REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Université de Batna
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Thèse de Doctorat d' Etat

Présentée par :

Guedjiba Said

Sur les G_k - inverses d'opérateurs linéaires

Soutenue le : 21-11-2005

Devant le jury :

M. Denche	Professeur à l'univ. De Constantine	Président du jury
R. Benacer	Professeur à l'univ. De Batna	Rapporteur
M. Deghdak	Maître de conférences à l'univ. De Constantine	Examinateur
K. Messaoudi	Maître de conférences à l'univ. De Batna	Examinateur
B. Teniou	Maître de conférences à l'univ. De Constantine	Examinateur

ملخص

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ، نعتبر $A : F \to E$ مؤثرا خطيا. البحث يتناول احد اكثر موضوعات الرياضيات شيوعا و هو موضوع مقلوبات المؤثرات الخطية، حيث ان المعادلة $Ax=y$ تكون قابلة للحل متى كان المؤثر الخطي A قابلا للقلب، أي كون المؤثر تقابلا هدا الامر الذي لا يتحقق في كثير من الحالات، و هو ما يتطلب البحث عن مؤثر له خواص اقرب ما تكون من خواص المقلوب العادي.

فاذا كان المقلوب العادي B يحقق المعادلتين $AB=I_F$ و $BA=I_E$ ، فانه و على سبيل المثال، قد نكتفي بمؤثر B يحقق إحدى، أو كلتا المعادلتين $BA=Q$ و $AB=P$ ، حيث P و Q هي إسقاطا على الفضائين E و F ، على الترتيب إذ ان الاسقاطات هي اقرب المؤثرات الى المؤثرات المطابقة من حيث الخواص. بحثنا يتناول P و Q باعتبارهما جذورا من مرتبة k لاسقاطات.

ندعو 1^k - مقلوبا معمما المؤثر $B:F\to E$ ، الدى يحقق $(AB)^k A=A, k\in IN^*$ و في حالة كون A 1^k - مقلوبا معمما B فإنه يدعى G_k - مقلوبا معمما.

البحث يتناول, اضافة الى الخواص المتعلقة بالتعاريف، بعض التطبيقات التي نذكر منها المعادلات المصفوفية، معادلات بمؤثرات خطية، طريقة نيوتن في حل معادلة من الشكل $f(x)=0$ ، كما يتناول خواص تقريبية للمقلوبات المعممة في الفضاءات النظيمية.

الكلمات الافتتاحية

مؤثر خطي ، 1^k - مقلوب معمم، G_k - مقلوب معمم ، اسقاط، جدر التطبيق الحيادي.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Mr R. Benacer pour les conseils et les encouragements qu'il m'a accordés.
Je remercie vivement Mr. M. Denche qui m'a fait le grand honneur de présider le jury.
Je remercie également Messieurs M. Deghdak, K. Messaoudi, et B. Teniou pour avoir accepté de faire part du jury.
Je remercie une autre fois Mr K. Messaoudi, directeur du LTM pour l'assistance materielle et technique, ainsi que tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.

SOMMAIRE

Chapitre 3

Chapitre 4

Notations

A_0 inverse généralisé de A

P_E projection sur E

1^k-inverse

G_k-inverse

$rg(A)$ rang de A

$N(A)$ noyau de A

$R(A)$ image de A

${}^tA$ la matrice transposée de A

$\oplus$ somme (topologique) directe

δ_{ij} symbole de Kronecker

$\|.\|$ norme .

(,) produit s calaire

$\Lambda(E,F)$ espace d'opérateurs linéaires définis de E dans F

$\Lambda(E)$ espace d'opérateurs linéaires définis de E dans E

$\beta(E,F)$ espace d'opérateurs linéaires bornés définis de E dans F

A^* matrice (opérateur) adjoint(e)

y^* transposé conjugué

A^+ inversede Moore-Penrose

$tr(A)$ trace

A' opérateur adjoint

$\overline{E}$ fermeture

$\mathcal{D}(A)$ domaine de déinition

$C_P(A)$ support de A.

$L_2\,[a,b]$ espace des fonctions à carré integrable

l_2 espace des suites à carrés sommable

l_∞ espace des suites bornées

C_0 espace des suites conv. vers 0

$C_{[a,b]}$espace des fonctions continues sur $[a,b]$

0.1

INTRODUCTION

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beacoup de problèmes sont interpretés par une équation du type $Ax = y$, où A est une transformation donnée, qui est dans notre situation un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel E dans un autre espace vectoriel F.

Pour que l'équation proposée admette une solution pour y dans F, il est nécessaire que A possède une transformation réciproque, ou bien très précisement un inverse. et comme ce n'est pas toujours le cas, par exemple si l'equation $Ax = y$ représente un système linéaire, pour que A possède un inverse il faut que la matrice associée à A soit carrée régulière, le manque de l'une de ces conditions entraine la non inversibilité de A.

Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuel réjouit, d'une manière que cet opérateur existe pour une classe plus large d'opérateurs linéaires.

Si A_0 est un opérateur linéaire vétrifiant $AA_0A = A \quad$ et $\quad A_0AA_0 = A_0,$ ces proprités, qui sont celles de l'inverse ordinaire, rendent A_0 aussi proche de l'inverse de A, ou autrement dit on est proche d'obtenir $A_0A = I_E,$ l'identité dans E.

Les opérateurs les plus proches de l'identité du point de vue proprietés, sont les projecteurs (l'application identique est une projection dont l'image est l'espace tout entier), pour cela, cherchons A_0 vérifiant l'une ou les deux équations

$$\begin{cases} A_0A = P_E \\ AA_0 = Q_F \end{cases}$$

P et Q étant des projecteurs vérifiant de plus $AQ = A$ et (ou) $A_0P = A_0$.

La question a été connue depuis longtemps; utilisée par Fredholm pour traiter les équations integrales , aussi par Hurwitz, Hilbert, ..., et ainsi des définitions de ce genre d'opérateurs apparaissent, donnant naissance à une terminologie variée, suivie de notations différentes, mais

possédant toutes un point commun, faisant apparaitre leurs proprietés proches de celles de l'inverse usuel.

Parmi la terminologie éxistante, citons par exemple : inverse partiel, inverse intérieur, inverse extérieur, quasi inverse, pseudo-inverse, inverse généralisé,.... D'autres inverses portent les noms de leurs fondateurs, par exemple: l'inverse de Moore, l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de Drazin, de Duffin,...

Les travaux, des quels notre thème est inspiré ont traité le système suivant:

$$\begin{cases} (AA_0)A = A \\ (A_0A)A_0 = A_0 \end{cases}$$

Où A_0 est interprété comme G_1- inverse de A.

Notre travail va dans le sens de généraliser les deux équations:

$$\begin{cases} A_0A = I - P_{R(A_0)} \\ AA_0 = Q_{R(A)} \end{cases}$$

Où $P_{R(A_0)}$ désigne une projection sur le sous espace $R(A_0)$.

Afin d' étudier l'une où bien simultanément, les deux équations

$$\begin{cases} (A_0A)^k = I - P_{R(A_0)} \\ (AA_0)^k = Q_{R(A)} \end{cases}$$

Où k est un entier ≥ 2. Supposons A une matrice carrée, A_0 une matrice carée telle que $AA_0 = -I$ alors A_0 n'est pas un inverse à droite pour A, il n'est même pas un inverse généralisé au sens du système, mais comme $(AA_0)^2 = I$ on obtient

$$\begin{cases} (AA_0)^2A = A \\ (A_0A)^2A_0 = A_0 \end{cases}$$

A_0 est appelé G_2-inverse de A, on verra qu'il possède des proprités trés proches de celles de l'inverse usuel.

On appelle, donc 1^k-inverse de A tout opérateur A_0 défini de F dans E vérifiant $(AA_0)^kA = A$ et si A_0 vérifie simultanément

$$\begin{cases} (AA_0)^kA = A \\ (A_0A)^kA_0 = A_0 \end{cases}$$

alors A_0 est dit G_k-inverse de A.

On remarque que cette notion d'inversion est liée aux racines d'ordre k de l'identité, qui sont des opérateurs linéaires S tels que $S^k = I$. Des paragraphes sont consacrés à ces racines dans des éspaces différents.

L'inversion généralisée possède un aspect pratique; on en trouve des applications dans des domaines différents tels que les équations matricielles , équations à opérateurs, approximation, etc...

Le travail est réparti sur quatre chapitre (parties), le premier chapitre, en plus de son caractère introductif, traite le cas de dimension finie, il donne les proprietées algébriques générales des inverses généralisés, des constructions différentes de ces inverses, tout en signalant le rôle des raines de la matrice identité.

Le deuxième chapitre se sert des proprietés des espaces normés pour présenter des proprietés pratiques des inverses généralisés. On y intoduit l' inverse de Moore-Penrose, on montre la discontinuité de l'application associant à l'opérateur A son Moore-Penrose inverse. Un paragraphe introductif est consacrée aux systèmes linéaires $Ax = b$, on donne enfin une application des G_k-inverses pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$, en utilisant la méthode Newton-Raphson .

Le troisième chapitre étudie les proprietés algèbriques des inverses généralisés, la liaison des inverses généralisés avec les projections, tout cela dans le but de généraliser la théorie de Nashed-Votruba. Une approche pour une classification des inverses généralisés trouve sa place dans ce chapitre. On continue avec les équations à opérateurs linéaires, en donnant des conséquences des résultats obtenus.

Le quatrième chapitre et le dernier traite le cas de l'inversion généralisée dans des structures topologiques, les exemples les plus familiers sont les cas des espaces de Banach et de Hilbert dont les proprités particulières sont d'intéret considérable, on s'intéresse en particulier à l'approximation de la quantité $\|Ax - y\|$. On y trouve aussi les cas mixtes, où l'un au plus des espaces est muni d'une structure topologique.

La notion de racine de l'identité existe partout, car on y revient chaque fois en intrduisant des propriétés spécifiques à chaque situation.

0.2

Chapitre1

Inversion généralisée d'opérateurs linéaires dans les espaces de Dimension finie.

le premier chapitre, en plus de son caractère introductif, traite le cas général de dimension finie, les outils utilisés sont purement algébriques, on y trouve les propriétés générales des inverses généralisées, On y trouve aussi la réponse à la question d'existence de l'inverse généralisé d'une matrice quelconque, l'introduction en premier lieu de la racine d'ordre k de l'identité comme étant un inverse généralisé de cette dernière, et en se servant du caractère de ce domaine, on dégage aussi quelques proprietés algebriques de ces racines, la question de calculer l'inverse généralisé d'une matrice a trouvé sa réponse en quelques méthodes basées toutes sur les techniques du calcul matriciel. Le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation matricielle $AXB = C$ où l'on explicite la condition nécessaire et suffisante d'éxistence de solution, cette question sera traitée avec plus de détails dans le troisième chapitre.

Les démonstrations sont basées généralement sur les techniques du calcul matriciel.

Soient E, F, deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{C}$, de dimensions finies m et n respectivement , A:$E \to F$ un opérateur linéaire.Si $(e_1, e_2, ..., e_m)$ est une base de E, $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F, A est bien détérminé, si l'on connait l'image de la base $(e_1, e_2, ..., e_m)$ par A, soit $Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$,ce qui s'exprime par la matrice $(a_{ij})_{\substack{i=1...m \\ j=1,.....n}}$. A l'opérateur A on fait associer sa matrice dans les bases mentionnées en la notant aussi $A = (a_{ij})_{\substack{i=1...m \\ j=1,.....n}}$, ou bien simplement, s'il n'y a pas de confusion à craindre $A = (a_{ij})$.

Rappelons que $R(A)$, l'image de A, est le sous espace de F engendré par la famille $(Ae_i)_{i=1,...m}$, $rg(A)$, le rang de A, est la dimension de $R(A)$, c'est aussi le nombre de vecteurs colonne linéairement indépendants constituant la matrice A. $rg(A) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

1.1.1 Définittions:

Soient E, F, deux espaces vectoriels sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, de dimensions finies m et n respectivement , A:$E \to F$ un opérateur linéaire, $(e_1, e_2, ..., e_m)$ une base de E, $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F, alors,dans les bases précédentes A est de la forme:

$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$,ce qui s'exprime par la matrice $(a_{ij})_{\substack{i=1...m \\ j=1,.....n}}$.

L'opérateur linéaire $A_0 : F \to E$ est dit 1^k-inverse de A, si $(AA_0)^k A = A$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Si de plus A est 1^k- inverse de A_0, alors A_0 est dit G_k-inverse de A,ou chacun est G_k-inverse de l'autre.

Etant donné que $\Lambda(E, F)$, l'espace d'opérateurs agissant de E dans F, et $M_{(n,m)}$ l'espace vectoriel des matrices de type (n, m), sont isomorphes, alors au lieu de l'opérateur A, on peut considerer la matrice A.

La définition aura la forme suivante:

Soit A une matrice de type (n, m), une matrice A_0de type (m, n) est dite 1^k-inverse de A, si $A(A_0A)^k = A$, $k \in \mathbb{N}^*$,et si de plus A est 1^k- inverse de A_0, alors A_0 est dite G_k-inverse de A, ou bien A et A_0 sont l'une G_k-inverse de l'autre.

1.1.2 Remarques:

1- Si A est une matrice inversible, inversible à gauche, inversible àdroite, alors son inverse, son inverse à gauche, son inverse à droite , respectivement, en est un 1^k- inverse, il en est aussi G_k-inverse.

Par exemple si A_0 est un inverse à gauche de A, c'est à dire on a $A_0A = I$, alors $(A_0A)^k = I$ et par conséquent $A(A_0A)^k = A$. L' autre relation se déduit d'une manière analogue.

2- Si A_0 est un 1^1- inverse, (G_1-inverse) de A, alors A_0 est un 1^k- inverse, (G_k-inverse) de A.

La réciproque n'est pas vraie, car si A_0 est un 1^k- inverse de A; et

$\varepsilon \in \mathbb{C}$ - $\{1\}$ tel que $\varepsilon^k = 1$, alors εA_0 est un 1^k- inverse de A qui n'est pas un 1^1- inverse.

3-Si A_0 est un 1^k- inverse, (G_k-inverse); alors ${}^tA_0$ est un 1^k- inverse, (G_k-inverse) de ${}^tA$,

En effet , la relation $A(A_0A)^k = A$ nous conduit , par transposition, à

${}^t(A(A_0A)^k) = {}^t((A_0A)^k)\ {}^tA = (({}^tA{}^tA_0)^k)\ {}^tA = {}^tA$.

La relation vérifiant la G_k-inversiblité se déduit de la même façon.

1.1.3 Exemples:

1- Supposons $A = I_n$, la matrice identité d'odre n, si A_0 est un 1^k- inverse de A, alors il doit vérifier $A_0^K = I_n$, donc A_0 est une une involution d'ordre k. ou bien une racine d'ordre k de l'identité.

Le cas particulier $n = 2$ nous fournit l'ensemble:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} PJP^{-1}; & P \textit{ matrice carrée d'}\text{ordre } 2 \textit{ inversible} \\ & \\ & J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

avec $|\alpha| = |\beta| = 1$

2- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors

$$A_0 = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{k}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un G_k-inverse de A.

3-Supposons

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1étant une matrice inversible d'ordre $r = rg(A)$, $r \leq \min(m, n)$, on vérifie bien que

$$A_0 = \begin{pmatrix} SA_1^{-1} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

est un 1^k- inverse, de A, où:

S étant une racine carrée d'ordre k de I_r, A_1^{-1}est l'inverse de A_1; U une matrice quelconque de type $(m-r, n-r)$,

Donc pour $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

on peut choisir $A_0 = (\varepsilon, \alpha)$; $\varepsilon^k = 1$; $\alpha \in \mathbb{C}$, comme 1^k- inverse de A.

4-Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

est un 1^k-inverse de A.

on vérifie aussi que, pour

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

${}^tA'$ est aussi un 1^k-inverse de A', en conclusion, A et ${}^tA$ sont G_k-inverses l'un de l'autre.

5- Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & & & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & ... & & & . \\ & & 0 & 1 & 0 & ... & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & ... & \\ & & & & ... & ... & & \\ & & & & & ... & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad j = i+1 \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

Cherchons A_0 un 1^1-inverse de A.

Soit $A_0 = (b_{ij})$, $AA_0 = (c_{ij})$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii+1}b_{i+1j} = b_{i+1j}$.

$AA_0A = (\sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj}) = (\sum_{k=1}^{n} b_{i+1k}a_{kj}) = (b_{i+1j-1}a_{j-1j}.)$

Pour avoir $AA_0A = A$ on exige que $b_{i+1j-1}a_{j-1j} = a_{ij}$; alors

$$b_{i+1j-1} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

c'est à dire $b_{i+1i} = 1$, tandisque le reste est contitué par des zéros, ce qui donne la transposée de A, donc:

$A_0 = {}^tA$.

1.1.4 Proposition:

Si A et B sont deux matrices équivalentes i.e. il existe deux matrices carrées inversibles P et Q telles que $A = P^{-1}BQ$, et si B_0 est un 1^k-inverse (G_k-inverse)de A, alors

$A_0 = Q^{-1}B_0P$ *est un* 1^k-*inverse (*G_k-*inverse) de* A *respectivement.*

.

Preuve:

Supposons B_0 un 1^k-inverse de B, alors,

$A(A_0A)^k = (P^{-1}BQQ^{-1}B_0P)^kPBQ$

$= P^{-1}(BB_0)^kPPBQ$

$= P^{-1}BQ$

$= A$

Donc A_0 est un 1^k-inverse de A. Le cas où A_0 est G_k-inverse de A, se fait de la même façon.

1.2 Existence de 1^k-inverse, G_k-inverse.

1.2.1 Proposition:

Toute matrice possède un1^k-*inverse, (un* G_K-*inverse).*

Preuve:

Considérons le cas général où A est une matrice de type (m, n). Supposons que $rgA = r \leq \min(m, n)$, alors A est équivalente à une matrice $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

A_1étant une matrice carrée inversible d'ordre r.

