omega \\ v = 0 & sur \quad \Gamma_1 \\ P(v) - \sigma(v) n = h & sur \quad \Gamma_2 \\ \left. \begin{array}{c} v.n = 0 \\ |\sigma_\tau(v)| < k \Longrightarrow v_\tau = g \\ |\sigma_\tau(v)| = k \Longrightarrow \exists \gamma \geq 0 \ : v_\tau = g - \gamma \sigma_\tau(v) \end{array} \right\} & sur \quad \Gamma_3 \end{array} \right.$$

Preuve. On regarde ce qui se passe localement

a) Pour les points se trouvant à l'intérieur de Ω ou sur Γ_1 et Γ_3, on sait que $v \in H^2(\Omega)^3$ (résultat classique).

b) Pour les points appartenant à la frontière Γ_2 on a $v \in H^2_{loc}(\Omega)^3$ (voir [10]).

En combinant a) et b) et en utilisant une partition de l'unité, on aura montré que $v \in H^2(\Omega)^3$ ■

2.4 Existence d'une solution du problème dans $H^2(\Omega)^3$

Soit u_ξ solution de (2.6) on a le

Théorème 2.9 *(Estimation à priori) Il existe une constante C indépendante de ξ tel que*

$$\|u_\xi\|^2_{H^2(\Omega)^3} \leq C\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)^3}\,, \tag{2.11}$$

avec α vérifiant (2.15).

Preuve. Soit u_ξ la solution de (2.6) alors

$$\begin{aligned}\langle\ f\ ,\ f\ \rangle &= \|\mathrm{div}(u_\xi)\|^2_{L^2(\Omega)^3} - 2\alpha^2\,\langle\ \mathrm{div}(u_\xi)\ ,\ u_\xi\ \rangle + \alpha^4\,\|u_\xi\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ &= \|\mathrm{div}(u_\xi)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + 4\alpha^2\mu\,\|d(u_\xi)\|^2_{L^2(\Omega)^3} - 2\alpha^2\int_{\Gamma_2}(\sigma(u_\xi)n)\,u_\xi ds \\ &\quad -2\alpha^2\int_{\Gamma_3}(\sigma(u_\xi)n)\,u_\xi ds + \alpha^4\,\|u_\xi\|^2_{L^2(\Omega)^3}\end{aligned}$$

En utilisant le fait que β_ξ est Lipschitzienne croissante avec $\beta_\xi(0) = 0$ et le lemme 2.1, on obtient

$$\int_{\Gamma_2}(\sigma(u_\xi)n)\,u_\xi ds = \int_{\Gamma_2} P(u_\xi)u_\xi ds - \int_{\Gamma_2}\beta_\xi(u_\xi)u_\xi ds \leq c_1\,\|u_\xi\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\,, \tag{2.12}$$

d'autre part, en utilisant les résultats de [3], [4], [11], [12], [18] et de Grisvard [8], [9], on montre l'existence d'une constante $c_5 > 0$ tel que

$$c_5\,\|u_\xi\|^2_{H^2(\Omega)^3} \leq \|\mathrm{div}(u_\xi)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \tag{2.13}$$

nous obtenons aussi (2.13) comme dans Schechter [11].

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\Gamma_3}(\sigma(u_\xi)n)\,u_\xi ds = \int_{\Gamma_3}\sigma_\tau(u_\xi)u_\xi ds \leq \|k\|^2_{L^\infty(\Gamma_3)^3}\,\|u_\xi\|^2_{L^2(\Gamma_3)^3} \tag{2.14}$$

En utilisant les théorèmes de traces de Lions (voir [13]), les inégalités (2.12), (2.13) et (2.14), le théorème 2.3 et l'inégalité de Korn on a

$$\langle f,f\rangle \geq c_5 \left\| u_\xi \right\|^2_{H^2(\Omega)^3} + 4\alpha^2\mu c_3 \left\| u_\xi \right\|^2_{H^1(\Omega)^3} - 2\alpha^2 c_1\varepsilon \left\| \triangledown u_\xi \right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} - 2\alpha^2 c_1 c_2(\varepsilon) \left\| u_\xi \right\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$
$$- 2\alpha^2\varepsilon \left\| k \right\|^2_{L^\infty(\Gamma_3)} \left\| \triangledown u_\xi \right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} - 2\alpha^2 c_6(\varepsilon) \left\| k \right\|^2_{L^\infty(\Gamma_3)} \left\| u_\xi \right\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \alpha^4 \left\| u_\xi \right\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

ceci implique

$$\begin{aligned} \left\| f \right\|^2_{L^2(\Omega)^3} \geq\ & c_5 \left\| u_\xi \right\|^2_{H^2(\Omega)^3} + 2\alpha^2 \left(2\mu c_3 - c_1\varepsilon - \left\| k \right\|^2_{L^\infty(\Gamma_3)} \varepsilon \right) \left\| \triangledown u_\xi \right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \\ & + \alpha^2 \left(\alpha^2 - 2c_1 c_2(\varepsilon) - 2 \left\| k \right\|^2_{L^\infty(\Gamma_3)} c_6(\varepsilon) \right) \left\| u_\xi \right\|^2_{L^2(\Omega)^3} \end{aligned}$$

si on choisit

$$\begin{aligned} & \varepsilon < \inf \left\{ \frac{2\mu c_3}{c_1 + \left\| k \right\|^2_{L^\infty(\Gamma_3)}}, \frac{2\mu c_3}{c_1} \right\} \\ & \text{et } \alpha \geq \alpha_3 = \max \left\{ \alpha_1 = \sqrt{c_1 c_2(\varepsilon)}\ ,\ \alpha_2 = \sqrt{2c_1 c_2(\varepsilon) + 2 \left\| k \right\|^2_{L^\infty(\Gamma_3)} c_6(\varepsilon)} \right\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

l'inégalité (2.11) est vérifie. ■

Théorème 2.10 *(Passage à la limite)*
Pour (2.15) *vérifie, il existe* $u \in H^2(\Omega)^3$ *solution de* (2.1).

Preuve. D'aprés (2.11) il existe une suite ξ_j qui tend vers 0 telle que

$$u_{\xi_j} \to u \text{ faiblement dans } H^2(\Omega)^3$$

$$u_{\xi_j} \to u \text{ fortement dans } H^1(\Omega)^3$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

D'autre part, d'aprés le lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned} \sigma(u_{\xi_j})n &\to \sigma(u)n \text{ sur } L^2(\Gamma_2)^3 \\ P(u_{\xi_j}) &\to P(u) \text{ sur } L^2(\Gamma_2)^3 \end{aligned}$$

donc

$$\beta_{\xi_j}(u_{\xi_j}) \to P(u) - \sigma(u)n \text{ sur } L^2(\Gamma_2)^3$$

Mais étant donné que

$$\beta_{\xi_j} \subset \beta \circ (-J_\xi)$$

on déduit que

$$u_{\xi_j} + J_{\xi_j}(u_{\xi_j}) = \xi_j \beta_{\xi_j}(u_{\xi_j}) \to 0 \qquad \xi_j \to 0,$$

ceci implique

$$-J_{\xi_j}(u_{\xi_j}) \to u \qquad \xi_j \to 0$$

d'où

$$-\sigma(u)n + P(u) \in \beta(u)$$

et

$$u_{\xi_j}.n \to u.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3$$

$$\begin{array}{lll} \left|\sigma_{\xi_j\tau}\right| & \to & |\sigma_\tau| < k \Rightarrow u_{\xi_j\tau} = g \to u_\tau = g \quad \text{sur } \Gamma_3 \\ \left|\sigma_{\xi_j\tau}\right| & \to & |\sigma_\tau| = k \Rightarrow \exists \gamma \geq 0 : u_{\xi_j\tau} = g - \gamma\sigma_{\xi_j\tau} \to u_\tau = g \; - \gamma\sigma_{\xi_j\tau} \;\; \text{sur } \Gamma_3 \end{array}$$

donc la limite u satisfait (2.1). ■

Chapitre 3

Analyse asymptotique du problème élastique avec conditions de Tresca et graphe maximal monotone

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème stationnaire pour l'élasticité linéaire isotherme dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ avec des conditions aux limites de Tresca et graphe maximal monotone.

Contenu

3.1 Introduction et position du problème

Nous considérons un problème à des déformations d'un corps homogène élastique et isotrope en régime stationnaire dans un domaine mince Ω^ε, où ε est un réel positif appartenant à $]0,1[$ et qui tend vers zéro.
La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$, avec :
* Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h\left(x_1, x_2\right)$;
* Γ_L^ε est la frontière latérale ;
* ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε.
On note $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Le domaine Ω^ε est donné par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h\left(x'\right)\},$$

où h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que :

$$0 < h_* \leq h\left(x'\right) \leq h^*, \ \forall \left(x', 0\right) \in \omega.$$

Pour les forces extérieures f^ε données, nous supposons que les déformations d'un corps élastique est gouverné par les équations suivantes :
la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$-div\sigma^\varepsilon + (\alpha^\varepsilon)^2 u^\varepsilon = f^\varepsilon. \tag{3.1}$$

On désigne par $\sigma^\varepsilon = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon\right)_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des contraintes et par $D = \left(d_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformations :

$$d_{ij}\left(u\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \ 1 \leq i,j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement suit la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) = 2\mu d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) + \lambda d_{kk}\left(u^\varepsilon\right)\delta_{ij}, \tag{3.2}$$

où
- μ, λ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Krönecker ;
- $u^\varepsilon\left(x\right)$ est le déplacement du corps élastique au point x.