Il existe deux matrices P et Q inversibles telles que $A = P^{-1}BQ$, soit $A_0 = Q^{-1}B_0P$, où

$$B_0 = \begin{pmatrix} SA_1^{-1} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

S est une racine de l'unité d'ordre k ;$(S^K = I_r)$,

U une matrice quelconque de type $(m-r, n-r)$. Alors B_0 est un 1^k-inverse de B, d'après ex (1.1.3) .En se servant de la proposition (1.1.4) alors $A_0 = Q^{-1}B_0P$ est un 1^k-inverse de A.

Pour montrer l'existence du G_K-inverse, on reprend la même construction avec

$$B_0 = \begin{pmatrix} SA_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Remarques:

On remarque que la construction ainsi faite, permet d'obtenir des 1^k-inverses et des G_k-inverses de A. L'intervention de la matrice arbitraire U conduit certainement à un changement du rang de A_0, on montre donc qu' il est possible de trouver des 1^k-inverses qui ne sont pas des G_k-inverses de A, pour cela considérons l'exemple suivant:

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in C$, est un 1^2-inverse de A,

tandis que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

est un 1^2-inverse de A qui n'en est pas G_2-inverse.

On peut énoncer:

1.2.4 Prpoposition:

Pour que A_0, *un*1^k-*inverse de* A, *soit* G_k-*inverses de* A, *il faut et il suffit que*

$rg\ A = rg\ A_0$.

Preuve:

Supposons A et A_0, G_k-inverses l'un de l'autre, du fait que le rang du produit ne dépasse pas le rang de n'importe quel facteur, on obtient

$rg\ A = rg\ A_0$.Si A_0 est un1^k-inverse de A tel que $rg\ A = rg\ A_0$, alors

$rg\ (A_0A)^k = rg\ A_0$, or $R(A_0A)^k \subset R(A_0)$, l' image de A_0,

donc $R(A_0A)^k = R(A_0)$, il éxiste alors $B : R(A_0A)^k \to R(A_0)$, vérifiant $(A_0A)^kB = A_0$. On multiplie à gauche par $(A_0A)^k$, on obtient

$(A_0A)^k\ (A_0A)^kB = (A_0A)^kB = (A_0A)^kA_0 = A_0$.

Donc A_0est un G_k-inverse de A.

On pourrait remarquer que $(A_0A)^k(A_0A)^k = (A_0A)^k$, c'est le sujet de la proposition suivante.

Revenons à l'exemple précédent, on a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est un G_2-inverse de A.

1.2.5 Proposition:

Si A_0 *un*1^k-*inverse de* A, *alors* $(A_0A)^k$ *et* $(AA_0)^k$ *sont des idempotents.*

Preuve:

Considérons le cas où

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1étant une matrice inversible, comme dans (1.1.3), alors

$$A_0 = \begin{pmatrix} SA_1^{-1} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

Considérons par exemple $(AA_0)^k$

On calcule

$$AA_0 = \begin{pmatrix} A_1SA_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(AA_0)^k = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(AA_0)^{2k} = (AA_0)^k$.

On peut bien se servir de (1.1.4) pour traiter le cas où $A = P^{-1}A^{'}Q$

$$A_0 = Q^{-1}A_0^{'}P$$

Où $A^{'}$ est donné sous la forme:

$$A^{'} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (AA_0)^{2k} &= (P^{-1}A^{'}Q.Q^{-1}A_0^{'}P)^{2k} \\ &= P^{-1}(A^{'}A_0^{'})^{2k}P \\ &= P^{-1}(A^{'}A_0^{'})P \\ &= (AA_0)^k. \end{aligned}$$

1.3 G_k-inverse d'un bloc de Jordan

Dans ce qui suit on construit les inverses généralisée d'un bloc de Jordan, considéré comme forme simple d'une matrice carrée, cette construction peut servir comme moyen de démonstration d'existence d'1^k-inverse, ou de G_k-inverse.

Supposons A matrice carrée, ayant pour valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, sa réduite de Jordan a la forme suivante:

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & & \\ & \Lambda_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & . \\ & & & & \Lambda_p \end{pmatrix}$$

Où chaque Λ_i $1 \leq i \leq p$ possède soit une forme diagonale, soit la forme:

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$J_0 = \begin{pmatrix} S_1\Lambda_1^{-1} & & & & \\ & S_2\Lambda_2^{-1} & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & S_p\Lambda_p^{-1} \end{pmatrix}$$

Où

$S_i \quad i = 1, ..., p$ sont des racines d'ordre k de l'identité, et qui sont de même ordre que Λ_i^{-1}, et

$$\Lambda_i^{-1} = \begin{cases} \Lambda_i^{-1} & \text{si } \lambda_i \neq 0 \\ {}^t\Lambda_i & \text{si } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

C'est à dire, Λ_i^{-1} est l'inverse de Λ_i si $\lambda_i \neq 0$. Pour $\lambda_i = 0$, alors $\Lambda_i^{-1} = {}^t\Lambda_i$ comme dans (1.1.3).

Alors J_0 est un 1^k-inverse, (G_k-inverse) de J.

Pour obtenir un 1^k-inverses qui n'est pas G_k-inverse on procède comme dans (1.2.1).

1.3.1 Calcul de Λ_i^{-1}

Considérons

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & . & \\ & & . & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \neq 0$.

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & . & \\ & & . & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\Lambda = \lambda I_n + A = \lambda(I_n + \lambda^{-1}A)$, alors,
$\Lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I_n + \lambda^{-1}A)^{-1}$
$= \sum_{p=1}^{k} (-1)^p \lambda^{-p} A^{n-p}$
$= I_n - \lambda^{-1}A + \lambda^{-2}A^2 + ... + (-1)^n \lambda^{-n+1} A^{n-1}$.
On remarque que $A^n = 0$. (1.5).
La forme générale de Λ^{-1} est de la forme:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & -\lambda^{-3} & . & . & -\lambda^{-n} \\ & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & -\lambda^{-3} & . & . \\ & & . & . & . & . \\ & & & . & . & -\lambda^{-3} \\ & & & & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ & & & & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

1.4. Calcul d'inveses généralisés

La proposition (1.2.1) asure l'existence de l' 1^k- inverse , mais pour la détérmination de cet 1^k- inverse , on devait se servir de la proposition (1.2.4), qui utilise deux produits maticiels et deux inversions directes. Dans ce paragraphe on éxpose une méthode contenant plus d'opérations, mais des opérations plus simples que celles décrites par la proposition (1.2.1

).

1.4.1 Proposition:

Soit A une matrice de type (m,n), et de rang $r = m$ ou $r = n$

-Si $r = m$ alors:

$A_0 = {}^t AS(A^tA)^{-1}$ *est un* G_k- *inverse de* A *, et*

-Si $r = n$,alors:

$A_0 = ({}^tAA)^{-1}S^tA$ *est un* G_k- *inverse de* A *, où* S *est une racine de l'unité d'ordre* k.

Preuve

Si $r = m$, alors A^tA est une matrice carrée d'ordre $m = r$, et de rang r,

donc c'est une matrice inversible, on calcule

$(AA_0)^kA = \underbrace{A^tAS(A^tA)^{-1}.A^tAS(A^tA)^{-1}...A^tAS(A^tA)^{-1}A}_{k \text{ fois}}$

$$\begin{aligned} &= A^tAS^k(A^tA)^{-1}A \\ &= A \end{aligned}$$

D'une façon analogue on montre que

$(A_0A)^kA_0 = A_0$.

On a montré donc que $A_0 = {}^t AS(A^tA)^{-1}$ est un G_k- inverse de A.

Si $r = n$ alors ${}^tAA$ est une matrice carrée d'ordre $n = r$ et de rang r , donc inversible, on vérifie bien que:

$(AA_0)^kA = A(A_0A)^k$

$$= A\underbrace{({}^tAA)^{-1}S^tAA.({}^tAA)^{-1}S^tAA...({}^tAA)^{-1}S^t}_{k \text{ fois}}$$

$$= A$$

La formule $(A_0A)^kA_0 = A_0$ peut etre obtenue de la meme façon, ainsi $A_0 = ({}^tAA)^{-1}S^tA$

est un G_k- inverse de A.

Grâce à la proposition suivante, qui se sert de la possibilité de factorisation d'une matrice en produit de deux matrices préservant le rang, il est possible de de calculer les G_k- inverses d'une matrice ayant un rang différent de ses dimensions :

1.4.2 Proposition:

Pour toute matrice A de type (m,n) et de rang r , $r \neq m$ et $r \neq n$; alors il existe une matrice B de type (m,r) et de rang r ; et une matrice C de type (r,n) et de rang r , telles que $A = BC$ et

$$A_0 = C_0 S B_0 = {}^t C({}^t C C)^{-1} S({}^t B B)^{-1t} B, \qquad \text{est un } G_k - \textit{inverse} \text{ de } A.$$

Ici $C_0 = {}^t C({}^t C C)^{-1} S$ et $B_0 = ({}^t B B)^{-1t} B$, S est une racine d'ordre k de l'unité.

Preuve:

Comme $rg(A) = r$, une base de $R(A)$ peut être constituée des vecteurs colonnes de A , soit B la matrice (extraite de A) ayant exactement r colonnes linéairement indépendants, alors l'équation $A = BX$ nous fournit C désiré.

On se sert de l'assocativité du produit pour calculer

$(AA_0)^k A = A((A_0 A)^k = BC({}^t C({}^t C C)^{-1} S({}^t B B)^{-1t} BBC)^k$.

$$= B({}^t C C({}^t C C)^{-1} S({}^t B B)^{-1t} BB{}^t C C({}^t C C)^{-1} S({}^t B B)^{-1t} BBC)...{}^t C({}^t C C)^{-1} S({}^t B B)^{-1t} BBC)$$

$= BS^k C$

$= A$

Les autres opérations s'éffectuent de la même façon.

1.4.3 Exemple:

Considérons la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang égal à 2 ; une base de $R(A)$ peut être formée des vecteurs colonnes ${}^t(1,0,1)$ et ${}^t(0,1,1)$, la matrice B décrite dans la proposition précédente, peut avoir la forme:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le choix de B est fait, il nous reste à détérminer la matrice C sous la forme:
$C = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$
le produit BC nous conduit à

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $A_0 = C_0 S B_0 = {}^t C(C{}^tC)^{-1} S({}^tBB)^{-1t}B$ pour
$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
On cherche d'abord un 1^1- inverse de A, on obtient

$$A_0 = 1/9 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
un 1^2- inverse est de la forme

$$A_0' = 1/9 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 . Sur les racines de l'unité:

L'exemple (1.1.3) nous met en contact avec des matrices dont la k^{ieme} puissance est la matrice unité; ce sont donc des racines d'ordre k de l'unité.

Dans ce qui suit on va déterminer la forme générale de la réduite de Jordan d'une racine de l'unité , autrement dit, cherchons les matrices J , bloc Jordanien telle que $J^k = I_n$.

1.5.1 Proposition:

Pour que le bloc de Jordan soit racine de l'unité , il faut et il suffit qu'elle soit diagonale , et que les éléments diagonaux soient constitués des racines d'ordre k de 1 (de la forme $e^{\frac{2\pi i}{k}}$.)

Preuve:

Considérons à priori la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & . & \\ & & . & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Etant donné que $A = (a_{ij})$, avec

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j+1 \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Déterminons A^2

$A^2 = (b_{ij})$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ alors,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+2 \\ 0 \text{ si non.} \end{cases}$$

Par réccurence, on obtient:

$A^m = (c_{ij})$,

avec

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+m \\ 0 \text{ si non.} \end{cases}$$

Donc A^m, pour $m \geq 2$ est déterminé de façon à translater de m colonnes le 1, en le remplaçant par des 0, en particulier $A^n = 0$, ce qui fait de A une matrice nilpotente d'ordre n.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & . & \\ & & . & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Lambda = A + \lambda I_n$

Comme A et I_n commutent, on a:

$\Lambda^k = (A + \lambda I_n)^k = \sum_{p=1}^{k} C_n^p \lambda^p A^{n-p}$.

Comme

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & & \\ & \Lambda_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & . \\ & & & & \Lambda_p \end{pmatrix}$$

On conclue pour que $J^k = I_n$, il est nécessaire, et il suffit que J soit diagonale, et que les éléments diagonaux soient constitués de racines d'ordre k de 1, (aucun ordre pour cela n'est suggéré). Par exemple, $n = 2$, $k = 3$

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}; ... \right\}$$

de telle façon que $\alpha_1^3 = \alpha_2^3 = 1$; on obtient donc 3^2 matrices diagonales racines d'ordre 2 de I_2.

Dans ce qui suivera on cherche les autres racines de l'unité.

1.5.2 Proposition:

S est une racine d'ordre k de l'unité, si et seulement s'il éxistent: une matrice inversible P, J diagonale; racine d'ordre k de l'unité, telles que

$$S = P^{-1}JP.$$

Preuve:

Si J est diagonale telle que $J^k = I_n$, alors

$S^k = (P^{-1}JP)^k$

$= \underbrace{P^{-1}JP.P^{-1}JP....P^{-1}JP}_{k \text{ fois}}$

$= P^{-1}J^kP$

$= P^{-1}I_nP$

$= I_n$.

Réciproquement, si J est la réduite de Jordan de S, alors $S = P^{-1}JP$, pour une certaine P inversible, on a donc $J = PSP^{-1}$, et $J^k = I_n$, on sait bien que J est diagonale (1.5.1)

Désignons par $\widetilde{U}$ l'ensemble des racines d'ordre k de l'unité; définissons sur$\widetilde{U}$ la relation :

$S, T \in \widetilde{U}$; $S\ r\ T \Longleftrightarrow ST = TS \Longleftrightarrow S = TST^{-1}$

r est une relation d'équivalence, en éffet elle est reflexive, symetrique, et si $ST = TS$ et $TQ = QT$, alors

$S = T^{-1}ST = QT^{-1}Q^{-1}ST$

Donc

$SQ^{-1} = T^{-1}Q^{-1}ST = Q^{-1}S$

D'où

$SQ = QS$. Donc r est bien transitive.

Pour $S \in \widetilde{U}$ notons $[S]$ la classe d'équivalence de S, si $S = P^{-1}JP$; avec J diagonale, alors $[S]$ contient aussi les matrices de la forme $Q = P^{-1}J_1P$; où J_1 est diagonale.

1.5.3 Proposition:

Toute classe $[S]$ est un sous groupe du groupe linéaire $GL_n(E)$.

Preuve:

Supposons S et $S^{'} \in [S]$; alors

$(SS^{'})^k = S^k S^{'\,k} = I$.

$\widetilde{U}$est donc stable pour le produit.

Si Q est tel que $QS = SQ$ alors $Q = SQS^{-1}$ d'où

$S^{-1}Q = QS^{-1}$; et $S^{-1} \in [S]$.

1.5.4 Proposition:

Si A est une matrice régulière, alors

$$\widetilde{U} = A\widetilde{U}A^{-1}$$

Preuve:

Soit $V \in \widetilde{U}$; alors si A est inversible AVA^{-1}est un élément de U, d'après (1.1.4)

Réciproquement, si $V \in \widetilde{U}$, cherchons $T \in \widetilde{U}$ telle que $V = ATA^{-1}$,

du fait que $V \in \widetilde{U}$, on déduit l'éxistence de $J \in \widetilde{U}$ diagonale, P inversible ,

telles que $V = PJP^{-1}$, alors;

$V = ATA^{-1}$;

$T = QJQ^{-1}$, où $Q = A^{-1}P$.

1.6. Equations matricielles:

Dans ce paragraphe on va se pencher sur un domaine d'application des inverses généralisés, c'est celui des équations matricielles.

Considérons l'équation $AX = C$.

1.6.1 Proposition:

Soient A une matrice de type (m, n), C une matrice de type (m, q), on cherche les matrices X de type (n, p) telles que:

$AX = C$ *....(1)*

Si A_0 est un 1^k-inverse de A, alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) possède une solution est que:

$(AA_0)^k C = C$ *....(2)*

Si cette condition est satisfaite, l'équation (1) possède la solution générale:

$X = A_0(AA_0)^{k-1}C + U - (AA_0)^k U$.

Où U est une matrice quelconqe de type (n, p).

Preuve:

Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A_1 inversible d'ordre $r = rg(A)$, on choisit $A = \begin{pmatrix} A_1^{-1}S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
où $S^K = I_r$,
alors $(AA_0)^k = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$; $\qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$,
Alors l'équation (1) aura la forme:

$$\begin{pmatrix} A_1X_{11} & A_1X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour que cette équation possède une solution, il faut que $C_{21} = C_{22} = 0$, ce qui se traduit par $(AA_0)^kC = C$. La condition est donc nécéssaire. Une fois la condition est satisfaite; $AX_0 = (AA_0)^kC = C$.

En ce qui concerne la solution générale, posons $Y = X - X_0$, de (1) on tire $AY = 0$,
pour $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$, ce qui se traduit par $A_1Y_{11} = A_1Y_{12} = 0$, or A_1 est inversible, donc $Y_{11} = Y_{12} = 0$, de telles matrices sont données par $Y = U - (AA_0)^kU$.

Considérons maintenant l'équation $AXB = C$.

1.6.2 Proposition:

Soient A une matrice de type (m, n), B une matrice de type (p, q), C une matrice de type (m, q), déterminons les matrices X de type (n, p) telles que:

$AXB = C$ *....(1')*

Si A_0 est un 1^k-inverse de A, alors une condition nécéssaire et suffisante pour que l'équation

(1) possède une solution est que:

$(AA_0)^k C(B_0B)^k = C$ *....(2′)*

Si cette condition est satisfaite,alors l'équation (1′) possède la solution générale:
$X = A_0(AA_0)^{k-1}C(B_0B)^{k-1} + U - (AA_0)^k U(BB_0)^k$.
Où U est une matrice quelconqe de type (n, p).