Le vecteur normal extérieur unitaire à Γ^ε sera noté $n = (n_1, n_2, n_3)$.
La normale unitaire extérieure à ω est le vecteur $(0, 0, -1)$.
On définit les composantes normales et tangentielles u_n^ε et $u_T^\varepsilon = \left(u_{T_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3} \in \mathbb{R}^3$ de u^ε par

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon.n, \\ u_{T_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon.n_i. \end{aligned}$$

De même, les composantes normales et tangentielles σ_n^ε et $\sigma_T^\varepsilon = \left(\sigma_{T_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3} \in \mathbb{R}^3$ du tenseur des contraintes sont définies par

$$\begin{aligned} \sigma_n^\varepsilon &= \left(\sigma^\varepsilon.n_i\right).n_j, \\ \sigma_{T_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j - \left(\sigma_n^\varepsilon\right).n_i \end{aligned}$$

le déplacement sur le bord est donnée par :

$$u^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \tag{3.3}$$

$$u^\varepsilon.n = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega \tag{3.4}$$

$$P(u^\varepsilon) - \sigma^\varepsilon(u^\varepsilon).n = \beta_\xi(u^\varepsilon) \ \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \tag{3.5}$$

où P est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients lipschitziens et β_ξ est l'approchant de Yosida d'un graphe maximal monotone β tel que $0 \in \beta(0)$

$$\beta_\xi = \xi^{-1}(I + J_\xi)$$

où $J_\xi = -(I + \xi\beta)^{-1}$ est la résolvante de β.
Nous supposons aussi l'existence du frottement sur ω, ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca :

$$\left.\begin{array}{r} |\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_T^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\gamma \geq 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = -\gamma\sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} \text{ sur } \omega \tag{3.6}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, k^ε est le seuil de frottement.

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de déplacement u^ε vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$
(Pb^\varepsilon)\left\{\begin{array}{ll}
-div\sigma^\varepsilon + (\alpha^\varepsilon)^2 u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{dans } \ \Omega^\varepsilon, \\
u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \ \Gamma_L^\varepsilon, \\
P(u^\varepsilon) - \sigma^\varepsilon(u^\varepsilon).n = \beta_\xi(u^\varepsilon) & \text{sur } \ \Gamma_1^\varepsilon, \\
u^\varepsilon.n = 0 & \text{sur } \ \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega, \\
\left.\begin{array}{l} |\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_T^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \gamma \geq 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = -\gamma \sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{sur } \ \omega.
\end{array}\right.
$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème (Pb^ε) , nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 3.1 *La condition* (3.6) *est équivalente à la relation suivante :*

$$u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| = 0 \qquad sur\ \omega.$$

Preuve. On suppose que $u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| = 0$.
$\rhd$ Si $|\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors

$$u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon = -\,|\sigma_T^\varepsilon|\,|u_T^\varepsilon|,$$

d'où l'existence d'un $\gamma \geq 0$ tel que

$$u_T^\varepsilon = \gamma \sigma_T^\varepsilon\ .$$

$\rhd$ Si $|\sigma^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$
\begin{array}{rcl}
u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| & = & 0 \geq -\,|u_T^\varepsilon|\,.\,|\sigma_T^\varepsilon| + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| \\
& \geq & -\ |u_T^\varepsilon|\,.\,(|\sigma_T^\varepsilon| + k^\varepsilon|)
\end{array}
$$

et comme $|\sigma_T^\varepsilon| + k^\varepsilon| > 0$, alors $u_T^\varepsilon = 0$.
Réciproquement, on suppose que u^ε vérifie la condition aux limites de Tresca
$\rhd$ Si $|\sigma^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $u_T^\varepsilon = 0$

$$u_T^\varepsilon \sigma_T^\epsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| = 0\ .$$

$\rhd$ Si $|\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors il existe $\gamma \geq 0$ tel que $u_T^\varepsilon = -\gamma \sigma_T^\varepsilon$.
D'où

$$u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| = -\gamma\,|\sigma_T^\varepsilon|^2 + \gamma\,|\sigma_T^\varepsilon|^2 = 0.$$

■

3.2 Formulation variationnelle du problème

Pour l'ouvert Ω^ε on définit l'espace et l'ensemble suivants :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon),\ \forall i,j = 1,...,3 \right\},$$

l'espace de Sobolev muni de la norme $||.||_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}$, où la norme de $L^2(\Omega^\varepsilon)^3$ sera noté $||.||_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}$. Nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$

$$V^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon,\ v.n = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon \right\}.$$

Pour simplifier l'écriture, on note :

$$a(u,v) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u)\, d_{ij}(v)\, dx + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} div(u)\, div(v)\, dx + (\alpha^\varepsilon)^2 \int_{\Omega^\varepsilon} uvdx. \tag{3.7}$$

Pour $v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, on définit la fonctionnelle j^ε par :

$$j^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon |v| dx'. \tag{3.8}$$

Enfin on note

$$(f,v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i dx,\ \forall v \in H^1(\Omega^\varepsilon).$$

Lemme 3.2 *Si u^ε est solution du problème (Pb^ε) alors elle vérifie le problème variationnel suivant*

$$(PV^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{c} \textit{Trouver } u^\varepsilon \in V^\varepsilon, \textit{ telle que} \\ a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) - \displaystyle\int_{\Gamma_1^\varepsilon} P(u^\varepsilon)(\varphi - u^\varepsilon)\, d\tau + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \beta_\xi(u^\varepsilon)(\varphi - u^\varepsilon)\, d\tau + j^\varepsilon(\varphi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \\ \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \qquad \forall \varphi \in V^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Preuve. En multipliant l'équation (3.1) par $(\varphi - u^\varepsilon)$, où $\varphi \in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, dx' dx_3 - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, d\tau + (\alpha^\varepsilon)^2 \int_{\Omega^\varepsilon} u_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, dx' dx_3$$

$$= \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, dx' dx_3$$

La condition aux limites (3.3) implique que :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) d\tau = \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) d\tau + \int_\omega \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx'.$$

Mais : $\sigma_{ij} n_j = \sigma_{T_i}^\varepsilon + \sigma_n^\varepsilon n_i$, on trouve :

$$\int_{\Gamma^\epsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) d\tau = \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) d\tau + \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' + \int_\omega \sigma_n n_i \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx'$$

et comme $\left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) n_i = 0$, on a :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) d\tau = \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx'.$$

Donc :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' dx_3 - \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) d\tau - \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx'$$

$$= \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' dx_3 \qquad \forall \varphi \in V^\varepsilon. \tag{3.9}$$

Dans (3.9) on ajoute et on retranche le terme $\int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi| - |u^\varepsilon|\right) dx'$, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' dx_3 - \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) d\tau - \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' + \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi| - |u^\varepsilon|\right) dx'$$

$$- \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi| - |u^\varepsilon|\right) dx' = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' dx_3.$$

On pose :

$$B = \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' + \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi| - |u^\varepsilon|\right) dx'.$$

Donc :

$$\begin{aligned} B &= \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - u_i^\varepsilon\right) dx' + \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi| - |u^\varepsilon|\right) dx' \\ &= \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon \varphi_i dx' - \int_\omega \sigma_{T_i}^\varepsilon u_i^\varepsilon dx' + \int_\omega k^\varepsilon |\varphi| dx' - \int_\omega k^\varepsilon |u^\varepsilon| dx'. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.1 on obtient :

$$B = \int_{\omega} \sigma_{T_i}^{\varepsilon} \varphi_i dx' + \int_{\omega} k^{\varepsilon} |\varphi| dx'.$$

Alors :

$$\sigma_T^{\varepsilon} \varphi \geq -|\sigma_T^{\varepsilon}||\varphi| \geq -k^{\varepsilon}|\varphi| \qquad \text{sur} \;\; \omega$$

et

$$B = \int_{\omega} \sigma_{T_i}^{\varepsilon} \varphi_i dx' + \int_{\omega} k^{\varepsilon} |\varphi| dx' \geq 0.$$

On déduit l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) dx' dx_3 - \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j \left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) d\tau + \int_{\omega} k^{\varepsilon} |\varphi| dx'$$

$$- \int_{\omega} k^{\varepsilon} |u^{\varepsilon}| dx' \geq \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_i^{\varepsilon} \left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) dx' dx_3.$$

Et par suite, si on utilise (3.5) on obtient le problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad \text{Trouver } u^{\varepsilon} \in V^{\varepsilon}, \text{telle que} \\ a\left(u^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right) - \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} P(u^{\varepsilon}) \left(\varphi - u^{\varepsilon}\right) d\tau + \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} \beta_{\xi}(u^{\varepsilon}) \left(\varphi - u^{\varepsilon}\right) d\tau \\ \qquad +j^{\varepsilon}\left(\varphi\right) - j^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right) \geq \left(f^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right), \qquad \forall \varphi \in V^{\varepsilon}. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

■

3.2.1 Existence de la solution

Théorème 3.3 *Supposons que* $f^{\varepsilon} \in L^2\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^3$ *et* $k^{\varepsilon} \in L^{\infty}\left(\omega\right)$, $k^{\varepsilon} \geq 0$ *presque partout sur* ω. *Alors, il existe* u^{ε} *dans* V^{ε} *satisfaisant l'inéquation variationnelle* (3.10).

3.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$.

Donc le domaine Ω^{ε} se transforme à un domaine Ω indépendant de ε, où

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega \text{ et } \; 0 < z < h\left(x'\right)\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière.
Nous définissons maintenant sur Ω des nouvelles inconnues

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_i^{\varepsilon}\left(x', z\right) = u_i^{\varepsilon}\left(x', x_3\right), \; i = 1, 2 \\ \hat{u}_3^{\varepsilon}\left(x', z\right) = \varepsilon^{-1} u_3^{\varepsilon}\left(x', x_3\right). \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Pour les données du problème (Pb^{ε}), on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}\left(x', z\right) = \varepsilon^2 f^{\varepsilon}\left(x', x_3\right), \\ \hat{k} = \varepsilon k^{\varepsilon}, \\ \hat{\alpha} = \varepsilon \alpha^{\varepsilon}. \end{array} \right. \tag{3.12}$$

avec $\hat{f}$, $\hat{k}$ et $\hat{\alpha}$ ne dépendant pas de ε.

3.3.1 Formulation variationnelle du problème dans Ω

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit :

$$V = \left\{ \hat{\varphi} \in H^1\left(\Omega\right)^3 : \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_L \text{ et } \hat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1 \right\}.$$

$$V_z = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2\left(\Omega\right)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2\left(\Omega\right), i = 1, 2 \text{ et } \; v = 0 \text{ sur } \Gamma_L \right\}.$$

$$\Pi\left(V\right) = \left\{ \varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2\right) \in H^1\left(\Omega\right)^2 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L \right\}.$$

V_z est un espace de Banach pour la norme :

$$\left\|v\right\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \left\|v_i\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant (3.10) par ε et en passant au domaine fixe Ω on montre que le problème variationnel est équivalent au problème suivant :

$$\mu\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) dx'dz$$
$$+\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right) \right] dx'dz$$
$$+2\mu\varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right) dx'dz + \lambda\varepsilon^2 \int_\Omega div \left(\hat{u}^\varepsilon \right) .div \left(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon \right) dx'dz$$
$$+\hat{\alpha}^2 \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{u}_i^\varepsilon \left(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) dx'dz + \varepsilon^2 \hat{\alpha}^2 \int_\Omega \hat{u}_3^\varepsilon \left(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right) dx'dz + \int_\omega \hat{k} \left(|\hat{\varphi}| - |\hat{u}^\varepsilon| \right) dx'$$
$$-\varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int_\omega P_1(\hat{u}_i^\varepsilon) \left(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' - \varepsilon^3 \int_\omega P_1(\hat{u}_3^\varepsilon) \left(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx'$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_\omega \hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon) \left(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' + \varepsilon \int_\omega \hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon) \left(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx'$$
$$\geq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i \left(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) dx'dz + \varepsilon \int_\Omega \hat{f}_3 \left(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right) dx'dz, \qquad \forall \hat{\varphi} \in V. \qquad (3.13)$$

où P_1 un opérateur différentiel du premier ordre

$$P_1 = \sum_{i=1}^{2} a_i(x') \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x'),$$

et

$$\hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon) = \varepsilon \beta_\xi(u^\varepsilon)$$

3.3.2 Estimations à priori

On rappelle les lemmes suivants dont on aura besoin :

Lemme 3.4 *(Inégalité de Poincaré)* [17]. *On a*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \, dx \leq 2\varepsilon h^* \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \, d\tau + 2(\varepsilon h^*)^2 \int_{\Omega^\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2 dx \tag{3.14}$$

Lemme 3.5 *(Inégalité de Korn)* [17]. *On a*

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq 2 \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^2 \, dx + C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \, d\tau \tag{3.15}$$

avec

$$C(\Gamma_1^\varepsilon) = 2 \left\|\frac{\partial}{\partial x_2} h^\varepsilon\right\|_{C(\bar{\omega})} \left(1 + \left\|\frac{\partial}{\partial x_1} h^\varepsilon\right\|^2_{C(\bar{\omega})}\right).$$

Lemme 3.6 [17]. *On a*

$$\int_{\Gamma_1} |\hat{u}^\varepsilon|^2 \, d\tau' \leq C(\Omega) \int_{\Omega} \left(|\hat{u}^\varepsilon|^2 + |\nabla \hat{u}^\varepsilon|^2\right) dx' dz \tag{3.16}$$

où $C(\Omega)$ est une constante indépendante de ε.

Lemme 3.7 *Soit $a_k(x') \in C^{0,1}$ pour $k = 0, 1, 2$. On a*

$$\int_{\omega} P_1(\hat{u}^\varepsilon) dx' \leq c^* \int_{\omega} |\hat{u}^\varepsilon| \, dx' \tag{3.17}$$

où c^* est une constante indépendante de ε.

Théorème 3.8 *Étant donné $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$, k^ε est une fonction positive dans $L^\infty(\omega)$ et supposons que $\varepsilon C(\Gamma_1^\varepsilon) \leq \frac{1}{\mu}$ alors il existe des constantes $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ ne dépendent pas de ε telles que :*

$$\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon^2 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \tag{3.18}$$

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \quad \text{pour } i = 1, 2 \tag{3.19}$$

$$\|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \tag{3.20}$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (3.10) et on choisit $\varphi = 0$ comme fonction test dans (3.10), on obtient :

$$a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) - \int_{\Gamma_1^\varepsilon} P(u^\varepsilon) u^\varepsilon d\tau + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \beta_\xi(u^\varepsilon) u^\varepsilon d\tau + j^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) \leq \left(f^\varepsilon, u^\varepsilon\right)$$

Comme $j^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right)$ est positive et β_ξ est lipschitzienne croissante avec $\beta_\xi(0) = 0$, on a :

$$2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} \left|D(u^\varepsilon)\right|^2 dx + (\alpha^\varepsilon)^2 \int_{\Omega^\varepsilon} \left|u^\varepsilon\right|^2 dx - \int_{\Gamma_1^\varepsilon} P(u^\varepsilon) u^\varepsilon d\tau \leq \left(f^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \tag{3.21}$$

d'aprés (3.15) et (3.16) on a

$$2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} \left|D(u^\varepsilon)\right|^2 dx \geq \mu \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} - \mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u^\varepsilon\right|^2 d\tau \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mu \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} - \mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_\omega \left|u^\varepsilon\right|^2 \sqrt{1 + \left|\nabla h^\varepsilon(x')\right|^2} dx' \\
&\geq \mu \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} - \mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \max_{x' \in \omega} \sqrt{1 + \left|\nabla h^\varepsilon(x')\right|^2} \int_\omega \left|u^\varepsilon\right|^2 dx' \\
&\geq \mu \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} - \mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \max_{x' \in \omega} \sqrt{1 + \left|\nabla h^\varepsilon(x')\right|^2} \int_{\Gamma_1} \left|\hat{u}^\varepsilon\right|^2 d\tau' \\
&\geq \mu \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} - \mu C(\Gamma_1^\varepsilon) C(\Omega, h) \int_\Omega \left(\left|\hat{u}^\varepsilon\right|^2 + \left|\nabla \hat{u}^\varepsilon\right|^2\right) dx' dz
\end{aligned}$$

où

$$C(\Omega, h) = C(\Omega) \max_{x' \in \omega} \sqrt{1 + \left|\nabla h(x')\right|^2}$$

et comme

$$\left(f^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \leq \left\|f^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \left\|u^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$$

d'aprés (3.14)

$$\left(f^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \leq \left\|f^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \left(\sqrt{2\varepsilon h^*} \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u^\varepsilon\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\varepsilon h^* \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right) \tag{3.23}$$

on a

$$\sqrt{2}\varepsilon h^{*}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}\left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}=\sqrt{2}\varepsilon h^{*}\sqrt{\frac{8}{\mu}}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}\sqrt{\frac{\mu}{8}}\left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}$$

on applique l'inégalité de Young

$$\sqrt{2}\varepsilon h^{*}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}\left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}\leq\frac{8\varepsilon^{2}h^{*2}}{\mu}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+\frac{\mu}{16}\left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}$$

De même

$$\begin{aligned}\sqrt{2\varepsilon h^{*}}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}\left(\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}\left|u^{\varepsilon}\right|^{2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{2\varepsilon h^{*}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}\left|u^{\varepsilon}\right|^{2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{\varepsilon^{2}h^{*}}{\mu}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+\frac{\mu}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}\left|u^{\varepsilon}\right|^{2}d\tau\\ &\leq \frac{\varepsilon^{2}h^{*}}{\mu}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+\frac{\mu}{2\varepsilon}\max_{x'\in\omega}\sqrt{1+\left|\nabla h^{\varepsilon}(x')\right|^{2}}\int_{\omega}\left|u^{\varepsilon}\right|^{2}dx'\\ &\leq \frac{\varepsilon^{2}h^{*}}{\mu}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+\frac{\mu}{2\varepsilon}C(\Omega,h)\int_{\Omega}\left(\left|\hat{u}^{\varepsilon}\right|^{2}+\left|\nabla\hat{u}^{\varepsilon}\right|^{2}\right)dx'dz\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(f^{\varepsilon},u^{\varepsilon}) \ &\leq\left[\frac{8\varepsilon^{2}h^{*2}}{\mu}+\frac{\varepsilon^{2}h^{*}}{\mu}\right]\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+\frac{\mu}{16}\left\|\nabla u^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}\\ &+\frac{\mu}{2\varepsilon}C(\Omega,h)\int_{\Omega}\left(\left|\hat{u}^{\varepsilon}\right|^{2}+\left|\nabla\hat{u}^{\varepsilon}\right|^{2}\right)dx'dz\end{aligned}\tag{3.24}$$

d'autre part, d'aprés (3.17) on a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}P(u^{\varepsilon})u^{\varepsilon}d\tau &=\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}P_{1}(\hat{u}_{i}^{\varepsilon})\hat{u}_{i}^{\varepsilon}\sqrt{1+\left|\nabla h^{\varepsilon}(x')\right|^{2}}dx'+\varepsilon^{2}\int_{\omega}P_{1}(\hat{u}_{3}^{\varepsilon})\hat{u}_{3}^{\varepsilon}\sqrt{1+\left|\nabla h^{\varepsilon}(x')\right|^{2}}dx'\\ &\leq\max_{x'\in\omega}\sqrt{1+\left|\nabla h^{\varepsilon}(x')\right|^{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}P_{1}(\hat{u}_{i}^{\varepsilon})\hat{u}_{i}^{\varepsilon}dx'+\varepsilon^{2}\int_{\omega}P_{1}(\hat{u}_{3}^{\varepsilon})\hat{u}_{3}^{\varepsilon}dx'\right)\end{aligned}\tag{3.25}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c^* \max_{x'\in\omega} \sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2} \left(\sum_{i=1}^{2} \int_\omega |\hat{u}_i^\varepsilon|^2 \, dx' + \varepsilon^2 \int_\omega |\hat{u}_3^\varepsilon|^2 \, dx' \right) \\
&\leq c^* \max_{x'\in\omega} \sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2} \int_\omega |\hat{u}^\varepsilon|^2 \, dx' \\
&\leq c^* \max_{x'\in\omega} \sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2} \int_{\Gamma_1} |\hat{u}^\varepsilon|^2 \, d\tau' \\
&\leq c^* C(\Omega, h) \int_\Omega \left(|\hat{u}^\varepsilon|^2 + |\nabla \hat{u}^\varepsilon|^2 \right) dx'dz
\end{aligned}
$$

En substituant (3.22), (3.24) et (3.25) dans (3.21) on obtient :

$$
\frac{15}{16}\mu \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (\alpha^\varepsilon)^2 \int_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \, dx - \left(\mu C(\Gamma_1^\varepsilon) + c^* + \frac{\mu}{2\varepsilon} \right) C(\Omega, h) \int_\Omega \left(|\hat{u}^\varepsilon|^2 + |\nabla \hat{u}^\varepsilon|^2 \right) dx'dz
$$

$$
\leq \frac{\varepsilon^2 h^*}{\mu} (8h^* + 1) \left\| f^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \tag{3.26}
$$