Preuve:

On reprend la démonstration comme le cas $AXB = C$,

pour $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\qquad B_0 = \begin{pmatrix} B_1^{-1}S' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
on remarque que $(1')$ aura la forme:

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1}SX_{11}B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Il est nécéssaire que $C_{12} = C_{21} = C_{22} = 0$, ce qui s'exprime par $(AA_0)^k C(B_0B)^k = C$,
pour la solution générale,
alors $Y = X - X_0$ telle que $AYB = 0$, doit vérifier $A_1Y_{11}B_1 = 0$,
$A_1; B_1$ étant inversibles, ce qui donne $Y_{11=}0$. De telles matrices sont données par
$Y = U - (AA_0)^k U(BB_0)^k$.
Où U est une matrice quelconqe de type (n, p).

Une généralisation de cette propsition sera donnée dans chapitre 3.

0.3

Chapitre2

Inversion généralisée d'opérateurs linéaires dans les espaces normés de Dimension finie

Introduction:

Dans ce chapitre, on se sert des proprietés des espaces normés (pré-Hilberiens en particulier) pour présenter des proprietés pratiques des inverses généralisés.

On commense par introduire des espaces pré-Hilberiens en premier lieu où l'adjoint et la projection orthogonale sur $R(A)$ jouent un rôle important . On commence donc ,par construire un G_1- inverse par deux méthodes différentes, la premiére est donnée dans (2.1.1) , la seconde fait intervenir des proprietés de l'opérateur A^*A, ces constructions sont aussi introductives à l' inverse de Moore-Penrose, on montre la discontinuité de l'application associant à l'opérateur A son Moore-Penrose inverse. Une attention est donnée aux systèmes linéaires $Ax = b$, on montre que parmi les 1^k- invrses seuls ceux qui font de $(AA_0)^k$ une projection orthogonale donnent une meilleure approximation au système linéaire. On donne enfin une application des G_k- inverses pour la solution de l'équation $f(x) = 0$, en utilisant la méthode Newton .

Rappelons que E, F,sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.de dimensions finies m et n respectivement .

L'espace vectoriel E est dit pré-Hilbrtien s'il est muni d'un produit scalaire (.,.)

pour x, y de E , $x = (x_i)_{i=1...m}; y = (y_i)_{i=1...m}$ notons

$(x, y) = xy^* = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y}_i$

L'espace pré-Hilbrtien est dit Euclidien si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$; il est appelé unitaire si le corps est $\mathbb{C}$

Deux vecteurs de E sont dits hortogonaux si $(x, y) = 0$

Une base $(e_1, e_2, ..., e_m)$ est dite orthonormée si

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A:$E \rightarrow F$ un opérateur linéaire.Supposons que $(e_1, e_2, ..., e_m)$ et, $(f_1, f_2, ..., f_n)$ sont des bases orthonormées de E et F, respectivement. A est détérminé par la donnée de $Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$,ce qui s'exprime par la matrice $(a_{ij})_{\substack{i=1...m \\ j=1,.....n}}$. A l'opérateur A on fait associer sa matrice dans les bases mentionnées en notant de même $A = (a_{ij})_{\substack{i=1...m \\ j=1,.....n}}$.

$x \in E$, $x \neq 0$ est dit vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in C$ si $Ax = \lambda x$. L'ensemble des valeurs propres de A est donné par l'équation: $\det(A - \lambda I) = 0$.

A^* l'adjoint de A, est caractérisé par le fait que $(Ax, y) = (x, A^*y)$ pour tous $x \in E$, $y \in F$, on a aussi $R(A^*) = N(A)^{\perp}$. A est dit auto-adjoint ou Hermitien si $A^* = A$.

La matrice carrée A est dite symétrique si ${}^tA = A$, auto-adjointe , si $A^* = A$.

Une matrice U est dite orthogonale , unitaire si l'espace est Hermitien si $UU^* = U^*U = I$, les matrices orthogonales symetriques (unitaires auto-adjointes) sont des racines d'ordre 2 de l'unité.

L'image d'une base orthonormée par un opérateur orthogonal (unitaire) est une base orthonormée.

L'opérateur $P : E \rightarrow E$ est dit idempotent ou projecteur si $P^2 = P \circ P = P$.

Pour P idempotent on a la décomposition en somme dirècte:

$E = N(P) \oplus R(P)$, réciproquement, s'il existent E_1et E_2 tels que $E = E_1 \oplus E_2$, alors il existe un projecteur P unique tel que $E_1 = R(P)$ et $E_2 = N(P)$.

$x \in E$ est dit orthogonal à un sous ensemble de E, s'il est orthogonal à chaque élément de cet ensemble.

E_1 et E_2deux sous espaces de E sont dits orthogonaux, notés $E_1 \perp E_2$ si tout élément de l'un est orthogonal à l'autre.

Si $E_1 \perp E_2$, sont tels que $E = E_1 \oplus E_2$, alors ils sont dits supplémentaire horthogonal l'un de l'autre, on note par exemple $E_1 = E_2^{\perp}$.

Pour tout sous espace E_0 de E, on a $E = E_0 \oplus E_0^{\perp}$.

La projection sur E_0 parallèlement à $E_0^{\perp}$ est appelée projection orthogonale sur E_0, elle est caractérisée par le fait d'être Hermitienne (symetrique ou auto-adjointe).

Si $x \in E$, tel que $x \notin E_0$, notons Px la projection orthogonale de x sur E_0, on a $E = E_0 \oplus E_0^{\perp}$, et du fait que $x = Px + (x - Px)$, $Px \in E_0$ et $(x - Px) \in E_0^{\perp}$, alors Px est caractérisé par:

$\|x - Px\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in E_0$

ce qui se traduit aussi par

$$\|x - Px\| = \inf_{y \in E_0} \|x - y\| .$$

2.1 Inversion généralisée dans les espaces pré-Hilbertiens:

commençons d'abord par citer quelques proprietés concernant les espaces pré-Hilbertiens (euclidiens espaces sur $\mathbb{R}$, ou unitaires; comme espaces sur $\mathbb{C}$) .

Soient E et F deux espaces pré-Hilbertiens de dimensions finies n et m respectivement, $A : E \to F$ un opérateur linéaire, si $m \neq n$ l'opérateur A ne peut pas avoir d'inverse au sens propre; c'est à dire ; on a ou bien $N(A) \neq \{0\}$, ce qui se traduit par le fait que $N(A)$ n'est pas un sous espace trivial, ou bien $R(A) \neq F$; autrement dit l'equation $Ax = y$ n'admet pas de solution pour un certain $y \in F$.

Le cas où $m = n$ nous conduit aux mêmes alternatives si A n'est pas inversible.

Notons $A^* : F \to E$, l'opérateur adjoint de A, rappelons que l'on a $R(A^*) = N(A)^{\perp}$, donc A est inversible si et seulement si $R(A^*) = E$ *et* $R(A) = F$.

2.1.1 Proposition:

Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire, E et F deux espaces pré-Hilbertiens de dimensions finies n et m respectivement, alors A possède un G_1- inverse, (et par conséquent un G_k- inverse pour tout k).

Preuve:

Si A^* est l'adjoint de A, on a donc $E = N(A) \oplus N(A)^{\perp} = N(A) \oplus R(A^*)$, notons A_1 la rstriction de A à $R(A^*)$, alors A_1 considéré comme opérateur de $R(A^*)$ dans $R(A)$ est bijectif , donc inversible, son inverse noté par A_1^{-1}, est défini sur $R(A) \subset F$; on definit une application $A_0 : F \to E$, dont la restriction sur $R(A)$ est A_1^{-1}, pour cela définissons une projection $P : F \to R(A)$; alors $A_0 = A_1^{-1}P$. Pour $x \in E$, on a

$(AA_0A)x = (AA_1^{-1}PA)x = (AA_1^{-1})PAx = A(A_1^{-1}A)x = Ax$; du fait que $Ax \in R(A) = R(P)$; et de la définition de A_1^{-1}. Donc $AA_0A = A$, l'autre relation se déduit de la même manière.

2.2 Proprietés de l'opérateur A^*A :

Citons quelques propriétés concernant L'opérateur A^*A :

2.2.1 Lemme:

L'opérateur A^*A *est tel que*:

a) L'opérateur A^*A *est auto-adjoint , positif, et vérifie*

$$N(A^*A) = N(A) \qquad \text{et} \qquad R(A^*A) = R(A^*)$$

b) Si x *est un vecteur propre de* A^*A *associé à la valeur propre* $\lambda \neq 0$, *alors* Ax *est un vecteur propre de* AA^* *associé à la même valeur propre.*

c) Si $x_1, ..., x_p$ *sont des vecteurs propres de* A^*A, *linéairement indépendants , alors* $Ax_1, ..., Ax_p$ *sont des vecteurs proppres linéairement indépendants de* A^*A.

d) Il existe dans E *une base orthogonale, constituée de vecteurs propres de* A^*A, *autrement dit,* A^*A *possède une matrice diagonalisable.*

e) Pour tout $\alpha \succ 0$, *l'opérateur* $A^*A + \alpha I$, *est inversible;* (I *étant l'identité de* E).

Les preuves de ces proprietés sont données dans l'annexe

Matrice de A dans des bases singulières:

2.2.3 Proposition:

Pour toute matrice A *de type* (m, n) *et de* $rg = r$ *dans un espace pré-Hilbertien , il existe deux bases orthonormées dans lesquelles la matrice de* A *est de la forme*

$$D = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où D_r est une matrice diagonale d'ordre r (et de rang r), autrement dit, il existe deux matrices orthogonales U et V telles que:

$$A = U\ D\ V.$$

Un G_1- *inverse, (et par conséquent un G_k- inverse pour tout k)* est donné par

$$A_0 = V^* D_0 U^*$$

Où D_0 est un G_1- *inverse de D.*

Preuve:

En se servant des propriétés de l'opérateur A^*A, dont la matrice est carrée, non régulière en général, on cherche une forme simple de la matrice de A dans des bases spécifiques de E et de F dites bases singulières , partant du fait que la matrice de A^*A est diagonalisable.

Supposons que $rgA = r$, considérons les valeurs propres de A^*A, ordonnées en suite croissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...\lambda_n$, on a $\lambda_i \succ 0$, pour $i = 1...r$, et $\lambda_{r+1} = ...\lambda_n = 0$.

Si $(e_1, e_2, ...e_n)$ est une base orthonormée, formée de vecteurs propres de A^*A , dans E, on a

$(Ae_i, Ae_j) = (A^*Ae_i, e_j) = \lambda_i(e_i, e_j)$

Donc (Ae_i) sont deux à deux orthogonaux et $\|Ae_i\| = \sqrt{\lambda_i}$. Les nombres $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$ s'appellent nombres singuliers de A. on remarque que $\left\{\alpha_i^{-1} Ae_i\right\}$ est un système orthonormé dans F; on peut le compléter afin d'obtenir une base orthonormée de F .

On appelle première base singulière de A, une base orthonormée de la forme $(e_1, e_2, ...e_n)$, constituée des vecteurs propres de A^*A.

On appelle seconde base singulière de A , une base orthonormée dont les r premiers vecteurs sont de la forme $\left\{\alpha_i^{-1} Ae_i\right\}_{i=1...r}$, notons cette base $(f_1, ..., f_r, f_{r+1}, ..., f_m)$.

Dans les bases singulières de A, Ae_i s'exprime de la façon suivante:

$$Ae_i = \begin{cases} \alpha_i \alpha_i^{-1} Ae_i = \alpha_i f_i & i = 1, ..., r \\ 0 & i \succ r \end{cases}$$

Donc la matrice de A dans les bases singulières est de la forme:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & \alpha_r \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Où:

$$D_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & . & \\ & & . \\ 0 & & \alpha_r \end{pmatrix}$$

Comme le passage d'une base orthonormée à une base orthonormée s'effectue par matrice orthogonale (unitaire dans le cas d'espaces Hermitiens), alors on déduit l'existence de U et V orthogonales (unitaires) telles que $A = UDV$.

Etant donné que $\alpha_1 ... \alpha_r$, sont non nuls , on propose

$$D_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & \alpha_r^{-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

comme $1^k - inverse$ (G_k-inverse)de D.

2.3 Détermination du G_k- inverse par passage à la limite:

Les hypothèses sont celles de ce paragraphe, c'est à dire E et F sont deux espaces pré-Hilbrtiens de dimensions finies n et m respectivement, A linéaire défini de E dans F . Supposons aussi que $rgA = r \leq \min(m, n)$.

Soit $\Lambda(E, F)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires définis sur E et à valeurs dans F, on munit $\Lambda(E, F)$ par une norme qui conserve la norme par changement de bases, c'est par exemple , considérons

$$\|A\| = tr(A^*A) = (\sum \lambda_i)^{\frac{1}{2}}$$

Les λ_i étant les valeurs propres de A^*A, ce sont aussi celles de AA^*.

Il s'agit bien d'une norme. Si $A = UDV$ où U et V sont orthogonales (unitaires), alors $\|UDV\| = tr(V^*D^*U^*UDV) = tr(V^*D^*DV) = tr(D^*D)$

or $tr(D^*D) = tr(A^*A)$, donc on a bien $\|A\| = \|UDV\|$.

Définissons dans $\Lambda(E, F)$ une convergence comme suit:

Soit t un nombre réel $B(t)$ un élément de $\Lambda(E, F)$, on dit que B est limite de $B(t)$

quand $t \to s$ si $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists \delta \succ 0$, tels que $0 < |t - s| < \delta \Rightarrow \|B(t) - B\| < \varepsilon$.

2.3.1 Proposition:

Soit A une matrice de type (m, n) et de $rg = r$ représentant un opérateur défini de E dans F ,tous deux pré-Hilbrtiens, alors

$\lim_{\alpha \to 0_+} (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*$ *est un G_k-inverse de A.*

Preuve:

Rappelons que pour $\alpha \succ 0$,l'opérateur $(A^*A + \alpha I)$ est inversible d'après lemme(2.2.1).

Rapportons les espaces E et F aus bases singulières . Dans ces bases la matrice de $(A^*A + \alpha I)^{-1}$ est donnée sous la forme:

$$(A^*A+\alpha I)^{-1}=\begin{pmatrix}(\alpha_1^2+\alpha)^{-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & (\alpha_r^2+\alpha)^{-1} & & & & \\ & & & \alpha^{-1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \alpha^{-1} & \end{pmatrix}$$

d'où en effectuant la multiplication à droite par A^*

$$(AA^*+\alpha I)^{-1}A^*=\begin{pmatrix}\alpha_1(\alpha_1^2+\alpha)^{-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_r(\alpha_r^2+\alpha)^{-1} & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

En passant à la limite quand $\alpha \to 0$ on obtient:

$$\lim_{\alpha\to 0}(A^*A+\alpha I)^{-1}A^*=\begin{pmatrix}{\alpha_1}^{-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & {\alpha_r}^{-1} & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

Donc $\lim_{\alpha\to 0}(A^*A+\alpha I)^{-1}A^*=A_0$ est en effet, $1^k-inverse$ (G_k-inverse)de A.

2.4 L'inverse de Moore-Penrose:

On appelle inverse de Moore-Penrose d'une matrice A de type (m,n) tout G_1-inverse de A, noté A^+ vérifiant:

$$(AA^+)^*=AA^+ \qquad \text{et} \qquad (A^+A)^*=A^+A$$

En rappelant que AA^+ et A^+A sont idempotents , les définir auto-adjoints, c'est dire qu'elles sont des projections orthogonales, autrement dit, l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice est un G_1-inverse tel que AA^+ et A^+A soient des projections orthogonales,

On montre dans ce qui suit l'existence de l'inverse de Moore-Penrose:

2.4.1 Proposition:

Dans un espace pré-Hilbrtien toute matrice de type (m,n) possède un inverse de Moore-Penrose.

Preuve:

Pour $k = 1$, la proposition (2.1.1) nous assure l'existence de G_1-inverse; revenons à la preuve de cette assertion, et supposons que la projection P ainsi définie soit orthogonale de F sur $R(A)$ et définissons : $A^+ = PA_1^{-1}$ (A_1 est la restriction de A sur $N(A)^\perp$). On a

$$A^+A = P \quad A_1^{-1}A = P \qquad \text{donc} \quad (A^+A)^* = P^* = P = A^+A$$

D'autre part , on se sert de la relation $A^*AA^+ = A^*$

(en effet, pour $y \in F$, $A^*A \quad A_1^{-1}Py = A^*A \quad A_1^{-1}y' = A^*y' \quad , \qquad y' \in R(A) \qquad$ or $y - y' = y - Py \in R(A)^\perp = N(A^*)$ et par la suite $A^*y' = A^*y$).

La relation duale nous donne $(A^+)^*A^*A = A$, donc

$$(\ AA^+)^* = (A^+)^*A^*AA^+ = AA^+.$$

Remarque:

Dans 2.2.3 on vérifie bien que D_0 est bien l'inverse de Moore-Penrose de D, notons le D^+,or pour $A = UDV$, alors $A^+ = V^*D^+U^*$ l'inverse de Moore-Penrose de A, en effet

$$AA^+ = UDD^+U^*$$
$$A^+A = V^*D^+DU$$

sont auto-adjoints.

2.5 Unicité de l'inverse de Moore-Penrose:

L'une des proprietés de l'inverse de Moore-Penrose est son unicité; en effet si X est un autre nverse de Moore-Penrose de A , on a alors

Proposition:

L'inverse de Moore-Penrose est unique.