En multipliant (3.26) par ε et en utilisant le fait que

$$
\varepsilon^2 \left\| f^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{-1} \left\| \hat{f} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \left\| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{et}
$$

$$
\varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)} .
$$

on trouve :

$$
\left[\frac{15}{16}\mu - \left(1 + c^* + \frac{\mu}{2} \right) C(\Omega, h) \right] \left\| \nabla \hat{u}^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left[\hat{\alpha}^2 - \left(1 + c^* + \frac{\mu}{2} \right) C(\Omega, h) \right] \left\| \hat{u}^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega)}
$$

$$
\leq \frac{h^*}{\mu} (8h^* + 1) \left\| \hat{f} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.27}
$$

si

$$
\frac{15}{16}\mu > \left(1 + c^* + \frac{\mu}{2} \right) C(\Omega, h) = \hat{c}
$$

et

$$
\hat{\alpha}^2 > \left(1 + c^* + \frac{\mu}{2} \right) C(\Omega, h) = \hat{c}
$$

alors

$$
\left\| \nabla \hat{u}^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_1
$$

on déduit (3.18) avec

$$c_1 = \frac{h^*}{\mu \hat{c}} (8h^* + 1) \left\| \hat{f} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_i^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq c_2 \text{ pour } i = 1, 2 \\ \|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq c_3 \end{aligned}$$

■

3.3.3 Résultats de convergence et problème limite

Théorème 3.9 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 3.8, il existe* u^* *dans* V_z*, tel que*

$$\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^* \quad i = 1, 2 \quad \textit{faiblement dans } V_z, \tag{3.28}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad i, j = 1, 2 \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(\Omega), \tag{3.29}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(\Omega), \tag{3.30}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad i = 1, 2 \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(\Omega), \tag{3.31}$$

$$\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{3.32}$$

Preuve. D'après (3.18), on obtient (3.28) et d'aprés (3.18) et (3.28) on obtient (3.29). De (3.18) et (3.20) on obtient (3.31). ■

Théorème 3.10 *Avec les mêmes hypothèses du théorème 3.9,* u^* *vérifie :*

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} + \hat{\alpha}^2 u_i^* = \hat{f}_i \qquad \textit{pour } i = 1, 2 \quad \textit{dans } L^2(\Omega) \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^*) \, dx' dz + \hat{\alpha}^2 \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i^* (\hat{\varphi}_i - u_i^*) \, dx' dz + \int_\omega \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^*|) \, dx' \\ \geq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i (\hat{\varphi}_i - u_i^*) \, dx' dz, \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(V) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Preuve. L'inéquation variationnelle (3.13) s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{4} I_i(\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 \int_\Omega div(\hat{u}^\varepsilon) div(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) dx'dz + \int_\omega \hat{k} |\hat{\varphi}| dx'$$

$$+\hat{\alpha}^2 \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{u}_i^\varepsilon (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx'dz + \varepsilon^2\hat{\alpha}^2 \int_\Omega \hat{u}_3^\varepsilon (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx'dz$$

$$-\varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int_\omega P_1(\hat{u}_i^\varepsilon) (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' - \varepsilon^3 \int_\omega P_1(\hat{u}_3^\varepsilon) (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx'$$

$$+\sum_{i=1}^{2} \int_\omega \hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon) (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' + \varepsilon \int_\omega \hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon) (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx'$$

$$-\int_\omega \hat{k} |\hat{u}^\varepsilon| dx' \geq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx'dz + \varepsilon \int_\Omega \hat{f}_3 (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx'dz$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mu\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx'dz \,; \\
I_2 &= \mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx'dz \,; \\
I_3 &= \mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx'dz \,; \\
I_4 &= 2\mu \int_\Omega \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx'dz.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de convergence du théorème 3.9, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{4} I_i(\varepsilon) &= \mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^*) dx'dz \\
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varepsilon \hat{f}_3 \hat{\varphi}_3 dx'dz &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_\omega P_1(\hat{u}_i^\varepsilon)\,(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)\,\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx' &= 0 \quad i=1,2\\
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^3\int_\omega P_1(\hat{u}_3^\varepsilon)\,(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)\,\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx' &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{2}\int_\omega \hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon)\,(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)\,\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx' &= 0 \quad i=1,2\\
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_\omega \hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon)\,(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)\,\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx' &= 0
\end{aligned}
$$

car

$$
\left\|\hat{\beta}_\xi(\hat{u}^\varepsilon)\right\|_{L^2(\omega)}^2=\|\varepsilon\beta_\xi(u^\varepsilon)\|_{L^2(\omega)}^2\leq\frac{\varepsilon^2}{\xi^2}\|u^\varepsilon\|_{L^2(\omega)}^2=\frac{\varepsilon^3}{\xi^2}\int_\omega\left[\sum_{i=1}^{2}|\hat{u}_i^\varepsilon|^2+\varepsilon^2|\hat{u}_3^\varepsilon|^2\right]dx' \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0
$$

Et comme j est convexe et semi-continue inférieurement
$\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\inf\int_\omega \hat{k}\,|\hat{u}^\varepsilon|\,dx'\right)\geq\int_\omega \hat{k}\,|u^*|\,dx'\right)$,
on a donc :

$$
\begin{aligned}
\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i-u_i^*)\,dx'dz+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_i^*(\hat{\varphi}_i-u_i^*)\,dx'dz+\int_\omega\hat{k}\,(|\hat{\varphi}|-|u^*|)\,dx' \\
\geq\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{f}_i\,(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)\,dx'dz.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

On choisit maintenant dans l'inéquation variationnelle (3.35)

$$
\hat{\varphi}_i=u_i^*\pm\psi_i,\ \ \psi_i\in H_0^1(\Omega)\quad i=1,2,
$$

on trouve :

$$
\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial\psi_i}{\partial z}dx'dz+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_i^*\psi_i dx'dz=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{f}_i\psi_i dx'dz.
$$

En utilisant la formule de Green et en choisissant $\psi_1=0$ et $\psi_2\in H_0^1(\Omega)$, puis $\psi_2=0$ et $\psi_1\in H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$
-\int_\Omega\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\right)\psi_i dx'dz+\hat{\alpha}^2\int_\Omega u_i^*\psi_i dx'dz=\int_\Omega\hat{f}_i\psi_i dx'dz.
$$

Donc

$$-\mu\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}+\hat{\alpha}^2 u_i^*=\hat{f}_i \qquad \text{pour } i=1,2 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \tag{3.36}$$

et comme $\hat{f}\in L^2(\Omega)$, alors (3.36) est valable dans $L^2(\Omega)$. ■

Théorème 3.11 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 3.10, on a :*

$$\int_\omega \hat{k}(|\psi+s^*|-|s^*|)dx'-\int_\omega \mu\tau^*\psi dx'\geq 0 \qquad \forall\psi\in L^2(\omega)^2 \tag{3.37}$$

$$\begin{cases} \mu\,|\tau^*|<\hat{k}\Rightarrow s^*=0 \\ \mu\,|\tau^*|=\hat{k}\Rightarrow \exists\gamma>0 \text{ tel que } s^*=\gamma\tau^* \end{cases} \tag{3.38}$$

avec :

$$\tau^*=\frac{\partial u^*}{\partial z}(x',0)\ \ ,\quad s^*(x')=u^*(x',0)\ \text{ et } s_h^*(x')=u^*(x',h(x'))\,.$$

De plus u^* et s^* vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds :

$$\int_\omega\left(\int_0^h u^*(x',z)\,dz-\frac{h}{2}s^*(x')-\frac{h}{2}s_h^*(x')+\tilde{F}(x')+\tilde{U}^*(x')\right)\nabla\psi=0. \quad ,\ \forall\psi\in H^1(\omega)\,, \tag{3.39}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x') &= \frac{1}{\mu}\int_0^h F(x',z)\,dz-\frac{h}{2\mu}F(x',h)\ ;\\ F(x',z) &= \int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}(x',\alpha)\,d\zeta d\alpha.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{U}^*(x') &= \frac{h\hat{\alpha}^2}{2\mu}U^*(x',h)-\frac{\hat{\alpha}^2}{\mu}\int_0^h U^*(x',z)\,dz\ ;\\ U^*(x',z) &= \int_0^z\int_0^\zeta u^*(x',\alpha)\,d\zeta d\alpha.\end{aligned}$$

Preuve. En passant à la limite en (3.13) puis en utilisant la formule de Green ensuite en choisissant $\hat{\varphi}_i=u_i^*+\psi_i,\ \psi_i\in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)\quad i=1,2$, où

$$H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)=\left\{\varphi\in H^1(\Omega):\varphi=0 \text{ sur } \Gamma_1\cup\Gamma_L\right\},$$

on obtient :

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}\psi_i dx'dz+\int_{\partial\Omega}\mu\frac{\partial u_i^*}{\partial z}n\psi_i d\sigma+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}u_i^*\psi_i dx'dz+\int_{\omega}\hat{k}\left|u^*+\psi\right|dx'$$

$$-\int_{\omega}\hat{k}\left|u^*\right|dx'\geq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i\psi_i dx'dz.$$

Mais

$$\int_{\partial\Omega}\mu\frac{\partial u_i^*}{\partial z}n\psi_i d\sigma=-\int_{\omega}\mu\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\left(x,0\right)\psi_i dx'.$$

Alors

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}\psi_i dx'dz+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}u_i^*\psi_i dx'dz+\int_{\omega}\hat{k}\left(\left|\psi+s^*\right|-\left|s^*\right|\right)dx'$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\mu\tau_i^*\psi_i dx'\geq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i\psi_i dx'dz.$$

De (3.33), on déduit que

$$\int_{\omega}\hat{k}(|\psi+s^*|-|s^*|)dx'-\int_{\omega}\mu\tau^*\psi dx'\geq 0. \tag{3.40}$$