Preuve:

Si X est un autre inverse au sens de Moore-Penrose, on a

$$\begin{cases} AA^+A = A \ \ ... & (1) \\ A^+AA^+ = A^+ ... & (2) \\ (AA^+)^* = AA^+ ... & (3) \\ (A^+A)^* = A^+A \ ... & (4) \end{cases}$$

Si X est un autre Moore-Penrose inverse, alors

$$\begin{aligned} X &= XAX \\ &= A^*X^*X \qquad ... \qquad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A^* \left(A^+\right)^* A^*X^*X \qquad ... \quad (1) \\ &= A^* \left(A^+\right)^* XAX \qquad ... \quad (4) \\ &= A^* \left(A^+\right)^* X \qquad ... \quad (2) \\ &= A^+AX \qquad ... \quad (4) \\ &= A^+AA^+AX \quad ... \quad (2) \\ &= A^+(A^+)^*A^*X^*A^* \ ... \quad (3) \\ &= A^+(A^+)^*A^* \quad ... \quad (2)^* \\ &= A^+AA^+ \qquad ... \quad (4) \\ &= A^+ \qquad ... \quad (2) \end{aligned}$$

2.6 Discontinuité de l'inverse de Moore-Penrose:

On sait que dans l'algèbre normée des opérateurs linéaires borné que l'application qui à chaque opérateur linéaire inersible fait associer son inverse usuel, est continue. on montre que

ce n'est pas le cas pour l'inverse de Moore-Penrose.

Munissons l'espace des opérateurs linéaires sur l'espace pré-Hilbrtien pour la norme

$$\|A\| = tr(A^*A) = (\sum \lambda_i)^{\frac{1}{2}}$$

où λ_i sont les valeurs propres de A.

Considérons pour $n \in IN^*$ la suite $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

Alors $A_n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ noté $A_0 = \lim_n A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Or $A_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tandis que

$A_n^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ ne converge pas ; par conséquent l'application inversion généralisée n'est pas continue .

Dans ce qui suit , on montre la continuité de l'inversion , imposant la condition de la conservation de la norme , remarquée par Penrose dans [11]; c'est aussi l'une des applications des proprietés de A^*A.

2.6.1 Proposition:

Soit (A_n) *une suite de matrices de type* (m, n) *, si* $A_n \to A$*, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $rg\ A_n = rg\ A$

2) $A_n^+ \to A$.

Preuve:

1) $\Rightarrow$ 2)

Considérons un polynôme annulateur de A^*A , c'est à dire un polynôme de la forme

$$c_1A^*A + c_2(A^*A)^2 + ... + c_p(A^*A)^p = 0$$

Soit c_j le premier coefficient non nul dans ce polynôme , on a

$$c_j(A^*A)^j + c_{j+1}(A^*A)^{j+1} + c_{j+2}(A^*A)^{j+2} + ... + c_p(A^*A)^p = 0$$

et

$$-c_j^{-1}(c_{j+1}I + c_{j+2}A^*A + ... + c_p(A^*A)^{p-J-1})(A^*A)^{j+1} = (A^*A)^j$$

Posons

$$B = -c_j^{-1}(c_{j+1}I + c_{j+2}A^*A + ... + c_p(A^*A)^{p-J-1})$$

on a $B(A^*A)^{j+1} = (A^*A)^j$

Compte tenu du fait que $R(A) = R(A^*A) = ... = R(A^*A)^j$, la relation $B(A^*A)^{j+1} = (A^*A)^j$ entraine $B(A^*A)^2 = (A^*A)$.

Montrons que BA^*A est un idempotent

$BA^*A.BA^*A = BA^*A.A^*AB = BA^*A$, du fait que B et A^*A

commmutent.

Les remarques faites sur $R(A^*)$, $R(AA^*), R(AA^*)^j$ et $R(A)$, $R(A^*A), R(A^*A)^j$, la projection BA^*A vérfie

$$ABA^*A = A$$

$$BA^*ABA^* = BA^*$$

On remarque aussi que BA^*A est auto-adjoint, en conclusion $A^+ = BA^*$ est un Moore-Penrose inverse de A.

2) $\Rightarrow$ 1)

Du fait que

$$\|A_nA_n^+ - AA^+\| \leq \|A_nA_n^+ - A_nA^+\| + \|A_nA^+ - AA^+\|$$
$$\leq \|A_n\|\,\|A_n^+ - A^+\| + \|A^+\|\,\|A_n - A\|$$

alors $A_nA_n^+ \to AA^+$, or $rg\ A_n = rg\ A_nA_n^+ = trP_{R(A)} \to trP_{R(A)} = rg\ A$

Donc $rg\ A_n = rg\ A$.

2.7 Proprietés approximantes dans les espaces Euclidiens:

Les espaces pré-Hilbrtiens jouent un rôle important dans les problèmes d'approximation, car dans ces espaces on peut considérer les projections orthogonales .Rappelons que les projections orthogonales jouissent de propriétés approximantes, dans le sens où Px "est le plus proche de x dans $R(P)$", c'est à dire , vérifient:

$\|x - Px\| = \inf_{y \in R(P)} \|x - y\|$.

Considérons le système:

$Ax = b$

ce système est compatible si et seulement si $b \in R(A)$, on rappelle la condition de compatibilité d'un système.

2.7.1 Proposition:

Le système $Ax = b$ est compatible si et seulement si toute solution de l'equation homogène adjointe $A^*y = 0$, vérifie $y^*b = 0$.

Preuve:

Le système est compatible si et seulement si $b \in R(A) = N(A^*)^\perp$; c'est à dire si et seulement si $y^*b = 0$.

Dans le cas où le système $Ax = b$ est incompatible , $Ax - b \neq 0$, pour tout $x \in E$. Dans ce cas on cherche x_0 qui, pour lesquels

$\|Ax_0 - b\|$ soit aussi proche de la valeur nulle, de telles x_0 vérifient certainement $\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|$ pour tout $x \in E$. Elles sont appelées meilleures approximation pour le système $Ax = b$.

2.7.2 Proposition:

x est une meilleure approximation pour le système

$Ax = b$, si et seulement si $A^*Ax = A^*b$.

(Cette équation est dite l'equation normale du système)

Preuve:

Notons P la projection orthogonale sur $R(A)$, alors

$Ax - b = Ax - Pb + Pb - b$

Or $Ax - Pb \in R(A)$, $Pb - b = -(I - P)b \in R(A)^\perp$

donc

$\|Ax - b\|^2 = \|Ax - Pb\|^2 + \|Pb - b\|^2$

x est une meilleure approximation si et seulement $Ax - b \in R(A)^\perp = N(A^*)$, c'est à dire $A^*Ax - A^*b = 0$.

2.7.3 Proposition:

Le système $Ax = b$ possède au moins une meilleure approximation.

preuve:

Vu la proposition précédente , l'énoncé se traduit par le fait que le système $A^*Ax = A^*b$ est compatible; en éffet si y est tel que $(A^*A)^*y = A^*Ay = 0$, alors $y^*\ A^*Ay = (Ay)^*Ay = 0$, donc $Ay = 0$; ce qui donne $(Ay)^*b = y^*(Ab) = 0$.

Le système est donc compatible.

Dans ce qui suivera, on va caractériser la meilleur approximation, dont l'existence est assurée par la proposition précédente.

2.7.4 Proposition:

x_0 est une meilleur approximation pour Le système $Ax = b$, si et seulement si
$x_0 = A_0(AA_0)^{k-1}b$ où A_0 est un 1^k- inverse de A et tel que $(AA_0)^k$ soit Hermitien.

Preuve:

Si P désigne la projection orthogonale sur $R(A)$, alors

$Ax - b = Ax - Pb + Pb - b$;

Où $Ax - Pb \in R(A)$,et $Pb - b = -(I - P)b \in R(A)^{\perp}$

on obtient donc:

$\|Ax - b\|^2 = \|Ax - Pb\|^2 + \|Pb - b\|^2$

$\|Ax - b\|$ atteint son minimum si et seulement si $Ax = Pb = A(A_0A)^{k-1}A_0b$, ce qui donne $P = (AA_0)^k$, et $x_0 = (A_0A)^{k-1}A_0b$.

Réciproquement, si A_0 est tel que $\|Ax - b\|$ atteint son minimum pour tout b en x_0 on a bien $Ax_0 = Pb$, c'est à dire $(AA_0)^k = P$, donc $(AA_0)^kA = A$, et A_0 est un 1^k- inverse de A.

2.8 Méthode de Newton pour l'équation $f(x) = 0$:

L'une des applications possibles des inverses généralisés dans les espaces normés est la méthode de Newton utilisée pour détérminer les racines d'une fonction.

Introduction:

Soit f une fonction à une variable réelle, dérivable sur un intervalle de la droite réelle. on s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$,

Considérons la suite

$x_{i+1} = x_i - (f^{'}(x_i))^{-1} f(x_i)$

$(f^{'}(x_i))$ est la dérivée de f au point x_i .

Sous des conditions concernant f, l'approximation initiale x_0, la suite (x_i) converge vers une solution de l'équation proposée.

On utilise souvent la méthode modifiée de Newton , qui se traduit par la fixation de $(f^{'}(x_0))^{-1}$.

Soit à considérer l'équation: $f(x) = 0$

Si f représente un système de m équations à n varibles :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Le système n'est pas forcément linéaire, on a $f(x) = 0$, où

$f = (f_1, f_2..., f_m)$; et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$f^{'}(x_i)$, dérivée en x_i est déterminée par la matrice Jacobienne

$$f'(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_q} \end{pmatrix}$$

Comme f' n'est pas toujours inversible, du fait qu'elle soit rectangulaire, ou bien carrée singulière; il est nécessaire de faire appel à la notion d'inverse généralisé.

2.8.1 Proposition:

Soient E, F deux espaces normés sur $\mathbb{C}$, de dimensions finies m, n respectivement

Soit $x_0 \in E$; $r \rangle 0$; $f : B(x_0, r) \to F$, une fonction non nécéssairement linéaire;

$A : E \to F$ un opérateur linéaire , A_0 un G_k-inverse de A.

Soit $\epsilon \rangle 0$; $\delta \rangle 0$; deux réels tels que

i) $\|f(u) - f(v) - A(u-v)\| \leq \epsilon \|u - v\|$ *; pour tous* $u, v \in B(x_0, r)$

ii) $\epsilon \|A_0\| = \delta \langle 1$

iii) $\|A_0\| \|f(x_0)\| \langle (1-\delta)r$

Alors la suite

$x_{i+1} = x_i - A_0 f(x_i)$ *est telle que*

$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \delta^i (1-\delta) r$,

et elle converge vers un point $x_* \in B(x_0, r)$, vérifiant $A_0 f(x_*) = 0$.

Remarque:

Si f est une application différentiable, alors il est préférable de faire le choix $A = f'$, la matrice Jacobienne vérifie bien i).

Preuve:

Montrons d'abord que

$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \delta^i (1-\delta) r$

Par réccurence,

$\|x_1 - x_0\| = \|A_0 f(x_0)\| \leq \|A_0\| \|f(x_0)\| \leq (1-\delta) r$

Supposons la proprieté vraie pour tout rang inferieur à $i-1$, alors

$x_{i+1} - x_i = -A_0 f(x_i)$

$= -A_0 f(x_{i-1}) - A_0(f(x_i) - f(x_{i-1}))$

$= -A_0(x_i - x_{i-1}) - A_0(f(x_i) - f(x_{i-1}))$

$= A_0(A(x_i - x_{i-1}) - (f(x_i) - f(x_{i-1}))$

D'où

$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \|A_0\| \ \|f(x_i) - f(x_{i-1}) - A(x_i - x_{i-1})\|$

$= \|A_0\| \ \epsilon \ \|x_i - x_{i-1}\|$

$\leq \delta \ \|x_i - x_{i-1}\| \ \langle \ \delta \ \delta^{i-1} \ (1-\delta)r = \delta^i(1-\delta)r$

d'où la formule.

Montrons que $x_i \in B(x_0, r)$; pour $i = 1, ...$
$\|x_i - x_0\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} \|x_{j+1} - x_j\| \leq (1-\delta)r \sum_{j=0}^{i-1} \delta^j = (1-\delta^i) \ \langle \ r.$
Il reste à montrer que la suite $(x_i)_{i \in N}$ est de Cauchy, pour p quelconque;
$\|x_{i+p} - x_i\| \leq \sum_{j=i}^{i+p-1} \|x_{j+1} - x_j\|$
$\leq (1-\delta)r \sum_{j=i}^{i+p-1} \delta^{j+1} \leq (1-\delta)r \sum_{j=i}^{\infty} \delta^{j+1} \to 0$
car la série $\sum \delta^{j+1}$ est convergente, son reste doit tendre vers 0.

2.8.2 Exemple:

Considérons le système d'équations:

$$\begin{cases} x_1^2 + 12x_1x_3 - 2 = 0 \\ x_1x_2 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

On a pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ la fonction $f(x)$ est donnée par:

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1^2 + 12x_1x_3 - 2 \\ f_2(x) = x_1x_2 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

$f = (f_1, f_2)$ étant différentiable, et
$f'(x) = \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_q}\right)_{\substack{p=1,2 \\ q=1,3}}$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + 12x_3 & 0 & 12x_1 \\ x_2 & x_1 + 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Notons $A = f'(x)$, alors

$$A_0 = \frac{1}{12x_1(x_1+2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 12x_1 \\ x_1 + 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est un $G_1 - inverse$ de A.

Pour $x_0 = (1, 0, 0)$ on a

$f(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0)) = (-1, 1)$ et

$\|f(x_0)\| = 1$ pour la norme de l_∞.

$$A_0(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$\|A_0(1, 0, 0)\| = \frac{1}{2}$

Conformément à la proposition , on a $\delta = \epsilon\frac{1}{2} \langle 1$ et $(1 - \delta)r \rangle \frac{1}{2}$

on peut donc choisir $r \rangle \frac{1}{2}$.

0.4 Chapitre 3

Proprietés algebriques de l'inversion généralisée des opérateurs linéaires dans le cas général

Dans ce chapitre on traite le cas de dimension non nécéssairement finie, on y montre l'existence de l'inverse généralisé; les démonstrtions sont inspirées du cas de dimension finie.

L'étude vise en effet les proprietés algèbriques des inverses généralisés, la liaison des inverses généralisés avec les projections, tout cela dans le but de généraliser la théorie de Nashed-Votruba. Une approche pour une classification des inverses généralisés trouve sa place dans ce chapitre.

Ce chapitre est términé par un paragraphe consacré aux équations à opérateurs linéaires et à leurs conséquences, citons par exemple la détérmination de l'ensemble de tous les 1^k- inverses d'un opérateur linéaire, connaissant l'un d'eux.

3.1 Cas algèbrique général:

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. E et F ne sont pas supposés de dimensions finies, notons par $\Lambda(E,F)$ l'espace vectoriel d'opérateurs linéaires définis de E dans F.

Si $A \in \Lambda(E,F)$, notons

$N(A) = \{x \in E;\ Ax = 0\}$, le noyau de A.

$R(A) = \{y \in F;\ y = Ax,\ pour\ x \in E\}$, l'image de A.

S'il éxiste $A_0 \in \Lambda(F,E)$ tel que $A(AA_0)^k = A$, $k \in \mathbb{N}^*$, alors A_0 est dit 1^k-inverse de A, si de plus A est un1^k-inverse de A_0; alors A et A_0 sont dits G_k-inverses, l'un de l'autre.

Notons I_E , ou bien tout simplement I quand la notation ne pose pas d'ambiguité, l'application identique de E. On définie d'une façon analogue à celle du cas de dimension finie la racine d'ordre k de l'application identique, c'est en effet toute $S \in \Lambda(E,E)$ telle que $S^k = I_E$.

On appelle idempotent ou projecteur "algebrique", tout opérateur $P : E \to E$; tel que $P^2 = P$. On remarque aussi que le orojecteur est son propre G_k-inverse.

On propose dans ce qui suit quelques proprietés des projecteurs.

3.1.1 Proposition:

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, E_0 un sous espace vectoriel de E,

$P : E \to E_0$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont equivalentes:

1) $(I - P)^2 = (I - P)$

2) $P^2 = P$

3) $Px = x$ *pour tout* $x \in R(P)$

4) $R(I - P) = N(P)$, $R(P) = N(I - P)$

5) $E = R(P) \oplus N(P)$.

Pour la démonstration de ces proprietés on peut consulter l'annexe.

3.1.2 Exemples:

1- Si A est inversible, inversible à gauche, inversible àdroite, alors son inverse, son inverse à gauche, son inverse à droite , respectivement, en est un 1^k- inverse, il en est aussi G_k-inverse.

En effet, si A_0 est un inverse à droite de A, c'est à dire on a $AA_0 = I$, alors $(AA_0)^k = I$ et par conséquent $(AA_0)^k A = A$. L'autre relation se déduit de la même façon.

2- Si A est inversible, alors tout 1^k- inverse de A en est G_k-inverse, car si $(AA_0)^k A = A$ alors on a $(AA_0)^k = I$, d'où $A_0\ (AA_0)^k = (A_0A)^k A_0 = A_0$.

3- S est P sont deux éléments de $\Lambda(E)$, où S est une racine d'ordre k de l'identité; P un idempotent quelconque, si S et P commutent, alors S est un $1^k - inverse$ de P , car

$(PS)^k P = P^{k+1} S^k = P$

On remarque que P ainsi défini n'est pas un G_k-inverse de S.

4- Considérons l'espace l_2 des suites à carrés sommables , définssons

$$A : (x_0, x_1, ...) \to A(x_0, x_1, ...) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, ...)$$

où $\lambda_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\sup |\lambda_n| < +\infty$, alors l'opérateur

$$A_0 : (x_0, x_1, ...) \to A_0(x_0, x_1, ...) = (\lambda_0^* x_0, \lambda_1^* x_1, ...)$$

avec

$$\lambda_n^* = \begin{cases} \lambda_n^{-1} \text{ si } \lambda_n \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_n = 0. \end{cases}$$

A_0 est un 1^k- inverse de A.

3.1.3 Proposition:

Soient $A \in \Lambda(E,F)$, A_0un 1^k-inverse de A , *alors* $(AA_0)^k$ *et* $(A_0A)^k$ *sont des idempotents tels que:*

$N(A_0) \subset N((AA_0)^k)$

$R((AA_0)^k) = R(A)$

$R((A_0A)^k) \subset R(A)$

$N((A_0A)^k) = N(A)$

Preuve:

Considérons par exemple $(AA_0)^{2k}$,

$$\begin{aligned}(AA_0)^{2k} &= (AA_0)^k (AA_0)^k \\ &= (AA_0)^k AA_0 (AA_0)^{k-1} = AA_0 (AA_0)^{k-1} \\ &= (AA_0)^k\end{aligned}$$

$N(A_0) \subset N((AA_0)^k)$ et $R((A_0A)^k) \subset R(A)$ sont évidentes.

$R(A) = R\left((AA_0)^k A\right) \subset R\left((AA_0)^k\right) \subset R(A)$

d'où $R(A) = R\left((AA_0)^k\right)$.

On raisone de la même façon pour prouver que $N((A_0A)^k) = N(A)$.

3.1.4 Corollaire:

Si A_0 *est un* 1^k-*inverse de* A , *alors*

$E = N(A) \oplus R(A_0A)^k$, *et* $F = R(A) \oplus N(AA_0)^k$

Preuve:

Comme $(A_0A)^k$et $(AA_0)^k$ sont des prjecteurs sur E et F respectivement, on a les décompositions suivantes:

$E = N\,(A_0A)^k \oplus R\ \ (A_0A)^k = N\,(A) \oplus R(A_0A)^k$

$F = N\,(AA_0)^k \oplus R\,(AA_0)^k = N(AA_0)^k \oplus R\,(A)\,.$

3.1.5 Proposition:

Supposons $A_0 \in \Lambda(F, E)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes:

1) A_0 est un 1^k-inverse de A.

2) $(A_0A)^k$ est un idempotent et $R\,(A) \cap N(A_0A)^{k-1}A_0) = \{0\}$

Preuve:

Si $y = Ax$ pour un certain $x \in E$; et si $y \in N(A_0A)^{k-1}A_0$, alors

$(A_0A)^{k-1}A_0y = (A_0A)^{k-1}A_0Ax = (A_0A)^kx = 0.$

La dernière relation montre que $x \in N((A_0A)^k) = N(A)$, donc $Ax = y = 0$.

En ce qui concerne l'implication 2)$\Rightarrow$ 1) , considérons $A(A_0A)^kx - Ax = y$ pour $x \in E$ quelconque, on a d'une part $y \in R(A)$, et d'autre part

$(A_0A)^{k-1}A_0y = (A_0A)^{k-1}A_0(A(A_0A)^kx - Ax) = 0$, donc $y \in N(A_0A)^{k-1}A_0)$, donc $y = 0$, ce qui conduit à $A(A_0A)^kx = Ax$.

Le cas particulier $k = 1$, simplifie bien la deuxième condition, la proposition aura la forme suivante:

3.1.6 Corollaire:

Supposons $A_0 \in \Lambda(F, E)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes:

1) A_0 est un 1^1-inverse de A.

2) (A_0A) est un idempotent et $R\,(A) \cap N(A_0) = \{0\}$

La formule $R\,(A) \cap N(A_0) = \{0\}$, nous conduit à se poser la question suivante: a-t-on toujours pour A_0 un 1^1- inverse de A la somme directe

$F = R(A) \oplus N(A_0)$?

La réponse est en effet négative, considérons l'exemple suivant:

Définissons

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$A(x,y,z) = (y,x,0)$$

alors,

$$A_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$A(x,y,z) = (y,x,z)$$

est tel que $AA_0A(x,y,z) = AA_0(y,x,0) = A(x,y,0) = (y,x,0) = A(x,y,z)$

donc A_0 est un 1^1- inverse de A.

on vérifie que $N(A_0) = \{0\}$, on n'a pas $R(A) = \mathbb{R}^3$, et par conséquent, dans ce cas $F \neq R(A) \oplus N(A_0)$. (Dans ce cas on a $N(A_0) \subset N(AA_0) = \{(0,0,a); a \in \mathbb{R}\}$

et que l'inclusion est stricte).

Si de plus A_0 est un G_k-inverse de A, les autres relations se déduisent des précédentes, du fait que A est un 1^k-*inverse de* $A_{0;}$ Et comme $(A_0A)^k$et $(AA_0)^k$ sont des prjecteurs sur E et F respectivement:

$E = N(A_0A)^k \oplus R\ (A_0A)^k = N(A) \oplus R(A_0)$

$F = N(AA_0)^k \oplus R(AA_0)^k = N(A_0) \oplus R(A)$.

3.1.7 Proposition:

Soient $A \in \Lambda(E,F)$, A_0un G_k-inverse de A , *alors* $(AA_0)^k$ *et* $(A_0A)^k$ *sont des idempotents tels que:*

$R(A) = R((AA_0)^k)$

$R(A_0) = R((A_0A)^k)$

$N(A) = N((A_0A)^k)$

$N(A_0) = N((AA_0)^k)$

Et

$E = N(A) \oplus R(A_0)$

$F = R(A) \oplus N(A_0)$

où $\oplus$ *désigne la somme directe.*

Preuve:

La proposition est une conséquence directe de (3.1.3), car A_0 est un 1^k- inverse de A.

Remarque:

Si A est inversible, alors son 1^k-inverse peut ne pas être inversible (ex.3.1.2), par contre son G_k-inverse est inversible, et ce du fait que , de $E = R(A_0)$, $F = R(A)$ et $N(A) = N(A_0) = \{0\}$ .Il s'agit bien de l'inverse usuel pour un G_1-inverse et de SA^{-1} où S est une racine d'ordre k définie sur F.

3.1.8 Proposition:

Tout 1^1-*inverse* (G_1-inverse) *est un* 1^k-*inverse* (G_k-inverse) , *respectivement pour* $k > 1$.

Preuve:

Si A_0 est un 1^1-inverse de A, c'est à dire que $A(A_0A) = A$, alors
$A(A_0A)^k = A(A_0A)(A_0A)^{k-1} = A(A_0A)^{k-1}$
$= A(A_0A)^{k-2} = ... = A(A_0A)$
$= A$.

Le cas où A_0 est un G_1-inverse de A se fait de la même manière.

3 .2 Existence de 1^k-inverse;G_k-inverse.

On va montrer l'existence de 1^k-inverse, et en conséquence du G_k-inverse pour un opérateur donné.

3.2.1 Proposition:

Tout $A \in \Lambda(E, F)$ *possède un* 1^k-*inverse (*G_k-*inverse), pour* $k \geqslant 1$.

Preuve:

Soient $A : E \to F$, E_0 un supplémentaire de $N(A)$ dans E, $\widetilde{A}$ la restriction de A à $E_{0,}$ alors $\widetilde{A} : E_0 \to R(A)$ est bijectif, notons son inverse $\widetilde{A}^{-1}$. Considérons $S : R(A) \to R(A)$, avec $S^k = I_{R(A)}$.

Soit F_0 un supplémentaire de $R(A)$ dans F,

définissons A_0 tel que $N(A_0) = F_0$, $A_0 = \widetilde{A}^{-1}S$ sur $R(A)$

pour $x \in E$, $x = x_{1+}x_2 \in N(A) \oplus E_0$, alors

$(AA_0)^k Ax = (AA_0)^k Ax_1 + (AA_0)^k Ax_2 = (AA_0)^k Ax_2$, or

$(AA_0)^k Ax_2 = \underbrace{AA_0AA_0...AA_0}_{k \text{ fois}}$

$Ax_2 = \underbrace{\widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}S\widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}S...\widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}}_{k \text{ fois}}SAx_2 = S^kAx_2 = Ax_2.$

Donc $(AA_0)^k Ax = Ax$, et A_0 est un 1^k-inverse de A.

D'autre part si $y = y_1 + y_2 \in F_0 \oplus R(A) = F$;

on a $(A_0A)^kA_0y = (A_0A)^kA_0y_1 + (A_0A)^kA_0y_2$

or $(A_0A)^kA_0y_2 = \underbrace{A_0A.A_0A...A_0A}_{k \text{ fois}}A_0y_2$

$= \underbrace{\widetilde{A}^{-1}S\widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}S\widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}S\widetilde{A}}_{k \text{ fois}}\widetilde{A}^{-1}Sy_2 =$

$= \widetilde{A}^{-1}Sy_2 = A_0y_2$.

On a montré que $(A_0A)^k A_0y = A_0y$ pour tout $y \in F$, donc A_0 est bien un G_k-inverse de A.

3.2.2 Proposition:

Si A_1 est un 1^k-inverse de A, alors $A_0 = A_1(AA_1)^k$ est un G_k-inverse de A.

Preuve:

$(AA_0)^k A = (AA_1(AA_1)^k)^kA = ((AA_1)^kAA_1)^kA = (AA_1)^kA = A.$

Donc A_0 est un 1^k-inverse de A.

$(A_0A)^kA_0 = ((A_1(AA_1)^kA))^kA_1(AA_1)^k$

$= (A_1A)^k(A_1A)^kA_1 = (A_1A)^kA_1.$

Donc A_0 est un G_k-inverse de A.

En conclusion si A possède un 1^k-inverse, il doit posséder un G_k-inverse.

3.2.3 Proposition:

Soit $A \in \Lambda(E,F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes:

i) A possède un 1^1-inverse.

ii) A possède un 1^k-inverse.

iii) A possède un G_k-inverse.

Preuve:

i) $\Rightarrow$ *ii)* car tout 1^1-inverse est 1^k-inverse.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* si A_0 est un 1^k-inverse , alors $(A_0A)^kA_0$ est un G_k-inverse d'après(3.1.8).

iii) $\Rightarrow$ *i)* si A_0 est un G_k-inverse de A, alors $(A_0A)^{k-1}A_0$ est un 1^1-inverse.

3.2.4 Remarque:

La notion de racine d'ordre k de l'identité est toujours présente, on peut se servir de la simplicité d'obtention de telles racines dans le cas de dimension finie, si $R(A)$ est de dimension infinie, on peut chercher F_1, F_2 avec $R(A) = F_1 \oplus F_2$ et $\dim F_1 < +\infty$.

Il est possible de choisir S sur $R(A)$ de la façon suivante:

$$S = \begin{cases} S_1 \text{ sur } F_1, & S_1^k = I_{F_1} \\ I_{F_2} \quad (\text{l'identité sur } F_2) & \text{sur } F_2 \end{cases}$$

S ainsi défini est une racine d'ordre k de l'identité.

3.3 Relation entre 1^k-inverses et projections et classification:

Supposons que

$E = N(A) \oplus E_1$,

$F = R(A) \oplus F_1$

Soit P le projecteur correspondant à la décomposition de E tel que

$R(P) = N(A)$, $N(P) = E_1$.; Q le projecteur sur F tel que $R(Q) = R(A)$, et

$N(Q) = F_1$, on a

3.3.1 Prposition:

Il existe un G_1- inverse unique tel que

$R(P) = N(A)$, *et* $R(Q) = R(A)$.

Preuve:

Notons $i : E_1 \to E$, $j : R(A) \to F$ les applications identiques , reprenons la construction (3.2.1) avec $S = I_{R(A)}$; notons $A_{P,Q} = iA_1^{-1}Q$, alors $A_{P,Q}$ verifie les équations

$AXA = A$

$XAX = X$

$AX = jQ$

$XA = i(I - P)$

En ce qui concerne l'unicité

Si X_1 est une autr solution du système précédent, alors

$X_1 = X_1AX_1$

$= i(I - P)X_1$

$= XAX_1$

$= XjQ$

$= XAX$

$= X.$

Si l'on considère P; et Q comme opérateurs définis sur E et F respectivement, on peut omettre i et j, dans ce cas $A_{P,Q}$ verifie le système suivant

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ XA = I - P \\ AX = Q. \end{cases}$$

3.3.2 Corollaire:

L'application $(E_1, F_1) \longleftrightarrow (P, Q)$

où E_1 *est supplémentaire de* $N(A)$; F_1 *supplémentaire de* $R(A)$,

est une bijection.

3.3.3 Remarque:

Le cas de G_k-inverse diffère, étant donné P, Q des projecteurs vérifiant les conditions précédentes; on n'en a pas unicité de G_k-inverse dès que $k \geq 2$, il est possible de dégager une certaine classification de l'ensemble des G_k-inverses d'un opérateur A.

Définissons la relation ρ sur l'ensemble des G_k-inverses de A,

si A_0, A_1 sont des G_k-inverses de A, on note

$$A_0 \ \rho \ A_1 \Leftrightarrow \begin{cases} (A_0A)^k = (A_1A)^k \\ et \\ (AA_0)^k = (AA_1)^k \end{cases}$$

on vérifie que ρ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des G_k-inverses de A; une classe d'équivalence notée par exemple $[A_{P,Q}]$ est constituée des G_k-inverses de A vérifiant:

$$\begin{cases} A(XA)^k = A \\ X(AX)^k = X \\ (XA)^k = I - P \\ (AX)^k = Q. \end{cases}$$

On rappelle que P et Q sont tels que $R(P) = N(A)$, et $R(Q) = R(A)$.

Une classification analogue des 1^k-inverses d'un opérateur donné est possible, en considérant la relation d'équivalence suivante:

$A_0 \ \rho \ A_1 \Leftrightarrow \ (A_0A)^k = (A_1A)^k$.

Un autre type de classification des 1^k- inverses s'obtient par

3.3.4 Proposition:

Si k, p et n sont des entiers tels que $k = pn$, alors tout 1^p- inverse de A est aussi un 1^k- inverse de A.

Preuve:

Si A_0 est un1^p- inverse de A , alors

$(AA_0)^kA = (AA_0)^{np}A = (AA_0)^{(n-1)p}(AA_0)^pA$

$= (AA_0)^{(n-1)p}A$

$= (AA_0)^{(n-2)p}A$

$\vdots$

$= A.$

La réciproque n'est pas vraie , car pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors

$$A_0 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un 1^6- inverse de A, qui n'est ni 1^3-inverse ni 1^2- inverse de A.

Une réciproque peut être formulée comme suit:

3.3.5 Proposition:

Supposons que A_0 est un 1^k-inverse de A, si A_0 est aussi 1^p-inverse de A , pour $p \leq k$, et que A_0 n'est pas 1^j-inverse de A pour $j \langle p$, alors k est multiple de p.

Preuve:

Formons la division Euclidienne de k par p , il existe q et n tels que $k = np + q$ et

$$\begin{aligned}(AA_0)^k A &= (AA_0)^{np+q} A = (AA_0)^{np}(AA_0)^q A \\ &= (AA_0)^{np} AA_0 (AA_0)^{q-1} A \\ &= (AA_0)^q A \\ &= A\end{aligned}$$

Donc A_0 est un 1^q-invrse de A contrairement à l'hypothèse , en conclusion $q = 0$.

3.4 Sur la théorie de Nashed-Votruba

Supposons $E,\ F$ deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{C}$, la définition de 1^k-inverse détermine une paire de projection (P,Q) où

$P = I-\ (A_0A)^k$, $Q = (AA_0)^k$ tels que $N(A) = R(P)$ et $R(A) = R(Q)$.

Réciproquement; étant donné deux projections P,Q telles que $R(P) = N(A)$, $R(A) = R(Q)$, peut-on trouver A_0 un 1^k-inverse de A avec

$P = I-\ (A_0A)^k$ et $Q = (AA_0)^k$?

On a la généralisation suivante:

3.4.1 Lemme :

Soient E, F deux espaces vectoriels, $A \in \Lambda(E,F)$. Si P,Q sont *deux projections telles que $R(P) = N(A)$, $R(Q) = R(A)$, alors il existe A_0* un *1^k-inverse de A tel que $I - P = (A_0A)^k$ et $Q = (AA_0)^k$.*

Preuve:

Notons $\mathcal{F}_V = \{P \in \Lambda(E,E)\ /\ P^2 = P \text{ et } R(P) = V\}$

et

$\mathcal{A}_V = \{B \in \Lambda(E,E)\ /\ R(B) \subset V \subset N(B)\}$

$\mathcal{F}_V$ est une variété affine ayant pour plan parallèle $\mathcal{A}_V$ [7] . Soit Q un projecteur tel que $R(Q) = R(A)$, cherchons A_0 un 1^k-inverse tel que $Q = (AA_0)^k$.

Soit A_1un 1^k-inverse et $Q_1 = (AA_1)^k$. Puisque $r = Q - Q_1 \in \mathcal{A}_{R(A)}$, il est possible de chercher $\widetilde{A_0}$ sous la forme $A_1 + C$. Dans ce cas, on a: $(A\widetilde{A_0})^k = (AA_1 + AC)^k = Q^k$.

On prend $AA_1 + AC = Q$.

Donc, $Q - Q_1 = AA_1 + AC - (AA_1)^k = r$.

Et comme $r = Q_1r$, alors

$AC = A(A_1A)^{k-1}A_1r+\ A(A_1A)^{k-1}A_1 - AA_1$.

Choisissons

$C = (A_1A)^{k-1}A_1r + A(A_1A)^{k-1}A_1 - A_1$

$$\overline{A_0} = A_1 + C = (A_1A)^{k-1}A_1\left(Q - (A_1A)^k + I\right) \tag{1}$$

D'une manière analogue $\overline{A_0}$ est un 1^k-inverse tel que $(\overline{A_0}A)^k = I - P$.

Posons $(A_1A)^k = I - P_1$.

Et, comme $S = P - P_1 \in \mathcal{A}_{N(A)}$,

on cherche $\overline{A_0}$ sous la forme de $A_1 + C$. Ce qui donne

$(\overline{A_0}A)^k = (A_1A + CA)^k = (I - P)^k$.

On prend:

$A_1A + CA = I - P = I - P_1 - S =$

$= I - P_1 - S(I - P_1)$ (car $SP_1 = 0$)

$= (A_1A)^k - (P - (A_1A)^k)(A_1A)^k = (A_1A)^k - P(A_1A)^k$.

Par suite

$CA = (A_1A)^{k-1}A_1A - P(A_1A)^{k-1}A_1A - A_1A$.