Pour (3.38), on utilise l'analogue de [1] .
L'inégalité (3.40) est aussi valable pour tout $\psi\in\left(\mathcal{D}\left(\omega\right)\right)^2$ et par densité de $\mathcal{D}\left(\omega\right)$ dans $L^2\left(\omega\right)$, on trouve (3.37).
Pour démontrer (3.39) en intégrant deux fois (3.33) de 0 à z, il vient :

$$u^*\left(x',z\right)=s^*\left(x'\right)+z\tau^*-\frac{1}{\mu}F(x',z)+\frac{\hat{\alpha}^2}{\mu}U^*(x',z) \tag{3.41}$$

où

$$U^*(x',z)=\int_0^z\int_0^{\zeta}u^*\left(x',\alpha\right)d\alpha d\zeta$$

en remplaçant z par h, on obtient

$$u^*\left(x',h(x')\right)=s^*\left(x'\right)+h\tau^*-\frac{1}{\mu}F(x',h(x'))+\frac{\hat{\alpha}^2}{\mu}U^*(x',h(x'))$$

d'où

$$h\tau^{*}=s_{h}^{*}\left(x'\right)-s^{*}\left(x'\right)+\frac{1}{\mu}F(x',h(x'))-\frac{\hat{\alpha}^{2}}{\mu}U^{*}(x',h(x')) \tag{3.42}$$

Intégrons (3.41) par rapport à z de 0 à h, on obtient :

$$\int_{0}^{h}u^{*}\left(x',z\right)dz=hs^{*}\left(x'\right)+\frac{h^{2}}{2}\tau^{*}-\frac{1}{\mu}\int_{0}^{h}F(x',z)dz+\frac{\hat{\alpha}^{2}}{\mu}\int_{0}^{h}U^{*}(x',z)dz \tag{3.43}$$

De (3.42) et (3.43), on déduit que

$$\int_{0}^{h}u^{*}\left(x',z\right)dz-\frac{h}{2}s^{*}(x')-\frac{h}{2}s_{h}^{*}\left(x'\right)+\tilde{F}(x')+\tilde{U}^{*}(x')=0,$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}\left(x'\right) &= \frac{1}{\mu}\int_{0}^{h}F\left(x',z\right)dz-\frac{h}{2\mu}F\left(x',h\right)\ ;\\ F\left(x',z\right) &= \int_{0}^{z}\int_{0}^{\zeta}\hat{f}\left(x',\alpha\right)d\zeta d\alpha.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{U}^{*}(x') &= \frac{h\hat{\alpha}^{2}}{2\mu}U^{*}\left(x',h\right)-\frac{\hat{\alpha}^{2}}{\mu}\int_{0}^{h}U^{*}\left(x',z\right)dz\,;\\ U^{*}\left(x',z\right) &= \int_{0}^{z}\int_{0}^{\zeta}u^{*}\left(x',\alpha\right)d\zeta d\alpha.\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\omega}\left(\int_{0}^{h}u^{*}\left(x',z\right)dz-\frac{h}{2}s^{*}(x')-\frac{h}{2}s_{h}^{*}\left(x'\right)+\tilde{F}(x')+\tilde{U}^{*}(x')\right)\nabla\psi=0.$$

■

Théorème 3.12 *La solution u^{*} du problème limite est unique.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions u^1 et u^2 de l'inéquation variationnelle (3.34), on a :

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_{i}^{1}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_{i}-u_{i}^{1}\right)dx'dz+\hat{\alpha}^{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}u_{i}^{1}\left(\varphi_{i}-u_{i}^{1}\right)dx'dz+j\left(\varphi\right)-j\left(u^{1}\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_{i},\varphi_{i}-u_{i}^{1}\right) \tag{3.44}$$

et

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_i-u_i^2\right)dx'dz+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}u_i^2\left(\varphi_i-u_i^2\right)dx'dz+j\left(\varphi\right)-j\left(u^2\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\varphi_i-u_i^2\right) \tag{3.45}$$

où

$$j\left(\hat{\varphi}\right)=\int_{\omega}\hat{k}\left|\hat{\varphi}\right|dx'.$$

On prend $\varphi=u^2$ dans (3.44) puis $\varphi=u^1$ dans (3.45) :

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^2-u_i^1\right)dx'dz+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}u_i^1\left(u_i^2-u_i^1\right)dx'dz+j\left(u^2\right)-j\left(u^1\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,u_i^2-u_i^1\right) \tag{3.46}$$

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1-u_i^2\right)dx'dz+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}u_i^2\left(u_i^1-u_i^2\right)dx'dz+j\left(u^1\right)-j\left(u^2\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,u_i^1-u_i^2\right) \tag{3.47}$$

En sommant les deux inéquations (3.46) et (3.47), on obtient :

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1-u_i^2\right).\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1-u_i^2\right)dx'dz+\hat{\alpha}^2\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(u_i^1-u_i^2\right)\left(u_i^1-u_i^2\right)dx'dz\leq 0,$$

ceci implique

$$\mu\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1-u_i^2\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\hat{\alpha}^2\left\|u_i^1-u_i^2\right\|_{L^2(\Omega)}^2=0.$$

Par Poincaré, on trouve :

$$\left\|u_i^1-u_i^2\right\|_{V_z}=0,$$

donc

$$u^1=u^2.$$

■

Chapitre 4

Analyse asymptotique d'un problème élastique avec termes dissipatif et source non linéaire

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème élastique avec le terme dissipatif $\left(1+\left|\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|\right)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ et le terme source $|u^\varepsilon|u^\varepsilon$ dans un domaine mince tridimensionnel Ω^ε. Les conditions aux limites utilisées sont la condition de Dirichlet sur les frontières latérale et supérieure et la condition de frottement non linéaire de type Tresca sur la frontière inférieure. Nous étudions le comportement asymptotique de ce problème quand la dimension du domaine tend vers zéro.

Contenu

4.1 Introduction et position du problème

Nous considérons un problème à des déformations d'un corps homogène élastique et isotrope en régime dynamique dans un domaine mince Ω^ε, où ε est un réel positif appartenant à $]0,1[$ et qui tend vers zéro.
La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$, avec :
* Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h\,(x_1, x_2)$;
* Γ_L^ε est la frontière latérale ;
* ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε.
On note $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Le domaine Ω^ε est donné par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h\,(x')\},$$

où h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que :

$$0 < h_* = h_{min} \leq h\,(x') \leq h_{max} = h^*, \ \forall\,(x', 0) \in \omega.$$

Soit $T > 0$, on désigne par $u^\varepsilon\,(x', t) = (u_1^\varepsilon\,(x', t)\,, u_2^\varepsilon\,(x', t)\,, u_3^\varepsilon\,(x', t))$ le champ de déplacement et σ^ε le tenseur des contraintes dont les composantes $\sigma_{ij}^\varepsilon\,(u^\varepsilon)$, $1 \leq i, j \leq 3$ sont données par la loi de Hooke suivante

$$\sigma_{ij}^\varepsilon\,(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}\,(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}\,(u^\varepsilon)\,\delta_{ij}$$

et

$$d_{ij}\,(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), \ 1 \leq i, j \leq 3.$$

où μ, λ sont les coefficients de Lamé, δ_{ij} est le symbole de Krönecker et $d_{ij}\,(u^\varepsilon)$ est le tenseur des taux de déformations.
L'équation qui gouverne les déformations du corps élastique homogène et isotrope avec termes dissipatif et source non linéaire en régime dynamique est la suivante

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma^\varepsilon\,(u^\varepsilon)) + \alpha^\varepsilon\left(1 + \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = f^\varepsilon - |u^\varepsilon| u^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[$$

où $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon,)$ représente une densité massique des forces extérieures et $\alpha^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Le frottement sur $\omega \times]0,T[$ est modélisé par la loi de Tresca

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \text{ sur } \omega \times]0,T[$$

$|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
Soit $n = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal unitaire extérieure à Γ^ε et
$n = (0, 0, -1)$ le vecteur normal unitaire extérieure à ω.
On définit les composantes normales et tangentielles u_n^ε et $u_\tau^\varepsilon = \left(u_{\tau_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3}$ de u^ε par

$$\begin{array}{rcl} u_n^\varepsilon &=& u^\varepsilon.n \\ u_{\tau_i}^\varepsilon &=& u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon.n_i \end{array}$$

De même, les composantes normales et tangentielles σ_n^ε et $\sigma_\tau^\varepsilon = \left(\sigma_{\tau_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3}$ du tenseur des contraintes sont définies par

$$\begin{array}{rcl} \sigma_n^\varepsilon &=& (\sigma^\varepsilon.n)\,.n = \sigma_{ij}^\varepsilon.n_i.n_j \\ \sigma_{\tau_i}^\varepsilon &=& \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j - (\sigma_n^\varepsilon)\,.n_i \end{array}$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de déplacement u^ε : $\Omega^\varepsilon\times]0,T[\to \mathbb{R}^3$ qui vérifie les équations et les conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon)) + \alpha^\varepsilon\left(1 + \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = f^\varepsilon - |u^\varepsilon|u^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon\times]0,T[\tag{4.1}$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}(u^\varepsilon)\,\delta_{ij}\ \ i,j = 1,2,3 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times]0,T[\tag{4.2}$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0,T[\tag{4.3}$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[\tag{4.4}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.n = 0 \text{ sur } \omega \times]0,T[\tag{4.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \text{ sur } \omega \times]0,T[\tag{4.6}$$

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon \tag{4.7}$$

Lemme 4.1 *La condition de Tresca est équivalente à la relation suivante :*

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau .\sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \left|\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau\right| = 0 \text{ sur } \omega \times]0,T[\tag{4.8}$$

4.2 Formulation variationnelle du problème

Pour l'ouvert Ω^ε on définit l'espace et l'ensemble suivants :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon),\ \forall i,j = 1,...,3 \right\},$$

l'espace de Sobolev muni de la norme $||.||_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}$, où la norme de $L^2(\Omega^\varepsilon)^3$ sera noté $||.||_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}$. $H_0^1(\Omega^\varepsilon)^3$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ nulles sur Γ^ε, on note $H^{-1}(\Omega^\varepsilon)^3$ son dual topologique.
Nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$

$$K^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon,\ v.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

On note

$$a(u,v) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d(u)d(v)dx + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} \mathrm{div}(u)\mathrm{div}(v)dx$$

$$j^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon |v_\tau|\, dx'$$

$$(f,v) = \int_{\Omega^\varepsilon} fv dx$$

Lemme 4.2 *Soit* u^ε *solution de* (4.1)-(4.7), *alors elle vérifie le problème variationnel suivant :*

$$\left\{\begin{array}{c} Trouver\ u^\varepsilon\ où\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \in K^\varepsilon,\ \forall t \in [0,T],\ telle\ que \\ \left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + a\left(u^\varepsilon, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + \left(|u^\varepsilon| u^\varepsilon, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \\ +\alpha^\varepsilon \left(\left(1 + \left|\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|\right) \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + j^\varepsilon(\varphi) - j^\varepsilon\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \\ \geq \left(f^\varepsilon, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right),\ \forall \varphi \in K^\varepsilon \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \quad \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Preuve. On multiplie l'équation (4.1) par $\left(\varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)$, où $\varphi \in K^\varepsilon$, en utilisant la formule de Green, les conditions aux limites et (4.8) on obtient la formulation variationnelle (4.9). ■

Théorème 4.3 *Supposons que*

$$\begin{gathered} f^\varepsilon, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2\left(0,T; L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \\ k^\varepsilon \in L^\infty\left(\omega\right), k^\varepsilon > 0 \textit{ indépendante de } t, \\ u_0 \in H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3, u_1 \in H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3, \left(u_1\right)_\tau = 0 \end{gathered} \tag{4.10}$$

Alors, il existe une solution unique u^ε de (4.9) *avec*

$$u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty\left(0,T; H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$$

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^\infty\left(0,T; L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \cap L^2\left(0,T; H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire dans Lions ([23] , ([30]). ■

4.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'èchelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$. Donc le domaine Ω^ε se transforme en un domaine Ω indépendant de ε, définit par

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega \text{ et } \ 0 < z < h\left(x'\right)\}.$$

et notant $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière. Sur $\Omega \times]0,T[$, nous définissons des nouvelles inconnues

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{u}_i^\varepsilon\left(x', z, t\right) = u_i^\varepsilon\left(x', x_3, t\right), \, i = 1,2 \\ \hat{u}_3^\varepsilon\left(x', z, t\right) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon\left(x', x_3, t\right). \end{array}\right. \tag{4.11}$$

On suppose que les données du problème (4.1)-(4.7) dépendent de ε de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{f}\left(x', z, t\right) = \varepsilon^2 f^\varepsilon\left(x', x_3, t\right), \\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \\ \hat{\alpha} = \varepsilon^2 \alpha^\varepsilon. \end{array}\right. \tag{4.12}$$

avec $\hat{f}$, $\hat{k}$ et $\hat{\alpha}$ ne dépendant pas de ε.

4.3.1 Formulation variationnelle du problème dans Ω

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit :

$$K = \left\{ \hat{\varphi} \in H^1(\Omega)^3 : \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \text{ et } \hat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

$$\Pi(K) = \left\{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \ \right\}.$$

$$V_z = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \text{ et } \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

V_z est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \|v_i\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant (4.9) par ε et en passant au domaine fixe Ω on montre que le problème variationnel est équivalent au problème suivant :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{a} \left(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) \\
&+ \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \left(|\hat{u}_i^\varepsilon| \hat{u}_i^\varepsilon, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \left(|\hat{u}_3^\varepsilon| \hat{u}_3^\varepsilon, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \qquad (4.13) \\
&+ \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \left(\left(1 + \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \hat{\alpha} \left(\left(1 + \left| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \\
&+ \hat{j}(\hat{\varphi}) - \hat{j}\left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \ \forall \hat{\varphi} \in K
\end{aligned}$$

$$\hat{u}^\varepsilon(0) = \hat{u}_0 \quad \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(0) = \hat{u}_1$$

où

$$\hat{a}\left(\hat{\psi},\hat{\varphi}\right)=\mu\varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial x_j}dx'dz$$

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{\psi}_3}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial x_i}\right)dx'dz$$

$$+2\mu\varepsilon^2\int_\Omega\frac{\partial\hat{\psi}_3}{\partial z}\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dx'dz+\lambda\varepsilon^2\int_\Omega\operatorname{div}\left(\hat{\psi}\right)\operatorname{div}\left(\hat{\varphi}\right)dx'dz$$

et

$$\hat{j}(\hat{\varphi})=\int_\omega\hat{k}\left|\hat{\varphi}_\tau\right|dx'$$

4.3.2 Estimations à priori

Théorème 4.4 *Sous les hypothèses du théorème 4.1, il existe une constante c indépendante de* ε *telle que*

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon^{\frac{2}{3}}\hat{u}_i^\varepsilon\right\|^3_{L^3(\Omega)}\right) \tag{4.14}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon^{\frac{5}{3}}\hat{u}_3^\varepsilon\right\|^3_{L^3(\Omega)}\leq c$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right\|^3_{L^3(0,T;L^3(\Omega))}+\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right\|^3_{L^3(0,T;L^3(\Omega))}\leq c \tag{4.15}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \tag{4.16}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq c$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (4.9). Nous choisissons $\varphi = 0$, donc on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + a\left(u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + \left(|u^\varepsilon| u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + \alpha^\varepsilon \left(\left(1 + \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)$$

ceci implique que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) + \frac{2}{3}\left\|u^\varepsilon\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}\right] + \alpha^\varepsilon \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)$$

En intégrant en temps pour $s \in [0, t]$ et en utilisant l'inégalité de Korn, on trouve :

$$\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu C_K \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} + \frac{2}{3}\left\|u^\varepsilon\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} + \alpha^\varepsilon \int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} ds \tag{4.20}$$

$$\leq 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds + \left[\left\|u_1\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + (2\mu + 3\lambda)\left\|\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} + \frac{2}{3}\left\|u_0\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}\right]$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz, de Poincaré et de Young, on obtient :

$$2\int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds = 2\left(f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)\right) - 2\left(f^\varepsilon(0), u_0\right) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s), u^\varepsilon(s)\right) ds$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\left\|u^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq \varepsilon h^* \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}$$

et l'inégalité de Young

$$ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2}\frac{b^2}{2},\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \eta > 0$$

nous obtenons

$$\left|2\int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds\right| \leq \mu C_K \left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \tag{4.21}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\left\|f^\varepsilon(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \varepsilon^2 h^{*2}\left\|f^\varepsilon(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \left\|\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}$$

$$+ \mu C_K \int_0^t \left\|\nabla u^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} ds + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} ds$$

En remplaçant (4.21) dans (4.20), on déduit

$$\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] + \frac{2}{3}\|u^\varepsilon\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} + \alpha^\varepsilon \int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} ds \tag{4.22}$$

$$\leq \|u_1\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + (1+2\mu+3\lambda)\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \varepsilon^2 h^{*2}\|f^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}$$
$$+\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds + \int_0^t \left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] ds$$

En multipliant (4.22) par ε et en utilisant

$$\varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} = \varepsilon^{-1}\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

on obtient

$$\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] + \frac{2}{3}\varepsilon\|u^\varepsilon\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} + \varepsilon\alpha^\varepsilon \int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^3_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} ds$$
$$\leq A + \int_0^t \varepsilon\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] ds$$

où A est une constante qui ne dépend pas de ε

$$A = \|\hat{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)^3} + (1+2\mu+3\lambda)\|\nabla \hat{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + h^{*2}\left\|\hat{f}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$
$$+\frac{h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right)} + \frac{h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right)}$$

On utilise maintenant le lemme de Gronwall, il vient

$$\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] \leq C$$

Donc les estimations (4.14) et (4.15) sont démontrées.
Pour montrer l'estimation à priori (4.16), on considère l'équation approchée

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2},\varphi\right)+a\left(u_\zeta^\varepsilon,\varphi\right)+\left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right),\varphi\right)\\ +\alpha^\varepsilon\left(\left(1+\left|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t},\varphi\right)+2\left(|u_\zeta^\varepsilon|u_\zeta^\varepsilon,\varphi\right)=\left(f^\varepsilon,\varphi\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

avec

$$u_\zeta^\varepsilon(0)=u_0\quad\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)=u_1$$

où

$$j_\zeta^\varepsilon\left(v\right)=\int_\omega k_\varepsilon\left(x'\right)\phi_\zeta\left(|v_\tau|^2\right)dx'$$

avec

$$\phi_\zeta\left(\lambda\right)=\frac{1}{1+\zeta}|\lambda|^{1+\zeta},\quad\zeta>0$$

On dérive (4.23) par rapport à t et on prend $\varphi=\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3},\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)+a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)+2\alpha^\varepsilon\left(\left(\frac{1}{2}+\left|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2},\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\\ +2\left(|u_\zeta^\varepsilon|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)=\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\end{aligned}$$

Comme $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right),\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\geq 0$; nous trouvons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)\right]\leq\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)-2\left(|u_\zeta^\varepsilon|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)$$

En intégrant la dernière inégalité sur $(0, t)$ et en utilisant l'inégalité de Korn, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \leq \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \qquad (4.24)\\
&+ (2\mu + 3\lambda + \mu C_K)\left\|\nabla u_1\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} + \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\\
&+\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\\
&+\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds + \mu C_K \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} ds\\
&-4\int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(s)|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(s)dx'dx_3 ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young et l'injection de Sobolev, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|-4\int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(s)|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(s)dx'dx_3 ds\right|\\
&\leq 4\int_0^t \left\|u_\zeta^\varepsilon(s)\right\|_{L^4(\Omega^\varepsilon)^3}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{L^4(\Omega^\varepsilon)^3}\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds\\
&\leq 4C_*^2 T + \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds
\end{aligned}$$

avec C_* est une constante indépendante de ζ et ε, d'où

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \leq \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + (2\mu + 3\lambda + \mu C_K)\left\|\nabla u_1\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \qquad (4.25)\\
&+4C_*^2 T + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds\\
&+\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds + \mu C_K \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} ds
\end{aligned}$$

Maintenant, il faut estimer $\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$, on déduit de (4.23) et (4.10) que