Donc, on peut choisir

$C = (A_1A)^{k-1}A_1(I - P) - A$ et

$$\overline{A_0} = A_1 + C = (A_1A)^{k-1}A_1(I - P) \tag{2}$$

De (1) et (2), on peut choisir

$A_0 = (A_1A)^{k-1}A_1(I - P)(A_1A)^{k-1}A_1(Q - (AA_1)^k + I)$. ■

3.5. Equation à opérateurs

Dans ce paragraphe E et F sont simplement des espaces vectoriels (algébriques) sur le même corps $\mathbb{C}$, $A : E \to F$ un opérateur linéaire , supposons A_0 un 1^k- invrese de A , considérons l'equation $Ax = y$, on cherche un opérateur linéaire $X : F \to E$ tel que $x = Xy$, on a donc $AXAx = AXy = Ax$ et cela pour tout $x \in E$, donc X est un 1^k-inverse de A. Dans ce qui suivera on va étudier l'equation $Ax = y$

3.5.1 Proposition:

Si A_0 un est 1^k- invrese de A, alors $(I - (A_0A)^k)u$, $u \in E$ quelconque, est une solution de l'equation homogène $Ax = 0$.

Preuve:

On vérifie bien que $A(I-(A_0A)^k)$ est l'opérateur nul sur E.

3.5.2 Proposition :

Considérons l'équation à operateurs:

$$AXB = C \tag{1}$$

où $A, B \in \Lambda(E,F)$ *possèdent des* 1^k-inverses A_0 *et* B_0 *respectivement.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) *admette une solution est que*

$$(AA_0)^k C(B_0B)^k = C \tag{2}$$

Les solutions de (1) *sont données par*

$$X = A_0(AA_0)^{k-1}C(B_0B)^{k-1}B_0 + U - (A_0A)^k U(BB_0)^k \tag{3}$$

où $U \in \Lambda(F,E)$ *arbitraire*

.

Preuve:

Si X est une solution de (1) alors:

$$\begin{aligned} C &= AXB = (AA_0)^k AXB(B_0B)^k \\ &= (AA_0)^k C(B_0B)^k. \end{aligned}$$

La condition est donc nécessaire.

Réciproquement, si (2) est vérifiée alors $X_0 = A_0(AA_0)^{k-1}C(B_0B)^{k-1}B_0$ est une solution de (1).

Supposons que la relation (2) est satisfaite, alors il est clair que tout X vérifiant (3) est solution de (1). Réciproquement, si X_1 est une solution de (1) alors $X_1 - X_0$ est une solution de l'équation $A(X_1 - X_0)B = 0$, qui peut être mise sous la forme $X_1 - X_0 = U - (A_0A)^k U(BB_0)^k$, où $U \in \Lambda(F,E)$. ■

3.5.3 Corollaire:

Soit $A \in \Lambda(E,F)$, si A_0 est un 1^k-inverse de A, alors l'ensemble des 1^k-inverse de A est donné par:

$X = (A_0A)^{k-1}A_0 + U - (A_0A)^kU(BB_0)^k$, *où* $U \in \Lambda(F,E)$ *arbitraire.*

Preuve:

Remarquons d'abord que les 1^k-inverses vérifient l'équation $AXA = A$ dont la condition necessaire et suffisante: $(A_0A)^kA(A_0A)^k = A(A_0A)^k = A$ est réalisée, la formule est directe.

3.5.4 Corollaire:

Soient E_0est un sous espace vectoriel de E, P_0 un projecteur de E sur E_0 alors

1) Tout projecteur S de E sur E_0 est un G_k-inverse de P_0.

2) Si X est un 1^k-inverse de P_0, alors P_0X est un projecteur de E sur E_0.

3) L'ensemble des projecteurs de E sur E_0 est donné par:

$$P = P_0 + P_0U(I - P_0)$$

où $U \in \Lambda(E)$.

Preuve:

1) Notons Π l'ensemble des projecteurs de E sur E_0, si P_0 et S sont des éléments de Π on a alors $P_0S = S$ et $SP_0 = P_0$. Donc P_0 et S sont G_k-inverses l'un de l'autre.

2) est directe.

3) De la première assertion, on remarque que si $X \in \Pi$, alors X vérifie l'équation

$$P_0XP_0 = P_0$$

dont les solutions sont en effet, des 1^k- inverses de P_0; formant l'ensemble décrit par:

$$X = P_0 + U - P_0UP_0$$

$U \in \Lambda(E)$.

Or, d'après 2) les éléments de la forme

$P_0X = P_0 + P_0U - P_0UP_0 = P_0 + P_0U(I - P_0)$

sont des éléments de Π.

Il reste à montre que c'est bien la forme générale d'un élément de Π; en effet si $S \in \Pi$, alors S est un 1^k- inverses de P_0; vérifiant aussi $P_0S = S$; donc S est bien de la forme $P_0+P_0U(I-P_0)$; où $U \in \Lambda(E)$.

3.5.5 Corollaire:

Si A_0 est un 1^k-inverse de $A \in \Lambda(E,F)$, alors les opérateurs $X = A_0(AA_0)+\left(I-(A_0A)^k\right)W; W \in \Lambda(F,E)$ sont des 1^k-inverses de A.

Preuve :

Remarquons que tout 1^1-inverse de A est un 1^k-inverse de A mais nous cherchons les 1^k-inverses en les considérant comme solution du système:

$$\begin{cases} YA = A \\ (AX)^k = Y. \end{cases}$$

L'equation $YA = A$ est résoluble si et seulement si $A(A_0A)^k = A$, ce qui est vérifié, donc $Y = (AA_0)^k + U\left(I-(A_0A)^k\right)$, $U \in \Lambda(F,E)$ .L'equation $(AX)^k = Y$ sera traitée de la façon suivante: $AX = V$, et $V^k = Y$, l'équation $AX = V$ est résoluble si et seulement si $(AA_0)^kV = V$ vérifiée pour $Y = (AA_0)^k$, on peut choisir $V = AA_0$.

Les solutions sont donc:

$X = A_0(AA_0)^kV + W - (AA_0)^kW = A_0(AA_0)^kAA_0 + (I-(A_0A)^k)W$

$= A_0AA_0 + (I-(A_0A)^k)W$ où $W \in \Lambda(F,E)$.

Chapitre 4

0.4.1

Inversion généralisée d'opérateurs linéaires dans les espaces topologiques

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'inversion généralisée d'opérateurs linéaires définis sur des espaces dont l'un au moins est muni d'une topologie, on considère en premier lieu le cas des espaces de Banach et de Hilbert, le cas nécéssite le travail sur des opérateurs bornés définis sur l'espace tout entier, on revient souvent aux proprietés algebriques citées dans le chapitre 3, un retour très intense sur les racines de l'identité est remarqué dans ce chapitre, on montre leur continuité et on dégage aussi quelques proprietés topologiques globales concernant ces opérateurs dont l'intérêt pour l'inversion généralisée est très visible. La question d'approximation ayant pour tendance à minimiser la quantité $\|Ax - y_0\|$ trouve dans la notion d'inversion généralisée un outil bien puissant, en effet on montre une liaison directe de la meilleure approximation, de la meilleure approximation de norme minimale aux projections relatives à l'inversion, mais pourvu qu'elles soient de norme 1, ou autrement dit, des projections contractantes, on vient de prouver une relation directe avec l'inverse généralisé.

On termine ce chapitre par considérer des cas mixtes, c'est à dire que l'un des espaces est topologique, l'autre étant algebrique, on essaie de se servir de la théorie de Nashed - Votruba en exigeant la continuité de la projection relative à l'espace topologique.

Le deuxième cas traite des situations mixtes, c'est à dire l'un des espaces est algèbrique on met en considération la continuité des projections $(AA_0)^k$ et $(A_0A)^k$ dans les cas envisagés.

4.1. E et F espaces de Banach

E, F étant deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, $\beta(E,F)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés définis sur E et à valeurs dans F. Soit $A \in \beta(E,F)$ s'il existe $A_0 \in \beta(F,E)$ tel que $(AA_0)^k A = A, k \in \mathbb{N}^*$, alors A_0 est dit 1^k-inverse de A. Si de plus A est 1^k-inverse de A_0, alors A et A_0 sont dits G_k-inverses l'un de l'autre. $N(A), R(A)$ désignent respectivement le noyau et l'image de A.

Si $F'; E'$ désignent les espaces duals de F et E respectivement (ce sont les espaces vectoriels des fonctionnelles continues définies sur F et E). on appelle conjugué de A, l'opératuer A' : $F' \to E'$, défini comme suit

$A'f(x) = f(Ax)$ pour toute fonctionnelle $f \in F'$.

On a $A' \in \beta(F', E')$ de façon que $\|A\| = \|A'\|$.

L'image de A et le noyau de A' sont liés par la relation suivante:

$$\overline{R(A)} = N(A')^{\perp}$$

Si M est un partie de E', on appelle orthogonal de M noté $M^{\perp}$

$M^{\perp} = \{x \in E, f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in M\}$

Si $N \subset E$, alors on définie d'une façon analogue $N^{\perp}$

$N^{\perp} = \{f \in E', f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in N\}$

Si E et F sont des espaces de Hilbert, on apelle adjoint de A l'opérateur A^* tel que

$(Ax, y) = (x, A^*y)$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$.

4.1.1 Proposition :

Soient E, F deuxespaces de Banach sur C, A_0 un 1^k-inverse de A,

alors $(AA_0)^k$ et $I-(A_0A)^k$ sont des projections sur $R(A)$ et $N(A)$ respectivement, tels que

$R((AA_0)^k) = R(A)$ *et* $N(A) = N((A_0A)^k)$.

Preuve

On vérifie bien que $(AA_0)^k); (A_0A)^k$ sont des idempotents et que $R(A) = R((AA_0)^k A) \subset R((AA_0)^K) \subset R(A)$,donc $R(A) = R((AA_0)^k)$;et $(AA_0)^k$est une projection sur $R(A)$.De même $R(I-(A_0A)^k) = N(A_0A)^k$,

on a $N(A) \subset N(A_0A)^k$et si x est tel que $(A_0A)^k x = 0$, alors

$A(A_0A)^k x = Ax = 0$

donc $N(A) = N((A_0A)^k)$.

En conclusion, on a montré que si $A \in \beta(E,F)$ possède un 1^k-inverse , alors $N(A)$et $R(A)$ sont fermés,admettent des supplémentaires topologiques dans E et Frespectivement.

4.1.2 Proposition :

Soit $A \in \beta(E,F)$, A_0 un G_k-inverse de A, alors

$R(A) = R((AA_0)^k$

$R(A_0) = R((A_0A)^k$

$N(A) = N(A_0A)^k$

$N(A_0) = N((AA_0)^k$

Et $E = N(A) \oplus R(A_0)$, $F = R(A) \oplus N(A_0)$

où $\oplus$ désigne la somme directe topologique.

Preuve

C'est une conséquence de la proposition précédente, on peut consulter (3.2.1).

4.1.3 Proposition :

Pour que .$A \in \beta(E,F)$ possède un 1^k-inverse, il faut et il suffit que $R(A)$ et $N(A)$ possèdent des supplémentaires topologiques dans E et F respectivement.

Preuve

D'après la proposition (4.1.1) , la condition est nécéssaire. Soient

$A : E \to F$, E_0 un supplémentaire de $N(A)$ dans E, $\widetilde{A}$ la restriction de A à E_0, alors $\widetilde{A} : E_{0\to}R(A)$ est une bijection, notons son inverse $\widetilde{A}^{-1}$.D'après le théorème de l'isomorphisme de Banach $\widetilde{A}^{-1}$est borné .Considérons $S \in \beta(R(A))$ tel que $S^K = I_{R(A)}$.Soit F_0 un supplémentaire de $R(A)$ dans F , définissons $A_0 \in \beta(F,E)$ tel que $N(\ A_0) = F_0$, $A_0 = \widetilde{A}^{-1}S$ sur$R(A)$. Pour $x \in E$; $x = x_{1+}x_2$ où $x_1 \in N(A), x_2 \in E_0$, on vérifie alors que $(AA_0)^kAx = Ax$. Donc A_0 est bien un 1^k-inverse de A.

Cette construction nous prmet de montrer que A_0 ainsi défini est aussi un G_k-inverse de A .

4.1.4 Exemples:

1) Supposons que $A \in \beta(E,F)$, si F est de dimension finie, ou A de rang fini, alors A possède un 1^k-inverse.

La dernière assertion est une conséquence directe du lemme (4.2.2).

2) Si E et F sont des espaces de Hilbert, et $A \in \beta(E,F)$, alors A possède un 1^k-inverse, car tout sous espace d'un Hilbert possède toujours un supplémentaire topologique.

4.2 Inverses de $\Phi-$opérateurs:

On va considérer dans cette section un exemple d'opérateurs, dont on va montrer la possession de 1^k-inverses, ce sont les opérateurs de Fredholm :

$A \in B(E,F)$ est dit de Fredholm ou, $\Phi-$ opérateur si

1- dim $N(A)\langle +\infty$

2- dim $N(A')\langle +\infty$

3- $R(A)$ est fermé.

Un exemple de tel opérateur est donné par $I-K$ où K est un opérateur compact.

4.2.1 Proposition:

Tout $\Phi-$ opérateur possède un 1^k- inverse.

Preuve:

La démonstration de la proposition est fondée sur le lemme suivant et son corollaire dont la démonstration figure dans l'annexe.:

4.2.2 Lemme:

Tout sous éspace de dimension finie d'un éspace de Banach possède un supplémentaire topologique.

4.2.3 Corollaire:

Si E_1 est un sous espace d'un espace de Banach, tel que $E_1 = M^{\perp}$, où $M \subset E'$, le dual de E, et que $\dim M \langle +\infty$; *alors E_1 possède un supplémentaire topologique.*

Comme $\dim N(A) < +\infty$, et suite au lemme 4.2.2 , alors $N(A)$ possède un supplémentaire topologique.

Le sous espace $R(A)$ est fermé, or $R(A) = \overline{R(A)} = N(A')^{\perp}$, et comme $\dim N(A') < +\infty$, alors le sous espace $R(A)$ possède un supplémentaire topologique d'après le corollaire du lemme.

4.3 Sur les racines de l'identité:

On va étudier quelques proprietés concernant les racines de l'application identique dans un espace normé dans le cas général.

Avant d'aborder la question de continuité de la racine de l'identité, il est nécessaire de rappeler cetaines proprietés des opérareurs algebriques dont ces racines font part.

Un opérateur$A \in \Lambda(E)$ est dit algèbrique, s'il existe un polynôme

¨ $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$, où a_i , $i = 0, 1, ..n$ sont des nombres complexes, de façon à ce que $p(A) = 0$. On peut supposer $a_1 = 1$, l'opérateur algébrique A est dit d'ordre n s'il n'existe pas de polynôme $q(t)$ de degré inferieur à n tel que $q(A) = 0$. Si cette condition est satisfaite, $p(t)$ est appelé polynôme caractéristique de A . Dans le cas de dimension finie ce polynôme est donné par $\det(A - \lambda I)$, les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$.

4.3.1 Lemme:

Si $A \in \Lambda(E)$, *alors les proprietés suivantes sont équivalentes:*

i) A *est un opérateur algébrique de polynôme caractéristique*
$p(t) = \prod_{m=1}^{n} (t - \lambda_m)^{r_m}$, *d'ordre* $r = r_1 + r_2 + ... + r_n$.

ii) E *est la somme directe de n sous espaces principaux* E_i *correspondant aux valeurs propres* λ_i *de multiplicité* r_i , *c'est à dire*

$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$

Avec $E_i = N\ (A - \lambda_i I)^{r_i}$.

iii) Il existe n projecteurs $P_1, P_2, ..., P_n \in \Lambda(E)$ *tels que*

$P_i P_j = \delta_{ij} = \begin{cases} P_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$;

$\sum_{i=1}^{n} P_i = I.$ *et* $(A - \lambda_i I)^{r_i} P_i = 0.$ $i = 1, ..., n.$

La démonstration du lemme se trouve dans l'annexe.

4.3.2 Corollaire:

Si $S \in \Lambda(E)$ est une racine d'ordre k de l'identité, alors:

i) Le polynôme caractéristique de S est de la forme

$p(t) = \prod_{m=1}^{n} (t - \xi_m)^{r_m}$; $\xi_m = \exp \frac{2\pi m i}{n}$,

C'est à dire que les valeurs propres de S sont les racines complexes d'ordre k de l'unité.

ii) Si $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$, $p \leq n$ sont les valeurs propres de S , alors :

$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$; *avec* $E_i = N\ (S - \xi_i I)^{r_i}$, $i = 1, ..., p$.

Le corollaire est une conséquence immédiate du lemme, car de la relation $S^k = I$, on déduit que S est algebrique, et que ses valeurs propres sont des solutions de l'équation algebrique $x^k - 1 = 0$.

4.3.3 Proposition:

Les racines de l'identité définies sur un espace normé (Banach en particulier) sont bornées, de norme égale à 1.

Preuve:

Supposons S une racine d'ordre k de l'identité, définie sur un espace normé E,

si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_p$, $p \leq k$ sont les valeurs propres de S, alors d'après (..

$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$; où $E_i = N\ (S - \xi_i I)^{r_i}$, $i = 1, ..., p$

et si $x \in E$, il existe $x_1, x_2, ..., x_p$ tel que

$x = x_1 + x_2 + ... + x_p$

alors

$Sx = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + ... + \varepsilon_P x_p$

et

$\|Sx\| = |\varepsilon_1| \|x_1\| + |\varepsilon_2| \|x_2\| + ... + |\varepsilon_p| \|x_p\|$

$\leq \|x_1\| + \|x_2\| + ... + \|x_p\|$

$\leq p \|x\|$.

Ce qui montre que S est bornée.

On a pour une racine d'ordre k de l'unité S

$1 = \|I_n\| = \left\|S^k\right\| \leq \|S\|^k$, on obtient $\|S\| \geq 1$, d'autre part les valeurs propres de S ont toutes de module égal à 1, donc il existe $x \neq 0$ tel que $\|Sx\| = \|x\|$, donc $\|S\| = 1$.