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0),\varphi\right)=\left(f^\varepsilon(0),\varphi\right)-a\left(u_0,\varphi\right)-\alpha^\varepsilon\left(\left(1+|u_1|\right)u_1,\varphi\right)-\left(|u_0|u_0,\varphi\right)\ ,\ \ \forall\varphi\in K^\varepsilon$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0),\varphi\right)\right| &\leq \varepsilon h^*\left\|f^\varepsilon(0)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}+(2\mu+3\lambda)\left\|u_0\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\\ &+\varepsilon^2 h^{*2}\alpha^\varepsilon\left\|\nabla u_1\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}+\varepsilon h^*\alpha^\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\left(\int_\Omega\left|\hat{u}_1\right|^4dx'dz\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}\\ &+\varepsilon h^*\left(\int_\Omega\left|\hat{u}_0\right|^4dx'dz\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}\end{aligned}$$

comme $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0),\varphi\right)\right| &\leq \varepsilon h^*\left\|f^\varepsilon(0)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+(2\mu+3\lambda)\left\|u_0\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\\ +\varepsilon^2 h^{*2}\alpha^\varepsilon\left\|u_1\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}&+\varepsilon^{\frac{3}{2}}h^*\alpha^\varepsilon c_s\left\|\hat{u}_1\right\|_{H^1(\Omega)^3}\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\varepsilon h^* c_s\left\|\hat{u}_0\right\|_{H^1(\Omega)^3}\left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\end{aligned}$$

si on multiplie cette inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\leq C'$$

où

$$\begin{aligned}C'=h^*\left\|\hat{f}(0)\right\|_{L^2(\Omega)^3}&+(2\mu+3\lambda)\left\|\hat{u}_0\right\|_{H^1(\Omega)^3}+h^*c_s\left\|\hat{u}_0\right\|^2_{H^1(\Omega)^3}\\ &+\hat{\alpha}h^{*2}\left\|\hat{u}_1\right\|_{H^1(\Omega)^3}+\hat{\alpha}h^*c_s\left\|\hat{u}_1\right\|^2_{H^1(\Omega)^3}\end{aligned}$$

ne dépend pas de ε. En passant à la limite dans (4.25) quand ζ tend vers zéro, nous trouvons

$$\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] \leq \left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \tag{4.26}$$

$$+ (2\mu + 3\lambda + \mu C_K) \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} + 4C_*^2 T + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}$$

$$+\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds$$

$$+\int_0^t \left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] ds$$

En multipliant maintenant (4.26) par ε, on obtient

$$\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] \leq B+$$

$$\int_0^t \varepsilon\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] ds$$

où B est une constante ne dépend pas de ε avec

$$B = (2\mu + 3\lambda + \mu C_K) \|\nabla \hat{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + (C')^2 + \frac{h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

$$+\frac{h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right)} + \frac{h^{*2}}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right)}$$

d'aprés l'inégalité de Gronwall, il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \varepsilon\left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \leq C$$

ce qui donne l'estimation (4.16). ■

4.3.3 Théorème de convergence

Théorème 4.5 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 4.4, il existe* $u_i^* \in L^2(0,T;V_z) \cap L^\infty(0,T;V_z)$, $i=1,2$ *telle que*

$$\left.\begin{array}{r} \hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*,\ i=1,2 \\ \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t},\ i=1,2 \end{array}\right\} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;V_z) \textit{ et faiblement } * \textit{ dans } L^\infty(0,T;V_z) \tag{4.27}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t},\ i=1,2 \\ \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \end{array}\right\} \textit{faiblement dans } L^3\left(0,T;L^3(\Omega)\right) \tag{4.28}$$

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup 0, i=1,2 \\ \varepsilon^{\frac{5}{3}} \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0 \end{array}\right\} \textit{faiblement dans } L^3\left(0,T;L^3(\Omega)\right) \textit{ et faiblement } * \textit{ dans } L^\infty\left(0,T;L^3(\Omega)\right) \tag{4.29}$$

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, i=1,2 \\ \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, i,j=1,2 \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, i=1,2 \\ \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0 \end{array}\right\} \textit{faiblement dans} L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \textit{ et faiblement } * \textit{ dans} L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{4.30}$$

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \rightharpoonup 0, i,j=1,2 \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i \partial t} \rightharpoonup 0, i=1,2 \\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0, i=1,2 \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 \end{array}\right\} \textit{faiblement dans} L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \textit{ et faiblement } * \textit{ dans} L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega\right. \tag{4.31}$$

Preuve. D'aprés (4.14) et (4.15), il existe une constante c indépendante de ε, telle que

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c, \; i = 1, 2.$$

En utilisant ces estimations avec l'inégalité de Poincaré on déduit que les suites $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ et $\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)_\varepsilon$ sont bornées dans $L^2(0, T; V_z) \cap L^\infty(0, T; V_z)$, ce qui implique l'existence des éléments (u_1^*, u_2^*) et $\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t}, \frac{\partial u_2^*}{\partial t} \right)$ dans $L^2(0, T; V_z) \cap L^\infty(0, T; V_z)$ telles que $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ $\left(\text{resp} \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)_\varepsilon \right)$ converge faiblement vers (u_1^*, u_2^*) $\left(\text{resp} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t}, \frac{\partial u_2^*}{\partial t} \right) \right)$ dans $L^2(0, T; V_z) \cap L^\infty(0, T; V_z)$. Donc nous obtenons (4.27). Pour (4.28)-(4.30), ils viennent directement de (4.14)-(4.16) et (4.27). ■

4.3.4 Problème limite

Théorème 4.6 *Avec les mêmes hypothèses du théorème 4.3,* $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ *vérifie*

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz + \hat{j}(\hat{\varphi}) - \hat{j}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right) \tag{4.32}$$

$$+\hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz \geq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz, \;\; \forall \hat{\varphi} \in \Pi(K)^2$$

$$\begin{cases} -\mu \dfrac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}(t) + \hat{\alpha} \left(1 + \left| \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t}(t) \right| \right) \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t}(t) = \hat{f}_i(t) \quad i = 1, 2 \text{ dans } L^2(\Omega) \\ u_i^*(x', z, 0) = u_{0,i}^*(x', z), \quad i = 1, 2 \end{cases} \tag{4.33}$$

Preuve. On prend $\hat{\varphi} = \left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right)$ dans (4.13) puis en passant à la limite quand ε tend vers zéro et en utilisant les résultats de convergence du théorème 4.5, on déduit

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx'dz + \hat{j}\left(\hat{\varphi}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right) \tag{4.34}$$

$$+\hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx'dz \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)$$

Nous choisissons maintenant dans (4.34)

$$\hat{\varphi}_i = \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \pm \psi_i, \;\; \psi_i \in H_0^1\left(\Omega\right) \quad i = 1, 2$$

et en utilisant la formule de Green, puis en choisissant $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in H_0^1\left(\Omega\right)$, ensuite $\psi_2 = 0$ et $\psi_1 \in H_0^1\left(\Omega\right)$, on obtient

$$-\mu \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} \psi_i dx'dz + \hat{\alpha} \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \psi_i dx'dz = \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx'dz$$

d'où

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} + \hat{\alpha} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} = \hat{f}_i \;\; i = 1, 2 \text{ dans } H^{-1}\left(\Omega\right) \tag{4.35}$$

et comme $\hat{f}_i \in L^2\left(\Omega\right)$ alors (4.35) est valable dans $L^2\left(\Omega\right)$. ■

Théorème 4.7 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 4.4, les traces*

$$s^* = u^*\left(x', 0, t\right), \quad \tau^* = \frac{\partial u^*}{\partial z}\left(x', 0, t\right)$$

vérifient

$$\int_{\omega} \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx' - \int_{\omega} \mu \tau^* \psi dx' \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2\left(\omega\right)^2$$

et les conditions aux limites de Tresca sur $\omega \times \left]0, T\right[$

$$\left.\begin{array}{l} \mu\left|\tau^*\right| < \hat{k} \implies \dfrac{\partial s^*}{\partial t} = 0 \\ \mu\left|\tau^*\right| = \hat{k} \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } \dfrac{\partial s^*}{\partial t} = \beta \tau^* \end{array}\right\} \text{ p.p sur } \omega \times \left]0, T\right[\tag{4.37}$$

De plus u^* et s^* vérifient l'équation généralisée de Reynolds

$$\int_\omega \left(\tilde{F} - \mu \frac{h}{2} s^* + \int_0^h \mu u^* (x', z, t) \, dz + \tilde{U}_t \right) \nabla \psi (x') \, dx' = 0, \quad \forall \psi \in H^1 (\omega) \tag{4.38}$$

où

$$\tilde{F} (x', h, t) = \int_0^h F (x', z, t) \, dz - \frac{h}{2} F (x', h, t)$$

$$F (x', z, t) = \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f} (x', \eta, t) \, d\eta d\zeta$$

$$\tilde{U}_t (x', h, t) = -\hat{\alpha} \int_0^h U_t (x', z, t) \, dz + \frac{\hat{\alpha} h}{2} U_t (x', h, t)$$

$$U_t (x', z, t) = \int_0^z \int_0^\zeta \left(1 + \left| \frac{\partial u^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u^*}{\partial t} (x', \eta, t) \, d\eta d\zeta$$

Preuve. Dans l'inéquation variationnelle (4.32), on choisit $\varphi_i = \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t} + \psi_i, i = 1, 2$, où $\psi \in \Pi (K)$, on trouve

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz + \hat{j} \left(\psi + \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right)$$

$$+ \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \psi_i dx' dz \geq \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \hat{f}_i \psi_i dx' dz, \quad \forall \psi_i \in \Pi (K)$$

en utilisant la formule de Green, il vient que

$$-\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} \psi dx' dz + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \psi_i dx' dz$$

$$-\mu \sum_{i=1}^2 \int_\omega \tau_i^* \psi_i dx' + \int_\omega \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \hat{f}_i \psi_i dx' dz$$

De (4.33), on trouve

$$\int_\omega \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx' - \int_\omega \mu \tau^* \psi dx' \geq 0, \quad \psi \in D (\omega)^2$$

Par la densité de $D(\omega)$ dans $L^2(\omega)$ on déduit (4.36). Nous obtenons aussi (4.37) comme dans [28]. Pour montrer (4.38) on intègre deux fois (4.33) entre 0 et z on obtient

$$-\mu u_i^*(x',z,t)+\mu s_i^*+\mu z\tau_i^*+\hat{\alpha}\int_0^z\int_0^\zeta\left(1+\left|\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta=\int_0^z\int_0^\zeta\hat{f}_i(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta \tag{3.39}$$

En particulier pour $z=h$, donc

$$\mu s_i^*+\mu z\tau_i^*+\hat{\alpha}\int_0^h\int_0^\zeta\left(1+\left|\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta=\int_0^h\int_0^\zeta\hat{f}_i(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta \tag{4.40}$$