4.3.4 Lemme:

Soient S, T deux opérateurs linéaires bornés tels que $\|S\| = \|T\| = 1$, on a
$\|S^p - T^p\| \leq p\|S - T\|$, *pour* $p \geq 1$.

Preuve:

Montrons le par réccurence;

Pour $p = 2$

$S^2 - T^2 = (S - T)S + T(S - T)$

Ilest clair que $\left\|S^2 - T^2\right\| \leq 2\|S - T\|$

Supposons la formule vraie pour tout $n\langle\ p$

$S^p - T^p = (S - T)S^{p-1} + T^{p-1}(S - T) + TS^{p-1} - T^{p-1}S$

$= (S - T)S^{p-1} + T^{p-1}(S - T) + TS(S^{p-2} - T^{p-2})$

Donc

$\|S^p - T^p\| \leq \|(S - T)\|\,\|S\|^{p-1} + \|T\|^{p-1}\,\|(S - T)\| + \|TS\|\,\left\|(S^{p-2} - T^{p-2})\right\|$

$\leq 2\|S - T\| + (p - 2)\|S - T\|$

$= p\|S - T\|$.

4.3.5 Lemme:

Si $S_n \to S$ (la covergence est supposée en norme), et $\|S_n\| = 1$, alors $\|S\| = 1$.

Preuve:

On a

$\|S\| \leq \|S - S_n\| + \|S_n\|$; donc $\|S\| \leq 1$

D'autre part pour $\epsilon\ \rangle 0$, on peut trouver un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on aurait

$\|S_n\| - \|S\| \leq \|S - S_n\|$

D'où

$\|S\| \geq 1 - \epsilon$.

4.3.6 Proposition:

L'ensemble des racines d'ordre k de l'identité est fermé.

Preuve:

Si (S_n) est une suite de racines d'ordre k , et $S_n \to S$ (en norme), et

$\|S_n\| = 1$, alors $\|S\| = 1$ et

$\left\|S^k - S_n^k\right\| \leq k \|S - S_n\|$; d'après (4.3.4)

Donc $S^k \to S_n^k = I$

Ce qui montre que S est une racine d'ordre k de l'identité.

4.3.7. Proposition:

Soit S une racine d'ordre k de l'identité définie sur E, alors

1) Tout $1^k - inverse$ de S en est $G_k - inverse$.

2) Si A_0 est un $G_k - inverse$ de S , alors il existe S_0 une racine d'ordre k de l'identité telle que $A_0 = S^{k-1}S_0$

Réciproquement, tout opérateur de la forme $A_0 = S^{k-1}S_0$ est un $G_k - inverse$ de S.

3) Toute racine d'ordre k de l'identité commatant avec S, est $G_k - inverse$ de S.

4) A chaque $G_k - inverse$ de S corréspond un sous ensemble connexe de la sphère unité de $\beta(E)$

Preuve:

1) est une conséquence de (3.1.2).

2) Si A_0 est un $G_k - inverse$ de S, on a $(SA_0)^k S = S$ d'où $(SA_0)^k = I$, ce qui s'exprime par l'xistence de S_0 une racine d'ordre k de l'identité telle que $SA_0 = S_0$ ou bien $A_0 = S^{-1}S_0$.

4) Soit S_0 une racine d'ordre k de l'identité commutant avec S, c'est un $G_k - inverse$ de S, d'après 3), considérons l'application :

$u : [0;1] \to \beta(E)$

$t \to \exp it\ S_0 \exp -it$

$u(t)$ est une une racine d'ordre k de l'identité , car

$u(t)^k = (\exp it\ S_0 \exp -it)^k = u(t)$

On vérifie aussi que $u(t)$ commute avec S, donc c'est un G_k- inverse de S, pour tout t ainsi défini, l'application u étant continue , donc son image $\{u(t)\}$ est un connexe tel que

$\|u(t)\| = \|S_0\| = 1$ pour tout $t \in [0;1]$, donc $u(t)$ est dans la sphère centrée à l'origine, de rayon 1.

4.4 Approximation dans les espaces de Hilbert

E et F sont supposés deux espaces de Hilbert sur C, $A \in \beta(E,F)$.

Considérons l'équation $Ax = y_0$, dans le cas où cette équation ne possède pas de solution, on est dans l'obligation de chercher une minimisation de la quantité $\|Ax - y_0\|$.

La valeur x_0 qui réalise la minimisation de la quantité précédente s'appelle meilleure approximation.

On montrera que la meilleure approximation est liée à l'existence de projection contractive, qui dépend elle même du choix de A_0.

4.4.1 Proposition

Soient E et F deux espaces de Hilbert, $A \in \beta(E,F)$, A_0 un 1^k-inverse de A. Considérons l'équation : $Ax = y_0$, alors $x_0 = A_0(AA_0)^{k-1}y_0$ est une meilleure approximation pour l'équation précédente, si et seulement si $|| I - (AA_0)^k || = 1$.

Preuve :

Montrons d'abord que si

$|| I - (AA_0)^k || = 1$, alors :

$|| y_0 - (AA_0)^k y_0 || \leq || (I - (AA_0)^k)y_0 + Ax' ||$ pour tout $x' \in E$.

Pour cela , soit $Q = (AA_0)^k$, $Ax' \in N(I-Q)$

Et puisque $(I-Q)y_0 \in R(I-Q)$, alors

$|| (I-Q)y_0 || = || (I-Q)^2 y_0 + (I-Q)Ax' || \leq$

$|| I - Q || \, || (I-Q)y_0 + Ax' ||$

C'est à dire, pour : $x' = A_0(AA_0)^{k-1}y_0 - x$ et $x \in E$ quelconque, on a :

$|| y_0 - Ax_0 || = || y_0 - (AA_0)^k y_0 || \leq$

$|| (I - (AA_0)^k)y_0 + A[A_0(AA_0)^{k-1}y_0 - x] ||$

$= || y_0 - Ax ||$.

Réciproquement, si $x_0 = A_0(AA_0)^{k-1}y_0$ est une meilleure approximation, alors :

$|| y_0 - Ax_0 || \leq || y_0 - Ax ||, \forall x \in E$.

Donc

$|| y_0 - Ax_0 ||= || (I - (AA_0)^k)y_0 ||\leq || y_0 ||$

d'où $|| I - (AA_0)^k ||\leq 1$ et puisque $I - (AA_0)^k$ est un projecteur, alors
$|| I - (AA_0)^k ||= 1$.

Remarque :

En se servant de la relation :
$I-(AA_0)^k = (I-AA_0)(I+AA_0+.....+(AA_0)^{k-1})$ la proposition (4.4.1) peut s'enoncer comme suit :

4.4.2 Proposition :

Soient E et F *deux espaces de Hilbert* $A \in \beta(E,F)$, A_0 *un* 1^k-*inverse de* A *,soit* $r =|| AA_0 || \neq 1$. *L'équation* $Ax = y_0$ *possède une meilleure approximation* $x_0 = A_0(AA_0)^{k-1}y_0$, *si et seulement si*
$|| I - AA_0 ||\leq \frac{1-r}{1-r^k}$.

4.4.3 Proposition

Soient E et F *deux espaces de Hilbert dont* F est strictement convexe, $A \in \beta(E,F)$, A_0 *un* G_k-*inverse de* A. *Considérons l'équation :* $Ax = y_0$, *alors* $x_0 = A_0(AA_0)^{k-1}y_0$ *est une meilleure approximation de norme minimale pour l'équation précédente, si et seulement si*

$|| I - (AA_0)^k ||=|| (A_0A)^k ||= 1$.

Preuve:

Remarquons d'abord que si F est strictement convexe; et si x_0 est une meileure approximation alors les autres meilleure approximations sont donneés par $x = x_0 + N(A)$. Comme A_0 est un G_k-inverse de A, alors $E = N(A) + R(A_0)$. Pour x_0 meilleure approximation, il existe $B_0 \in N(A)$ tel que $x_0 = B_0 + A_0 \ (AA_0)^{k-1} y_0$, supposons x_0 de norme minimale.

$$\begin{aligned} \left\|(A_0A)^k x_0\right\| &= \left\|(A_0A)^k (A_0 \ (AA_0)^{k-1} y_0 + B_0)\right\| \\ &= \left\|A_0 (AA_0)^{k-1} y_0\right\| \\ &\leq \left\|A_0 (AA_0)^{k-1} y_0 + B_0\right\| = \|x_0\| \end{aligned}$$

Donc $\left\|(A_0A)^k\right\| = 1$.

Réciproquement, si$\left\|(A_0A)^k\right\| = 1$, alors $\left\|A_0\ (AA_0)^{k-1} y_0\right\| = \left\|(A_0A)^k x_0\right\| \leq \|x_0\| = \left\|A_0\ (AA_0)^{k-1} y_0 + B\right\|$, $B \in N(A)$. Donc $A_0 (AA_0)^{k-1} y_0$ est une meilleure approximation de norme minimale.

Sous les conditions de la proposition (4.4.3), comme A et A_0 sont bornés, donc A_0A est borné, par conséquent $\left\|(A_0A)^k\right\| \leq \|(A_0A)\|^k$. On peut donc remplacer $\left\|(A_0A)^k\right\| = 1$ par $\|(A_0A)\| \leq 1$, on aura alors:

4.4.4 Proposition :

Soient E et *F deux espaces de Hilbert dont F* est strictement convexe, *$A \in \beta(E,F)$, A_0 un $G_k - inverse$ de A.Considérons l'équation : $Ax = y_0$, alors $x_0 = A_0(AA_0)^{k-1}y_0$ est une meilleure approximation de norme minimale pour l'équation précédente* , si et seulement si:

$\| I - AA_0 \| \leq \dfrac{1-r}{1-r^k}$, $r = \|(AA_0)\| \neq 1$, et $\|(A_0A)\| \leq 1$

Comme les projections (non nulles) sont des opérateurs de norme ≥ 1, ainsi les projections de norme 1 sont des contractions; or les conditions d'éxistence de meilleure approximation sont liées au fait que $R(A)$ soit le noyau d'une contraction; à savoir $I - (AA_0)^k$, et que $N(A)$ doit etre le noyau de la contraction $(A_0A)^k$ si l'on veut minimiser la norme de la meilleure approximation; ce qui éxige un choix préalable de A_0.

4.5 Cas mixtes; algebrique et topologique

Dans ce qui suit, on considère des espaces vectoriels dont l'un, au moins, est muni d'une structure topologique,il s'agira donc de 1^k-inverse topologique. Or la structure topologique nécessite la continuité des projecteurs en question, pour cela on distinguera deux cas principaux:

E algebrique-F topologique et F algebrique-E topologique. Une nouvelle notation doit intervenir pour distinguer ces cas, notons $1^k_F - inverse$ pour mentioner que l'espace F est topologique, de la même façon $1^k_E - inverse$ montre que E est topologique. Le cas où E et F sont topologiques est simplement mensioné.

4.5.1. E algébrique-F topologique

4.5.1 Proposition .

Soit $A : E \longrightarrow F$, avec E algébrique et F topologique. Si $\overline{R(A)}$ (fermeture considerée dans F) possède un supplémentaire topologique dans F, alors A possède un $1_F^k - inverse$ (topologique).

Preuve:

Soit H un supplémentaire topologique de $\overline{R(A)}$ et Q le projecteur sur $\overline{R(A)}$ parallèlement à H. Soit $F_0 = R(A) \oplus N(Q)$ (somme algébrique) qui est considéré comme espace algébrique et, puisque $A \in \Lambda(E, F_0)$ alors, d'après le lemme (3.4.1), il existe A_0 un $1^k - inverse$ de A sur F_0 tel que $(AA_0)^k = Q$ (sur F_0), on a alors $(AA_0)^k A = QA = A$.

Si F est Hilbertien, alors tout opérateur $A : E \longrightarrow F$ possède un $1_F^k - inverse$, car $\overline{R(A)}$ possède un supplémentaire dans F.

4.5.2 E topologique-F algébrique:

Ce cas est un peu compliqué, car le fait que $\overline{N(A)}$ possède un supplémentaire topologique dans E n'assure pas l'existence de l' 1_E^k-inverse topologique de A.

4.5.3 Exemple:

Soient $E = F = L_2[0,1]$ qui est un Hilbert. Pour $x(t) \in E$ définissons $Ax(t) = \dfrac{dx}{dt}$, $\mathcal{D}(A) = C^1[0,1] \subset E$, $N(A)$ est constitué des fonctions constantes sur $[0,1]$, $N(A)$ possède un supplémentaire topologique dans $L_2[0,1]$, $N(A)^\perp$ (en particulier). Considérons $A_0 y(t) = \int_0^t y(s)ds$, on obtient $A_0 Ax(t) = \int_0^t \dfrac{dx}{ds} ds = x(t) - x(0)$ et $AA_0 Ax(t) = Ax(t)$ pour $x(t) \in \mathcal{D}(A)$, mais $A_0 A$ ne peut être projecteur car il n'est pas continu, en effet: soit $x_n(t) = e^{-nt}$ alors $x_n(t) \to 0$ tandis que $A_0 Ax_n(t) = e^{-nt} - 1$ ne converge pas vers 0. Donc A_0 est un1^1-inverse algebrique et non 1_E^1-inverse topologique. On remarque que A_0 ainsi défini est un 1_F^k-inverse topologique de A.

4.6.Décomposition suivant une projection :

On aura besoin de la notion de décomposabilité suivante:
A est dit décomposable suivant le projecteur (continu) $P : E \longmapsto E$,

Si $N(A) \subset R(P)$ et si $Px \in N(A)$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ (domaine de définition de A).

L'ensemble $C_P(A) = \mathcal{D}(A) \cap N(P)$

est appelé support de A suivant le projecteur P.

On peut citer d'autres variantes de décomposabilité:

2- A est dit de domaine décomposable (décomposable) suivant le projecteur P,

Si $N(A) \subset R(P)$ et si $Px \in N(A)$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, et que

$\mathcal{D}(A) \cap N(P)$ est dense dans $N(P)$.

On a aussi

$C_P(A) = \mathcal{D}(A) \cap N(P)$

3- Si $\mathcal{D}(A) \subset H$ un espace de Hilbert, ou simplement un espace euclidien,

A est dit de domaine décomposable si

$\mathcal{D}(A) = N(A) \oplus (\mathcal{D}(A) \cap N(A)^{\perp})$

Dans ce cas

$C(A) = \mathcal{D}(A) \cap N(A)^{\perp}$

s'appelle le support de A.

On remarque que cette définition montre que A est décomposable suivant le

projecteur orthogonal sur $\overline{N(A)}$, avec $N(P) = N(A)^{\perp}$.

Des définitions citées, on remarque qu'on a tendence à décomposer le domaine de A de façon à dégager une variété (un sous espace) sur lequel A est injectif, à savoir $C_P(A)$.

On remarque aussi que A peut être décomposable suivant un projecteur, mais non décomposable suivant l'autre.

On reprend l'exemple suivant:[23]

Soient H_1 un espace pré-Hilbertien, non complet, H son complété, supposé séparable;

$(e_n)_{n=1,...}$ un système orthonormé dans H tel que $e_1 \in H \setminus H_1$; $e_n \in H_1$ pour tout $n \geq 2$.

On fait approcher e_1 par $g_1 \in H_1$; alors on a $g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

Soit l'opérateur A tel que $\mathcal{D}(A) = H_1$;et $N(A) = \overline{\langle e_2, e_3, ... \rangle}$ le sous espace engendré par la famille $(e_n)_{n=2,...}$

alors $N(A)^{\perp} = \langle e_1 \rangle$, et comme $e_1 \notin \mathcal{D}(A)$; alors $\mathcal{D}(A) \cap N(A)^{\perp} = C(A) = \{0\}$.

A n'est pas décomposable suivant le projecteur orthogonal sur $\overline{N(A)}$, selon la deuxième version de décomposabilité.

Considérons maintenant

$Px = x - \frac{1}{\alpha_1}(e_1, x)g_1$; $x \in H$

alors P est un projecteur, pour cela il suffit de remarquer que $Pg_1 = 0$, on vérifie bien que si $x \in N(A)$, alors $Px = x$,

de plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A) = H_1$ on a $APx = 0$, en conclusion :

A est décomposable suivant l'opérateur P (selon la $2^{ème}$version) et non décomposable suivant le projecteur orthogonal sur $N(A)$.

Soient $\mathcal{D}(A) \subset E$ et $A \in \Lambda(\mathcal{D}(A), F)$, si A_0 est un 1^k-inverse de A tel que $(A_0A)^k = I-P$ sur $\mathcal{D}(A)$ et $P : E \longmapsto E$ porjecteur (continu), tel que $\overline{N(A)} \subset R(P)$, alors A_0 est dit $1^k_E - inverse$ topologique de A.

4.6.1 Lemme :

Si A_0 est $1^k_E - inverse$ topologique de $A : E \longrightarrow F$, alors A est décomposable suivant P et $\mathcal{D}(A) = N(A) \oplus C_P(A)$.

Preuve :

Si $x \in N(A)$, alors $(A_0A)^k x = (I-P)x = 0$. Ce qui donne $N(A) \subset R(P)$. Si $x \in \mathcal{D}(A)$,alors $APx = A(I - (A_0A)^k)x = 0$. Ce qui donne $Px \in N(A)$.
Donc on a, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ $x = (I - (A_0A)^k)x + (A_0A)^k x$; $(I - (A_0A)^k)x \in N(A)$, $(A_0A)^k x \in N(P)$. Donc $(A_0A)^k x \in C_P(A)$. On montre que $N(A) \cap C_P(A) = \{0\}$. ■

4.6.2 Proposition:

*Si A est décomposable suivant $P : E \longmapsto E$, alors A possède un 1^k_E-*inverse *topologique.*

Preuve :

Considérons A comme élément de $\Lambda(\mathcal{D}(A), F)$, soit A_0 un 1^k-inverse de A tel que $(A_0A)^k = I - P$ sur $\mathcal{D}(A)$; or $N(A) \subset \overline{N(A)} \subset R(P)$. Donc A_0 est bien un 1^k_E-inverse topologique de A. ■

4.7. E topologique - F topologique

En se servant des propositions (4.5.1) et (4.6.1), on a le résultat suivant dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels topologiques.

4.7.1 Proposition

Soit $A \in \Lambda(E,F)$, E *et* F *étant des espaces vectoriels topologiques. Si* A *est décomposable suivant un projecteur* P, *et s'il existe un projecteur* Q *défini sur* F *tel que* $R(Q) = \overline{R(A)}$, *alors* A *possède un* G_k-inverse A^+ *vérifiant:*

$D(A^+) = R(A) \oplus N(Q)$

$R(A^+) = C_P(A)$

$N(A^+) = N(Q)$

$(AA^+)^k = Q \qquad sur\ \mathcal{D}(A^+)$

$(A^+A)^k = I - P \qquad sur\, \mathcal{D}(A).$

0.5

Conclusion

Dans la littérature des inverses généralisés, l'étude a été faite sur des systèmes du type:

1- $\begin{cases} A_0A = P_E \\ AA_0 = Q_F \end{cases}$

où P_E et Q_F sont simplement des projections sur E et F respectivement, l'idée est de remplacer l'application identique par une projection, quand il n'est pas possible d'avoir le système :

2- $\begin{cases} A_0A = I_E \\ AA_0 = I_F \end{cases}$

Notre travail a considéré le système du type:

1'- $\begin{cases} A_0A = P_0 \\ AA_0 = Q_0 \end{cases}$

où P_0 et Q_0 sont des racines d'ordre k de projections définies sur E et F respectivement, cette considération généralise bien l'étude déja faite en revenant au cas $k = 1$, mais on peut bien considérer aussi des cas qui ne vérifient pas le système (1), mais vérifient (1)'.

En introduisant cette notion d'inversion, on remarque que la racine d'ordre k de l'identité joue un role fondamental dans la détermination des inverses généralisés d'un opérateur linéaire .

Cette considération a enrichi l'ensemble des inverses généralisés d'un opérateur linéaire par des classes différentes, ou il devient possible d'introduire des inverses généralisés d'un opérateur inversible, cela d'une part, et d'autre part , vu la richesse de ces classes, il est possible de choisir des inverses généralisés possédant des proprietés particulières ou bien vérifiant des conditions imposées comme dans les questions de résolution des équations à opérateurs linéaires, ou bien des équation de la forme $f(x) = 0$, où f est non forcément linéaire.

Annexe

La numérotation de l'annexe est celle rencontrée dans le texte de la thèse.

2.2.1 Lemme:

L'opérateur A^*A est tel que:

a) L'opérateur A^*A est auto-adjoint , positif, et vérifie

$$N(A^*A) = N(A) \qquad \text{et} \qquad R(A^*A) = R(A^*)$$

b) Si x est un vecteur propre de A^*A associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$, alors Ax est un vecteur propre de AA^* associé à la même valeur propre.

c) Si $x_1, ..., x_p$ sont des vecteurs propres de A^*A, linéairement indépendants , alors $Ax_1, ..., Ax_p$ sont des vecteurs proppres linéairement indépendants de A^*A.

d) Il existe dans E une base orthogonale, constituée de vecteurs propres de A^*A, autrement dit, A^*A possède une matrice diagonalisable.

e) Pour tout $\alpha \succ 0$, l'opérateur $A^*A + \alpha I$, est inversible; (I étant l'identité de E)

Preuve:

a) En effet, il est clair que A^*A est auto-adjoint, de $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geq 0$, donc l'opérateur est positif.

En ce qui concerne les relations mentionnées, il est clair que $N(A) \subset N(A^*A)$, or si x est tel que $A^*Ax = 0$, alors $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = 0$, donc $Ax = 0$ et $N(A^*A) \subset N(A)$, cette dernière relation montre aussi que $rg(A^*A) = rg(A^*)$ et de $R(A^*A) \subset R(A)$, on a donc égalité.

b) Si $A^*Ax = \lambda x$, alors $A\ A^*Ax = \lambda Ax$, si $\lambda \neq 0$, alors $A^*Ax \neq 0$ donc $Ax \neq 0$.

c) Supposons $x_1, ..., x_p$ sont des vecteurs propres de A^*A associés aus valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$, linéairement indépendants , alors $Ax_1, ..., Ax_p$ sont des vecteurs proppres de A^*A associés aus valeurs propres respectives, et si $\alpha_1, ..., \alpha_p$ ne sont pas tous nuls

$\alpha_1 Ax_1 + ... + \alpha_P Ax_P = 0 \Rightarrow \alpha_1 A^*Ax_1 + ... + \alpha_P A^*Ax_P = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda x_1 + ... + \alpha_P \lambda x_P = 0$

on obtient donc $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$.

d) C'est une propriété des opérateurs auto-adjpints.

e) Si $\alpha \succ 0$, alors pour $x \in E$, $x \neq 0$ on a

$$((A^*A + \alpha I)x, x) = (A^*Ax, x) + \alpha(x, x) \succ 0$$

car A^*A est positif et $\alpha(x, x) \succ 0$. Donc $(A^*A + \alpha I)$ est inversible.

3.1.1 Proposition:

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, E_0 un sous espace vectoriel de E,

$P : E \to E_0$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont equivalentes:

1) $(I - P)^2 = (I - P)$

2) $P^2 = P$

3) $Px = x$ *pour tout* $x \in R(P)$

4) $R(I - P) = N(P)$, $R(P) = N(I - P)$

5) $E = R(P) \oplus N(P)$

Preuve:

1) $\Rightarrow$ 2) directe.

Supposons $P^2 = P$ et montrons que 2) $\Rightarrow$ 3)

Si $x = Py$, alors $Px = P^2y = Py = x$, donc 2) $\Rightarrow$ 3).

Si $x = (I - P)y$, alors $Px = 0$.

Et si $Px = 0$, alors $x - Px = (I - P)x = x$, donc 3) $\Rightarrow$ 4).

Pour tout $x \in E$, on a

$x = Px + x - Px$; or $Px \in R(P)$, et $x - Px \in N(P)$; donc

$E = R(P) + N(P)$; et si $x \in R(P) \cap N(P)$, alors $x = Px = 0$

donc 4) $\Rightarrow$ 5).

Pour tout $x \in E$, on a $x = Px + (I - P)x$; or $Px \in R(P)$,

et $(I - P)x \in N(P)$, on a

$(I - P)\ x = P(I - P)x + (I - P)^2x$

$= (I - P)^2x.$

Donc 5) $\Rightarrow$ 1).

4.2.2 Lemme:

Tout sous éspace de dimension finie d'un espace de Banach possède un supplémentaire topologique.

Preuve:

Supposons E_1 un sous espace de dimension n de E qui est de Banach, si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E_1, d'après Hahn-Banach, il existe $(f_1, f_2, ..., f_n)$, n fonctionnelles bornées définies sur E telles que:

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On montre que $E_2 = \{x; f_i(x) = 0,\ i = 1, ..., n\}$ est un supplémentaire topologique de E_1. Or $E_2 = \bigcap_{i=1}^{n} N(f_i)$, il est donc fermé.

Pour tout $x \in E$, posons $x = x_1 + x_2$,où $x_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, $x_1 \in E_1$, or

$x_2 = x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, vérifie $f_i(x_2) = 0$, $i = 1, ..., n$ donc $x_2 \in E_2$. Il reste à montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, en éffet si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$, cela d'une part et $f_i(x) = c_i = 0$, $i = 1, ..., n$, de l'autre part, donc $x = 0$.

4.2.3 Corollaire:

Si E_1 est un sous espace d'un espace de Banach, tel que $E_1 = M^{\perp}$, où $M \subset E'$, le dual de E, et que $\dim M \ \langle +\infty$; *alors E_1 possède un supplémentaire topologique.*

Preuve:

Supposons $\dim M = n$, et que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de M, (constituée de fonctionnelles continues sur E).

Définissons sur E l'ensemble $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de façon que

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

On montre que l'ensemble $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre , posons

$E_2 = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle$; le sous espace engendre par $(e_1, e_2, ..., e_n)$, il est férmé; on montre comme dans le lemme qu'il est supplémentaire à E_1.

Démontrons maintenant la proposition

Comme $\dim N(A) < +\infty$, et suite au lemme 4.2.2 , alors $N(A)$ possède un supplémentaire topologique.

Le sous espace $R(A)$ est fermé, or $R(A) = \overline{R(A)} = N(A')^{\perp}$, et comme $\dim N(A') < +\infty$, alors le sous espace $R(A)$ possède un supplémentaire topologique d'après le corollaire du lemme.

4.3.1 Lemme:

Si $A \in \Lambda(E)$, *alors les proprietés suivantes sont équivalentes:*

i) A *est un opérateur algébrique de polynôme caractéristique*
$p(t) = \prod_{m=1}^{n} (t - \lambda_m)^{r_m}$, *d'ordre* $r = r_1 + r_2 + ... + r_n$.

ii) E *est la somme directe de* n *sous espaces principaux* E_i *correspondant aux valeurs propres* λ_i *de multiplicité* r_i , *c'est à dire*

$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$

Avec $E_i = N\ (A - \lambda_i I)^{r_i}$.

iii) Il existe n *projecteurs* $P_1, P_2, ..., P_n \in \Lambda(E)$ *tels que*

$P_i P_j = \delta_{ij} = \begin{cases} P_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$;

$\sum_{i=1}^{n} P_i = I.$ *et* $(A - \lambda_i I)^{r_i} P_i = 0.$ $i = 1, ..., n.$

Preuve:

$i) \Rightarrow ii)$

On le montre par réccurence sur n.

Considérons $p(t) = \prod_{m=1}^{2} (t - \lambda_m)^{r_m} = p_1(t).p_2(t)$.

Comme $p_1(t)$, $p_2(t)$ sont premiers entre eux, il existe deux polynômes $u_1(t), u_2(t)$ tels que

$u_2(t)p_2(t) + u_1(t)p_1(t) = 1$

ce qui se traduit en termes d'opérateurs par

$u_2(A)p_2(A) + u_1(A)p_1(A) = I$

Pour tout $x \in E$, on a $x = x_1 + x_2$ où

$p_i(A)x_i = p_i(A)u_j(A)p_j(A)x$

$= u(A)p_i(A)p_j(A)x$

$= 0.$

Donc $x_i \in N(p_i(A)) = E_i$.

$E_1 \cap E_2 = \{0\}$ résulte du fait que $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont premiers entre eux.

Donc $E = E_1 \oplus E_2$.

Supposons la propriété vraie pour $n-1$,
$p(t) = \prod_{m=1}^{n-1} (t-\lambda_m)^{r_m} = \prod_{m=1}^{n-1} p_m(t)$, polynômes premiers entre eux.
Considérons
$p(t) = \prod_{m=1}^{n} p_m(t) = \prod_{m=1}^{n-1} q_m(t)$
avec $q_1(t) = p_1(t)p_2(t)$, et $q_j(t) = p_j(t)$ pour $j = 3, ..., n$

D'après l'hypothèse de reccurence on a

$E = F \oplus E_3 \oplus ... \oplus E_n$

$E_i = N(p_i(t))$, $F = N(q_1(t))$ or $q_1(t)$ est un produit de deux polynômes premiers entre eux, le raisonnement fait pour $n = 2$ nous conduit à la conclusion $F = E_1 \oplus E_2$

Donc

$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$

avec $E_i = N\ (A - \lambda_i I)^{r_i}$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*

Comme tout $x \in E$ peut être mis d'une façon unique sous la forme

$x = x_1 + x_2 + ... + x_n$

Posons $P_i(x) = x_i$ alors

$P_i^2 = P_i$, $P_iP_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

et $\sum P_i = I$

Et de plus $(A - \lambda_i I)^{r_i} P_i x = (A - \lambda_i I)^{r_i} x_i = 0.$

iii) $\Rightarrow$ *i)*

Comme $(A - \lambda_i I)^{r_i} x_i = 0$, alors $p(t) = \prod_{m=1}^{n} (t-\lambda_m)^{r_m}$ est un annulateur de A, c'est à dire $p(A) = 0$. Le polynôme caractéristique doit diviser $p(t)$.

4.3.2 Corollaire:

Si $S \in \Lambda(E)$ est une racine d'ordre k de l'identité, alors:

i) Le polynôme caractéristique de S est de la forme

$p(t) = \prod_{m=1}^{n} (t - \xi_m)^{r_m}$; $\xi_m = \exp \frac{2\pi mi}{n}$,

C'est à dire que les valeurs propres de S sont les racines complexes d'ordre k de l'unité.

ii) Si $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$, $p \leq n$ sont les valeurs propres de S , alors :

$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$; *avec* $E_i = N\ (S - \xi_i I)^{r_i}$, $i = 1, ..., p$.

Le corollaire est une conséquence immédiate du lemme, car de la relation $S^k = I$, on déduit que S est algebrique, et que ses valeurs propres sont des solutions de l'équation algebrique $x^k - 1 = 0$.

Bibliography

[1] M. Altman :*On a generalization of Newton's method*. Bull. acad. Polon.sci. 195- 1984.

[2] A. Antonevič - Ya Radyno: " *funkcjonalnij analiz i integralnie uravnania"* Minsk 1984.

[3] F. Atkinson: "*On relatively regular operators"* . acta. sci. math. Szeged 1953.

[4] R.B. Bapat - B.Zheng : "*Generalized inverses of bordred matrices*" Electronic Journal of Linear algebra vol.10. 2003.

[5] D. Beklemišev : *kurs analitičeskoi geometrii i linijnoi algebry*. nauka Moskva 1984.

[6] H. Bart - M. Kaashoek: " *relative inverse of meromorphic projection functions"* . math. ann.218. 1975.

[7] A. Ben-Israel*: Genesralized inverse of matrices, a prespective of the work of Penrose.* Math. Proc. Camb. Phil.Soc. 1986.

[8] A. Ben-Israel-T.Greville*: Genesralized inverses, theory and applications. Kreiger edit. 1980 .*

[9] S.L.Campbell: *Recent applications of generalized inverses*, Pitman edit.1982.

[10] S.L.Campbell - C. Meyer: *Generalized inverses of linear transformations*, Dover, N York 1991.

[11] S.R.Caradus: *Generalized inverses and operator theory.* Queen's papers in pure and applied math. N*r 50 -1978.*

[12] S.R. Caradus :*Mapping properties of relatively regular operators*. proc. A.M.S. 1975.

[13] M. Drazin: *Pseudo - inverse in assosiative rings and semi groups*. Amer. math. monthly 1958.

[14] I. Glazman - Y. Liubič: *Analyse linéaire dans les espaces de dimension finie*. edit. Mir Moscou 1974.

[15] I. Gelfand : *Lekcji po linijnoji algebre*. Nauka 1966.

[16] I. Gohberg - M. Krein: *Osnovnie położenia o defectnich čislach, kornevich čislach i indeksach linijnich operatorov*. Uspechy mat. nauk. 1957.

[17] S. Goldberg: *Unbounded linear operators*. Mc Graw-Hill. 1966.

[18] S.Guedjiba - R.Benacer : "*Inversion généralisée d'opérateurs linéaires*" . Math.Maghreb Rev. vol 11 Alger 2000.

[19] P.Halmos : *Finite dimentional vector spaces* . Springer Verlag 1974.

[20] R.Harte-M.Mbekhta: On *Generalized inverses in* $\mathbb{C}^*-$algebras. Studia mat. vol 103. 1992.

[21] V.Hutson - J. Pym: "*Applications of functional analysis and operator theory*". Academic press. 1980.

[22] T. Kato: " *Perturbation theory for linear operators*" . Springer - Verlag. 1966.

[23] M.Z. Nashed: *Generalized inverses and applications.* Academic Press. 1976.

[24] M.Z Nashed, G.F Votruba: *A unified approch to generalized inverses of linear operators.* Bull, Amer. Math. Soc 80. 1974.

[25] R.Penrose: *A generalized inverse for matrices.* Proc.camb.Phil.Soc. 52 1955.

[26] C-R Rao M-B Rao: *Matrix algebra and its applications* World sci. Singapore 1998.

[27] Y. Tseng :"*Generalized inverses of unbounded linear operators between tow unitary spaces*". Dokl. akad. nauk SSSR. 1949..

[28] F- Zhang :*Matrix theory , basic results and techniques*. Springer-Verlag 1999.

Résumé:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps des nombres complexes □ ; $A : E \to F$ un operateur linéaire ,le théme traite la question d'inversion d'un opérateur linéaire, alors l' équation $Ax=y$ possède une solution pour tout $x\in E$ et pour tout $y\in F$ si et seulement si A est inversible, ce qui n'est pas toujours possible, on essaye donc de trouver un operateur B ayant des properties aussi proches de celles de l'inverse usuel.

Si B est l' inverse de A, on a donc $AB=I_F$ et $BA=I_E$, et comme les projections sont les opérateurs les plus proches de l'application identique du point de vue proprietés, on peut considérer les équations suivantes $BA=Q$ et $AB=P$ où P et Q sont des projecteurs sur E et F respectivement. On traite dans ce travail P et Q comme racines d'ordre k de projections.

L' opérator linéaire $B:F\to E$ est appelé 1^k - inverse de A, si $A\ (B\ A)^k = A$, $k \in$ IN*, et si A est aussi 1^k - inverse de B, alors B est appelé G_k -inverse de A.

Ce travail donne les proprités essentiels de l'inverse généralisé, des applications , parmi lesquelles citons la résolution des équations matricilles, équations à opérateurs linéaires, la résolution de l'équation de la forme $f(x)=0$ par la méthode de Newton, on étudie aussi qulques proprités approximantes et extremales des inverses generalisés dans des espaces normés .

Mots clé :

Opérateur linéaire, projection, 1^k – inverse, G_k -inverse, racine de l' identité.