En intégrant (4.39) de 0 et h, on obtient

$$-\mu\int_0^h u_i^*(x',z,t)\,dz+\mu s_i^*h+\mu\frac{h^2}{2}\tau_i^*+\hat{\alpha}\int_0^h\int_0^z\int_0^\zeta\left(1+\left|\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta dz \tag{4.41}$$

$$=\int_0^h\int_0^z\int_0^\zeta\hat{f}_i(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta dz$$

De (4.40) et (4.41), nous déduisons que

$$\tilde{F}-\mu\frac{h}{2}s^*+\int_0^h\mu u^*(x',z,t)\,dz+\tilde{U}_t=0$$

Et par conséquent

$$\int_\omega\left(\tilde{F}-\mu\frac{h}{2}s^*+\int_0^h\mu u^*(x',z,t)\,dz+\tilde{U}_t\right)\nabla\psi(x')\,dx'=0$$

■

Théorème 4.8 *La solution u^* du problème limite* (4.32)-(4.33) *est unique dans $L^2(0,T;V_z)\cap L^\infty(0,T;V_z)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions u^* et u^{**} de l'inéquation variationnelle (4.32), nous avons

$$\mu\sum_{i=1}^2\int_\Omega\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)dx'dz+\hat{j}(\hat{\varphi})-\hat{j}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right) \tag{4.42}$$

$$+\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(1+\left|\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)dx'dz\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)$$

et

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^{**}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)dx'dz+\hat{j}\left(\hat{\varphi}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial u^{**}}{\partial t}\right) \tag{4.43}$$

$$+\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(1+\left|\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right|\right)\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)dx'dz\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)$$

Nous prenons $\hat{\varphi}=\dfrac{\partial u^{**}}{\partial t}$ dans (4.42) (resp $\hat{\varphi}=\dfrac{\partial u^{*}}{\partial t}$ dans (4.43) et en additionnant les deux inéquations, on obtient

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^*-u_i^{**}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}-\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)dx'dz+\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}-\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}-\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)dx'dz$$

$$+\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right|\frac{\partial u_i^*}{\partial t}-\left|\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right|\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}-\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}\right)dx'dz\leq 0$$

Posons $\tilde{W}(t)=u^*(t)-u^{**}(t)$, ceci implique que

$$\mu\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)^2}^2+\hat{\alpha}\left\|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)^2}^2+\frac{\hat{\alpha}}{4}\left\|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial t}\right\|_{L^3(\Omega)^2}^3\leq 0$$

Comme $\tilde{W}(0)=0$ donc

$$\left\|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)^2}^2=0$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\left\|\tilde{W}\right\|_{L^2(0,T;V_z)}=\left\|\tilde{W}\right\|_{L^\infty(0,T;V_z)}=0.$$

■

Bibliographie

[1] M. Boukrouche, R. El Mir, Non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca fluid-solid law. Existence and asymptotic of weak solutions. Nonlinear Analysis, Real World Applications, Vol. 9 (2), (2008), 674-692.

[2] H. Benseridi, M. Dilmi, F. Guechi, B. Merouani, Singularities of the solutions for the elasticity system in a non homogeneous three-dimensional domain. JAAUBAS, 12 (2012), 79-84.

[3] H. Benserid, M. Dilmi, Nonlinear and oblique boundary value problems for the Stokes equations. EJQTDE. No. 82, (2011), 1-8.

[4] Mourad Dilmi, Hamid Benseridi, Existence and regularity results for the Stokes system with mixed boundary conditions. General Letters in Mathematics vol. 1(1), (2016), pp. 39-44.

[5] J. Necas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson. Paris, 1967.

[6] H. Benseridi and M. Dilmi, Some inequalities and asymptotic behaviour of dynamic problem of linear elasticity. Georgian Math. J. 20, (2013), 25–41.

[7] H. Brezis, Monotonicity methods in H-spaces and some applications to non linear partial differential equations. Academic Press, 1971.

[8] P. Grisvard, Singularites in boundary value problems. Masson, 1992.

[9] P. Grisvard, Le problème de Dirichlet pour les équations de Lamé. C. R. Acad. Sc, 304(3), (1987), 71-73.

[10] M. Dilmi, H. Benseridi and B. Merouani, Nonlinear and oblique boundary value problems for the Lamé equations. Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, (2007), no. 51, 2517-2528.

[11] Schechter, Principles of functional analysis. Academic Press, 1971.

[12] P. Grisvard, G. Looss, Problèmes unilatéraux dans des domaines non réguliers. Journées équations aux dérivées partielles, (2004), 1-26.

[13] Lions, Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et application. Dunod vol 1-2, 1968.

[14] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions. Math Mod and Meth in Applied Sciences. 14(6), (2004), 913-941.

[15] M. Boukrouche and F. Saidi, Non-isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law. Part I , Nonlinear Analysis : Real World Application 7 (2006), pp. 1145-1166.

[16] Bensedik Ahmed, Boukrouche Mahdi, Existence result for a strongly coupled problem with heat convection term and Tresca's law. Journal of Advanced Research in Differential Equations, 2011, 3 (3), pp.33-53.

[17] R. El Mir, Étude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides incompressibles essentiellement non-Newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2005.

[18] H. Benseridi and B. Merouani, Regularity of the solution of a nonlinear boundary value problem governed by Lamé operator in an irregular domain, Far East J. Appl. Math, 16(3) (2004), 305 - 314.

[19] Mourad Boudersa, Mourad Dilmi and Hamid Benseridi, A 3D-2D asymptotic analysis of elastic problem nonlinear dissipative and source terms, Adv. Math. Sci. Journal, 11, (2022), no 4, 301-319. https ://doi.org/10.37418/amsj.11.4.2.

[20] F. Saidi, M. Boukrouche, Non-isothermal lubrication problem with Trisca Fluide-solide interface law, Nonlinear Analysis : Real World Applications 7 (2006), pp. 1145 – 1166.

[21] M. Boukrouche, R. El Mir, On a non-isothermal, non Newtonian lubrication problem with Tresca law : Existence and behavior of weak solution. Nonlinear Analysis : Real World Applications, (2007).

[22] M. Boukrouche, R. El Mir, Asymptotic of a non-Newtonian Fluide in a then domain with Trisca law, Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applixations, vol.59, Issues 1-2, 2004, pp 85-105.

[23] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux Limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[24] M. Boukrouche, F. Boughanim, H. Smaoui, Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow with stick- stip condition, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 11, (2004), pp.71–80.

[25] H. Benseridi, M. Dilmi, A. Saadallah, Asymptotic behaviour of a nonlinear boundary value problem with friction. Proc Natl Acad Sci India Sect A Phys Sci 88(1), (2018), 55-63.

[26] D. Benterki, H. Benseridi, M. Dilmi, Asymptotic study of a boundary value problem governed by the elasticity operator with nonlinear, Term. Adv. Appl. Math. Mech., 6 (2014), 191-202.

[27] Mohamed. Dilmi, Mourad. Dilmi and Hamid. Benseridi, Asymptotic behavior for the elasticity system with a nonlinear dissipative term, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. Vol 51 (2019), 41-60, DOI : 10.13137/2464-8728/27066.

[28] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with Coulomb fluid–solid interface law, International Journal of Engineering Science 41 (2003), 521–537.

[29] G. Bayada, L. Chupin and S. Martin, Viscoelastic fluids in a thin domain, Quart. Appl. Math. 65 (2007), pp.625–651.

[30] G. Duvaut and J. L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.

[31] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, paris, 1987.

[32] Mohamed. Dilmi, Mourad. Dilmi and Hamid. Benseridi, A 3D-2D asymptotic analysis of viscoelastic problem nonlinear dissipative and source terms, Math Meth Appl Sci. 2019, 1-17, DOI : 10.1002/mma.5755.

[33] G. Bayada, M. Boukrouche, On a free boundary for the Reynolds equation derived from the stokes system with Tresca boundary condition, Journal of mathematical Analysis and Applications, vol. 282, (2003), pp. 212-213.

[34] Y. Letoufa, H. Benseridi, M. Dilmi, Asymptotic study of a frictionless contact problem between two elastic bodies. J. Math. Computer Sci. 16 (2016), 336-350.

[35] A. Saadallah, H. Benseridi, M. Dilmi, S. Drabla, Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction. Georgian Math J 23(3), (2016), 435-446. doi : 10.1515/gmj-2016-0002.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons étudié quelques problèmes d'élasticité linéaire et non-linéaires avec différentes conditions aux limites dans un domaine borné tridimensionnel. Tout d'abord, nous avons montré l'existence et la régularité de la solution d'un problème élastique perturbé dans un domaine régulier avec conditions de frottement non linéaire de type Tresca-graphe maximal monotone. Ensuite, nous avons étudié l'analyse asymptotique d'un problème approché associé à notre problème dans un domaine mince. Le dernier problème dans cette thèse est consacré à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème dynamique non-linéaire pour l'élasticité avec un terme dissipatif et un source non linéaire dans un film mince.

Abstract

In this thesis, we have studied some linear and non-linear elasticity problems with different boundary conditions in a three-dimensional bounded domain. First, we showed the existence and the regularity of the solution of a perturbed elastic problem in a smooth domain with nonlinear friction conditions of Tresca-maximal monotone graph type. Then, we studied the asymptotic analysis of an approximate problem associated with our problem in a thin domain. The last problem in this thesis is devoted to the study of the asymptotic analysis of a nonlinear dynamical problem for elasticity with nonlinear dissipative and source terms in a thin film.

الملخص

في هذه الأطروحة، قمنا بدراسة بعض مسائل المرونة الخطية وغير الخطية بشروط حدية مختلفة في ميدان محدود ثلاثي الأبعاد. أولاً، برهنا وجود و انتظام حل مشكلة مرونة مضطربة في المجال العادي مع شروط الاحتكاك غير الخطي من النوع تريسكا-المنحنى الرتيب الاعظمي. بعد ذلك، درسنا التحليل التقاربي لمسألة تقريبية مرتبطة بمشكلتنا في ميدان رقيق. المسألة الأخيرة في هذه الأطروحة مخصصة لدراسة التحليل التقاربي لمسألة حدية حركية مرنة مع طرفي تبديد و منبع غير خطي في ميدان رقيق.